

# QCD Summenregeln: Berechnung der Wilson-Koeffizienten von Vier-Quark-Kondensaten in $Q\bar{q}$ -Mesonen

Diplomarbeit  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Diplom-Physiker

vorgelegt von

Thomas Buchheim

geboren am 09. Januar 1987 in Wurzen

Institut für Theoretische Physik  
Fachrichtung Physik  
Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften  
der Technischen Universität Dresden  
2012

1. Gutachter: Prof. Dr. Burkhard Kämpfer

2. Gutachter: Prof. Dr. Dominik Stöckinger

Eingereicht am 11. Oktober 2012

## Kurzdarstellung

Die nicht-perturbative Methode der QCD-Summenregeln erlaubt die Bestimmung hadronischer Eigenschaften, insbesondere das Hadronenspektrum betreffend, das der störungstheoretischen Quantenchromodynamik (QCD) nicht zugänglich ist. Auf analytische Weise werden die langreichweitigen Effekte der Hadronen mittels einer Dispersionsrelation mit Quark-Freiheitsgraden verknüpft. Dazu wird die Operatorproduktentwicklung (OPE) von Strom-Strom-Korrelatoren vorgenommen. Der Kalkül der QCD-Summenregeln, deren Herleitung und Auswertung, wird in dieser Arbeit bereitgestellt. Die bis zur Massendimension 5 wohlbekannte OPE von pseudo-skalaren Mesonen wird um die Vier-Quark-Kondensate zur Massendimension 6 erweitert. Im Fokus steht dabei die Berechnung der Wilson-Koeffizienten vakuum- und mediumspezifischer Vier-Quark-Kondensate von  $Qq$ -Mesonen bestehend aus einem schweren und einem leichten Quark. Damit kann erstmals eine komplette Liste dieser Wilson-Koeffizienten angegeben werden. Statische Kondensate werden mittels der Entwicklung nach der inversen schweren Quark-Masse (SQME) in gluonische Kondensate überführt und stehen somit für die Evaluierung der Summenregeln zur Verfügung. Die Faktorisierung der Vier-Quark-Kondensate und deren SQME werden in drei verschiedenen Varianten vorgenommen. Diese Arbeit ermöglicht damit die Auswertung von QCD-Summenregeln im nuklearen Medium, welche Vier-Quark-Kondensate schwerer Quarks einschließen. Darüber hinaus werden die Vier-Quark-Kondensatbeiträge der Operatorproduktentwicklungen von chiralen Partnern ermittelt, welche chiral ungerade Kondensate enthalten, die mit Ordnungsparametern der spontanen chiralen Symmetriebrechung verknüpft sind. Für einen vollständigen Einblick in die OPE der Massendimension 6 werden auch die Wilson-Koeffizienten von Drei-Gluon-Kondensaten diskutiert.

## Abstract

The non-perturbative method of QCD sum rules allows the determination of hadron properties, especially features of the hadron spectrum, which is not accessible within the framework of perturbative quantum chromodynamics (QCD). The long-distance effects of hadrons are related to quark degrees of freedom in an analytical way by applying an operator product expansion (OPE) to the current-current correlator. This thesis furnishes the concept and calculus of QCD sum rules, their derivations and evaluations. The well-known OPE of pseudo-scalar mesons up to mass dimension 5 is extended to four-quark condensates of mass dimension 6. We focus on the calculation of the Wilson coefficients of vacuum and medium specific four-quark condensates of  $Qq$  mesons, consisting of a heavy and a light quark. Thereby, a complete list of these Wilson coefficients is presented for the first time. Because static condensates are converted into gluonic condensates by means of the heavy-quark mass expansion (HQME) they are available for sum rule evaluations. Using factorization and HQME, three different approaches are applied to four-quark condensates. Thus, this thesis allows the evaluations of in-medium QCD sum rules, which include four-quark condensates of heavy quarks. Furthermore, we compute the four-quark condensate contributions to chiral partner OPEs, which contain chirally odd condensates linked to the spontaneous breakdown of chiral symmetry. In order to provide a complete insight into the OPE of mass dimension 6 the Wilson coefficients of three-gluon condensates are also discussed.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
1.1	Das Standardmodell . . . . .	7
1.2	Hadronenphysik . . . . .	9
<b>2</b>	<b>QCD-Summenregeln</b>	<b>11</b>
2.1	Strom-Strom-Korrelator . . . . .	11
2.2	Operatorproduktentwicklung . . . . .	16
2.2.1	Fock-Schwinger-Eichung – Hintergrundfeld-Methode . . . . .	19
2.2.2	Kondensate . . . . .	25
2.2.3	Behandlung schwerer Quarks . . . . .	30
2.3	Summenregeln . . . . .	33
2.4	Borel-Transformation . . . . .	39
<b>3</b>	<b>OPE der Massendimension 6</b>	<b>43</b>
3.1	OPE von $Qq$ -Mesonen bis zur Massendimension 5 . . . . .	43
3.2	Wilson-Koeffizienten von Vier-Quark-Kondensaten . . . . .	49
3.2.1	Diagramme mit weichem Gluon . . . . .	50
3.2.2	Diagramme mit hartem Gluon . . . . .	53
3.3	Pseudoskalare $Qq$ -Mesonen . . . . .	58
3.3.1	Exaktes Resultat . . . . .	58
3.3.2	Resultate mit SQME . . . . .	68
3.4	Differenzen chiraler Partner . . . . .	75
3.4.1	Der Fall $P - S$ . . . . .	76
3.4.2	Der Fall $V - A$ . . . . .	81
3.5	Andere Beiträge der Massendimension 6 bzw. Ordnung $\alpha_s^1$ . . . . .	87
3.5.1	Drei-Gluon-Kondensat . . . . .	87
3.5.2	Chirales Kondensat in Einschleifenordnung . . . . .	90
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>93</b>
<b>A</b>	<b>QCD im Überblick</b>	<b>95</b>
<b>B</b>	<b>Fierz-Transformationen</b>	<b>99</b>
<b>C</b>	<b>SQME von Vier-Quark-Kondensaten</b>	<b>101</b>
C.1	Massendimension 6 . . . . .	101
C.2	Massendimension 7 . . . . .	104
<b>D</b>	<b>QCD-Lichtkegel-Summenregeln</b>	<b>107</b>
	<b>Bibliografie</b>	<b>113</b>



# 1 Einleitung

Eines der wichtigsten Ziele der theoretischen Physik ist die Beschreibung beobachtbarer Phänomene im Rahmen einer Theorie, welche eine große Anzahl physikalischer Effekte mit einem möglichst kleinen Satz elementarer Parameter beschreiben. Schon 1864 zeigte Maxwell, dass die zuvor getrennt behandelten Phänomene der Elektrizität und des Magnetismus zwei komplementäre Realisierungen der Theorie des Elektromagnetismus darstellen. Damit legte er die Grundlage für die zugleich relativistische und quantenmechanische Beschreibung der Wechselwirkungen zwischen elektromagnetischen Feldern und elektrischen Ladungsträgern – der Quantenelektrodynamik (QED).

Obwohl bei der Untersuchung des Atoms auf Elektronen und ihre Wechselwirkungen erfolgreich angewendet, erklärt die Elektrodynamik nicht, warum Protonen, die sich aufgrund ihrer elektrischen Ladung abstoßen, einen stabilen Atomkern bilden. Als logische Konsequenz wurde die starke Wechselwirkung eingeführt, welche die Abstoßung der Protonen kompensiert und für die Bindung von Protonen und Neutronen im Atomkern sorgt. Das von Zweig und Gell-Mann Anfang der sechziger Jahre formulierte Quark-Modell beschreibt die große Anzahl neu entdeckter subatomarer Teilchen – die Hadronen – mithilfe weniger Quark-Sorten. Dabei werden die mit einer neuen Ladung – der Farb-Ladung – versehenen Quarks als Bausteine der Hadronen interpretiert. Die Theorie, welche die Dynamik der Quarks beschreibt, wird entsprechend als Chromodynamik bezeichnet. Eine effektive Theorie der Chromodynamik liefert eine Erklärung für die Stabilität der Atomkerne: Die starke Bindung der Nukleonen ist über den Austausch leichter Mesonen, bestehend aus einem Quark-Antiquark-Paar, realisiert.

Eine Erklärung des kontinuierlichen Elektronenspektrums des  $\beta^-$ -Zerfalls liefert weder die Elektrodynamik noch die Theorie der starken Wechselwirkung. Die Kinematik eines Zweikörperzerfalls sagt eine feste kinetische Energie des Elektrons voraus. Ein weder elektromagnetisch noch stark wechselwirkendes und deshalb unbeobachtetes drittes Teilchen könnte jedoch für das kontinuierliche Elektronenspektrum verantwortlich sein. Solche seltenen Phänomene, an welchen die undetektierten Partnerteilchen des Elektrons – die Neutrinos – beteiligt sind, werden der schwachen Wechselwirkung zugeschrieben. Glashow, Salam und Weinberg gelang es 1967 die QED und die schwache Wechselwirkung in der elektroschwachen Theorie zu vereinigen. Die Idee der Generalisierung von Theorien zu einer gemeinsamen übergeordneten Theorie treibt Physiker bis heute an. So existieren viele Formulierungen einer großen vereinheitlichten Theorie von QED, schwacher und starker Wechselwirkung, von denen jedoch noch keine experimentell bestätigt werden konnte.

## 1.1 Das Standardmodell

Neben der elektromagnetischen, der schwachen und der starken Wechselwirkung, die gegenwärtig das Standardmodell (SM) der Teilchenphysik bilden, kennt die Physik eine weitere fundamentale Kraft – die Gravitation. Diese vier Wechselwirkungen sind mathematisch als

Feldtheorien über ihre Lagrange-Dichte definiert. Die Bewegungsgleichungen der Felder, die diesen Wechselwirkungen unterliegen, lassen sich aus dem Prinzip der extremalen Wirkung aus der Lagrange-Dichte extrahieren. Abgesehen von der Gravitation sind sie als Eichtheorien formuliert. Das SM beschreibt elementare Materieteilchen – die Quarks und Leptonen – über fermionische Felder, welche über den Austausch von Eichbosonen mit Spin-1 wechselwirken.

Die QED, deren Lagrange-Dichte invariant unter lokalen Transformationen der abelschen Symmetriegruppe  $U(1)$  ist, enthält ein masseloses Eichboson – das Photon. Dieses koppelt an elektrisch geladene Felder, trägt aber selbst keine Ladung. Ihre Kopplungsstärke  $e$  ist klein, weshalb sich viele elektrodynamische Prozesse in einer Potenzreihe der Kopplung störungstheoretisch behandeln lassen. Dabei auftretende Divergenzen werden durch Renormierungsverfahren beseitigt, welche auf eine „laufende“ Kopplung führen, die vom Impulsübertrag des Prozesses abhängt. In der QED berechnete Observablen zeigen eine hervorragende Übereinstimmung mit den experimentell bestimmten Werten in der relativen Größenordnung von  $10^{-12}$ .

Die Lagrange-Dichte der elektroschwachen Theorie weist neben der Invarianz unter Symmetrietransformationen der  $U(1)$  auch Invarianz unter lokalen Transformationen der nicht-abelschen schwachen Isospin-Gruppe  $SU(2)$  auf, deren Generatoren die Pauli-Matrizen sind. Die fermionischen Felder werden in Isospin-Dubletts angeordnet, z.B. die aus dem  $\beta^-$ -Zerfall bekannten Isospin-Partner Elektronneutrino und Elektron ( $\nu_e, e^-$ ). Aus der Forderung, dass das Neutrino nicht an das Photon koppelt, leitet man neben dem Photon drei weitere Eichbosonen her: die elektrisch positiv und negativ geladenen  $W$ -Bosonen –  $W^+$  und  $W^-$  – sowie das elektrisch neutrale  $Z$ -Boson. Experimente zeigen, dass Prozesse mit  $W$ -Austausch maximal paritätsverletzend sind. Die kleine Kopplungsstärke der schwachen Wechselwirkung liegt in der großen Masse der  $W$ - und  $Z$ -Bosonen begründet, welche durch das Konzept der spontanen Symmetriebrechung – den Higgs-Mechanismus – realisiert werden. Neben den Bosonen erhalten auch die Quarks und geladenen Leptonen ihre Masse durch die Kopplung an das Higgs-Feld (Yukawa-Kopplung).

Die Quantenchromodynamik (QCD) wird als Theorie der starken Wechselwirkung auf Quark-Niveau verstanden. Ihre Lagrange-Dichte ist invariant unter den lokalen Transformationen der nicht-abelschen Symmetriegruppe  $SU(3)$ , welche eine viel reichhaltigere Struktur als die abelsche Symmetriegruppe  $U(1)$  der QED aufweist. Demnach ist jede Quark-Sorte dreifach entartet, wobei die entsprechende zusätzliche Quantenzahl als Farb-Ladungen („rot“, „grün“, „blau“) aufgefasst wird. Wechselwirkungen zwischen den Quarks werden durch den Austausch von masselosen Eichbosonen – den Gluonen – vermittelt. Entsprechend der adjungierten Darstellung der  $SU(3)$  existieren acht Gluonen, welche selbst Farb-Ladungen tragen und daher nicht nur mit Quarks, sondern ebenso miteinander wechselwirken. (Die Lagrange-Dichte der Chromodynamik sowie einige Details dieser klassischen Eichtheorie finden sich im Anhang A.)

Bis heute wurden sechs elementare Materiefelder der Chromodynamik nachgewiesen: up-, down-, charm-, strange-, top- und bottom-Quark. Sie werden jedoch nicht als freie Teilchen beobachtet, sondern als Bausteine von Hadronen, welche farbneutrale gebundene Zustände der stark wechselwirkenden Quarks und Gluonen sind. Dieses Phänomen wird als Confinement bezeichnet. Der Ursprung und die Herleitung des Confinement aus der QCD ist noch nicht geklärt. Gross, Wilczek und Politzer zeigten 1973, dass die Renormierung der QCD auf eine laufende Kopplung führt, die im Gegensatz zur abelschen QED mit steigendem Impulsübertrag absinkt. Diese sogenannte „asymptotische Freiheit“ der Quarks ermöglicht

die störungstheoretische Behandlung von Hochenergieprozessen, in welchen die Streuung an einem quasi freien Quark beschrieben wird.

## 1.2 Hadronenphysik

Hadronen kommen in Form von fermionischen Baryonen mit einer ungeraden Anzahl von Valenz-Quarks und als bosonische Mesonen mit einer geraden Anzahl von Valenz-Quarks vor, welche Quantenzahlen des Hadrons tragen. Die Hadronenmassen liegen zum Teil Größenordnungen über der Summe der Masse ihrer Valenz-Quarks, die durch den Higgs-Mechanismus erzeugt werden. Die Masse der Hadronen, die in Form von Protonen und Neutronen die Grundbausteine unserer massebehafteten Welt sind, stammt nur zu einem Bruchteil von der Kopplung an das Higgs-Feld, vielmehr liegt ihr Ursprung in der starken Wechselwirkung von Quarks und Gluonen. Die nicht-abelsche QCD mit ihren Gluon-Selbstwechselwirkungen weist für geringe Impulsüberträge und große Distanzen eine starke Kopplung auf. Damit sind störungstheoretische Techniken nicht anwendbar. Trotzdem lassen sich für niedrige Energien effektive Theorien formulieren, welche die QCD in diesem Regime durch hadronische Freiheitsgrade geeignet beschreiben, wie die chirale Störungstheorie.

Da man jedoch die QCD als zugrunde liegende Theorie auffasst, wird die Bestimmung von Hadronenmassen und damit die Untersuchung des Hadronenspektrums durch nicht-perturbative Methoden zur Evaluierung der QCD-Lagrange-Dichte angestrebt. Eine mit steigender Rechenleistung immer erfolgreichere Methode sind Gitterrechnungen. Dabei wird an einem diskreten Raum-Zeit-Gitter die computergestützte Berechnung von QCD-Observablen durch hoch entwickelte Algorithmen vorgenommen. Ein analytischer Zugang, der die niederenergetischen Eigenschaften der Hadronen mit deren Verhalten bei hohen Energien auf Quark-Niveau verbindet, ist durch die Methode der QCD-Summenregeln gegeben.

Die von Shifman, Vainshtein und Zakharov [Shi79] entwickelte Methode der QCD-Summenregeln basiert auf der Auswertung des Strom-Strom-Korrelators, dessen Ströme die Quantenzahlen und den Valenz-Quark-Inhalt der untersuchten hadronischen Anregungen tragen. Die Operatorproduktentwicklung (OPE) des Korrelators wird für große euklidische Impulse vorgenommen, dabei werden die kurzreichweitigen und langreichweitigen Wechselwirkungen der Quarks und Gluonen separiert. Kurzreichweitige Effekte werden störungstheoretisch behandelt, langreichweitige nicht-perturbative Effekte hingegen durch universale Vakuumkondensate parametrisiert. Das Ergebnis der OPE wird über ein Dispersionsintegral mit der Spektraldichte in Beziehung gesetzt, die alle hadronischen Resonanzen enthält, welche den Eigenschaften der untersuchten Ströme entsprechen. Durch einen geeigneten Ansatz für die Spektraldichte sowie die Wichtung der Kondensatbeiträge und der hadronischen Anregungen erhält man Summenregeln, die Eigenschaften der Hadronen, wie Masse und Zerfallskonstante, mit Kondensaten verknüpft.

Die Kondensate sind Erwartungswerte von Quark- und Gluon-Operatoren, die deren Wechselwirkung mit dem komplexen QCD-Vakuumgrundzustand quantifizieren. Kondensate sind damit direkt mit den fundamentalen Eigenschaften der QCD und ihrem Grundzustand verknüpft. Ein Quark-Kondensat mag anschaulich als ein Maß für die Wahrscheinlichkeit der Vernichtung und Erzeugung eines Quarks durch ein Quark-Antiquark-Paar des QCD-Vakuums verstanden werden. Gluonen kondensieren durch die Kopplung an ein schwaches gluonisches Hintergrundfeld. Hadronen haben dementsprechend eine größere Masse als die

Summe ihrer Bestandteile, da bei niedrigen Energien nicht nur die Wechselwirkungen von Quarks mit Gluonen und Gluonen untereinander von Bedeutung sind, sondern auch deren Wechselwirkung mit dem QCD-Grundzustand. Hadronen erhalten damit eine zusätzliche effektive Masse, die für Hadronen bestehend aus leichten Quarks besonders groß ist, da die Wahrscheinlichkeit der Annihilation mit dem Antiquark eines aus dem Grundzustand erzeugten leichten Quark-Antiquark-Paares größer ist als für schwere Quarks.

