

3. ZGL. stark-wu Materie

1. $\mu = 0$ nur thermische Anregungen: $T > 0$

statistische Mechanik: $n_+ = d \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} n_{FD}^+$

$n_- = d \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} n_{FD}^-$

Quadrantenintegrale, $\mu = 0$ \uparrow Entartung (\sim Spin, Farbe)

Fermionen (= FD), Teilchen: $n_{FD}^+ = \frac{1}{1 + e^{\frac{E(k) - \mu}{T}}}$

\uparrow halbzahliges Spin (e^\pm, q, v)

$n_{FD}^- = \frac{1}{1 + e^{\frac{E(k) + \mu}{T}}}$

Boltzmann-Näherung: ohne Spin-Statistik:

$n_{FD}^+ = e^{-\frac{E(k) - \mu}{T}}$, $n_{FD}^- = e^{-\frac{E(k) + \mu}{T}}$

(gute Näherung für $T < \mu$, aber nicht zu klein)

ideale Gas-Näherung $E(k) = \sqrt{k^2 + m^2}$

\uparrow Vernachlässigung der WW: Setzen der Skalen

Klar: $\mu = 0 \Rightarrow n_{FD}^+ = n_{FD}^- : n^+ = n^-$

\rightarrow thermisch angeregtes Teilchen-antiteilchen-System

System: Nettocharge $n = n^+ - n^- = 0$

wehr über Rolle von μ bei Baryon-Dichteeffekten und entarteter Materie

2. Heiße Materie $k_{eff} = \text{hohes } T$

\uparrow Dimensionen Masse wegen $k_B = 1$

asymptotisch heiß: $T \rightarrow \infty$: ultrarelativistisches Modell

beste: $T \gg m$ - - -

Aufgabe: ZGL. idealer Gase (d.h. keine WW)

Beispiel: "ideales QGP": $T \gg m_q$

qualitativ: $\langle k \rangle \sim O(T) \Rightarrow E \sim k$

Bosonen: ganz beliebiger Spin: $n_{BE} = \frac{1}{e^{\frac{E(k)}{T}} - 1}$

(Achtung: für $e^{\frac{E(k)}{T}} \rightarrow 1$: Bose-Kondensation: BEC)

Pauli-Ausschluss-Theorem (≈ Spin-Statistik-Theorem)

Fermionen → Pauli-Prinzip: antisymm. WF
 Bosonen → symmetrische WF } ± 1 in $n_{FD, BE}$

⇒ ultrarelativistisches ideales Gas: ($\mu = 0$)

$e(T) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E(k) n_{FD, BE}$
 ↑ allg.
 nur 1 Teilchenart (Teilchen oder Antiteilchen)
Wahrscheinlichkeit für Teilchen mit k Energie für Teilchen mit k

$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k \frac{1}{e^{\frac{k}{T}} \pm 1} = \frac{d}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k^3 \frac{1}{e^{\frac{k}{T}} \pm 1}$

$= \frac{d}{2\pi^2} T^4 \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x \pm 1}$
 ↑ $x = \frac{k}{T}$

+1: $(1 - 2^{-3}) \Gamma(4) \zeta(4)$: RG(3.411.3)

-1: $\Gamma(4) \zeta(4)$: RG(3.411.1)

$\Gamma(4) = 3! = 6$

$\zeta(4) = \frac{2^3 \pi^4}{4!} \underbrace{|\mathcal{B}_4|}_{\frac{1}{30}} = \frac{8\pi^4}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 30$

$1 - 2^{-3} = \frac{7}{8}$

$= \frac{d}{2\pi^2} \binom{7/8}{1} \frac{6 \cdot 8\pi^4}{4 \cdot 3 \cdot 2} 30 T^4 \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow FD \\ \leftarrow BE \end{array} \right.$

$= \frac{d}{30} \pi^2 \binom{7/8}{1} T^4$

$U = e_q + e_{\bar{q}} = \int \left(\frac{7\pi^2}{120} T^4 + \frac{1}{4} \mu^2 T^2 + \frac{1}{8\pi^2} \mu^4 \right)$

in dieser Näherung

Heußer, p. 26/27

reicht $e(T)$ aus?

$$s = \frac{\partial p}{\partial T}, \quad e + p - Ts = 0$$

$$\rightarrow e + p - T \frac{\partial p}{\partial T} = e - T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{p}{T} \right) \rightarrow \frac{p}{T} = \int dT \frac{e}{T^2}$$

$$e = aT^4: \quad p = T \int dT \frac{e}{T^2} = T \int dT aT^2 = \frac{1}{3} aT^4 = \frac{1}{3} e$$

