

# 2. Lokale Energie - Impuls - Erhaltung

## 1. Energie - Impuls - Tensor + Hydrodynamik

Ziel:  $T^{\mu\nu}; u \equiv 0(x)$  zu explizieren  $T^{\mu\nu} = \frac{\int \mathcal{L}^{Matter}}{\int g^{\mu\nu}}$   
 ↑ jede Energieform kann durch  $T^{\mu\nu}$  beschrieben werden

Wasser: fluides Medium: Gas, Flüssigkeit

besonders einfach: ideales Medium

$$T^{\mu\nu} = (e+p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} \quad (MB, 12)$$

tot. Energiedichte  $\uparrow$   $u^\mu$  4-Geow.  $\uparrow$   $p$   $\uparrow$  metrischer Fundamentaltensor  
 $\Rightarrow$  Raum-Zeit, Symmetrie  
 thermodyn. Druck

(x): 4 Komponenten  $\rightarrow$  4 Gl. für 5 Unbekannte:

$$u^\mu(x), e(x), p(x)$$

für alle Medien, wie wir betrachten  $p(e, u)$

$\uparrow$  Baryonendichte

speziell:  $u=0$ :  $p(e)$  macht (x) lösbar

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{ZGL}$

$u \neq 0$ : lokale Baryonenerhaltung  $(u^\mu)_{;\mu} = 0$  (44)

(p, pK) = rel. Hydrodynamik

- (i) Abhängigkeitsbed.
- (ii) ZGL

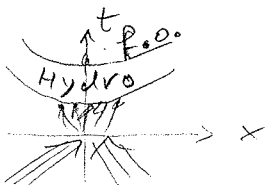
gesamte Dynamik ist bestimmt

= makroskopische Gl. (u erfordert problematische für HICs = zu klein!)

= setzt lokales Gleichgewicht voraus  
 (kinetisch  $(uT)$ , chemisch  $(\mu)$ )

Abweichungen davon = Transiente d.h. f.

HICs: zu schnell?  $\Rightarrow$  verschiedenen Phasen



dissipative Effekte:  $\alpha$  - Wärmeleitung  
 $\beta$  - Volumenviskosität  
 $\gamma$  - Scherviskosität

Transportkoeffizienten

↑ parametrisieren kleine Abweichungen vom lokalen Gleichgewicht

falls keine Diskontinuitäten (= Schockwellen) auftreten  
 → Adiabaticität:  $\int d^3x \dot{s} = \text{const} \stackrel{\text{homog. System}}{=} \int dV \dot{s}$   
 ↑ Entropieerichte

- jenseits von  $\alpha, \beta, \gamma$ : (i) Israel-Stewart-Theorie & weitere Transportkoeffizienten  
 (ii) kinetisch, wenn zu starke Abweichungen vom lokalen Gleichgewicht auftreten → f.o.o.  
 ↳ kinematisch: freies Strömen  
 ↳ dynamisch: keine Reaktionen

zum Rechnen:  $u_\mu u^\mu = g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1$

$u^\mu \sim (\gamma, \vec{v}\gamma), \quad u_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu = (\gamma, -\vec{v}\gamma)$

$g_{\mu\nu} \approx \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$   
 Minkowski

Teilchenphysik:  $\text{Hg}(g_{\mu\nu}) = -2$   
 (ART:  $\text{Hg}(g_{\mu\nu}) = +2$ )

$u^\mu u_\mu = \gamma^2 - v^2 \gamma^2 = \gamma^2 (1 - v^2) = 1 \quad \text{q.e.d.}$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad c \equiv 1$

(\*) = partielle DGL; keine allg. Lösung  
 zudem längere Lösungen von ZGL ab

Beispiel:  $\frac{dN}{dt} = \frac{dN}{dp_\perp dy} \left( 1 + 2v_1(y, p_\perp) \cos \varphi + 2v_2(y, p_\perp) \cos 2\varphi + \dots \right)$

$v_2(p_\perp, y) = \text{diff. az. Fluss}$  Folie (3), (4)

gleiche Anfangsbed., verschiedene ZGL. → verschiedene  $v_2$ ;  
 Idee: exp. Daten für  $v_2 \rightarrow$  ZGL.