Die QCD-Summenregeln haben eine Verallgemeinerung zur Anwendung auf Hadronen im nuklearen Medium bei nicht-verschwindenden Temperaturen und/oder Dichten erfahren. Aufgrund der Brechung der Poincaré-Invarianz existiert im Medium eine ausgezeichnete Geschwindigkeit. Diese erfordert eine im Vergleich zum Vakuum abgeänderte Dispersionsrelation und sorgt für das Auftreten neuer Kondensate. Da Kondensate im Medium temperatur- und dichteabhängig sind, ist auch mit Änderungen der Eigenschaften von Hadronen zu rechnen. Diese Mediummodifikationen von  $Qq$ -Mesonen werden am geplanten PANDA Experiment bei FAIR in Darmstadt experimentell zugänglich sein. Eine genaue Analyse der QCD-Summenregeln von D-Mesonen bezüglich ihrer Mediumabhängigkeiten ist von großem Interesse. Die dafür benötigten vakuum- und mediumspezifischen Vier-Quark-Kondensatbeiträge zur OPE dieser Mesonen sind das zentrale Resultat dieser Arbeit.

Diese Arbeit ist wie folgt gegliedert. Im Kapitel 2 wird das Kalkül der QCD-Summenregeln dargestellt. Ausgehend vom Strom-Strom-Korrelator wird die Herleitung der Dispersionsrelation für den Vakuum- und Medium-Fall vorgenommen. Besonders im Fokus stehen anschließend die Techniken zur Berechnung der OPE. Die Auswertung Borel-transformierter Summenregeln wird erläutert. Das Kapitel 3 umfasst die OPE von  $Qq$ -Mesonen im nuklearen Medium. Die bis zur Massendimension 5 im Überblick dargelegte OPE pseudo-skalarer  $Qq$ -Mesonen wird um die Wilson-Koeffizienten der Vier-Quark-Kondensate zur Massendimension 6 erweitert. Neben den Vier-Quark-Kondensatbeiträgen zur OPE chiraler Partner wird auch die Berechnung der Wilson-Koeffizienten von Drei-Gluon-Kondensaten diskutiert. Das Kapitel 4 fasst die Ergebnisse dieser Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick auf eine systematische Erweiterung der diskutierten Resultate.

## 2 QCD-Summenregeln

Die QCD-Summenregeln sind ein äußerst erfolgreiches Werkzeug zur Bestimmung hadronischer Eigenschaften. Eingeführt von Shifman, Vainshtein und Zakharov (SVZ) [Shi79] im Jahre 1979 für Hadronen im Vakuum, erfuhren die Summenregeln unlängst eine Verallgemeinerung zur Evaluierung der Eigenschaften von Hadronen bei nicht verschwindenden Temperaturen und/oder Baryonendichten [Boc86, Hat92]. In diesem Kapitel werden sämtliche Techniken, die zur Anwendung der QCD-Summenregeln im Vakuum und Medium benötigt werden, bereitgestellt, wobei ein besonderes Augenmerk auf die Operatorproduktentwicklung gelegt wird.

### 2.1 Strom-Strom-Korrelator

Dieser Abschnitt gibt eine kompakte Darstellung der Ausführungen in [Hil12a] zu Strom-Strom-Korrelatoren und Dispersionsrelationen. Da in dieser Arbeit der Schwerpunkt auf die Operatorproduktentwicklung gelegt wird und eine numerische Auswertung der Summenregeln nicht erfolgt, ist dieser Abschnitt vor allem aus Gründen der konsistenten Darstellung der Methodik der QCD-Summenregeln enthalten.

Im Rahmen von QCD-Summenregeln lassen sich Hadroneneigenschaften mit den Quark-Freiheitsgraden in Beziehung setzen. Mithilfe von Dispersionsintegralen werden die kurzreichweitigen Effekte des kausalen Strom-Strom-Korrelators

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle \Omega | T [j(x)j^\dagger(0)] | \Omega \rangle \quad (2.1)$$

auf dem Quark-Niveau mit den langreichweitigen Phänomenen der Hadronen verbunden. Die 2-Punkt-Funktion  $\Pi(q)$  ist definiert als der Fourier-transformierte Erwartungswert des zeitgeordneten Produktes  $T$  der Ströme  $j(x)$  und  $j^\dagger(0)$ . Der physikalische QCD-Vakuumgrundzustand  $|\Omega\rangle$  erfüllt die Relationen

$$H|\Omega\rangle = E_\Omega|\Omega\rangle, \quad (2.2a)$$

$$\langle \Omega | \Omega \rangle = 1, \quad (2.2b)$$

$$a|\Omega\rangle \neq 0, \quad (2.2c)$$

wobei  $H$  der zu  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  korrespondierende Hamilton-Operator der QCD ist und  $|\Omega\rangle$  dessen niedrigster Eigenzustand. Der Operator  $a$  bezeichnet den Vernichtungsoperator freier Teilchen, welcher in der Störungstheorie benutzt wird und der Gleichung  $a|0\rangle = 0$  genügt. Der Zustand  $|0\rangle$  ist der niedrigste Eigenzustand des freien Hamilton-Operators, der in dieser Arbeit als perturbativer Grundzustand bezeichnet wird. Um Verwechslungen zu vermeiden, wird hier die Nomenklatur bezüglich der Zustände festgelegt. Wir unterscheiden zwischen dem Mediumgrundzustand  $|\Omega\rangle_{\text{med}}$ , d.h. dem nicht-perturbativen Grundzustand

bei endlichen Baryondichten und Temperaturen in nuklearer Materie, und dem physikalischen (QCD-)Vakuumgrundzustand  $|\Omega\rangle$ , d.h. dem nicht-perturbativen Grundzustand bei verschwindenden Dichten und Temperaturen. Es wird angenommen, dass der physikalische QCD-Vakuumgrundzustand  $|\Omega\rangle$  sowohl invariant unter Paritäts- und Zeitumkehr-Transformationen als auch Lorentz-invariant ist. Im Gegensatz dazu ist der Mediumgrundzustand  $|\Omega\rangle_{\text{med}}$  lediglich invariant unter Paritäts- und Zeitumkehr-Transformationen, nicht jedoch unter Lorentz-Transformationen. Allerdings haben Erwartungswerte, die mit dem Mediumgrundzustand  $|\Omega\rangle_{\text{med}}$  berechnet werden, wie  $\Pi(q)$ , ein wohldefiniertes Transformationsverhalten [Jin93]. Zudem muss für Grundzustandserwartungswerte bei nicht-verschwindenden Temperaturen der Übergang zur Gibbs-Mittelung vorgenommen werden [Boc86]:

$$\langle\Omega|O|\Omega\rangle \longrightarrow \langle O \rangle \equiv_{\text{med}} \langle\Omega|O|\Omega\rangle_{\text{med}} = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[ e^{-\beta(H-\mu N)} O \right]. \quad (2.3)$$

Dabei ist  $Z = \text{Tr} [e^{-\beta(H-\mu N)}]$  die großkanonische Zustandssumme,  $H$  der Hamilton-Operator (2.2a),  $\beta$  die inverse Temperatur und  $N$  der Teilchenzahl-Operator mit zugehörigem chemischen Potential  $\mu$ .

Die Ströme  $j(x)$  in Gl. (2.1), welche die Hadronen beschreiben, werden durch Kombinationen von Quark-Feldoperatoren im Heisenberg-Bild repräsentiert. Sie müssen alle Quantenzahlen und den Valenzquarkinhalt des betrachteten Hadrons widerspiegeln. Der Strom-Strom-Korrelator  $\Pi(q)$  lässt sich als Funktion interpretieren, welche die Propagation des Hadrons von 0 nach  $x$  beschreibt. Für große Impulse, d.h. kurze Distanzen, wird die Quark-Struktur des Korrelators sichtbar, wohingegen er für kleine Impulse, d.h. große Distanzen, durch die Hadroneneigenschaften bestimmt wird.

Die Gell-Mann-Low-Formel [Ste93, Pas84] verknüpft die Vakuumerwartungswerte von Heisenberg-Feldoperatoren, ausgewertet mit den wechselwirkenden Zuständen  $|\Omega\rangle$  der ganzen Theorie, mit dem Vakuumerwartungswert von Feldoperatoren im Wechselwirkungsbild, d.h. freien Feldoperatoren, ausgewertet mit den nicht-wechselwirkenden Zuständen  $|0\rangle$  [Gel51]. Für den Strom-Strom-Korrelator ergibt sich:

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{iqx} \frac{\langle 0|\text{T} [j(x)j^\dagger(0)e^{i\int d^4y\mathcal{L}_{\text{int}}(y)}] |0\rangle}{\langle 0|\text{T} [e^{i\int d^4y\mathcal{L}_{\text{int}}(y)}] |0\rangle}, \quad (2.4)$$

wobei  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  (A.10) jener Teil der Lagrange-Dichte ist, der die Wechselwirkungen freier Felder enthält. Gilt für die Kopplungskonstante  $g \ll 1$ , ist eine Reihenentwicklung der operatorwertigen Exponentialfunktion ein geeigneter Ausgangspunkt für eine störungstheoretische Behandlung.

Wie in diesem Abschnitt dargestellt, trägt der Strom-Strom-Korrelator (2.1) dualen Charakter. Für große negative Werte von  $q^2$  repräsentiert  $\Pi(q)$  die kurzreichweitige Quark-Antiquark-Fluktuation, welche störungstheoretisch behandelt werden kann, wohingegen für positive Werte von  $q^2$  der Korrelator hadronische Eigenschaften widerspiegelt. Somit lässt sich z.B. der Korrelator des Vektorstroms mit dem Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  der Hadronenproduktion in  $e^+e^-$ -Annihilationen wie folgt verknüpfen [Rei85]:

$$\text{Im}\Pi(q^2) = \frac{9}{64\pi^2\alpha^2} q^2 \sigma(e^+e^- \longrightarrow \text{Hadronen}). \quad (2.5)$$

Im Allgemeinen setzt man den Strom-Strom-Korrelator in der Källen-Lehmann-Darstellung (hier: im Vakuum)

$$\Pi(q) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} ds \frac{\rho(s)}{s - q^2} \quad (2.6)$$

mit der Definition der Spektraldichte

$$\rho(q) = \frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{iqx} \langle \Omega | j(x) j^\dagger(0) | \Omega \rangle \quad (2.7)$$

in Beziehung [Tho08]. Fügt man ein vollständiges System hadronischer Eigenzustände  $\{|n\rangle\}$  ein, erhält man:

$$\rho(q) = (2\pi)^3 \sum_n \delta^{(4)}(q - p_\Omega - p_n) \langle \Omega | j(0) | n \rangle \langle n | j^\dagger(0) | \Omega \rangle, \quad (2.8)$$

wobei  $p_\Omega$  ( $p_n$ ) den Erwartungswert des Impulsoperators angewendet auf den Vakuumgrundzustand  $|\Omega\rangle$  (hadronischen Eigenzustand  $|n\rangle$ ) bezeichnet. Im Vakuum kann man  $p_\Omega = 0$  setzen, weil sich immer ein Bezugssystem findet, in dem  $p_\Omega$  verschwindet, da der physikalische Vakuumgrundzustand Lorentz-invariant ist. Die Spektraldichte enthält damit alle hadronischen Anregungen mit den Quantenzahlen und dem Quark-Inhalt, welche durch den Strom  $j$  vorgegeben sind. Die komplizierte Struktur der Spektraldichte wird durch einen geeigneten Ansatz modelliert. Für Spektraldichten mit einer einzelnen scharfen Resonanz bei niedrigen Energien benutzt man den sogenannten „Pol+Kontinuum“-Ansatz. Dabei wird die niedrigste hadronische Anregung über eine Dirac'sche  $\delta$ -Distribution dargestellt und alle höheren (Vielteilchen-)Anregungen zusammengenommen durch ein Kontinuum repräsentiert, welches seinerseits durch die Heavyside-Funktion dargestellt wird [Col01].

Im nächsten Schritt folgt die Herleitung der Dispersionsrelation, die  $\Pi(q)$  für große euklidische Impulse mit der Summe in Gl. (2.8) verbindet. Nimmt man an, dass der Korrelator innerhalb der Kurve  $C$  eine analytische Funktion ist und auch  $q^2$  innerhalb dieser Kurve liegt (s. Abb. (2.1a)), lässt sich die Cauchy'sche Integralformel wie folgt anwenden:

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C ds \frac{\Pi(s)}{s - q^2} \quad (2.9)$$

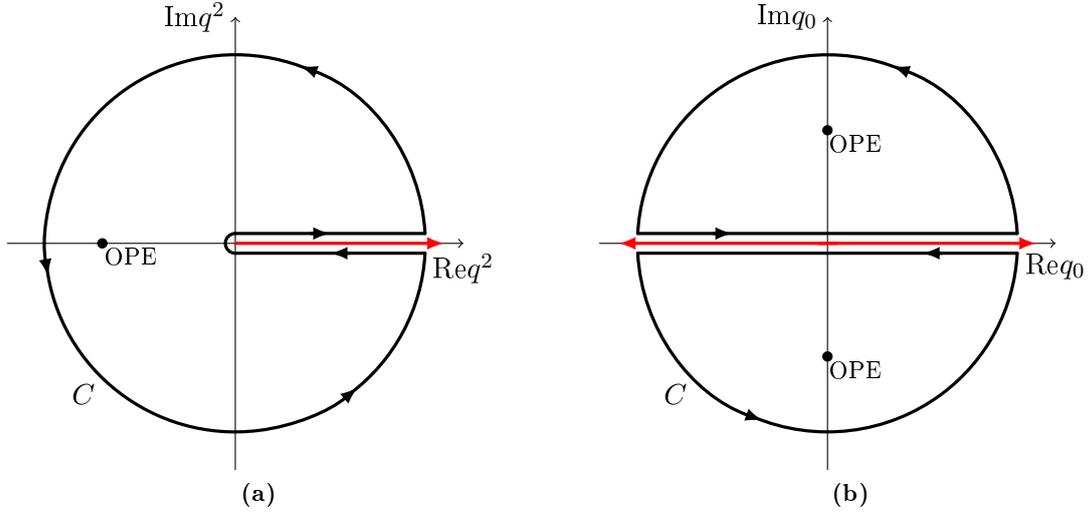
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|s|=R} ds \frac{\Pi(s)}{s - q^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^R ds \frac{\Pi(s + i\epsilon) - \Pi(s - i\epsilon)}{s - q^2}. \quad (2.10)$$

Der Integrationsweg des zweiten Integrals in Gl. (2.10) verläuft beiderseits der Pole entlang der positiven reellen Achse mit  $\epsilon > 0$ . Damit lässt sich auf

$$\Delta\Pi(s) = \frac{1}{2i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\Pi(s + i\epsilon) - \Pi(s - i\epsilon)] \quad (2.11)$$

das Schwarz'sche Spiegelungsprinzip  $\Pi(z^*) = \Pi^*(z)$  anwenden und man identifiziert nach Vergleich mit der Källen-Lehmann-Darstellung des Korrelators die Spektraldichte:

$$\Delta\Pi(s) = \text{Im}\Pi(s) \equiv \rho(s). \quad (2.12)$$



**Abbildung 2.1:** Darstellung der Integrationswege für die Herleitung der Dispersionsrelation (a) im Vakuum und (b) im Medium unter Benutzung der Cauchy'schen Integralformel. Die Punkte markieren die Impulse  $q^2$  bzw. Energien  $q_0$ , für welche die Operatorproduktentwicklung angewendet wird. Die roten Linien bezeichnen die hadronischen Pole des Strom-Strom-Korrelators entlang der reellen Achse.

Das erste Integral in Gl. (2.10) über den äußeren Kreis mit dem Radius  $R$  verschwindet, falls der Strom-Strom-Korrelator auf diesem Kreis für  $R \rightarrow \infty$  genügend schnell fällt, d.h. wenn  $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \Pi(s) \propto 1/|s|^\eta$  für ein beliebiges  $\eta > 0$  gilt. Die resultierende Dispersionsrelation

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\text{Im}\Pi(s)}{s - q^2}, \quad (2.13)$$

stellt den Ausgangspunkt von QCD-Summenregeln im Vakuum dar [Shi79].

Um die rechte hadronische Seite der Dispersionsrelation (2.13) mit der linken OPE-Seite geeignet zu verbinden, muss der Strom-Strom-Korrelator für große euklidische Impulse  $q^2$  betrachtet werden. In der Herleitung von Gl. (2.13) haben wir vorausgesetzt, dass der Integrand des ersten Integrals in Gl. (2.10) im Limes  $q^2 \rightarrow \infty$  genügend schnell gegen Null strebt. Ist dies nicht der Fall, verschwindet jenes Integral nicht, sondern konvergiert gegen ein Polynom endlichen Grades [Sug61]. Unter der Annahme, dass  $|\Pi(s)| \leq |s|^N$  für  $s \rightarrow \infty$  gilt, wobei  $N \in \mathbb{N}$  eine endliche feste Zahl ist, und der Radius  $R$  des äußeren Kreises gegen unendlich strebt, kann dies gezeigt werden. Da  $|q^2| < |s|$  gilt, wenn  $s$  entlang des äußeren Kreises genommen wird, kann von der geometrischen Reihe in Potenzen von  $q^2/s$  Gebrauch gemacht werden. Ist die obige Randbedingung erfüllt, bricht das Polynom, welches aus der geometrischen Reihe resultiert, bei der Potenz  $N$  ab. Für die Dispersionsrelation im Vakuum erhält man:

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\text{Im}\Pi(s)}{s - q^2} + \sum_{n=0}^N a_n(q^2)^n \quad (2.14)$$

mit  $a_n = \frac{1}{2\pi} \lim_{|s| \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \Pi(s) / s^n$ . Es muss darauf hingewiesen werden, dass die Koeffizienten  $a_n$  nicht proportional zur Ableitung von  $\Pi(s)$  für  $s = 0$  sind, die in der noch ausstehenden subtrahierten Dispersionsrelation auftauchen. Das Polynom in Gl. (2.14) lässt sich durch die  $(N+1)$ -te Ableitung eliminieren. Falls  $\Pi(q^2)$  in einem endlichen Kreis um den Ursprung analytisch ist, ist aber noch ein anderer Zugang über sogenannte Subtraktionen möglich, welcher nicht auf ein Polynom aus dem Integral über den äußeren Kreis führt. Dies ist der Fall, wenn die untere Grenze der Integration über die positive reelle Achse bei einem endlichen Wert  $s_0$  liegt, wobei  $s_0$  der ersten Resonanz in der Spektraldichte entspricht. Subtrahiert man auf beiden Seiten der Gl. (2.9) das Taylor-Polynom des Korrelators um den Ursprung bis zum Grade  $N-1$ , wobei für die Ableitungen auf der rechten Seite auch die rechte Seite von Gl. (2.9) zu benutzen ist,

$$\Pi(q^2) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Pi^{(n)}(s)|_{s=0}}{n!} (q^2)^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C ds \frac{\Pi(s)}{s - q^2} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(q^2)^n}{2\pi i} \oint_C ds \frac{\Pi(s)}{s^{n+1}}, \quad (2.15)$$

erhält man durch die Annahme, welche auf das Polynom in Gl. (2.14) führte, und mittels der geometrischen Reihe die  $N$ -fach subtrahierte Dispersionsrelation im Vakuum [Hil12a]

$$\Pi(q^2) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Pi^{(n)}(s)|_{s=0}}{n!} (q^2)^n = \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} ds \left( \frac{q^2}{s} \right)^N \frac{\text{Im}\Pi(s)}{s - q^2}, \quad (2.16)$$

wobei  $\Pi^{(n)}(s)|_{s=0}$  die  $n$ -fache Ableitung des Strom-Strom-Korrelators ausgewertet an der Stelle Null bedeutet. Das Polynom auf der linken Seite der Gl. (2.16) wird Subtraktion genannt.