= allg. Zusammenhang von p & e für $\mu=0$ + ultrarelat. Gas
ansonsten stat. Mech. ansatz nehmen

$$p = T \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \Rightarrow \frac{T}{V} \ln Z \Big|_{V \rightarrow \infty}$$

$$\ln Z = \mp \frac{dV}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \ln(1 \mp e^{\frac{E \pm \mu}{T}}) \quad \begin{matrix} - \text{BE} \\ + \text{FD} \end{matrix}$$

(für Antiteilchen $\mu \rightarrow -\mu$)

$$= \frac{dV T \ln^2}{2\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-2lx} k^2 \left(\frac{e^{\pm \mu}}{T} \right) e^{\frac{E}{T}}$$

$$\int_0^\infty e^{-2lx} = \begin{cases} 1 & \text{BE} \\ (-1)^{l+1} & \text{FD} \end{cases}$$

$$k_2(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left(1 + \frac{15}{8x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \dots \right)$$

Doltzmann-Näherung (nur für $m \gg T$ gut): $l=1$
exp. Unter vernachlässigung von Beiträgen von massiven Teilchen

Folge: e/T^4 von Kosmologie

$$\text{Fazit: } p = T^4 \frac{\pi^2}{90} \left(2(N_c^2 - 1) + 4N_c N_f \frac{7}{8} \right)$$

\uparrow $\mu=0$, nur masselose ($m \ll T$) Beiträge

Gluonen: 2 1 Polarisationen
8 Farben für $N_c=3$

Quarks: 2 Spins
2 Teilchen + Antiteilchen
3 Farben für $N_c=3$
 N_f Quarksorten

verknüpfte Werte für $T > T_c$:

$$N_f = 2 + 1 \approx 2.5 \quad (u, d, e)$$

+ elektroschwache Teilchen:

Photonen: $\#_\gamma = 2$

Neutrinos: $\#_\nu = 6$ (3 Sorten + Teilchen + Antiteilchen)

Achtung: nur 3 Sorten: unverschmeckt

Paritätsverletzung: nur links händ. ν , rechts händ. $\bar{\nu}$)

Elektronen: $\#_e = 2 \cdot 2$

$\uparrow \quad \downarrow \quad e^+ + e^-$

2 Ginzinstellungen

Neutrinos: wie e^\pm

$$\Rightarrow 2 + \frac{7}{8} (6 + 4 + 4) = 14.25$$

$$\text{us. } 16 + 4 \cdot \frac{3}{N_c} \cdot 2.5 \cdot \frac{7}{8} = 42.25$$

} 56.5

noch höhere, heißere Phasen: mehr Quarks und

angeregt

Folie ⑥ $g_{eff} : e = \frac{\pi^2}{30} g_{eff}(T) T^4$

3. Starke WW

wurde bisher nicht gelöst

Standard Thermofeldtheorie: $\rho \stackrel{?}{=} \sum_{e=0}^{\infty} P(e) g_e$

$$g_5 = 4\pi \alpha_s$$

$\rho_0 =$ unsere WW-feld Näherung

Folie ⑦ P_{pQCD} Formel

Folie ⑧ P_{pQCD} Detail Details

\Rightarrow heroischer Aufwand, kein vernünftiges Resultat

Problem: $T \sim T_c : \alpha_s$ ist welt $\ll 1$

\hookrightarrow nicht-perturbatives Verfahren

Standard: $l QCD =$ numerische Methode LQCD $\rightarrow pQCD$

Start: ~ 1980

reine Eichtheorie: 1995

QGP: ?

2007: viele Details sind bekannt, aber $\rho(T)$ ist noch nicht endgültig

Idee: $Z(T, V, \mu) = \int D\bar{\psi} D\psi DA_a^a e^{\int d^4x (L_{QCD} + \mu N)}$
 \uparrow Euler v. $\frac{1}{T}$

$$N = \bar{\psi} \psi$$

$D\bar{D}$ usw. Integration (= Summation) über alle
 Feldkonfigurationen, die über einer diskretisierten
 Euklidischen Raumzeit (= Gitter) unterbaut werden;
 $V = (N_0 a)^3$, $\frac{1}{T} = N_T a$
 \uparrow Lattice spacing

Euklidische Zeit \rightarrow Temperatur (\Rightarrow nur Gitterge-
 wichts konfigurationen möglich)