Ver einfachungen: Symmetrien

z.B. Kugelsymmetrie:  $u^\mu(r, t)$

(nicht notwendig  $\vec{\sigma} = 0$ )

Statik:  $u^\mu(\vec{r})$ , nicht von  $t$  abhängig

Kugelsymmetrie + Statik:  $u^\mu(r) \rightarrow NS$

analog  $\{e, p\} (\dots)$

## 2. Bjorken - Symmetrie = Beispiel 1



$$\tau = \sqrt{t^2 - x^2}$$

1-D Bewegung:  $\leftarrow \square \rightarrow$

(keine  $\perp$  Bewegung)

Symmetriebehandlung:  $\{u^\mu, e, p\}(\tau)$

s. VL MB. 18

formale Ableitung

M. Heitsch

(Paper Studium)

analog: Kugelsymmetrische Expansion

1-D Landau Gleichungswort ( $\rightarrow$  MB)

## 3. Kugelsymmetrie + Statik = Beispiel 2

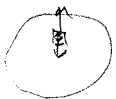
bisher:  $g^{\mu\nu} \Rightarrow$  Minkowski-Metrik = flacher Raum

besonders einfach in kartesischen Koordin.

neu: Gleichgewicht (= Statik)  $\nabla$

hydrodynamischer Druckgradient (= Auftrieb

à la Archimedes) = grav. Anziehung



Gravitation = Raumkrümmung  $\Rightarrow g_{\mu\nu} \neq$  Minkowski

unterschiedliche Arbeit: Kugelsymmetrie  $\nabla$

$$g_{\mu\nu} \sim \begin{pmatrix} e^\nu & -e^\lambda & -r^2 & -r^2 \sin^2 \vartheta \\ \text{"} & \text{"} & \text{"} & \text{"} \\ \text{"} & \text{"} & \text{"} & \text{"} \\ \text{"} & \text{"} & \text{"} & \text{"} \end{pmatrix} \quad \text{sonst } 0$$

Charakterisierung der Raumzeit durch un f. Abstand (4D):

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

$$\text{Statik: } u^\mu \sim (e^{-\frac{\nu}{2}}, \vec{0}) : u^\mu u_\mu = 1$$

Newtonsches Gravitationspotential  $\rightarrow$  ART:  $g_{\mu\nu}$

$\nu, \lambda \rightarrow$  Gravitationsfeld (keine Teilchen!)

$$T^{\mu\nu};_{\nu} = [(e+p) u^{\mu} u^{\nu} - p g^{\mu\nu}];_{\nu}$$

$$= (e+p);_{\nu} u^{\mu} u^{\nu} + (e+p) (u^{\mu};_{\nu} u^{\nu} + u^{\mu} u^{\nu};_{\nu}) - p;_{\nu} g^{\mu\nu} - p g^{\mu\nu};_{\nu}$$

$\equiv 0$ : Riemann-Raum  
(einfachste Verallgemeinerung  
des Minkowski-Raums)

Rechenregeln der ART:  $(e+p);_{\nu} = (e+p)_{,\nu} \equiv \frac{\partial(e+p)}{\partial x^{\nu}}$

analog für  $p;_{\nu}$

$$\rightarrow (e+p);_{\nu} u^{\nu} = \frac{\partial(e+p)}{\partial x^{\nu}} u^{\nu} = \frac{\partial(e+p)}{\partial t} e^{-\frac{\nu}{2}}$$

$= 0$ : statisch

weiter:  $u^{\nu};_{\nu} \equiv u^{\mu};_{\mu} \equiv \frac{\partial(\sqrt{-g} u^{\mu})}{\partial x^{\mu}} \frac{1}{\sqrt{-g}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{-g} u^0)$$

$= 0$ : statisch

$$\rightarrow T^{\mu\nu};_{\nu} = 0 = (e+p) u^{\mu};_{\nu} u^{\nu} - p;_{\nu} g^{\mu\nu}$$

$r$ -Komponente (andere sind identisch 0):  $\mu = 1$

$$- \underbrace{p;_1}_{\frac{\partial p}{\partial r}} \underbrace{g^{11}}_{-e^{\lambda}} + (e+p) \underbrace{u^1;_0}_{\Gamma^1_{00} u^0 u^0} = 0$$

$\frac{1}{2} e^{-\lambda + \nu} \frac{\partial \nu}{\partial r}$ ; Rechenregeln ART

$$\rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial r} (e+p)$$

um noch Transformation aus Einstein-Gem. ( $\Rightarrow$  ART)

$$\frac{\partial \nu}{\partial r} = \frac{\kappa p r^2 + 2M}{r^2 (1 - \frac{2M}{r})}, \quad M(r) \equiv \frac{1}{2} \kappa \int_0^r dx x^2 e(x) = \text{Massenfunktion}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dr} = - \frac{(e+p)(M + \frac{1}{2} r^3 p/r)}{r^2 (1 - \frac{2M}{r})} \quad : \text{TOV-Ges.}$$