Im Medium haben die Dispersionsrelationen eine andere Form als im Vakuum. Wie im Unterabschnitt 2.2.2 ersichtlich wird, ist der Strom-Strom-Korrelator im Medium nicht allein eine Funktion des äußeren Impulses  $q$  sondern eine Funktion aller möglichen Skalarprodukte aus  $q_\mu$  und der Mediumgeschwindigkeit  $v_\mu$ , d.h.  $\Pi(q, v) = \Pi(q^2, v^2, vq)$ . Im Ruhesystem des Hadrons und der nuklearen Materie ist der Korrelator somit eine Funktion  $\Pi(q_0)$ . Da die Operatorproduktentwicklung nur für große euklidische Impulse  $q^2$  Gültigkeit besitzt, wie dies für die Herleitung der Vakuumdispersionsrelation ausgenutzt wurde, muss der Korrelator mittels einer Wick-Rotation analytisch für (rein) imaginäre Werte von  $q_0$  fortgesetzt werden. D.h. mit  $q_0 = iq'_0$  mit  $q'_0 \in \mathbb{R}$  ist die Voraussetzung  $q^2 < 0$  immer erfüllt. Im Gegensatz zum Vakuumfall hat man Pole entlang der gesamten Energieachse [Fur92] und sucht daher eine Dispersionsrelation für die komplexe Energie-Ebene, nicht für die  $q^2$ -Ebene.

Analog zum Vakuumfall wendet man die Cauchy'sche Integralformel

$$\Pi(q_0, \vec{q}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\omega \frac{\Pi(\omega, \vec{q})}{\omega - q_0} \quad (2.17)$$

an, wobei jetzt die Kurve  $C$  in Abb. 2.1b gegeben ist. Im Unterschied zum Vakuum lässt sich der Korrelator im Medium in einen geraden ( $g$ ) und einen ungeraden ( $u$ ) Anteil bezüglich der Energie  $q_0$  aufspalten:

$$\Pi(q_0, \vec{q}) = \Pi^g(q_0, \vec{q}) + q_0 \Pi^u(q_0, \vec{q}) \quad (2.18)$$

mit

$$\Pi^g(q_0, \vec{q}) = \frac{1}{2} (\Pi(q_0, \vec{q}) + \Pi(-q_0, \vec{q})) = \Pi^g(-q_0, \vec{q}), \quad (2.19a)$$

$$\Pi^u(q_0, \vec{q}) = \frac{1}{2q_0} (\Pi(q_0, \vec{q}) - \Pi(-q_0, \vec{q})) = \Pi^u(-q_0, \vec{q}). \quad (2.19b)$$

Vorausgesetzt die Unstetigkeitsstellen befinden sich entlang der reellen Achse

$$\Delta\Pi(\omega, \vec{q}) = \frac{1}{2i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\Pi(\omega + i\epsilon, \vec{q}) - \Pi(\omega - i\epsilon, \vec{q})] = \text{Im}\Pi(\omega, \vec{q}), \quad (2.20)$$

ergeben sich die  $N$ -fach subtrahierten Dispersionsrelationen im Medium für den geraden Anteil

$$\begin{aligned} \Pi^g(q_0, \vec{q}) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Pi^{(n)}(\omega, \vec{q})|_{\omega=0}}{n!} (q_0)^n (1 + (-1)^n) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \text{Im}\Pi(\omega, \vec{q}) \frac{q_0^N}{\omega^{N-1}} \frac{(1 + (-1)^N) + \frac{q_0}{\omega}(1 - (-1)^N)}{\omega^2 - q_0^2} \end{aligned} \quad (2.21a)$$

und ungeraden Anteil des Strom-Strom-Korrelators

$$\begin{aligned} \Pi^u(q_0, \vec{q}) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Pi^{(n)}(\omega, \vec{q})|_{\omega=0}}{n!} (q_0)^{n-1} (1 - (-1)^n) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \text{Im}\Pi(\omega, \vec{q}) \frac{q_0^{N-1}}{\omega^{N-1}} \frac{(1 - (-1)^N) + \frac{q_0}{\omega}(1 + (-1)^N)}{\omega^2 - q_0^2}. \end{aligned} \quad (2.21b)$$

## 2.2 Operatorproduktentwicklung

Um den Korrelator mit den Quark-Freiheitsgraden der Ströme in Beziehung zu setzen, benutzt man die Operatorproduktentwicklung [Wil69]. Da Hadronen für niedrige Energien die Freiheitsgrade der Theorie sind und Quarks aber nur bei großen Impulsüberträgen auflösbar sind, scheint eine solche Entwicklung, die Quark-Freiheitsgrade heranzieht, intuitiv nur für große äußere Impulse gültig zu sein. Ein Beweis für die Gültigkeit der Operatorproduktentwicklung basiert auf Feynman-Diagrammtechniken und ist streng genommen nur in der Störungstheorie erbracht [Shi79]. Nach Wilson lassen sich Operatorprodukte für kurze Distanzen  $x - y$  in eine Reihe komplexwertiger Funktionen  $\tilde{C}_n$  und lokaler Operatoren  $O_n$  entwickeln:

$$A(x)B(y) = \sum_n \tilde{C}_n(x - y) O_n. \quad (2.22)$$

Die Wilson-Koeffizienten  $\tilde{C}_n(x - y)$  sind für  $x \rightarrow y$  singular. Die komplette Entwicklung enthält unendlich viele lokale (endliche) Operatoren  $O_n$ , die so geordnet sind, dass der Grad

der Singularität mit dem Index  $n$  ansteigt. Die Operatoren der rechten Seite in Gl. (2.22) lassen sich aufgrund der konstanten Massendimension des Operatorproduktes  $A(x)B(y)$  auch entsprechend ihrer Massendimension sortieren, wobei über alle Produkte von Operatoren der betrachteten Theorie summiert wird. Abgesehen vom störungstheoretischen Beitrag mit  $O_n = \mathbb{1}$  ( $\dim_m = 0$ ) haben die Produkte der vorhandenen Operatoren  $D_\mu$  ( $\dim_m = 1$ ),  $q$  ( $\dim_m = 3/2$ ) und  $G_{\mu\nu}$  ( $\dim_m = 2$ ) folgende Massendimensionen:

$$\bar{q}q : \dim_m = 3, \quad (2.23a)$$

$$\bar{q}D_\mu q : \dim_m = 4, \quad (2.23b)$$

$$G^2 : \dim_m = 4, \quad (2.23c)$$

$$\bar{q}D_\mu D_\nu q : \dim_m = 5, \quad (2.23d)$$

$$\bar{q}\sigma_{\mu\nu}G^{\mu\nu}q : \dim_m = 5, \quad (2.23e)$$

$$\bar{q}D_\mu D_\nu D_\lambda q : \dim_m = 6, \quad (2.23f)$$

$$\bar{q}D_\mu G_{\nu\lambda}q : \dim_m = 6, \quad (2.23g)$$

$$\bar{q}q\bar{q}q : \dim_m = 6, \quad (2.23h)$$

$$G^3 : \dim_m = 6. \quad (2.23i)$$

Diese Entwicklung liefert eine asymptotische Reihe, wobei in dieser Arbeit die Operatoren bis zur Massendimension 6 behandelt werden, insbesondere (2.23f), (2.23g) und (2.23h). Im Impulsraum erhält man für die OPE:

$$\int d^4x e^{iq(x-y)} A(x)B(y) = \sum_n C_n(q) O_n \quad (2.24)$$

mit  $C_n \propto q^{-n+m}$ , wobei  $m$  eine konstante Zahl ist, die von der Massendimension des Operatorproduktes  $A(x)B(y)$  abhängt. Aufgrund dieser Potenzstruktur der Wilson-Koeffizienten werden die Glieder der Reihe (2.24) auch als Potenz-Korrekturen bezeichnet. Die Reihe (2.24) ist eine Entwicklung auf Operatorniveau. Damit hängen die komplexwertigen Wilson-Koeffizienten nicht von der Wahl des Zustandes ab, für welchen das Operatorprodukt ausgewertet wird. Insbesondere sind sie unabhängig davon, ob die OPE im Medium- oder im physikalischen Vakuumgrundzustand ausgewertet wird. Obwohl für endliche Dichten und Temperaturen mediumspezifische Kondensate mit entsprechenden Wilson-Koeffizienten zur OPE hinzukommen, sind die Koeffizienten der Vakuumkondensate für kleine Temperaturen in guter Näherung gleich den Wilson-Koeffizienten, die man bei der Auswertung der OPE im physikalischen Vakuumgrundzustand erhält.

Für die Evaluierung des Strom-Strom-Korrelators wird der Erwartungswert des zeitgeordneten Operatorproduktes der Entwicklung (2.24) mit  $A(x) = j(x)$  und  $B(y=0) = j^\dagger(0)$  benutzt:

$$\Pi(q) = \sum_n C_n(q) \langle \Omega | O_n | \Omega \rangle. \quad (2.25)$$

Die Größe  $\langle \Omega | O_n | \Omega \rangle$  in Gl. (2.25) wird als Kondensat bezeichnet. Würde man die OPE (2.24) in der Störungstheorie berechnen, würde in diesem Fall lediglich der Erwartungswert des Einsoperators zur Entwicklung in Gl. (2.25) beitragen, da alle anderen Erwartungswerte verschwinden. Um nicht-perturbativen Effekten Rechnung zu tragen, dürfen auch die Erwartungswerte höherer Operatoren nicht verschwinden. Aufgrund des QCD-Grundzustandes  $|\Omega\rangle$

geben die Erwartungswerte der Operatoren in (2.23) endliche Beiträge. Damit lassen sich die nicht-perturbativen langreichweitigen Effekte in den Kondensaten absorbieren, wohingegen die Wilson-Koeffizienten die perturbativen Anteile tragen. Die Einführung einer Skala  $\mu$  ist unumgänglich, um diese Separation in lang- und kurzreichweitige Effekte zu gewährleisten. Die Trennung der Skalen ist bei Schleifenkorrekturen mit den zugehörigen Impulsiintegrationen nötig, da die enthaltenen kleinen Impulsbeträge zu Wilson-Koeffizienten führen, die langreichweitige Effekte beinhalten. Dies macht die Redefinition von Kondensaten nötig [Col01]. In [Shi98] wird daher die „praktische OPE“ eingeführt. Die Trennung der Skalen wird in endlicher Schleifen-Ordnung und unter Einbeziehung von Kondensaten bis zu einer gegebenen Massendimension durch Redefinition der Kondensate erreicht.

Ist die Trennung der Skalen gesichert, wird die Benutzung von perturbativen Rechenverfahren möglich. Wertet man den Strom-Strom-Korrelator für große raumartige Impulse  $q^2 < 0$  aus, lässt sich das Wick-Theorem anwenden, welches auf der Zerlegung von Feldoperatoren in positive und negative Frequenzen mit zugehörigen Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren fußt. Eine solche Fourier-Zerlegung ist für freie Feldoperatoren üblich, für allgemeine wechselwirkende Operatoren im Heisenberg-Bild jedoch nicht möglich. Allerdings erfüllen die Operatoren im Wechselwirkungsbild der Störungstheorie die freien Bewegungsgleichungen, womit eine Zerlegung wie für den Fall freier Felder ermöglicht wird. Insofern ist das Wick-Theorem ein störungstheoretisches Verfahren [Rom69]. Für  $n$  Operatoren gilt [Pes95]:

$$\begin{aligned} T [\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\dots\phi_n(x_n)] &= : \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\dots\phi_n(x_n) : \\ &+ : \text{alle möglichen Kontraktionen} : , \end{aligned} \quad (2.26)$$

wobei eine Kontraktion „ $\sqcup$ “ durch

$$\underbrace{\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)} = \langle 0|T [\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)] |0\rangle \quad (2.27)$$

definiert ist und „ $: \dots :$ “ das normalgeordnete Produkt bezeichnet, d.h. innerhalb der Normalordnung werden alle Vernichtungsoperatoren rechts von den Erzeugern angeordnet. Am besten lässt sich das Theorem an einem Beispiel verdeutlichen. Für vier Felder ergibt sich (in Kurzschreibweise  $\phi_i(x_i) = \phi_i$ ):

$$\begin{aligned} T [\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4] &= : \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 : \\ &+ : \underbrace{\phi_1\phi_2}\phi_3\phi_4 : + : \underbrace{\phi_1\phi_2}\phi_3\phi_4 : + : \underbrace{\phi_1\phi_2}\phi_3\phi_4 : \\ &+ : \phi_1\underbrace{\phi_2\phi_3}\phi_4 : + : \phi_1\underbrace{\phi_2\phi_3}\phi_4 : + : \phi_1\underbrace{\phi_2\phi_3}\phi_4 : \\ &+ : \phi_1\underbrace{\phi_2}\underbrace{\phi_3}\phi_4 : + : \phi_1\underbrace{\phi_2\phi_3}\phi_4 : + : \phi_1\underbrace{\phi_2\phi_3}\phi_4 : . \end{aligned} \quad (2.28)$$

Eine Abwandlung des Wick-Theorems erhält man, wenn Felder, auf welche die Zeitordnung angewendet wird, bereits normalgeordnet sind. Dann erhält man das Resultat in Gl. (2.26), wobei alle Kontraktionen von Feldern, die im selben normalgeordneten Produkt notiert sind, entfallen [Rom69]. Für das Beispiel mit vier Feldern sieht man die Wirkungsweise des Theorems:

$$\begin{aligned} T [\phi_1\phi_2 : \phi_3\phi_4 :] &= : \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 : + : \underbrace{\phi_1\phi_2}\phi_3\phi_4 : + : \underbrace{\phi_1\phi_2}\phi_3\phi_4 : + : \underbrace{\phi_1\phi_2}\phi_3\phi_4 : \\ &+ : \phi_1\underbrace{\phi_2\phi_3}\phi_4 : + : \phi_1\underbrace{\phi_2\phi_3}\phi_4 : + : \phi_1\underbrace{\phi_2\phi_3}\phi_4 : + : \phi_1\underbrace{\phi_2\phi_3}\phi_4 : . \end{aligned} \quad (2.29)$$

Wird das Wick-Theorem auf den Vakuumerwartungswert von Operatoren angewendet, verschwinden die Terme mit Normalordnung aufgrund der Definition des normalgeordneten Produkts, insbesondere gilt:  $\langle 0 | : (\text{ungerade Anzahl von Operatoren}) : | 0 \rangle = 0$ . Übrig bleiben somit allein die vollkontrahierten Ausdrücke. Man beachte, dass dies nur für den Grundzustand  $|0\rangle$  der freien Theorie gilt, aufgrund von  $a|0\rangle = 0$ , aber nicht für das QCD-Vakuum  $|\Omega\rangle$ .

### 2.2.1 Fock-Schwinger-Eichung – Hintergrundfeld-Methode

Die in dieser Arbeit betrachteten Korrelatoren farbneutraler Ströme sind eichinvariant. Jede spezielle Eichbedingung an das gluonische Hintergrundfeld liefert die gleichen Ergebnisse und kann somit geeignet gewählt werden. Für Operatorproduktentwicklungen von Strom-Strom-Korrelatoren eignet sich die Fock-Schwinger-Eichung

$$(x^\mu - x_0^\mu)A_\mu(x) = 0, \quad (2.30)$$

welche unabhängig von Fock [Foc37] und Schwinger [Sch51] im Rahmen der Quantenelektrodynamik eingeführt wurde. Die SVZ-Summenregeln haben der Eichbedingung (2.30) auch zu einer Anwendung in der QCD verholfen, da diese eine kompakte Formulierung der Quark- und Gluon-Propagatoren erlaubt. Das in diesem Kapitel präsentierte Kalkül ist [Nov84, Pas84] entlehnt. Für gewöhnlich wird  $x_0^\mu = 0$  gewählt. Obwohl die Eichbedingung (2.30) Skaleninvarianz aufweist und ebenso invariant unter Paritäts- und Zeitumkehr-Transformation ist, bricht sie die Translationssymmetrie. Jedoch wird die Kanzellierung der  $x_0$ -Abhängigkeit in den Rechnungen durch Argumente in [Nov84] gestützt.

Eine wichtige Implikation der Fock-Schwinger-Eichung ist, dass sich das Potential des gluonischen Hintergrundfeldes durch den zugehörigen Feldstärketensor ausdrücken lässt:

$$A_\mu^A(x) = \int_0^1 d\alpha \alpha x^\nu G_{\nu\mu}^A(\alpha x). \quad (2.31)$$

Bei der Herleitung von Gl. (2.31) wird von der Eichbedingung (2.30) Gebrauch gemacht. Nach der Produktregel gilt

$$0 = \partial_\mu (y^\nu A_\nu^A(y)) = A_\mu^A(y) + y^\nu \partial_\mu A_\nu^A(y) \quad (2.32)$$

mit  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial y^\mu}$ . Benutzt man die aus der Definition des gluonischen Feldstärketensor (A.2c) folgende Relation  $G_{\mu\nu}^A(y) = \partial_\mu A_\nu^A(y) - \partial_\nu A_\mu^A(y) + gf^{ABC} A_\mu^B(y) A_\nu^C(y)$ , so erhält man dank der Anti-Symmetrie von  $G_{\mu\nu}^A$

$$A_\mu^A(y) + y^\nu \partial_\nu A_\mu^A(y) = y^\nu G_{\nu\mu}^A(y), \quad (2.33)$$

wobei der nicht-abelsche Term aufgrund der Eichbedingung (2.30) verschwindet. Substituiert man  $y^\nu = \alpha x^\nu$  in Gl. (2.33), liefert die Kettenregel

$$\frac{d}{d\alpha} \left( \alpha A_\mu^A(\alpha x) \right) = \alpha x^\nu G_{\nu\mu}^A(\alpha x). \quad (2.34)$$

Mit der Integration über  $\alpha$  von 0 bis 1 verifiziert man Gl. (2.31).