Problem: $Z(T, \mu; m_u, m_d, m_s, \dots, N_0, N_T, \text{"Werbung"})$

- $N_0 \sim 4 \dots 16 (3L)$, $N_T \sim 4 \dots 6 (\beta)$

systematische kontinuierliche Extrapolation ist sehr zeitauf-
 wendig

- Sensitivität gegen über "Werbung"

- Sensitivität gegen über m_u, m_d, m_s : Folien ⁹ Platten-
 diagramm
 Messen

- Vorteilchen-Problem: $\mu \neq 0$: $D\bar{D}D\bar{D}$ wird mit
 komplexer Fermionen-Determinante gewichtet \rightarrow kein
 übliches MC - Gewichten (Importance sampling)
 nicht möglich \rightarrow spezielle Techniken, um dies zu
 umgehen \rightarrow keine μ Zugänglichkeit, $i\mu$ auch

Resultate: s. QPM - Abschnitt

4. QPM

wegen Versagen der pQCD und Problemen bei lQCD
 \rightarrow Modelle, die mit lQCD verglichen werden und
 die Extrapolationen in den phys. interessanten Bereich
 gestatten \rightarrow Vortrag bk Florence, QPM

5. Ausgewählte Probleme

(i) T_c : 270 MeV für reine Eichtheorie
 175 \pm 20 MeV für QGP, N_f -abhäng.

Problem: Filtern der phys. Skala

2007: z.T. widersprüchliche Aussagen

- (ii) CEA: 2006/07: z.T. widersprüchliche Aussagen
 (iii) Extrapolation: M.B. Falsch (10) Falsch (90)

⇒ Eindruck, dass vieles bekannt ist, was $p(T)$ betrifft;
 $p(T, \mu)$ (klein) scheint auch OK zu sein;
 $p(T, \mu)$ für gewisse T - μ -Bereiche + Phasenübergänge
 bleiben problematisch

6. Ordnungsparameter

Phasenübergänge: Acetaz: Wasser - Dampf, Wasser - Eis
 = anschaulich, klar / Falsch schon gezeigt
 = PÜ 1. Ordnung
→ Bistabilität

PÜ 1. O.: Diskontinuitäten von e, s, u

von Materialwissenschaftler, Physik kondensierter Materie
 + Festkörperphysik: verschiedene Klassifikationen von PÜ
→ eigener Modul

Fazit: Änderung eines Ordnungsparameters \Rightarrow PÜ
 ↑ wer/wann?

QCD: Coefficient ist nicht verstanden \rightarrow was ist Deconfinement
 Wer einige "übliche" Maße:

(i) Polyakov loop (Erwartungswert):

$$\langle L \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } T \leq T_c \\ > 0 & \text{für } T > T_c \end{cases} \Rightarrow \text{Def. von } T_c$$

↑ nur für reine Eichtheorie ($m_q \rightarrow \infty$)!
ab hier

$\langle L \rangle \sim e^{-F_0/T}$ = freie Energie einer schwarzen Oberfläche

$F_0 \rightarrow \infty$ für isolierte Farbbindung
 = Farb-Confinement

$F_0 \rightarrow 0$: Farbbindungen können sich "frei"
 bewegen, d.h. dem System isoliert
 werden \rightarrow Deconfinement

(ii) Z_3 - Symmetrie: globale Symmetrieeigenschaft:
 \downarrow $U(3)$ $A \rightarrow A' = e^{i \frac{\alpha}{3}} A$ $\psi \rightarrow \psi'$
 L invariant

$T > T_c$: spont. Symmetriebruchung
 $T < T_c$: Z_3 - Symmetrie wieder hergestellt

$SU(3)$: effektive Theorie für einen entsprechenden
 Ordnungsparameter $Z(3)$ -Spin-Modell,
 gleiche Universalitätsklasse wie 3-Isingals-
 Polts-Modell; $P \in 1$. Ordnung, $T_c \sim 270 \text{ MeV}$
 $SU(2) (\neq \text{QCD})$: $P \in 2$. Ordnung

(iii) spielt alles noch mehr für dynamische Quarks
 (bestenfalls zur ersten Ordnung)

neuer potentieller Ordnungsparameter: $\langle \bar{\psi} \psi \rangle \neq 0$ wenn
 χ klein: $m_q \rightarrow 0$: L ist χ inv. Modul 2
 $\langle Z \rangle$ nicht \Rightarrow spont. Symmetrie-
 bruchung