→ Barsternmodell: NS

#### 4. Homogen - Isotrope Raum-Zeit Beispiel 3

realisiert kosmologisches Prinzip: es gibt  $K^3$ , und da kein OA ist keine Richtung ausgezeichnet hat = absolute Densität

wieder Überlegungen aus ART:

$$g_{\mu\nu} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -R^2 & & \\ & & -R^2 f(x) & \\ & & & -R^2 f(x) \end{pmatrix} \text{ cm}^2 \text{ d}^2$$

" " " "

00 rr  $\theta\theta$   $\varphi\varphi$

$$ds^2 = dt^2 - R^2 (dx^2 + f^2(x) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2))$$

$$R(t) = \text{Welt radius, } f(x) = \begin{cases} \sin x & : \epsilon = +1 \text{ geschlossen} \\ x & : \epsilon = 0 \text{ flach} \\ \sinh x & : \epsilon = -1 \text{ offen} \end{cases}$$

$$x = 0 \dots \pi : \epsilon = +1, \quad x = 0 \dots \infty : \epsilon = 0, -1$$

Robertson-Walkov-Metrik

$$u^\mu \sim (1, \vec{0}) : \text{mit bewegtes Koordinatensystem (Lagrange-Koordinaten)}$$

projizierte Hydro-Ges:  $u_\mu T^{\mu\nu}; u = 0 \quad \downarrow$

analoge Schritte wie oben:  $\dot{\epsilon} = -3 \frac{\dot{R}}{R} (e+p)$

$\Rightarrow \dot{R}$  heißt  $\dot{\epsilon}$  und umgekehrt:  $\dot{R} > 0, e+p > 0 \quad \downarrow \quad e \downarrow$

ART (Einstein-Ges.):  $\dot{R} = \sqrt{c^2 R^2 e - \epsilon}$

$\epsilon = 0$  (WMAP-Ergebnisse):  $\dot{\epsilon} = -3 c^2 (e+p) \Gamma e$

Friedmann 1922

$$\dot{R} = c R \Gamma e$$

$$c \equiv \frac{1}{M_{\text{pl}}^2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}}$$

falls  $u \neq 0$ :  $(u u^\mu)_{;\mu} = 0 \Rightarrow u R^3 = \text{const}$   
 = Ladungserhaltung im mitbewegtem System  
 analog  $\epsilon R^3 = \text{const}$ : Adiabaticität

Baselstermale: Strahlungsblasmas

5. LHC Rang vs. Big Bang: Bjorken vs. Friedmann

$$\left. \begin{aligned} \text{LB: } \dot{e}_{\text{LB}} &= -\frac{1}{\tau} (e+p) \\ \text{BB: } \dot{e}_{\text{BB}} &= -3c^2 \sqrt{e} (e+p) \end{aligned} \right\} \frac{\dot{e}_{\text{BB}}}{\dot{e}_{\text{LB}}} = 3c^2 \sqrt{e} \tau$$

$$= 3 \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{1}{M_{\text{pl}}} \sqrt{e} \tau$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
 $\approx 9$   $5 \text{ fm/c}$

$$e \sim T^4 \sim T_c^4 \sim (0.175 \text{ GeV})^4$$

$$\sim 9 \frac{1}{10^{19} \text{ GeV}} (0.175 \text{ GeV})^2 \frac{5 \text{ fm/c}}{hc} \rightarrow 0.197327 \text{ GeV} \cdot \text{fm}$$

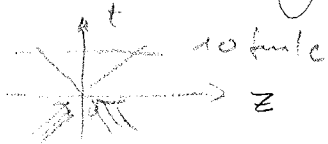
$$= 1.7 \cdot 10^{-19} \approx 10^{-18}$$

BB ist  $10^{-18}$  mal langsamer als LB  
(bei den Coefficienten - Übergang)

→ Annahme: BB-Dynamik erfolgt unter Gleichgewichts-  
wicht; LB kann nicht Gleichgewicht  
zeigen

BB: per Definitionen es ungeachtet

$$\text{LB: } \left. \begin{aligned} \text{ } \end{aligned} \right\} \sim 10 \text{ fm} \quad (R \sim 1.25 \text{ fm } A^{1/3})$$



$$\rightarrow L \sim 10 - 20 \text{ fm} \quad (\text{hängt von WS ab!})$$

Abschätzung mit  $y \rightarrow$   
 $\uparrow$  RHIC  
LHC

Bis jetzt noch keine Spontane aus starken WW,  
diese stecken von Hydro-Zugang allein im  $p(T, \mu)$