Dank der Fock-Schwinger-Eichung (2.30) lässt sich nicht nur das Gluon-Potential als Feldstärketensor schreiben, sondern sie ermöglicht auch in den Taylor-Entwicklungen beliebiger Felder

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_n} (\partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_n} \phi)_{x=0} \quad (2.35)$$

die Ersetzung der partiellen Ableitungen  $\partial_{\alpha_i} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_i}}$  durch die kovarianten Ableitungen  $D_{\alpha_i}(x) = \partial_{\alpha_i} - igA_{\alpha_i}(x)$ . Dies wird ersichtlich, wenn man die Taylor-Entwicklung des Gluon-Feldes  $A_\mu$  bei  $x_0 = 0$  in Gl. (2.30) einsetzt:

$$x^\mu \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_n} (\partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_n} A_\mu)_{x=0} \right) = 0. \quad (2.36)$$

Der Ausdruck auf der linken Seite verschwindet im Allgemeinen nur, falls jeder Summand der Taylor-Entwicklung multipliziert mit  $x^\mu$  selbst verschwindet, d.h. für alle  $n$  und beliebiges  $x$  gilt

$$x^\mu x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_n} (\partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_n} A_\mu)_{x=0} = 0. \quad (2.37)$$

Dies hat zur Folge, dass der gluonische Term der kovarianten Ableitung keinen Beitrag liefert. Auch mehrfach hintereinander ausgeführte kovariante Ableitungen wirken in der Fock-Schwinger-Eichung wie die entsprechende Anzahl partieller Ableitungen. Für die Summanden der Taylor-Entwicklung (2.35) eines beliebigen um den Ursprung entwickelten Feldes  $\phi$  folgt

$$x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_n} (\partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_n} \phi)_{x=0} = x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_n} (D_{\alpha_1} \dots D_{\alpha_n} \phi)_{x=0}. \quad (2.38)$$

Entwickelt man den Feldstärketensor in Gl. (2.31) für kleine  $x$  und benutzt Gl. (2.38) mit  $\phi = G_{\nu\mu}$  folgt:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= \int_0^1 d\alpha \alpha x^\nu G_{\nu\mu}(\alpha x) \\ &= \int_0^1 d\alpha \alpha x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_n} (\partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_n} G_{\nu\mu})_{x=0} \\ &= \int_0^1 d\alpha \alpha x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_n} (D_{\alpha_1} \dots D_{\alpha_n} G_{\nu\mu})_{x=0}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Nach der Integration über  $\alpha$  erhalten wir die kovariante Entwicklung des Gluon-Feldes ausgedrückt durch den Gluon-Feldstärketensor:

$$A_\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} x^\nu x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_n} (D_{\alpha_1} \dots D_{\alpha_n} G_{\nu\mu})_{x=0}. \quad (2.40)$$

Die Fock-Schwinger-Eichung ermöglicht ebenso kovariante Entwicklungen für Fermion-Felder  $\psi$ , wenn man in Gl. (2.38) das beliebige Feld  $\phi$  durch  $\psi$  ersetzt:

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_n} (D_{\alpha_1} \dots D_{\alpha_n} \psi)_{x=0}, \quad (2.41)$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_n} \left( \bar{\psi} \overleftarrow{D}_{\alpha_1} \dots \overleftarrow{D}_{\alpha_n} \right)_{x=0}. \quad (2.42)$$

Die Hintergrundfeld-Methode wird benutzt, um nicht-perturbative Effekte des Vakuums und des Mediums zu modellieren. Die durch das Wick-Theorem erzeugten Quark-Propagatoren  $S(x, y) = -i\langle T [q(x)\bar{q}(y)] \rangle$ , die im Folgenden als störungstheoretische Propagatoren bezeichnet werden, beschreiben keine freie Propagation, sondern die Propagation des Quarks in einem klassischen, schwachen, gluonischen Hintergrundfeld  $A_\mu$ , d.h. der störungstheoretische Propagator genügt der Gleichung:

$$\left[ i\overleftarrow{D}(z_1) - m_q \right] S(z_1, y) = \left[ i\overleftarrow{\not{D}}_{z_1} + g\overleftarrow{A}(z_1) - m_q \right] S(z_1, y) = \delta^{(4)}(z_1 - y). \quad (2.43)$$

Lässt sich das Hintergrundfeld  $gA_\mu$  als Störung behandeln, so kann  $S(z_1, y)$  in eine (asymptotische) Reihe entwickelt werden [Itz80, Nov84]. Zur Herleitung dieser Entwicklung multipliziert man beide Seiten der Gl. (2.43) mit dem freien Propagator  $iS^{(0)}(x, z_1) = iS^{(0)}(x - z_1)$ , welcher die Gleichung

$$S^{(0)}(x - z_1) \left[ -i\overleftarrow{\not{D}}_{z_1} - m_q \right] = \delta^{(4)}(x - z_1) \quad (2.44)$$

erfüllt, und integriert über  $z_1$ :

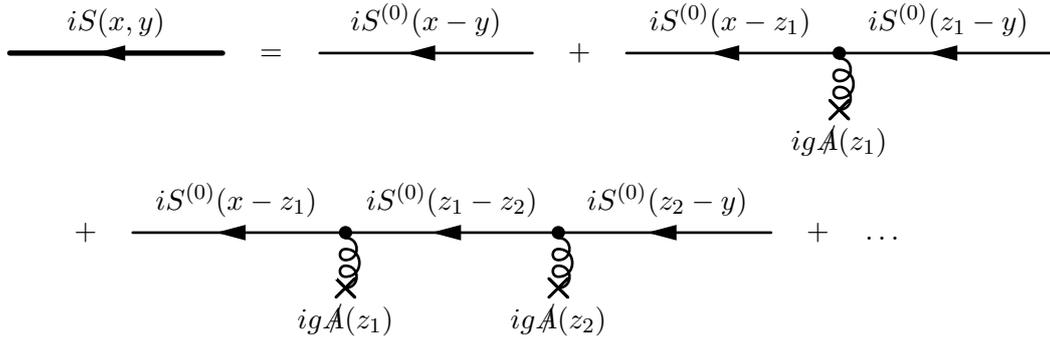
$$\begin{aligned} iS^{(0)}(x - y) &= \int d^4 z_1 iS^{(0)}(x - z_1) \left[ i\overleftarrow{\not{D}}_{z_1} + g\overleftarrow{A}(z_1) - m_q \right] S(z_1, y) \\ &= \int d^4 z_1 iS^{(0)}(x - z_1) \left[ -i\overleftarrow{\not{D}}_{z_1} + g\overleftarrow{A}(z_1) - m_q \right] S(z_1, y), \end{aligned} \quad (2.45)$$

wobei die zweite Zeile durch partielle Integration aus der ersten hervorgeht. Unter Benutzung der Gl. (2.44) erhält man die Integralgleichung, welche den störungstheoretischen Propagator bestimmt:

$$iS(x, y) = iS^{(0)}(x - y) + \int d^4 z_1 iS^{(0)}(x - z_1) i g \overleftarrow{A}(z_1) iS(z_1, y), \quad (2.46)$$

wobei Einsetzen der Gl. (2.46) in sich selbst

$$\begin{aligned} iS(x, y) &= iS^{(0)}(x - y) + \int d^4 z_1 iS^{(0)}(x - z_1) i g \overleftarrow{A}(z_1) iS^{(0)}(z_1 - y) \\ &\quad + \int d^4 z_1 z_2 iS^{(0)}(x - z_1) i g \overleftarrow{A}(z_1) iS^{(0)}(z_1 - z_2) i g \overleftarrow{A}(z_2) iS(z_2 - y) \end{aligned} \quad (2.47)$$



**Abbildung 2.2:** Störungstheoretischer Quark-Propagator im schwachen, gluonischen Hintergrundfeld. Für die diagrammatische Darstellung wurde  $\tilde{A}_\mu = \tilde{A}_\mu^{(0)}$  in niedrigster Ordnung genommen (s. Gl. (2.58)).

ergibt. Unterzieht man also Gl. (2.46) mittels Iteration einer perturbativen Entwicklung, lautet das Resultat:

$$\begin{aligned}
 iS(x, y) &= iS^{(0)}(x - y) \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \int d^4 z_1 \dots z_n iS^{(0)}(x - z_1) ig\tilde{A}(z_1) iS^{(0)}(z_1 - z_2) \dots ig\tilde{A}(z_n) iS^{(0)}(z_n - y).
 \end{aligned}
 \tag{2.48}$$

Die diagrammatische Interpretation dieser Entwicklung für die ersten drei Terme ist in Abb. 2.2 dargestellt. Der störungstheoretische Quark-Propagator (2.48) ist aufgrund der Eichbedingung (2.30) nicht translationsinvariant, d.h. Verschiebungen in der Raum-Zeit  $x \rightarrow x' = x - y$  liefern, im Gegensatz zum freien Quark-Propagator, nicht denselben Ausdruck.  $S(x, y)$  und  $S(x - y, 0)$  sind daher unterschiedliche Größen. Um die Eichbedingung nicht zu verletzen, werden die folgenden zwei Fourier-transformierten störungstheoretischen Quark-Propagatoren eingeführt:

$$S(p) = \int d^4 x e^{ipx} S(x, 0), \tag{2.49}$$

$$\tilde{S}(p) = \int d^4 x e^{-ipx} S(0, x). \tag{2.50}$$

Die Fourier-transformierten freien Quark-Propagatoren und gluonischen Hintergrundfelder sind

$$S^{(0)}(q) = \int d^4 x e^{iqx} S^{(0)}(x, 0) = \int d^4 x e^{-iqx} S^{(0)}(0, x), \tag{2.51}$$

$$A_\mu(k) = \int d^4 x e^{ikx} A_\mu(x). \tag{2.52}$$

Berechnet man den Fourier-transformierten störungstheoretischen Quark-Propagator (2.49) mit Gl. (2.48) und drückt freie Ortsraum-Propagatoren und Hintergrundfelder durch ihre

Fourier-transformierten (2.51) und (2.52) aus, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 S(p) &= S^{(0)}(p) + \sum_{n=1}^{\infty} (-g)^n \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4 q_n}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4 k_n}{(2\pi)^4} \\
 &\quad \times \delta^{(4)}(p - k_1 - q_1) \delta^{(4)}(q_1 - k_2 - q_2) \cdots \delta^{(4)}(q_{n-1} - k_n - q_n) \\
 &\quad \times S^{(0)}(p) \mathcal{A}(k_1) S^{(0)}(q_1) \mathcal{A}(k_2) S^{(0)}(q_2) \cdots \mathcal{A}(k_n) S^{(0)}(q_n), \quad (2.53)
 \end{aligned}$$

wobei die Impulsintegration zwei Varianten zulässt. Obwohl in [Gro95] die Integration über  $d^4 q_1 \dots d^4 q_n$  vorgenommen wird, soll wie in [Hil12a] zur korrekten Herleitung der Gl. (2.59) die Integration über  $d^4 k_1 \dots d^4 k_n$  gewählt werden:

$$\begin{aligned}
 S(p) &= S^{(0)}(p) + \sum_{n=1}^{\infty} (-g)^n S^{(0)}(p) \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4 q_n}{(2\pi)^4} \\
 &\quad \times \mathcal{A}(p - q_1) S^{(0)}(q_1) \mathcal{A}(q_1 - q_2) S^{(0)}(q_2) \cdots \mathcal{A}(q_{n-1} - q_n) S^{(0)}(q_n). \quad (2.54)
 \end{aligned}$$

Das benötigte Fourier-transformierte Hintergrundfeld  $A_\mu(p-q)$ , berechnet mit den Gln. (2.52) und (2.40), hat folgende Form:

$$A_\mu(p-q) = (2\pi)^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^{n+1}}{n!(n+2)} (D_{\alpha_1} \cdots D_{\alpha_n} G_{\nu\mu})_{x=0} \left( \partial_q^\nu \partial_q^{\alpha_1} \cdots \partial_q^{\alpha_n} \delta^{(4)}(p-q) \right), \quad (2.55)$$

wobei die Entwicklung in  $x$  den partiellen Ableitungen bezüglich des Impulses  $q$  gewichen ist. Es ist ebenso möglich, die Fourier-Darstellung der Dirac'schen  $\delta$ -Distribution nach  $p$  oder  $p-q$  abzuleiten, was in Gl. (2.55) auf einen zusätzlichen Faktor  $(-1)^{n+1}$  führt. Allerdings stellt sich die Ableitung nach  $q$  als die geeignete Wahl heraus. Durch partielle Integration erhält man für eine beliebige impulsabhängige Funktion  $f(q)$ :

$$\int \frac{d^4}{(2\pi)^4} g \mathcal{A}(p-q) f(q) = \left( \gamma \tilde{A} \right) f(p), \quad (2.56)$$

mit der Definition  $\left( \gamma \tilde{A} \right) = \gamma^\mu \tilde{A}_\mu$  und

$$\tilde{A}_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_\mu^{(n)}, \quad (2.57)$$

$$\tilde{A}_\mu^{(n)} = -g \frac{(-i)^{n+1}}{n!(n+2)} (D_{\alpha_1} \cdots D_{\alpha_n} G_{\nu\mu})_{x=0} \partial_p^\nu \partial_p^{\alpha_1} \cdots \partial_p^{\alpha_n}, \quad (2.58)$$

wobei die partiellen Ableitungen  $\partial$  in Gl. (2.58) immer bezüglich des Impulsarguments von  $f$  zu verstehen sind. Durch sukzessives Anwenden der Gl. (2.56) in Gl. (2.54) erhält man für den störungstheoretischen Quark-Propagator:

$$S(p) = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}(p) \quad (2.59)$$

mit

$$\begin{aligned}
 S^{(n)}(p) &= -S^{(0)}(p) \left( \overleftarrow{\gamma \tilde{A}} \right) S^{(n-1)}(p) \\
 &= -S^{(n-1)}(p) \left( \overleftarrow{\gamma \tilde{A}} \right) S^{(0)}(p) \\
 &= (-1)^n S^{(0)}(p) \underbrace{\left( \overleftarrow{\gamma \tilde{A}} \right) S^{(0)}(p) \dots \left( \overleftarrow{\gamma \tilde{A}} \right) S^{(0)}(p)}_{n\text{-mal } \left( \overleftarrow{\gamma \tilde{A}} \right) S^{(0)}(p)}. \tag{2.60}
 \end{aligned}$$

Die in  $\left( \overleftarrow{\gamma \tilde{A}} \right)$  enthaltenen partiellen Ableitungen wirken auf alle Funktionen (Quark-Propagatoren) zur Rechten, und die enthaltenen kovarianten Ableitungen auf den nächstgelegenen gluonischen Feldstärketensor. Benutzt man die gleichen Schritte ab Gl. (2.51) zur Berechnung des störungstheoretischen Propagators  $\tilde{S}(p)$ , kommt man auf:

$$\tilde{S}(p) = S^{(0)}(p) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n S^{(0)}(p) \underbrace{\left( \overleftarrow{\gamma \tilde{A}} \right) S^{(0)}(p) \dots \left( \overleftarrow{\gamma \tilde{A}} \right) S^{(0)}(p)}_{n\text{-mal } \left( \overleftarrow{\gamma \tilde{A}} \right) S^{(0)}(p)}, \tag{2.61}$$

wobei die Pfeile in die Richtung weisen, in welche die partiellen Ableitungen von  $\tilde{A}_\mu$  wirken. Obwohl der störungstheoretische Quark-Propagator im Ortsraum nicht translationsinvariant ist, d.h. sind  $S(x, 0)$  und  $S(0, x)$  voneinander verschieden, ist die Gl. (2.61) identisch mit Gl. (2.59).

Um die Ordnung der im störungstheoretischen Quark-Propagator enthaltenen Entwicklung des gluonischen Hintergrundfeldes  $\tilde{A}^{(k_i)}$  zu vermerken wird in Gl. (2.60) folgende spezifizierende Notation eingeführt:

$$S_{\left( \tilde{A}^{(k_1)}, \dots, \tilde{A}^{(k_n)} \right)}^{(n)}(p) = (-1)^n S^{(0)}(p) \gamma^{\mu_1} \tilde{A}_{\mu_1}^{(k_1)} S^{(0)}(p) \dots \gamma^{\mu_n} \tilde{A}_{\mu_n}^{(k_n)} S^{(0)}(p). \tag{2.62}$$

Gilt  $k_1 = \dots = k_n \equiv k$ , reduziert sich die Schreibweise auf  $S_{\left( \tilde{A}^{(k)} \right)}^{(n)}(p)$ .

Ist man an der OPE von Strom-Strom-Korrelatoren in höheren Ordnungen der Störungstheorie interessiert, muss für eine komplette Analyse auch der störungstheoretische Gluon-Propagator im klassischen gluonischen Hintergrundfeld einbezogen werden. Da in dieser Arbeit keine Beiträge betrachtet werden, welche die Benutzung des störungstheoretischen Gluon-Propagators nötig machten, wird im Folgenden eine kurze schematische Herleitung präsentiert.