$\rightarrow \chi$ klein, als Ordnungsparameter Folie (11) $\langle \bar{\psi} \psi \rangle, \langle L \rangle$

noch besser: Suszeptibilitäten \rightarrow Peaks \rightarrow Def. von T_c
 $\chi_m = \frac{\partial \langle \bar{\psi} \psi \rangle}{\partial m_q}$ ($=$ pseudo-Grüneis)

$\chi_L = \chi^2 (\langle L^2 \rangle - \langle L \rangle^2)$ Folie (12)

wichtig: chiraler Übergang \equiv Polya-Gau - Übergang
 \uparrow wirklich exakt? Folie (13)

Modelle können auch $T_c^{\chi_m} \neq T_c^{\chi_L}$ haben

wird noch problematischer für $\mu > 0$; oder Trick $\mu \rightarrow i\mu$
 verwendet Vorzeichenproblem, aber: analytische Fort-
 setzung zu reellen μ hat Hindernisse, birgt aber
 auch Einheiten, F.T. auch für $\mu > 0$: $T_c^{\chi_m} = T_c^{\chi_L}$.

7. Farb - Supraleitung

Cooper - Theorem: beliebig schwache attraktive Fermion-
 Fermion (hier qq) - WW im einem Kanal \rightarrow
 Cooper - Paire \Rightarrow Kondensation bei niedrigem T

→ neue Phasen (Aussagen auf $p \rightarrow 0$
 beliebigkeit; Extrapolationen nach
 und tiefer p problematisch)
 unklar ob Bedeutung für HIC's, ev. NS

8. $T \sim T_c$

Zwischenbereich: Reichhaltigkeit von QCD (mehrere
 Phasen)

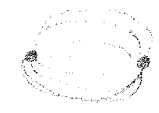
$\langle L \rangle$ und $\langle \bar{q} q \rangle$ ändern sich

Frage: sind es wirklich Phasen = ?

frühere Ideen: $T < T_c$: Hadronen (Gas, Flüssigkeit)

$T > T_c$: quark-hadron Quark + Gluonen
 (Argument: asympt. Freiheit)

aber: bei T_c ist starke WW stark \rightarrow unklar was die
 relevanten Freiheitsgrade + kollektiven Anregungen
 sind (deshalb QPM)

Matsui-Lutz (1986): $J/\psi = c\bar{c} =$ 

↑
 Vektormeson, $M = 3.09688 \text{ GeV}$

$m_c \sim 1.2 - 1.8 \text{ GeV}$

hohes T : Debye-Abschirmung des $c\bar{c}$ -Potentials
 durch andere Farbladungen (\sim Mott-Übergang)
 = Probe des Deconfinement-Übergangs

Breite $\Gamma_{J/\psi} = 87 \text{ keV}$, $\Gamma_{e^+e^-} = 5.26 \text{ keV}$, $\text{Br}(J/\psi \rightarrow e^+e^-) \approx 6\%$
 \Rightarrow exp. gut nachweisbar

aber: lQCD: $T > T_c$: hadronische Moden existieren z.T.

noch \rightarrow Folie $J/\psi, \eta, \chi$ (14)

Fazit: Reichhaltigkeit von QCD + Phasenübergang in von QCD-Interaktion

Spekulation: weitere Phasen schon bei $p = 0$, wie Ice 10, 11, 12...

Basalstruktur: Konstruktion eines PÜ 1. Ordnung

wobei qualitative Folgen waren durch Bergmodell geleitet

$$P = 3 \frac{\pi^2}{90} T^4$$

↑ π : Isotopieff., Bosonen, Pseudoskalar

Voraussetzung der anderen Hadronen z.T. falsch:

Hohe Resonanzen \Rightarrow Resonanzgas-Modell

↑
coolieren einen Teil der starben WW

(Dashen-Ma - Resonanz - Theorem:

$$2 \pi \cdot f \rightarrow \pi^+ \pi^- : \sim 100\%$$

$\approx \pi \pi$ -WW wird z.T. durch ρ ersetzt

[Problem: ρ ist recht breit])

Debyeinvariant-Materie:

$$P = a \frac{\pi^2}{90} T^4 - B$$

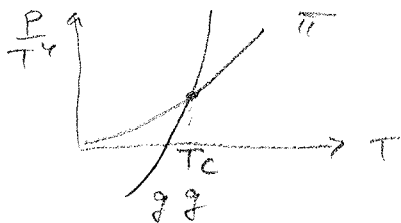
↑
eff. # d.o.f.