(+ ev. die Anbahnung + f.o. - Bedingungen)

→ eigener Abschnitt: Zbl.

$$\phi = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E + p_{||}}{E - p_{||}} \right)$$

$$E = E_{\text{kin}} = m \gamma c^2$$

$$p_{||} = \gamma m v_{||}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{||}^2/c^2}} \rightarrow v_{||} = \frac{c \sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\gamma + v_{||} \gamma / c}{\gamma - v_{||} \gamma / c} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + v_{||}/c}{1 - v_{||}/c} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}} \right)$$

$$\approx \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + 1 - \frac{1}{2\gamma^2}}{1 - 1 + \frac{1}{2\gamma^2}} \right) = \frac{1}{2} \ln (4\gamma^2) = \ln(2\gamma)$$

$$\uparrow$$

$\gamma \gg 1$

HC:  $\gamma = 200 : \gamma = 6$

-HC:  $\gamma = 2000 : \gamma = 8.3$

$$z = \tau \sinh \gamma \quad (\text{cf. unter (A.2) kreuzschel})$$

$$= \frac{1}{2} \tau (e^\gamma - e^{-\gamma}) \approx \frac{1}{2} \tau e^\gamma$$

$$\approx 2000 \text{ fm}$$

$$\uparrow \text{ für } \tau = 10 \text{ f/c}$$

$$\text{oder } \approx 40 \text{ 000 fm}$$

$$\uparrow \tau = 10 \text{ f/c}$$

+ sind auch groß

$$t = z \frac{\cosh \gamma}{\sinh \gamma}$$

$$z^2 = t^2 - \tau^2 = z^2 \frac{\cosh^2 \gamma}{\sinh^2 \gamma} - \tau^2$$

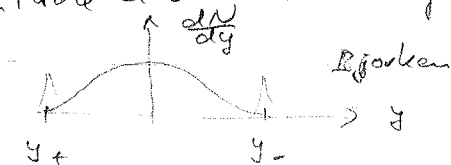
$$-z^2 \left( 1 - \frac{\cosh^2 \gamma}{\sinh^2 \gamma} \right) = \tau^2$$

$$-z^2 \left( \frac{\sinh^2 \gamma - \cosh^2 \gamma}{\sinh^2 \gamma} \right) = \tau^2 \sinh^2 \gamma$$

-1

$$z = \tau \sinh \gamma$$

= den Hohlüberhöhung der Dimeren Nerven



PHOBOS - Messungen

# Bastelstunde: Strahlungsboson

ZGL. (später)

$$p = \frac{1}{3} e$$

ultra relativistisch

$$p = a T^4$$

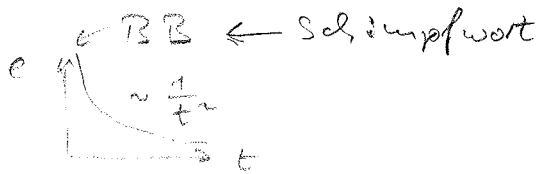
$$s = 4 a T^3$$

$$e = -p + Ts = -aT^4 + 4aT^4 = 3aT^4 = 3p$$

Friedmann:  $\dot{e} = -3c(e+p)\dot{r}$

$$= -3c \frac{4}{3} e \dot{r} = -4c e \dot{r}$$

leicht zu prüfen:  $e = \frac{1}{4c^2 t^2} : \dot{e} = -\frac{1}{2c^2 t^3}$



$$= -\frac{4c}{\frac{4^{3/2} c^3 t^3}{8}} \quad \text{ok}$$

andere Friedmann-Gl.  $\rightarrow R = R_0 \dot{r}$

$$\rightarrow e \sim \frac{1}{R^4}$$

$$e = 3aT^4 = \frac{1}{4c^2 t^2} \rightarrow T = (12c^2 t^2)^{-1/4}$$

$$s = 4aT^3 : sR^3 = 4a(12c^2 t^2)^{-3/4} R_0^3 t^{3/2} = \text{const} = \text{adiabatische Evolution}$$

NB: Vakuum:  $p = -e, s = 0$

↑ Lorentz-inu. Vakuum:  
wenn  $\tau$  in  $\tau + \nu$   
füllt raus

$$\rightarrow \dot{e} = 0 \rightarrow e = \text{const}$$

$$R = R_0 e^{\alpha t \sqrt{\text{const}}}$$

inflation:

$$\ddot{R} > 0$$

Strahlungsboson:  $\ddot{R} < 0$