Die Propagation des Gluons wird dabei durch die Abänderung der QCD-Lagrange-Dichte modelliert [Shu82, Gro95], in welcher das Eichfeld durch

$$A_\mu^A + a_\mu^A \tag{2.63}$$

substituiert wird. In dieser Herleitung enthalten der gluonische Feldstärketensor  $G_{\mu\nu}^A$  und die kovariante Ableitung  $D_\mu$  ausschließlich das Hintergrundfeld  $A_\mu^A$ . Man wählt die Fock-Schwinger-Eichung für  $A_\mu^A$ , womit die QCD-Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^A G^{A\mu\nu} - \frac{1}{2} (D_\mu a_\nu^A)^2 + \frac{1}{2} (D_\mu a_\nu^A) (D^\nu a^{A\mu}) + \frac{1}{2} g a_\mu^A G_{\mu\nu}^{AB} a_\nu^B + \dots \tag{2.64}$$

**Abbildung 2.3:** Schematische Darstellung des störungstheoretischen Gluon-Propagators im schwachen, gluonischen Hintergrundfeld.

mit

$$D_\mu a_\nu^A = \partial_\mu a_\nu^A + g A_\mu^{AC} a_\nu^C, \quad (2.65a)$$

$$A_\mu^{AC} = f^{ABC} A_\mu^B, \quad (2.65b)$$

$$G_{\mu\nu}^{AB} = f^{ACB} G_{\mu\nu}^C \quad (2.65c)$$

eichinvariant bezüglich des freien Gluon-Feldes  $a_\mu^A$  bleibt [Nov84]. Der vierte Term der Lagrange-Dichte liefert ausschließlich Vertexfunktionen mit einem Hintergrundfeld  $\Gamma_{\mu\nu}^{(1)}$ , wohingegen der zweite und dritte Term aus Gl. (2.64) neben Vertexfunktionen mit einem auch Vertexfunktionen mit zwei Hintergrundfeldern  $\Gamma_{\mu\nu}^{(2)}$  birgt. Der störungstheoretische Gluon-Propagator im klassischen, gluonischen Hintergrundfeld, definiert durch

$$D_{\mu\nu}^{AB}(x,y) = -i \langle T [a_\mu^A(x) a_\nu^B(y)] \rangle, \quad (2.66)$$

ist in Abb. (2.3) dargestellt. Ergänzt man in der Lagrange-Dichte den zur Quantisierung nötigen Eichfixierungsterm in Feynman-Eichung  $-\frac{1}{2}(D^\mu a_\mu^A)^2$  ergibt sich für den freien Gluon-Propagator  $D_{\mu\nu}^{(0)}(p) = -g_{\mu\nu}/p^2$  und für die Vertexfunktionen  $\Gamma_{\mu\nu}^{(1)} = iA_\lambda^{AB}(p_1^\lambda + p_2^\lambda)g_{\mu\nu} - iA_\mu^{AB}(p_{1\nu} - p_{2\nu}) - iA_\nu^{AB}(p_{2\mu} - p_{1\mu}) - iG_{\mu\nu}^{AB}$  bzw.  $\Gamma_{\mu\nu}^{(2)} = -A_\lambda^{AC} A^{CB\lambda} g_{\mu\nu} - A_\mu^{AC} A_\nu^{CB} + A_\nu^{AC} A_\mu^{CB}$ , wobei  $p_1$  der einlaufende und  $p_2$  der auslaufende Impuls des propagierenden Gluons ist. Konstruiert man den störungstheoretischen Gluon-Propagator wie in Abb. 2.3, erhält man bis zur Ordnung  $p^{-6}$ :

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(p) &= \int d^4x e^{ip(x-y)} D_{\mu\nu}(x,y) \\ &= -\frac{g_{\mu\nu}}{p^2} + g \frac{2}{p^4} G_{\mu\nu} + g \frac{4i}{p^6} (pD) G_{\mu\nu} - g \frac{2i}{3p^6} g_{\mu\nu} D^\lambda G_{\lambda\sigma} p^\sigma \\ &\quad + g \frac{2}{p^8} (pD) g_{\mu\nu} D^\lambda G_{\lambda\sigma} p^\sigma + g \frac{2}{p^8} (p^2 D^2 G_{\mu\nu} - 4(pD)^2 G_{\mu\nu}) \\ &\quad - g^2 \frac{1}{2p^8} g_{\mu\nu} (p^2 (G_{\lambda\sigma})^2 - 4(p^\lambda G_{\lambda\sigma})^2) + g^2 \frac{4}{p^6} g^{\lambda\sigma} G_{\mu\lambda} G_{\sigma\nu}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

### 2.2.2 Kondensate

Kondensate werden in der Operatorproduktentwicklung wie in Abschnitt 2.2 eingeführt. Sie sind Korrekturen zur Störungstheorie und erfassen die langreichweitigen Effekte der Theorie, indem sie die Wechselwirkung von Quarks und Gluonen mit dem nicht-trivialen QCD-Vakuum parametrisieren. Leichte Quarks und Gluonen koppeln an den QCD-Grundzustand,

wobei sie mit entsprechenden virtuellen Teilchen annihilieren. Die Kondensate entsprechen im Vakuum festen numerischen Werten, die, einmal bestimmt, für die Evaluierung aller Summenregeln herangezogen werden können. Diese numerischen Werte sind durch die Auswertung von Summenregeln für bekannte hadronische Eigenschaften bestimmbar bzw. in QCD-Gitterrechnungen zugänglich. Vakuumkondensate sind seit der Einführung der QCD-Summenregeln Objekte vieler Untersuchungen gewesen. Bei endlichen Baryonendichten und Temperaturen ergeben sich jedoch weitere Kondensate, die im Vakuum verschwinden. Die Einbeziehung jener mediumspezifischen Kondensate ist für die Untersuchung von Eigenschaften der Hadronen in nuklearer Materie nötig.

Formal sind Kondensate QCD-Grundzustands-Erwartungswerte Hermite'scher Produkte von Quark- und Gluon-Operatoren. Aufgrund der Symmetrien des QCD-Grundzustandes fordert man auch von den Kondensaten Invarianz unter Paritäts- und Zeitumkehr-Transformationen. Zudem sind sie sowohl Dirac- als auch Lorentz-Skalare und Farb-Singulets. Um die letzten drei Forderungen zu erfüllen, werden im Rahmen der Operatorproduktentwicklung Techniken zur Projektion von Dirac-, Farb- und Lorentz-Indizes benötigt. Diese sollen in diesem Unterabschnitt behandelt werden.

### Projektion von Dirac-Indizes

Die Projektion von Dirac-Indizes stützt sich auf die Elemente der Basis der Dirac-Algebra  $\mathcal{C}$ . Jede  $(4 \times 4)$ -Matrix des Dirac-Raumes  $O_{ij}$  lässt sich mithilfe der 16 Basiselemente mit unteren Lorentz-Indizes  $\Gamma_a \in \{\mathbb{1}, \gamma_\mu, \sigma_{\mu<\nu}, i\gamma_5\gamma_\mu, \gamma_5\}$  und oberen Lorentz-Indizes  $\Gamma^b \in \{\mathbb{1}, \gamma^\mu, \sigma^{\mu<\nu}, i\gamma_5\gamma^\mu, \gamma_5\}$  zerlegen nach

$$O_{ij} = \sum_a d_a (\Gamma^a)_{ij}, \quad (2.68)$$

wobei man nach der Multiplikation von  $(\Gamma_b)_{ji}$  und Summation über  $i$  und  $j$

$$d_a = \frac{1}{4} \text{Tr}_D [\Gamma_a O] \quad (2.69)$$

erhält. Dabei nutzt man die Normierung der Basiselemente der Clifford-Algebra über die Dirac-Spur  $\text{Tr}_D [\Gamma_a \Gamma^b] = 4\delta_a^b$ . Interpretiert man diese Spur als Skalarprodukt, erkennt man, dass die Basiselemente  $\Gamma_a$  und  $\Gamma_b$  eine orthogonale Basis der Clifford-Algebra bilden. Die Normierungsrelation kann aber nur dann so einfach geschrieben werden, wenn man die Basiselemente wie oben wählt. (In der Literatur findet man häufig eine ungünstige Notation der Basiselemente der Clifford-Algebra  $\Gamma_a$  und  $\Gamma^b$  ohne „<“ im Element  $\sigma_{\mu<\nu}$  und ohne die imaginäre Einheit im Element  $i\gamma_5\gamma_\mu$ . Damit wird ein weiterer Faktor  $\epsilon_a$  in Gl. (2.68) nötig, der für Projektionen auf  $\sigma_{\mu\nu}$  den Wert  $\epsilon_a = 1/2$  und für Projektionen auf  $\gamma_5\gamma_\mu$  den Wert  $\epsilon_a = -1$  annimmt.)

Für typische zu projizierende Strukturen der OPE  $\langle \bar{q}_i \dots q_j \rangle$  erhält man

$$\langle \bar{q}_i \dots q_j \rangle = \sum_a d_a^{\text{OPE}} (\Gamma^a)_{ji}, \quad (2.70)$$

mit

$$d_a^{\text{OPE}} = \frac{1}{4} \langle \bar{q} \Gamma_a \dots q \rangle \quad (2.71)$$

und im Vergleich mit Gl. (2.68) vertauschten Dirac-Indizes des Basiselementes  $\Gamma^a$ , weil im Koeffizient  $d_a^{\text{OPE}}$  ein Dirac-Skalar erscheinen soll, welcher üblicherweise nicht als Spur notiert ist. Aus diesem Grund ist es erforderlich, dass das Basiselement der Clifford-Algebra zwischen den beiden Spinoren  $\bar{q}$  und  $q$  steht.

### Projektion von Farb-Indizes

Die Projektion der Farb-Indizes erfolgt ebenfalls auf eine orthogonale Basis. Im Fall von  $(N_c \times N_c)$ -Matrizen ist diese Basis gegeben durch die Generatoren der Symmetriegruppe  $SU(N_c)$  ergänzt durch die  $N_c$ -dimensionale Einheitsmatrix. Für eine verkürzte Schreibweise notieren wir nur in diesem Unterabschnitt die Einheitsmatrix zusammen mit den Generatoren:

$$t^A = \begin{cases} \mathbb{1}_{N_c}/\sqrt{2N_c} & \text{falls } A = 0, \\ \lambda^A/2 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.72)$$

wobei  $\lambda^A$  die auf  $N_c$ -dimensionalen Gell-Mann-Matrizen sind und die Normierungsrelation  $\text{Tr}_C [t^A t^B] = \delta^{AB}/2$  gilt. Damit lässt sich jede Farb-Matrix  $O_{\alpha\beta}$  zerlegen nach

$$O_{\alpha\beta} = \sum_A c_A (t^A)_{\alpha\beta}. \quad (2.73)$$

Multipliziert man mit  $(t^B)_{\beta\alpha}$  und summiert über  $\alpha$  und  $\beta$ , ergibt sich für den Koeffizient

$$c_A = 2\text{Tr}_C [t^A O]. \quad (2.74)$$

Für die in der OPE bis zur Massendimension 5 auftretenden, zu projizierenden Strukturen erhält man für  $N_c = 3$  als einzige Farb-Singulettstruktur:

$$\langle \bar{q}_\alpha \dots q_\beta \rangle = \frac{1}{3} \langle \bar{q} \dots q \rangle (\mathbb{1}_3)_{\alpha\beta}. \quad (2.75)$$

Betrachtet man jedoch Vier-Quark-Kondensate und Kondensate ab der Massendimension 6, ergeben sich noch weitere Farb-Singulettstrukturen, die hier nicht betrachtet werden sollen. Im Fall von Vier-Quark-Kondensaten sind solche Projektionen im Unterabschnitt 3.2.2 aufgeführt.

### Projektion von Lorentz-Indizes

Die Projektion der Lorentz-Indizes erfolgt nicht als Entwicklung in einer orthogonalen Basis wie im Fall von Dirac- und Farb-Projektion. Vielmehr stützt sie sich auf die gegebenen Elemente mit Lorentz-Strukturen. Im Vakuum sind dies der metrische Tensor  $g_{\mu\nu}$  und der total anti-symmetrische Pseudo-Tensor  $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$  (Levi-Civita-Symbol). Betrachtet man Kondensate nicht nur im Vakuum, sondern ist auch an ihrer Temperatur- und/oder Dichteabhängigkeit interessiert, so ist wegen der Brechung der Poincaré-Invarianz durch die Anwesenheit eines Mediums zusätzlich dessen Geschwindigkeit  $v_\mu$  heranzuziehen. Die Hinzunahme der Geschwindigkeit  $v_\mu$  des Mediums hat weitreichende Implikationen. Dies erlaubt auch die Projektion von Erwartungswerten mit einer ungeraden Anzahl unkontrahierter Lorentz-Indizes, womit sich eine Vielzahl weiterer Kondensate ergibt. Zum Beispiel verdoppelt sich die Anzahl der Kondensate gerade im Fall von Vier-Quark-Kondensaten einer Quark-Sorte.

Die im Folgenden dargestellte Lorentz-Projektion auf alle möglichen Strukturen, die sich aus den Elementen  $g_{\mu\nu}$ ,  $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$  und  $v_\mu$  konstruieren lassen, soll als totale Projektion bezeichnet werden. Die Zerlegung nach vakuum- und mediumspezifischen Projektionen verwendet die totale Projektion und wird im Anschluss behandelt.

Der Ansatz für einen Erwartungswert  $\langle O_{\vec{\mu}_n} \rangle \equiv \langle O_{\mu_1 \dots \mu_n} \rangle$  mit  $n$  Lorentz-Indizes lautet

$$\langle O_{\vec{\mu}_n} \rangle = \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}_{\vec{\mu}_n}, \quad (2.76)$$

wobei  $\mathbf{p}_{\vec{\mu}_n}$  (mit zum Erwartungswert analoger Definition des Multiindex  $\vec{\mu}_n$ ) der Vektor aller Projektionsstrukturen ist und  $\mathbf{a}$  der Vektor der zugehörigen Koeffizienten. Gleichung (2.76) mit  $\mathbf{p}_{\vec{\mu}_n}$  kontrahiert liefert mit  $P_n \equiv \mathbf{p}_{\vec{\mu}_n} \circ \mathbf{p}_{\vec{\mu}_n}$ , dem dyadischen Produkt aus ko- und kontravariantem Vektor der Projektionsstrukturen,

$$\langle O_{\vec{\mu}_n} \rangle \mathbf{p}_{\vec{\mu}_n} = (\mathbf{p}_{\vec{\mu}_n} \circ \mathbf{p}_{\vec{\mu}_n}) \mathbf{a} = P_n \mathbf{a}. \quad (2.77)$$

Definiert man den Vektor  $\mathbf{c} \equiv \langle O_{\vec{\mu}_n} \rangle \mathbf{p}_{\vec{\mu}_n}$ , welcher die mit allen Projektionsstrukturen kontrahierten Erwartungswerte enthält, ergibt sich

$$\mathbf{a} = P_n^{-1} \mathbf{c}. \quad (2.78)$$

Setzt man die Lösung für den Koeffizientenvektor  $\mathbf{a}$  in Gl. (2.76) ein, erhält man die Projektionsformel für  $n$  Lorentz-Indizes

$$\langle O_{\vec{\mu}_n} \rangle = (P_n^{-1} \mathbf{c}) \cdot \mathbf{p}_{\vec{\mu}_n}. \quad (2.79)$$

Der Vektor der allgemeinen Projektionsstrukturen  $\mathbf{p}_{\vec{\mu}_n}$  hat für  $n \leq 5$  folgende Gestalt:

$$\mathbf{p}_\mu = v_\mu, \quad (2.80a)$$

$$\mathbf{p}_{\mu\nu} = (g_{\mu\nu}, v_\mu v_\nu)^\top, \quad (2.80b)$$

$$\mathbf{p}_{\mu\nu\lambda} = (v^\tau \varepsilon_{\tau\mu\nu\lambda}, v_\mu g_{\nu\lambda}, v_\nu g_{\mu\lambda}, v_\lambda g_{\mu\nu}, v_\mu v_\nu v_\lambda)^\top, \quad (2.80c)$$

$$\mathbf{p}_{\mu\nu\lambda\sigma} = (\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}, g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma}, g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma}, g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda}, v_\mu v_\nu g_{\lambda\sigma}, v_\mu v_\lambda g_{\nu\sigma}, v_\mu v_\sigma g_{\nu\lambda}, v_\lambda v_\sigma g_{\mu\nu}, v_\nu v_\sigma g_{\mu\lambda}, v_\nu v_\lambda g_{\mu\sigma}, v_\mu v_\nu v_\lambda v_\sigma)^\top, \quad (2.80d)$$

$$\mathbf{p}_{\mu\nu\lambda\sigma\rho} = (v_\mu \varepsilon_{\nu\lambda\sigma\rho}, v_\nu \varepsilon_{\mu\lambda\sigma\rho}, v_\lambda \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}, v_\sigma \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}, v_\mu g_{\nu\lambda} g_{\sigma\rho}, v_\mu g_{\nu\sigma} g_{\lambda\rho}, v_\mu g_{\nu\rho} g_{\lambda\sigma}, v_\nu g_{\mu\lambda} g_{\sigma\rho}, v_\nu g_{\mu\sigma} g_{\lambda\rho}, v_\nu g_{\mu\rho} g_{\lambda\sigma}, v_\lambda g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho}, v_\lambda g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}, v_\lambda g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}, v_\sigma g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}, v_\sigma g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho}, v_\sigma g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda}, v_\rho g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma}, v_\rho g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma}, v_\rho g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda}, v_\mu v_\nu v_\lambda g_{\sigma\rho}, v_\mu v_\nu v_\sigma g_{\lambda\rho}, v_\mu v_\nu v_\rho g_{\lambda\sigma}, v_\mu v_\sigma v_\rho g_{\nu\lambda}, v_\mu v_\lambda v_\rho g_{\nu\sigma}, v_\mu v_\lambda v_\sigma g_{\nu\rho}, v_\nu v_\sigma v_\rho g_{\mu\lambda}, v_\nu v_\lambda v_\rho g_{\mu\sigma}, v_\nu v_\lambda v_\sigma g_{\mu\rho}, v_\lambda v_\sigma v_\rho g_{\mu\nu}, v_\mu v_\nu v_\lambda v_\sigma v_\rho)^\top, \quad (2.80e)$$

wobei  $\mathbf{p}_{\vec{\mu}_n}$  so notiert ist, dass – falls möglich – zuerst die Projektionsstrukturen, die das Levi-Civita-Symbol enthalten, aufgeführt sind und in den folgenden Zeilen (Blöcken) die Anzahl der Faktoren  $v_\mu$  in den Projektionsstrukturen von Zeile (Block) zu Zeile (Block) zunimmt. Es sei darauf hingewiesen, dass die Projektionsstruktur  $v_\rho \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$  für  $n = 5$  nicht auftritt, weil die fünf Strukturen mit Levi-Civita-Symbol nicht linear unabhängig sind. Es gilt:

$$v_\mu \varepsilon_{\nu\lambda\sigma\rho} + v_\nu \varepsilon_{\mu\lambda\sigma\rho} + v_\lambda \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} + v_\sigma \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} + v_\rho \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0. \quad (2.81)$$

Um Vakuum- strikt von Mediumstrukturen zu trennen, kann die Projektion (2.76) in einen Vakuumanteil und einen Mediumanteil zerlegt werden:

$$\langle O_{\vec{\mu}_n} \rangle = \langle O_{\vec{\mu}_n} \rangle^{\text{vak}} + \langle O_{\vec{\mu}_n} \rangle^{\text{med}}. \quad (2.82)$$

Für eine ungerade Anzahl von Indizes ist die gesamte Projektion mediumspezifisch.