↑ Differenz von perturbativen
und nicht-perturbativen
Variablen

Mit Bergmodell:

Wandern \rightarrow  $P_{Uoe} = B$

$$a = 37 \text{ (ohne Strangeness, aus 3.2)}$$



Abbs: $T_1 = T_2$: therm.
 $\mu_1 = \mu_2$: chem. } Gleichgew.
 $p_1 = p_2$: mech.

maximiert Entropie (s.u.)

$$P = -f : T < T_c : \pi$$

$$T > T_c : \rho$$

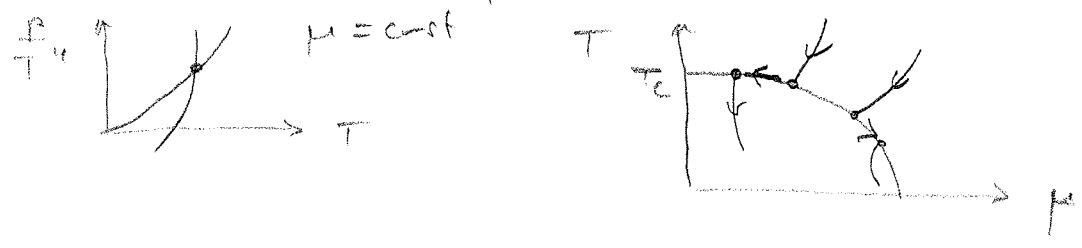
$\mu = 0$: $\mu_1 = \mu_2$ erfüllt (triv.)

$$P_1 = P_2 : 3 \frac{\pi^2}{90} T^4 = 37 \frac{\pi^2}{90} T^4 - B$$

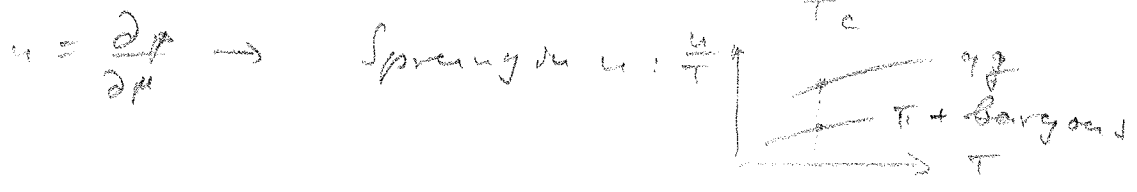
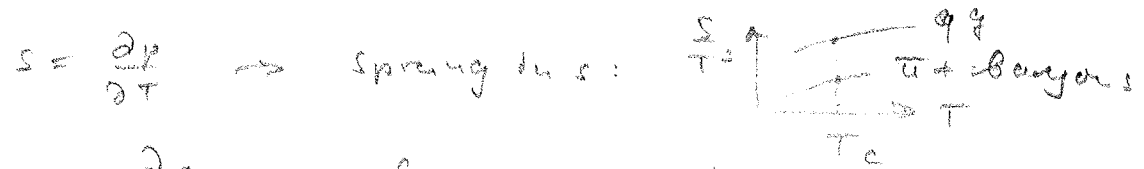
$$T_c = B^{1/4} \left(\frac{90}{34\pi^2} \right)^{1/4}$$

\bar{B} setzt Skala, $\bar{B}^{114} = 235 \text{ MeV}$; $T_c = 169 \text{ MeV}$

Fortsetzung in μ -Richtung (z.B.)



adiabatische Expansion $\frac{S}{N} = \text{const}$
 $\left. \begin{matrix} s(T, \mu) \\ u(T, \mu) \end{matrix} \right\} \Rightarrow T(\mu)$



Phasen-Konstante: z.B. $\mu = 0$

$$s = s_{\pi}(T_c(\mu))x + s_{q\bar{q}}(T_c(\mu))(1-x)$$

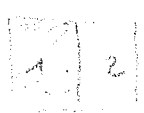
analoge Konstruktion für $\mu \neq 0$; Ableitbarkeit
 bestimmt Trajektorie im $T-\mu$ -Diagramm

Problem: zu einfach; wird Spezifika von T_c
 nicht gerecht; Bsp. falls zur Orientierung
 nützlich

LQCD zeigt, dass $p \sim T^4$ nicht ok ist
 (s. 3.4: QPM)

PÜ 1. Ordnung: Phasenseparation, Bubbles

T_c Schlüssel für Dynamik: σ



- Gleichgewicht: - keine Wärmeströme: $T_1 = T_2$
 - keine chem. Reaktionen:
 $\mu_1 = \mu_2$

- keine mechanische Bewegung
 an (gedruckten) Trennwand:

wird durch Max. wellenkonstruktion
 und Doppel tangential-Kont. realisiert $p_1 = p_2$