Die Vakuumprojektion  $\langle O_{\vec{\mu}_n} \rangle^{\text{vak}}$  ist leicht zu erhalten, indem man das oben erläuterte Verfahren für die totale Projektion benutzt, dabei aber  $\mathbf{p}_{\vec{\mu}_n}$  durch  $\mathbf{p}_{\vec{\mu}_n}^{\text{vak}}$  ersetzt, d.h. den Vektor, der ausschließlich die vakuumspezifischen Elemente  $g_{\mu\nu}$  und  $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$  enthält. In den Fällen von zwei und vier Indizes hat man für  $\mathbf{p}_{\vec{\mu}_n}^{\text{vak}}$ :

$$\mathbf{p}_{\mu\nu}^{\text{vak}} = g_{\mu\nu}, \quad (2.83a)$$

$$\mathbf{p}_{\mu\nu\lambda\sigma}^{\text{vak}} = (\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}, g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma}, g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma}, g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda})^T. \quad (2.83b)$$

Die Projektion, welche die reinen mediumspezifischen Beiträge enthält, ist nach Gl. (2.82)  $\langle O_{\vec{\mu}_n} \rangle^{\text{med}} = \langle O_{\vec{\mu}_n} \rangle - \langle O_{\vec{\mu}_n} \rangle^{\text{vak}}$ . Eine Definition der mediumspezifischen Projektion durch Zerlegung des Vektors der Projektionsstrukturen, d.h.  $\mathbf{p}_{\vec{\mu}_n}^{\text{med}} = \mathbf{p}_{\vec{\mu}_n} - \mathbf{p}_{\vec{\mu}_n}^{\text{vak}}$ , ist nicht mit (2.82) konform, da das Invertieren von Matrizen eine nicht-lineare Operation ist. So kann der mediumspezifische Anteil einer Projektion immer auch Anteile enthalten, die algebraisch der Vakuumstruktur entsprechen. Allerdings lässt sich bereits bei der totalen Projektion die Matrix  $P_n^{-1}$  ersetzen durch

$$P_{n \text{ med}}^{-1} = P_n^{-1} - P_{n \text{ vak}}^{-1} \quad (2.84)$$

mit  $P_{n \text{ vak}} = \mathbf{p}_{\vec{\mu}_n}^{\text{vak}} \circ \mathbf{p}_{\vec{\mu}_n}^{\text{med}}$ . Die Matrixsubtraktion (2.84) ist komponentenweise nur für die Untermatrix von  $P_n^{-1}$  zu verstehen, welche die entsprechenden Projektionsstrukturen von  $P_{n \text{ vak}}^{-1}$  trägt. Beispielhaft wird der Fall für  $n = 2$  Lorentz-Indizes aufgeführt. Die Matrizen der Projektionsstrukturen und ihre jeweiligen Inversen sind

$$P_2 = \begin{pmatrix} 4 & v^2 \\ v^2 & v^4 \end{pmatrix}, \quad P_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3v^2} \\ -\frac{1}{3v^2} & \frac{4}{3v^4} \end{pmatrix}, \quad (2.85)$$

$$P_{2 \text{ vak}} = 4, \quad P_{2 \text{ vak}}^{-1} = \frac{1}{4}. \quad (2.86)$$

Damit ergibt sich für das Inverse der mediumspezifischen Projektionsstrukturmatrix

$$P_{2 \text{ med}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3v^2} \\ -\frac{1}{3v^2} & \frac{4}{3v^4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{3v^2} \\ -\frac{1}{3v^2} & \frac{4}{3v^4} \end{pmatrix}. \quad (2.87)$$

Am Nicht-verschwinden des ersten Matrixelementes in der ersten Zeile/Spalte erkennt man, dass auch algebraische Vakuumstrukturen zur mediumspezifischen Projektion beitragen. Obigen Schritten folgend erhält man aus den Gln. (2.82) und (2.79) für die Projektion eines Erwartungswertes mit zwei Lorentz-Indizes

$$\langle O_{\mu\nu} \rangle = \langle O_{\mu\nu} \rangle^{\text{vak}} + \langle O_{\mu\nu} \rangle^{\text{med}}, \quad (2.88)$$

mit

$$\langle O_{\mu\nu} \rangle^{\text{vak}} = \frac{1}{4} \langle O_{\alpha}{}^{\alpha} \rangle g_{\mu\nu}, \quad (2.89a)$$

$$\langle O_{\mu\nu} \rangle^{\text{med}} = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{4} \langle O_{\alpha}{}^{\alpha} \rangle - \frac{v^{\alpha} v^{\beta}}{v^2} \langle O_{\alpha\beta} \rangle \right] \left( g_{\mu\nu} - 4 \frac{v^{\mu} v^{\nu}}{v^2} \right). \quad (2.89b)$$

Mit dieser Vorgehensweise ist es möglich, die reine Vakuumprojektion von der mediumspezifischen zu trennen. Ob die mediumspezifischen Anteile in Projektionsstrukturen und Erwartungswerte faktorisieren, wie im oben explizit gezeigten Fall für  $n = 2$ , ist für  $n \geq 4$  davon abhängig, in welchen Beziehungen die Komponenten des Vektors  $\mathbf{c}$  der kontrahierten Erwartungswerte stehen und damit von der Symmetrie (d.h. Vertauschbarkeit der indextragenden Elemente) bzw. der Anti-Symmetrie der zu projizierenden Indizes. Betrachtet man Erwartungswerte mit vier Lorentz-Indizes, von denen je zwei untereinander anti-symmetrisch sind, erhält man eine entsprechend faktorisierte Projektion für den mediumspezifischen Anteil [Zsc11]. Sind einige Indizes symmetrisch bzw. anti-symmetrisch, lassen sich Komponenten von  $\mathbf{c}$  ineinander überführen.

### 2.2.3 Behandlung schwerer Quarks

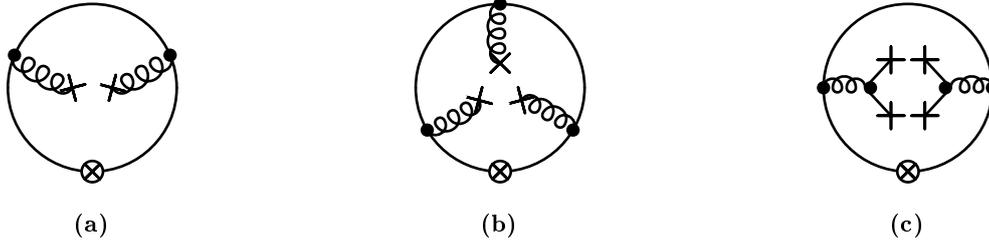
Abhängig vom betrachteten Strom-Strom-Korrelator wird in der Literatur nicht einheitlich mit schweren Quarks  $Q$  umgegangen. Bei der Untersuchung von Mesonen mit zwei schweren Valenzquarks, wie Charmonium, wurde die schon in [Shi79] angegebene Schwer-Quark-Massen-Entwicklung (SQME)<sup>1</sup>

$$\langle \Omega | \bar{Q} Q | \Omega \rangle = -\frac{1}{12M} \langle \Omega | \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^A G^{A\mu\nu} | \Omega \rangle + \dots \quad (2.90)$$

benutzt, um Kondensate schwerer Quarks in Gluon-Kondensate zu überführen [Mor01]. Schwere Quarks selbst kondensieren nicht [Bag86]. Sie sind zu schwer, um aus dem Vakuumgrundzustand erzeugt zu werden. Man spricht von statischen Quarks. Untersucht man  $Qq$ -Mesonen, welche ein leichtes ( $q$ ) und ein schweres ( $Q$ ) Valenzquark beinhalten, ist es üblich, die Kondensate schwerer Quarks zu vernachlässigen [Hay04, Hil08]. Ohnehin treten Beiträge zum schweren Zwei-Quark-Kondensat einzig im Produkt mit der leichten (verschwindenden) Quark-Masse auf und werden daher stark unterdrückt [Hil08].

Allerdings koppeln schwere Quarks (genauso wie leichte Quarks) an das klassische gluonische Hintergrundfeld und können demzufolge mittels weicher Gluonen kondensieren. Betrachtet man das schwere Quark-Kondensat als 1-Punkt-Funktion, kann der störungstheoretische Quark-Propagator (2.59) benutzt werden, um eine Relation zwischen schwerem Quark-Kondensat und Gluon-Kondensaten zu erhalten. Durch Hinzunahme von weiteren Gluonen, die an das Hintergrundfeld koppeln, entsteht eine Entwicklung in Potenzen der inversen

<sup>1</sup>Standardnotation in der englischen Literatur: *heavy-quark mass expansion*.



**Abbildung 2.4:** Diagramme, die zur Entwicklung des schweren Quark-Kondensates  $\langle \bar{Q}Q \rangle$  in den beiden niedrigsten Ordnungen in  $1/M$  im Vakuum beitragen: mit (a) Gluon-Kondensat, (b) Drei-Gluon-Kondensat und (c) Vier-Quark-Kondensat. Der mit dem Kreuz versehene Kreis markiert das schwere Kondensat, woran alle im zu entwickelnden Kondensat enthaltenen Quark- und Gluon-Felder koppeln. In diesem Fall sind dies lediglich die beiden Quark-Felder.

schweren Quark-Masse  $M$  – die SQME. Das allgemeine Verfahren, wieder auf Schwingers Hintergrundfeldmethode basierend, wird in [Gen84a] eingeführt. Es lässt sich der gesamte Apparat der OPE mit dem störungstheoretischen Quark-Propagator  $S_Q(p)$  aus Gl. (2.59) auf 1-Punkt-Funktionen wie

$$\langle \bar{Q}Q \rangle = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \langle \text{Tr}_{\text{C,D}} [S_Q(p)] \rangle \quad (2.91)$$

anwenden [Gro95]. Auf diese Weise erhält man nicht nur Entwicklungen für das schwere Zwei-Quark-Kondensat, sondern für alle Kondensate, die schwere Quarks enthalten [Gen84b, Bag85]. Analog zum Strom-Strom-Korrelator lassen sich im Vakuum auch für diese Entwicklung Feynman-artige Diagramme notieren. Wie in [Gen84b] aufgeführt, tragen im Vakuum die in Abb. 2.4 dargestellten Diagramme zur SQME des schweren Zwei-Quark-Kondensates

$$\langle \bar{Q}Q \rangle = -\frac{g^2}{48\pi^2 M} \langle G^2 \rangle - \frac{g^3}{1440\pi^2 M^3} \langle G^3 \rangle - \frac{g^4}{120\pi^2 M^3} \langle (DG)^2 \rangle + \dots \quad (2.92)$$

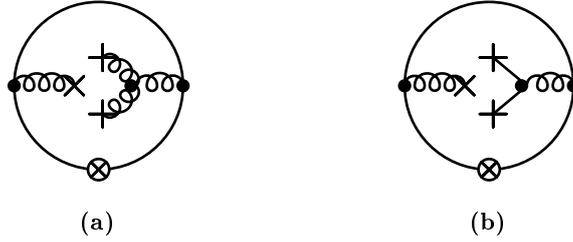
mit

$$\langle G^2 \rangle = \langle G_{\mu\nu}^A G^{A\mu\nu} \rangle, \quad (2.93a)$$

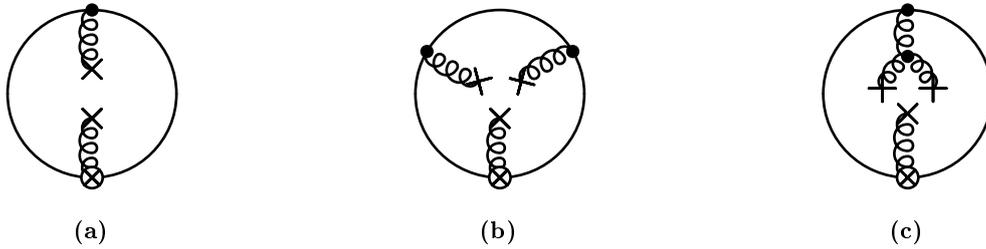
$$\langle G^3 \rangle = \langle f^{ABC} G_{\mu\nu}^A G^{B\nu}{}_{\lambda} G^{C\lambda\mu} \rangle, \quad (2.93b)$$

$$\langle (DG)^2 \rangle = \left\langle \sum_f \bar{q}_f \gamma_\mu t^A q_f \sum_{f'} \bar{q}_{f'} \gamma^\mu t^A q_{f'} \right\rangle \quad (2.93c)$$

bei. Die graphische Interpretation des ersten Terms in Gl. (2.92) ist in Abb. 2.4a dargestellt, der zweite (dritte) Term entspricht dem Diagramm in Abb. 2.4b (Abb. 2.4c). Die ersten beiden Terme werden als lokale Beiträge bezeichnet. Nicht-lokale Beiträge ergeben sich in der SQME als zusätzliche Terme mit  $\langle G^3 \rangle$ , die man aus der Schreibweise des störungstheoretischen Quark-Propagators mit dem zweiten Glied der Entwicklung des Gluon-Feldes als Differenzialoperator (2.58) erhält. Diese Ausdrücke sind insofern nicht-lokal, als dass man das gluonische Hintergrundfeld, im Gegensatz zum lokalen Diagramm, nicht ausschließlich in führender Ordnung  $\tilde{A}^{(0)}$  für den störungstheoretischen Quark-Propagator benutzt, sondern ebenso  $\tilde{A}^{(2)}$ . Dies gilt auch für  $\langle (DG)^2 \rangle$  mit  $(\tilde{A}^{(1)})^2$ , wobei für diesen Term häufig auf



**Abbildung 2.5:** Weitere Diagramme, die zur SQME des schweren Quark-Kondensates  $\langle \bar{Q}Q \rangle$  beitragen: mit (a) nicht-lokalem Drei-Gluon-Kondensat und (b) gemischtem Quark-Gluon-Kondensat im Medium, welches daher in [Gen84b, Bag85, Bag86] nicht behandelt wird.



**Abbildung 2.6:** Diagramme, die zur SQME des schweren gemischten Kondensates  $\langle \bar{Q}GQ \rangle$  im Vakuum beitragen: mit (a) Gluon-Kondensat, (b) Drei-Gluon-Kondensat und (c) nicht-lokalem Drei-Gluon-Kondensat.

die Unterscheidung zwischen lokal und nicht-lokal verzichtet wird, da er im Gegensatz zu  $\langle G^3 \rangle$ -Beiträgen immer nicht-lokal ist.

In der SQME ergibt sich für den störungstheoretischen Quark-Propagator  $S^{(2)}(p) \propto \tilde{A}^{(0)} \tilde{A}^{(2)}$  der Ausdruck  $\langle \text{Tr}_C [G_{\mu\nu} D_\lambda D^\lambda G^{\nu\mu}] \rangle$ , welcher über die Relation (3.95) eine Verknüpfung mit dem Drei-Gluon-Kondensat herstellt [Nov80, Nik83]. Eine Relation aus der Entwicklung der Gluon-Felder zum nicht-lokalen Diagramm erhält man auch, wenn man in der Ortsdarstellung arbeitet, wie z.B. in [Bag86]. In Abb. 2.5a ist die graphische Interpretation dieses Beitrags dargestellt. Ähnlich dem Diagramm in Abb. 2.5a ist noch ein Graph mit gemischtem Quark-Gluon-Kondensat denkbar (s. Abb. 2.5b). Dieses Kondensat ist aber nicht  $\langle \bar{q} \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} q \rangle$ , welches aus der Operatorkombination (2.23d) der OPE des Korrelators stammt. Neben den Dirac- und Farb-Strukturunterschieden ist das in der SQME auftretende gemischte Kondensat aufgrund seiner ungeraden Anzahl an Lorentz-Indizes ein mediumspezifisches Kondensat.

Im nächsten Schritt stützt sich die Entwicklung des schweren gemischten Kondensates im Vakuum auf die Diagramme in Abb. 2.6. Eine Rechnung analog zum schweren Zwei-Quark-Kondensat liefert mit subtrahierten ultravioletten Divergenzen im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema [Bag86]

$$\langle \bar{Q}GQ \rangle \equiv \langle \bar{Q} \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} Q \rangle = -\frac{g^2}{8\pi^2} M \log \frac{\mu^2}{M^2} \langle G^2 \rangle - \frac{g^2}{48\pi^2} \frac{1}{M} \langle G^3 \rangle. \quad (2.94)$$

Dabei erscheint das Ergebnis des Graphen in Abb. 2.6a in einer Entwicklung in Potenzen der inversen schweren Quark-Masse  $M$  fragwürdig. In Gl. (2.94) sieht man auch sofort, dass die

Entwicklung eines Kondensates mit schweren Quarks nur dann eine Entwicklung in positiven Potenzen von  $1/M$  ist, falls die beitragenden Diagramme nur Kondensate enthalten, welche eine höhere Massendimension als das zu entwickelnde Kondensat haben. Das Problem tritt daher in Gl. (2.92) nicht auf, da  $\langle \bar{Q}Q \rangle$  das Kondensat mit der niedrigsten Massendimension ist. Durch heuristische Betrachtungen zum Gluon-Kondensat im Grenzfall großer äußerer Impulse und verschwindender Quark-Massen gelangen die Autoren in [Bag86] zu der Ansicht, dass jedes Quark-Feld separat durch mindestens ein Gluon kondensiert. Akzeptiert man diese Sichtweise der Kondensation schwerer Quarks, entfallen alle fragwürdigen Fälle und eine Entwicklung in positiven Potenzen von  $1/M$  ist sichergestellt.

## 2.3 Summenregeln

Im Rahmen der QCD-Summenregeln werden hadronische Eigenschaften, die mit langreichweitigen Phänomenen verbunden sind, über eine Dispersionsrelation

$$\frac{1}{\pi} \int ds \frac{\text{Im}\Pi(s)}{s - q^2} = \Pi_{\text{OPE}} \quad (2.95)$$

mit der Operatorproduktentwicklung eines Strom-Strom-Korrelators verknüpft, die nur für kurze Distanzen Gültigkeit besitzt und den komplexen QCD-Grundzustand mittels universaler Kondensate parametrisiert. Sie ermöglichen eine Aussage über das Hadronenspektrum, wenn die Spektraldichte geeignet modellieren werden kann und die im nächsten Abschnitt dargestellte Borel-Transformation angewendet wird. Untersucht man eine einzelne scharfe Resonanz verwendet man den einfachsten Ansatz für die Spektraldichte – den sog. „Pol+Kontinuum“-Ansatz [Fur92, Col01]. Da die universalen Kondensate für jede Summenregel (im Vakuum) die gleichen numerischen Werte annehmen, lassen sich die Summenregeln prinzipiell auf zwei Arten auswerten. Entweder man kennt die Eigenschaften der hadronischen Resonanz und bestimmt daraus die numerischen Werte für die in der OPE beitragenden Kondensate, oder man benutzt bereits bekannte Werte der Kondensate, um Vorhersagen über die hadronische Anregung zu treffen.

### OPE-Struktur der Summenregeln

Die Operatorproduktentwicklung ist eine Entwicklung in zwei verschiedenen Variablen. Zum einen wird der Strom-Strom-Korrelator  $\Pi(q)$ , definiert in Gl. (2.1), in eine Störungsreihe der starken Kopplung  $\alpha_s$  entwickelt

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle T [j(x)j^\dagger(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{n!} \int d^4y_1 \dots d^4y_n \mathcal{L}_{\text{int}}(y_1) \dots \mathcal{L}_{\text{int}}(y_n)] \rangle, \quad (2.96)$$

wobei  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  nach Gl. (A.10) mit (A.11) eine Funktion von  $\alpha_s$  ist. Zum anderen wird die Entwicklung von  $\Pi(q)$  in Potenzen von  $1/q^2$  vorgenommen, welche in den Wilson-Koeffizienten  $C_n(q)$  der OPE

$$\Pi(q) = \sum_n C_n(q) \langle O_n \rangle \quad (2.97)$$

enthalten sind. Diese geht mit der Einführung von Kondensaten  $\langle O_n \rangle$  entsprechender Massendimension einher, welche die Massendimension der Wilson-Koeffizienten kompensieren, da das Produkt aus Wilson-Koeffizient und Kondensat eine konstante Massendimension besitzt.

Grundsätzlich gibt es zwei Möglichkeiten die Entwicklungen vorzunehmen – zuerst die OPE (2.97) und danach die Entwicklung in die Störungsreihe (2.96) oder umgekehrt. Die Gleichung

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\text{OPE}}(q) &= \sum_n \langle O_n \rangle \left( \sum_{k=0}^{\infty} C_n^{(k)}(q) \alpha_s^k \right) \quad (2.98) \\
 &= \mathbb{1} \left( C_0^{(0)}(q) + C_0^{(1)}(q) \alpha_s^1 + C_0^{(2)}(q) \alpha_s^2 + \dots \right) \\
 &+ \langle g^2 G^2 \rangle \left( C_{4G}^{(0)}(q) + C_{4G}^{(1)}(q) \alpha_s^1 + C_{4G}^{(2)}(q) \alpha_s^2 + \dots \right) \\
 &+ m \langle \bar{q}q \rangle \left( C_{4q}^{(0)}(q) + C_{4q}^{(1)}(q) \alpha_s^1 + C_{4q}^{(2)}(q) \alpha_s^2 + \dots \right) \\
 &+ \langle \bar{q}g\sigma Gq \rangle \left( C_5^{(0)}(q) + C_5^{(1)}(q) \alpha_s^1 + C_5^{(2)}(q) \alpha_s^2 + \dots \right) \\
 &+ \langle g^3 G^3 \rangle \left( C_{6G}^{(0)}(q) + C_{6G}^{(1)}(q) \alpha_s^1 + C_{6G}^{(2)}(q) \alpha_s^2 + \dots \right) \\
 &+ \langle g^2 \bar{q}q \sum_f \bar{q}_f q_f \rangle \left( C_{6q}^{(0)}(q) + C_{6q}^{(1)}(q) \alpha_s^1 + C_{6q}^{(2)}(q) \alpha_s^2 + \dots \right) \\
 &+ \dots \quad (2.99)
 \end{aligned}$$

stellt die Entwicklung in die Reihe der Potenz-Korrekturen (2.97) voran, so wie die OPE in [Shi79] eingeführt wurde. Der untere Index der Koeffizienten  $C_n^{(k)}$  bezeichnet die Massendimension des zugehörigen Kondensates, der obere Index die Ordnung der Entwicklung in  $\alpha_s$ . Störungstheoretische Korrekturen der Wilson-Koeffizienten zu den Kondensaten werden nachträglich diagrammatisch ermittelt. Vier-Quark-Kondensate aus Diagrammen auf Baumgraphen-Niveau mit hartem Gluon bleiben auf diese Weise unberücksichtigt.

Die Gleichung

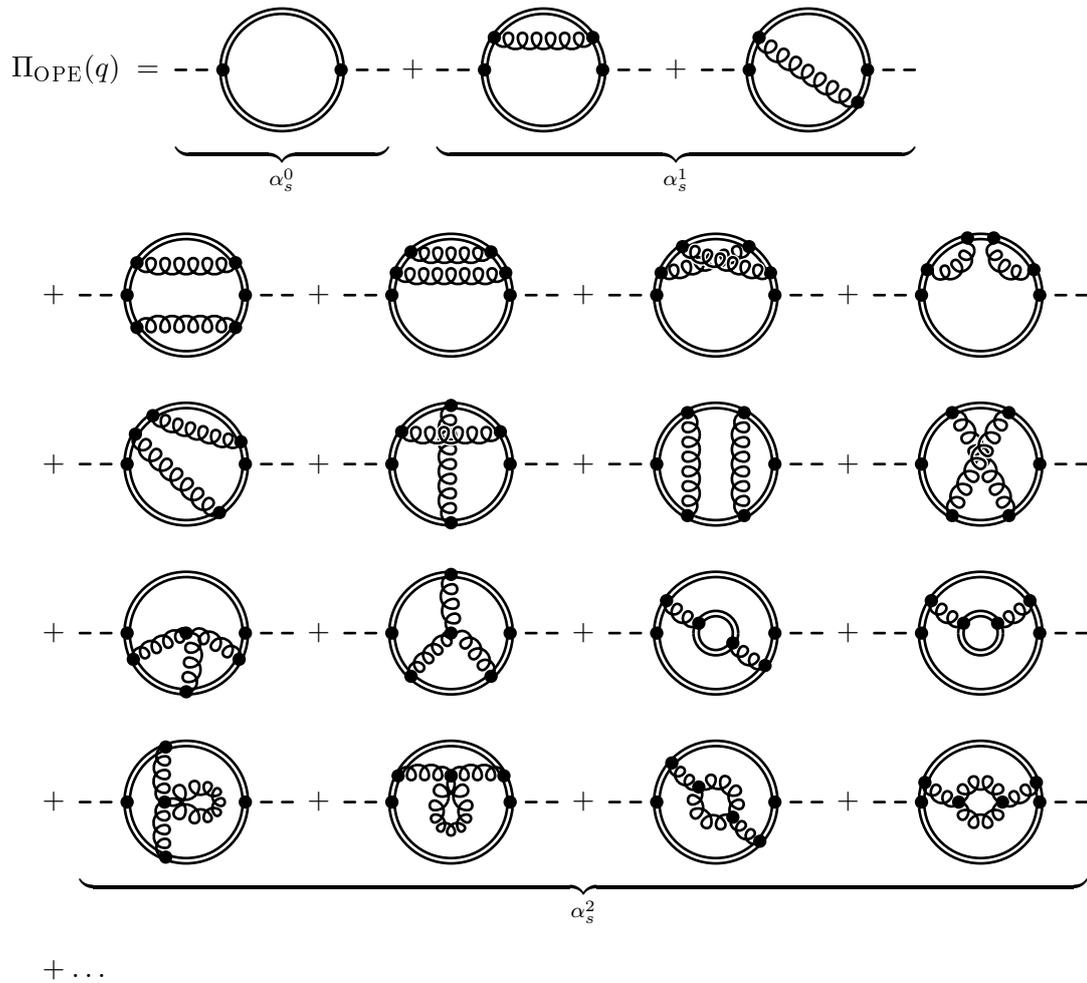
$$\begin{aligned}
 \Pi_{\text{OPE}}(q) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_s^k \left( \sum_n C_k^{(n)}(q) \langle O_{n(k)} \rangle \right) \quad (2.100) \\
 &= \alpha_s^0 \left( C_0^{(0)}(q) \mathbb{1} + C_0^{(4G)}(q) \langle g^2 G^2 \rangle + C_0^{(4-q)}(q) m \langle \bar{q}q \rangle + C_0^{(6G)(q)} \langle g^3 G^3 \rangle \right. \\
 &\quad \left. + C_0^{(6q)}(q) \langle g^2 \bar{q}q \sum_f \bar{q}_f q_f \rangle + \dots \right) \\
 &+ \alpha_s^1 \left( C_1^{(0)}(q) \mathbb{1} + C_1^{(4G)}(q) \langle g^2 G^2 \rangle + C_1^{(4-q)}(q) m \langle \bar{q}q \rangle + C_1^{(6G)(q)} \langle g^3 G^3 \rangle \right. \\
 &\quad \left. + C_1^{(6q)}(q) \langle g^2 \bar{q}q \sum_f \bar{q}_f q_f \rangle + C_1'^{(6q)}(q) \langle \bar{q}q \bar{q}q \rangle + \dots \right) \\
 &+ \dots \quad (2.101)
 \end{aligned}$$

hingegen stellt die Entwicklung in der Störungsreihe vor die Entwicklung (2.97). Diese Sichtweise drängt sich bei Rechnungen zu Vier-Quark-Kondensaten auf [Pas84] und folgt auch der graphischen Interpretation der OPE in den Abbn. 2.7 und 2.8. Der untere Index der Koeffizienten  $C_k^{(n)}$  bezeichnet die Ordnung der Entwicklung in  $\alpha_s$ , der obere Index die Massendimension des zugehörigen Kondensates. Die Kondensate  $\langle O_{n(k)} \rangle$  tragen jetzt zusätzlich einen Index für die Ordnung in  $\alpha_s$ , da einige Kondensate, welche in Gl. (2.98) unberücksichtigt bleiben, erst in höherer Ordnung der störungstheoretischen Entwicklung auftauchen, wie das Vier-Quark-Kondensat  $\langle \bar{q}q\bar{q}q \rangle$  aus den Diagrammen in Abb. 3.5. Die Gl. (2.96) wird in jeder Ordnung der Störungstheorie systematisch ausgewertet. Das Wick-Theorem kommt dabei wie in der OPE üblich zur Anwendung, sodass Beiträge mit Erwartungswerten nicht-Wick-kontrahierter Quark- und Gluon-Operatoren nicht verschwinden, sondern Kondensate bilden. Ergeben sich dabei Diagramme mit weichen Gluonen, werden diese mithilfe der störungstheoretischen Quark- und Gluon-Propagatoren erzeugt [Pas84]. Daher erhält man in Ordnung  $\alpha_s^1$  der Störungsentwicklung sowohl Wilson-Koeffizienten in führender Ordnung (Baumgraphen-Niveau) zu Vier-Quark-Kondensaten  $\alpha_s \langle \bar{q}q\bar{q}q \rangle$ , die vom harten Gluon-Austausch stammen, als auch Schleifenkorrekturen der Koeffizienten zu  $\alpha_s g^2 \langle \bar{q}q \sum_f \bar{q}_f q_f \rangle$ , die mit weicher Gluon-Propagation einhergehen.

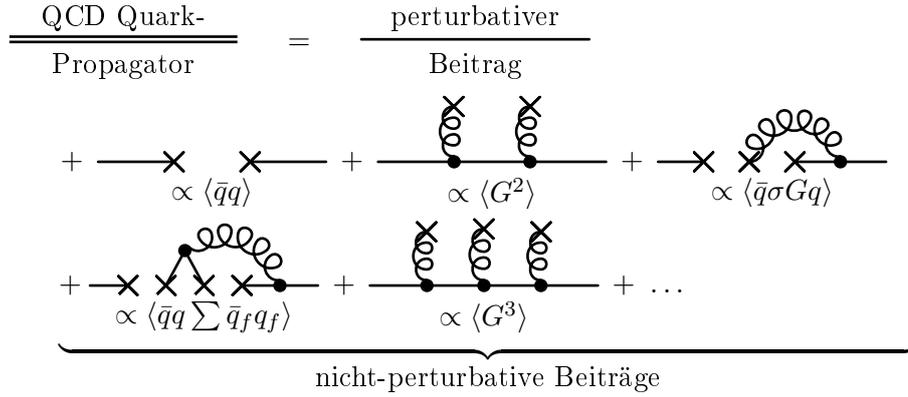
Die Störungsentwicklung des Strom-Strom-Korrelators ist graphisch in der Abb. 2.7 dargestellt. Der darin enthaltene QCD-Quark-Propagator ist der störungstheoretische Quark-Propagator, ergänzt um das Quark-Kondensat [Jin93], wie in Abb. 2.8 dargestellt. Er repräsentiert damit die Entwicklung (2.97). Um Diagramme, die zur OPE eines Korrelators beitragen, graphisch zu generieren fügt man die Konstruktionen des QCD-Quark-Propagators an den entsprechenden Stellen in Abb. 2.7 ein. Dabei ist darauf zu achten, dass das resultierende Diagramm nicht unverbunden ist.

Oberflächlich mag die OPE als Entwicklung in zwei Variablen, der Kopplung  $\alpha_s$  und der Potenz-Korrektur  $1/q^2$ , erscheinen. Jedoch werden technisch allein aufseiten der Potenz-Korrekturen drei Entwicklungen benutzt: die Taylor-Entwicklung des Quark-Feldoperators  $q$  in Gl. (2.41) bzw. (2.42), der störungstheoretische Quark-Propagator  $S(p)$  in Gl. (2.59) und darin enthalten die Entwicklung des gluonischen Hintergrundfeldes  $\tilde{A}_\mu$  in Gl. (2.57). Obwohl diese drei Entwicklungen zur Berechnung der Potenz-Korrekturen herangezogen werden, haftet ihnen implizit eine Entwicklung in der Kopplungskonstanten  $g$  an. Diese Kopplungskonstanten kommen beim Vertauschen von kovarianten Ableitungen  $D_\mu$  und mittels der Bewegungsgleichung des Gluon-Feldstärketensors ins Spiel. Die Entwicklung des störungstheoretischen Propagators enthält Potenzen der Kopplungskonstanten  $g$  entsprechend der Ordnung, bis zu welcher die Entwicklung vorgenommen wird. Dabei ist die Kopplungskonstante  $g$  der Entwicklung (2.59) in die Definition von  $\tilde{A}_\mu$  absorbiert, in Gl. (2.48) jedoch offenbar.

In diesem Unterabschnitt werden dabei der Kopplung  $\alpha_s$  und der Kopplungskonstanten  $g$  verschiedene Bedeutungen beigemessen, obwohl diese natürlich miteinander verknüpft sind. Im Zusammenhang mit impulstragenden harten Gluonen aus der Gl. (2.96) wird  $\alpha_s$  verwendet, wohingegen für weiche Gluonen  $g$  benutzt wird, da diese aus den drei gerade beschriebenen Entwicklungen hervorgehen. Obwohl die Potenz-Korrekturen im Zusammenhang mit den Kopplungskonstanten  $g$  weicher Gluonen stehen, ist die Massendimension eines Kondensates nicht ausschlaggebend für dessen Potenz in  $g$ . Zum Beispiel gehen die Vakuumkondensate mit  $\dim_m = 6$  nicht mit einer eindeutigen Potenz der Kopplungskonstanten einher. Das Kondensat



**Abbildung 2.7:** Diagrammatische Darstellung der Entwicklung des Strom-Strom-Korrelators in eine Störungsreihe nach Potenzen von  $\alpha_s$ , wobei die gestrichelten Linien die Mesonenströme bezeichnen und die Quark-Propagatoren jene aus Abb. 2.8 sind. Auf die Darstellung von Vakuum- und Kaulquappen-Diagramme wurde verzichtet.



**Abbildung 2.8:** Diagrammatische Darstellung der Entwicklung des QCD-Quark-Propagators in die Reihe (2.97) mit störungstheoretischem Beitrag und Vakuump kondensaten bis zur Massendimension 6.

sat  $\langle G^3 \rangle$  ist von Ordnung  $g^3$ , wobei das Vier-Quark-Kondensat  $\langle \bar{q}q \sum_f \bar{q}_f q_f \rangle$  (Ordnung  $\alpha_s^0$ ) mit  $g^2$  skaliert. Auch wenn man die Entwicklung in der Kopplungskonstanten nach weichen ( $g$ ) und harten ( $\alpha_s$ ) Gluonen trennt, ist es damit nicht möglich den Strom-Strom-Korrelator für alle Entwicklungen in einer jeweils gegebenen Ordnung vollständig auszuwerten.

Die Situation wird komplizierter, wenn man für impulstragende, harte Gluonen den störungstheoretischen Gluon-Propagator in Gl. (2.67) verwendet, welcher selbst über weiche Gluonen ans klassische Hintergrundfeld koppelt und damit eine weitere Entwicklung in der Kopplungskonstanten  $g$  birgt. Es ist zu bedenken, dass für Kondensate mit Feldoperatoren schwerer Quarks eine zusätzliche Entwicklung angeschlossen werden kann – die SQME. Damit sind Ordnungsschemata, welche Glieder der OPE aufgrund ihrer Ordnung in den einzelnen Entwicklungen nach numerischer Relevanz ordnen, von begrenzter Aussagekraft. Denn die einzelnen Entwicklungen können nicht entflochten werden und somit ist es nicht möglich jede der Entwicklungen bis zu einer bestimmten Ordnung vollständig zu notieren. Die bis zu sechs Entwicklungen machen ein Ordnungsschema, das nach zwei bzw. drei Parametern sortiert, nur eingeschränkt möglich.

### „Pol+Kontinuum“-Ansatz und Quark-Hadron-Dualität

Alle nötigen Techniken zur Erstellung der QCD-Summenregeln wurden in den vorangegangenen Abschnitten dieses Kapitels bereitgestellt. Für große raumartige Impulse kann der Strom-Strom-Korrelator durch dessen Operatorproduktentwicklung beschrieben werden, d.h. für  $-q^2 \rightarrow \infty$  gilt  $\Pi(q^2) = \Pi_{\text{OPE}}(q^2)$ . Über die Dispersionsrelation ist der Zusammenhang zur Spektraldichte  $\rho(q) \equiv \text{Im}\Pi(q^2)$  hergestellt. Der „Pol+Kontinuum“-Ansatz im Vakuum [Fur92]

$$\rho(s) \equiv \text{Im}\Pi(s) = \text{Im}\Pi_{\text{ph}}(s) + \Theta(s - s_0)\text{Im}\Pi_{\text{OPE}}(s) \quad (2.102)$$

zerlegt die Spektraldichte in den phänomenologischen Anteil

$$\text{Im}\Pi_{\text{ph}}(s) = \pi(2\pi)^3 |\langle \Omega | j(0) | n \rangle|^2 \delta(\sqrt{s} - (m_n - m_\Omega)) , \quad (2.103)$$

welcher die niedrigste hadronische Resonanz aus Gl. (2.8) mit  $p_n = (m_n, \vec{0})$  und  $p_\Omega = (m_\Omega, \vec{0})$  enthält, sowie in das Kontinuum, das ab dem Schwellenwert<sup>2</sup>  $s_0$  durch  $\text{Im}\Pi_{\text{OPE}}(s)$  gegeben ist. Wobei der Schwellenparameter  $s_0$  so gewählt wird, dass er oberhalb der hadronischen Resonanz liegt. Die Benutzung von  $\text{Im}\Pi_{\text{OPE}}(s)$  anstelle von  $\text{Im}\Pi(s)$  scheint für große Impulse legitim, ist aber vor allem durch den Erfolg in zahlreichen Anwendung gerechtfertigt. Das Dispersionsintegral spaltet sich demnach in einen Anteil für niedrige Impulse und einen Anteil für hohe Impulse auf. Die Summenregel im Vakuum hat damit folgende Form:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{OPE}}(q^2) &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Pi^{(n)}(s)|_{s=0}}{n!} (q^2)^n \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{s_0} ds \left(\frac{q^2}{s}\right)^N \frac{\text{Im}\Pi_{\text{ph}}(s)}{s-q^2} + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} ds \left(\frac{q^2}{s}\right)^N \frac{\text{Im}\Pi_{\text{OPE}}(s)}{s-q^2}. \end{aligned} \quad (2.104)$$

In der Literatur findet man häufig eine weitere vereinfachende Annahme zur Struktur des Kontinuums der Spektraldichte [Rei85, Col01]. Für das Dispersionsintegral hat man im Grenzwert  $q^2 \rightarrow -\infty$  die Relation

$$\int_{s_0}^{\infty} ds \left(\frac{q^2}{s}\right)^N \frac{\text{Im}\Pi(s)}{s-q^2} \approx \int_{s_0}^{\infty} ds \left(\frac{q^2}{s}\right)^N \frac{\text{Im}\Pi^{\text{pert}}(s)}{s-q^2}, \quad (2.105)$$

welche auch globale Quark-Hadron-Dualität genannt wird. Dabei bezeichnet  $\Pi^{\text{pert}}(s)$  den störungstheoretischen Anteil der OPE des Strom-Strom-Korrelators. Diese Annahme ist die abgeschwächte Form der lokalen Quark-Hadron-Dualität, d.h.  $\Pi(s) \rightarrow \Pi^{\text{pert}}(s)$  für  $s \rightarrow \infty$ . Setzt man die Quark-Hadronen-Dualität voraus, wird im Kontinuumsterm der Gl. (2.104)  $\Pi_{\text{OPE}}(s)$  durch  $\Pi^{\text{pert}}(s)$  ersetzt.

Im Medium verwendet man ebenfalls den „Pol+Kontinuum“-Ansatz, welcher jedoch zwei hadronische Resonanzen und zwei Kontinua umfasst, die links und rechts des Ursprungs der reellen  $q_0$ -Achse angeordnet sind und den Anregungen der Ströme  $j$  und  $j^\dagger$ , d.h. Hadronen und Anti-Hadronen, entsprechen. Die Summenregeln im Medium ergeben für den geraden Anteil

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{OPE}}^g(q_0, \vec{q}) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Pi^{(n)}(\omega, \vec{q})|_{\omega=0}}{n!} (q_0)^n (1 + (-1)^n) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0^-}^{\omega_0^+} d\omega \text{Im}\Pi_{\text{ph}}(\omega, \vec{q}) \frac{q_0^N}{\omega^{N-1}} \frac{(1 + (-1)^N) + \frac{q_0}{\omega}(1 - (-1)^N)}{\omega^2 - q_0^2} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{\omega_0^-} + \int_{\omega_0^+}^{\infty} \right) d\omega \text{Im}\Pi_{\text{OPE}}(\omega, \vec{q}) \frac{q_0^N}{\omega^{N-1}} \frac{(1 + (-1)^N) + \frac{q_0}{\omega}(1 - (-1)^N)}{\omega^2 - q_0^2} \end{aligned} \quad (2.106a)$$

<sup>2</sup>Dieses  $s_0$  ist nicht mit jenem in Abschnitt 2.1 zu verwechseln, welches dort eingeführt wurde, um den Radius eines Kreises um den Ursprung zu definieren, in welchem der Strom-Strom-Korrelator analytisch ist.

und für den ungeraden Anteil des Strom-Strom-Korrelators

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\text{OPE}}^u(q_0, \vec{q}) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Pi^{(n)}(\omega, \vec{q})|_{\omega=0}}{n!} (q_0)^{n-1} (1 - (-1)^n) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0^-}^{\omega_0^+} d\omega \operatorname{Im} \Pi_{\text{ph}}(\omega, \vec{q}) \frac{q_0^{N-1}}{\omega^{N-1}} \frac{(1 - (-1)^N) + \frac{q_0}{\omega}(1 + (-1)^N)}{\omega^2 - q_0^2} \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{\omega_0^-} + \int_{\omega_0^+}^{\infty} \right) d\omega \operatorname{Im} \Pi_{\text{OPE}}(\omega, \vec{q}) \frac{q_0^{N-1}}{\omega^{N-1}} \frac{(1 - (-1)^N) + \frac{q_0}{\omega}(1 + (-1)^N)}{\omega^2 - q_0^2}.
 \end{aligned} \tag{2.106b}$$

Der Ansatz für  $\operatorname{Im} \Pi_{\text{ph}}(\omega)$  folgt wie im Vakuumfall aus der spektralen Summe in Gl. (2.8):

$$\operatorname{Im} \Pi_{\text{ph}}(\omega) = \pi F_+ \delta(\omega - (m_+ - m_\Omega)) - \pi F_- \delta(\omega + (m_- - m_\Omega)) \tag{2.107}$$

mit  $F_\pm = (2\pi)^3 |\langle \Omega | j^{(\dagger)}(0) | n_\pm \rangle|^2$ , wobei das Matrixelement mit „-“ zum adjungierten Strom gehört und  $p_\pm = (m_\pm, \vec{0})$  und  $p_\Omega = (m_\Omega, \vec{0})$  angenommen wird. Die Schwellenwerte der Kontinua werden typischerweise symmetrisch zum Ursprung gewählt, d.h. es gilt  $\omega_0^+ = -\omega_0^-$ .

## 2.4 Borel-Transformation

Die aus den Dispersionsrelationen (2.16) und (2.21) folgenden QCD-Summenregeln sind nicht besonders geeignet, um die Parameter des tiefsten hadronischen Zustandes zu bestimmen. Im Allgemeinen beinhalten sie unbekannte Subtraktionen, und über die Spektraldichte ist neben der niedrigsten Anregung wenig bekannt. Zudem resultiert die OPE aus einer asymptotischen Reihe, für welche nur die ersten Glieder berechnet werden. Die Situation kann durch die Anwendung der Borel-Transformation, welche seit der Einführung der QCD-Summenregeln genutzt wird [Shi79], verbessert werden. Die Borel-Transformation ist definiert durch den Grenzübergang [Fur92]

$$\mathcal{B}[f(Q^2)] \equiv \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ Q^2 = nM_B^2}} \frac{(Q^2)^{n+1}}{n!} \left( -\frac{d}{dQ^2} \right)^n f(Q^2) = F(M_B^2), \tag{2.108}$$

wobei im Vakuum  $Q^2 = -q^2$  gilt und im Medium entsprechend  $Q^2 = -q_0^2$ . Der neue Parameter  $M_B$  wird als Borel-Masse bezeichnet und bleibt im Grenzwert  $Q^2, n \rightarrow \infty$  endlich. Im Folgenden sollen typische Funktionen  $f(Q^2)$ , welche in der OPE und in der Dispersionsrelation auftreten, Borel-transformiert werden. Aus direkten Berechnungen mit der Definition (2.108) erhält man:

$$f(Q^2) = (Q^2)^k \quad \longrightarrow \quad F(M_B^2) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \tag{2.109}$$

$$f(Q^2) = \frac{1}{(Q^2)^k} \quad \longrightarrow \quad F(M_B^2) = \frac{1}{(k-1)! (M_B^2)^{k-1}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \tag{2.110}$$

$$f(Q^2) = (Q^2)^k \log Q^2 \quad \longrightarrow \quad F(M_B^2) = (-1)^{k+1} k! (M_B^2)^{k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \tag{2.111}$$

Obwohl für diese einfachen Funktionen, die in den Summenregeln als Subtraktionen bzw. Potenz-Korrekturen auftauchen, die Berechnung mithilfe des Grenzübergangs schnell zum Ziel führt, sind die Borel-Transformierten komplizierter Funktionen nur schwer zu erhalten. Für kompliziertere Funktionen ist die Verbindung der Borel-Transformation zur Laplace-Transformation hilfreich.

Die Laplace-Transformation ist definiert durch [Bro08]

$$\mathcal{L}[g(t)] = \int_0^{\infty} dt e^{-pt} g(t) = f(p), \quad (2.112)$$

wobei die gegebene Funktion  $f(p)$  der komplexen Veränderlichen  $p$  die Laplace-Transformierte der Funktion  $g(t)$  der reellen Veränderlichen  $t$  ist. Dabei wird vorausgesetzt, dass  $g(t)$  in ihrem Definitionsbereich  $t \geq 0$  stückweise glatt ist und für  $t \rightarrow \infty$  nicht stärker als  $e^{\alpha t}$  mit  $\alpha > 0$  gegen  $\infty$  strebt. Für die inverse Laplace-Transformation gilt:

$$\mathcal{L}^{-1}[f(p)] = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dp e^{pt} f(p) = g(t) \quad (2.113)$$

für  $t > 0$ . Der Integrationsweg dieses komplexen Integrals ist die Parallele  $\text{Re } p = c$  zur imaginären Achse, wobei  $c > \alpha$  gilt. Eine alternative inverse Laplace-Transformation, welche den Zusammenhang zur Grenzwertdefinition (2.108) der Borel-Transformation offenbart, ist durch die Post-Widder'sche Umkehrformel gegeben [Hil12a]:

$$\mathcal{L}^{-1}[f(p)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \binom{n}{t}^{n+1} \left( -\frac{d}{dp} \right)^n f(p) \Big|_{p=n/t} = g(t). \quad (2.114)$$

Für  $t = 1/M_B^2$  und  $n/t = nM_B^2 = Q^2$  erhält man

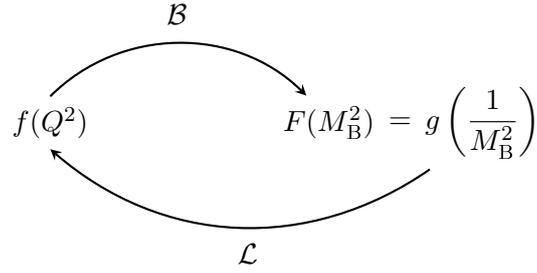
$$g\left(\frac{1}{M_B^2}\right) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ Q^2 = nM_B^2}} \frac{(Q^2)^{n+1}}{n!} \left( -\frac{d}{dQ^2} \right)^n f(Q^2). \quad (2.115)$$

Durch Vergleich mit Gl. (2.108) identifiziert man

$$\mathcal{B}[f(Q^2)] \equiv F(M_B^2) = g\left(\frac{1}{M_B^2}\right) \equiv \mathcal{L}^{-1}[f(Q^2)]. \quad (2.116)$$

Die Borel-Transformierte der Funktion  $f$  entspricht der inversen Laplace-Transformierten der Funktion  $f$ . Findet man eine Funktion  $g$ , welche Laplace-transformiert der gegebenen Funktion  $f$  entspricht, so hat man die gesuchte Borel-Transformierte  $F$  der Funktion  $f$  (s. Abb. 2.9). Damit erhält man die Borel-Transformierten für eine große Menge von Funktionen, die als Laplace-Transformierte der gesuchten Funktionen bekannt sind. Auch die gut verstandenen Eigenschaften von Laplace-Transformationen lassen sich damit benutzen. Der Dämpfungssatz [Bro08]

$$\mathcal{L}[e^{-at} g(t)] = f(p + a) \quad (2.117)$$



**Abbildung 2.9:** Graphische Darstellung der Gl. (2.116), welche den Zusammenhang zwischen Borel- und (inverser) Laplace-Transformation herstellt.

erleichtert die Berechnung der Borel-Transformierten vieler Funktionen, denn mit der Definition  $g(t) \equiv \mathcal{L}^{-1}[f(p)]$  sowie  $t = 1/M_B^2$  und  $p = Q^2 - a$  gilt

$$\mathcal{B}[f(Q^2 - a)] = e^{a/M_B^2} \mathcal{B}[f(Q^2)]. \quad (2.118)$$

Für Funktionen, wie sie bei der Auswertung der hadronischen Seite der Dispersionsrelation auftauchen, erhält man die Borel-Transformation:

$$f(Q^2) = \frac{1}{(Q^2 + a)} \quad \longrightarrow \quad F(M_B^2) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{e^{-a/M_B^2}}{(M_B^2)^{k-1}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.119)$$

Die Borel-Transformation der Wilson-Koeffizienten, die aus den Propagatoren von Teilchen mit endlicher Masse stammen, lässt sich unter iterativer Anwendung der Identität

$$\frac{(Q^2)^m}{Q^2 + a} = (Q^2)^{m-1} - \frac{a(Q^2)^{m-1}}{Q^2 + a} \quad (2.120)$$

und mithilfe der Gln. (2.109) und (2.119) bestimmen:

$$f(Q^2) = \frac{(Q^2)^l}{(Q^2 + a)^k} \quad \longrightarrow \quad F(M_B^2) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{(-a)^l}{(M_B^2)^{k-1}} e^{-a/M_B^2} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.121)$$

Die Borel-Transformation verbessert die aus den subtrahierten Dispersionsrelationen (2.16) und (2.21) folgenden Summenregeln in dreifacher Hinsicht. Sie eliminiert die Subtraktionen gemäß Gl. (2.109) und verbessert die Konvergenz der asymptotischen Reihe der OPE, indem höhere Glieder gemäß Gl. (2.110) mit  $1/n!$  unterdrückt werden. Durch exponentielle Faktoren im Integranden des Integrals über die hadronische Spektraldichte verstärkt die Borel-Transformation (2.119) den Beitrag der niedrigsten Resonanz für kleine  $M_B$  nahe der Anregung.

Die Auswertung der QCD-Summenregeln soll so wenig wie möglich von der Wahl der Borel-Masse  $M_B$  abhängen. Daher wird die Kontinuumschwelle  $s_0$  so gewählt, dass die Borel-Kurve (Resonanzparameter in Abhängigkeit der Borel-Masse) möglichst flach ist. Die Wahl des numerischen Wertes von  $M_B$  ist ein Kompromiss, da eine besonders große bzw. kleine Borel-Masse die Summenregel in zweierlei Hinsicht beeinflusst [Shi79]. Für große Werte von  $M_B$  sind höhere Glieder der OPE durch ihr  $1/(M_B^2)^n$ -Verhalten besonders stark unterdrückt

und der unumgängliche Abbruch der OPE bei einer gegebenen Massendimension der Kondensate fällt umso weniger ins Gewicht. Auf der hadronischen Seite wirkt sich eine große Borel-Masse jedoch negativ aus, da im Integral über die Spektraldichte neben der niedrigsten Resonanz auch höhere Anregungen, welche nur grob durch ein Kontinuum modelliert sind, Beiträge in derselben Größenordnung liefern. Die Vorteile kleiner  $M_B$ , d.h. die Verstärkung der niedrigsten Resonanz und die exponentielle Unterdrückung des Kontinuums, gehen verloren. Für kleine Borel-Massen werden außerdem die Potenz-Korrekturen der OPE größer und damit das Konvergenzverhalten der OPE schlechter.

Es werden daher Kriterien für eine maximale und eine minimale Borel-Masse gewählt, um die Gültigkeit der Summenregel zu gewährleisten. Das ermittelte Intervall wird als Borel-Fenster bezeichnet. Ein Beispiel solcher Ober- und Untergrenzen für die Evaluierung von  $Qq$ -Mesonsummenregeln folgt aus den Kriterien in [Hay04]: Die Obergrenze  $M_B^{\max}$  für das Borel-Fenster wird so bestimmt, dass im Integral über die Spektraldichte die Beträge für die niedrigste Resonanz und das Kontinuum gleich sind. Die Untergrenze  $M_B^{\min}$  für das Borel-Fenster wird so berechnet, dass die Terme der OPE in der höchsten betrachteten Massendimension der Kondensate maximal 20 % zur gesamten OPE beitragen. Zur eigentlichen Bestimmung der Parameter der niedrigsten Resonanz werden dann innerhalb des Borel-Fensters jene  $M_B$  herangezogen, für welche die Borel-Kurve zu gegebenem  $s_0$  möglichst stabil, d.h. flach, ist.

## 3 OPE der Massendimension 6

Der Bestimmung der Wilson-Koeffizienten vakuum- und mediumspezifischer Vier-Quark-Kondensate wird die Operatorproduktentwicklung pseudo-skalarer  $Qq$ -Mesonen vorangestellt, um den Anschluss an etablierte D-Meson-Summenregeln im Medium herzustellen. Bereits dabei kommen die Techniken der OPE in der führenden Ordnung der Störungstheorie zum Einsatz. Nach den detaillierten Erläuterungen zur Berechnung von Vier-Quark-Kondensatbeiträgen sind in diesem Kapitel die exakten Vier-Quark-Kondensatresultate pseudo-skalarer  $Qq$ -Mesonen sowie deren Ergebnisse mit SQME aufgeführt. Die Differenzen der Vier-Quark-Kondensatbeiträge chiraler Partner, welche als Ordnungsparameter der spontanen chiralen Symmetriebrechung bedeutend sind, werden präsentiert. Um Einsicht in die gesamte OPE pseudo-skalarer Mesonen der Massendimension 6 zu erhalten, schließt dieses Kapitel Ausführungen zur Berechnung von Drei-Gluon-Kondensaten ein.

### 3.1 OPE von $Qq$ -Mesonen bis zur Massendimension 5

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Ergebnisse aus [Zsc11], d.h. die OPE von  $Qq$ -Mesonen bis zur Massendimension 5 im Überblick, wiedergegeben. Auf Referenzen wird im Folgenden verzichtet, da diese sich an gleicher Stelle finden. Dieser Abschnitt dient allein zur vollständigen Darstellung der OPE hin zu Vier-Quark-Kondensaten der Massendimension 6.

Die Ströme, welche die Quantenzahlen und den Valenzquark-Inhalt von D-Mesonen aufweisen, haben die folgende pseudo-skalare Struktur:

$$j_{D^+}(x) = i\bar{d}(x)\gamma_5 c(x), \quad (3.1a)$$

$$j_{D^-}(x) = i\bar{c}(x)\gamma_5 d(x), \quad (3.1b)$$

wobei  $j_{D^+}(x) = j_{D^-}^\dagger(x)$  gilt. Allgemeiner notiert man für pseudo-skalare  $Qq$ -Mesonen<sup>1</sup>

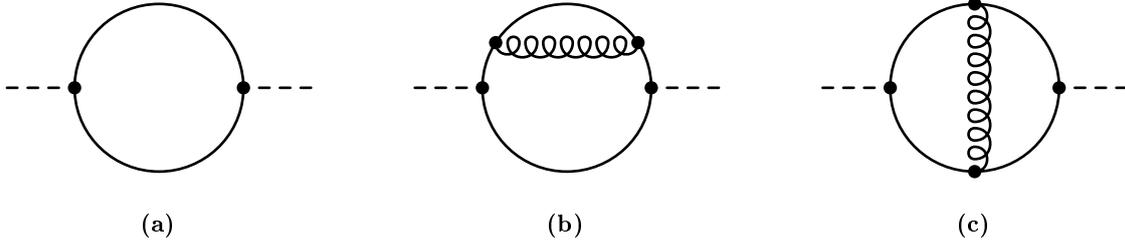
$$j(x) = i\bar{q}(x)\gamma_5 Q(x) \quad (3.2)$$

mit zu  $q$  und  $Q$  gehörender leichter ( $m$ ) und schwerer ( $M$ ) Quark-Masse. Der Strom-Strom-Korrelator (2.1) für  $Qq$ -Mesonen liefert nach Auswertung des Wick-Theorems

$$\Pi(q) = \Pi^{(0)}(q) + \Pi_q^{(2)}(q) + \Pi_Q^{(2)}(q) + \Pi^{(4)}(q) \quad (3.3)$$

---

<sup>1</sup>Es sei darauf hingewiesen, dass in diesem Kapitel  $q$  in zweifacher Bedeutung in einer Gleichung auftreten kann. Zum einen als Impuls des Mesons, zum anderen als Quark-Feldoperator des leichten Quarks. In den meisten Fällen ist die Bedeutung eindeutig. Als Index ist immer das leichte Quark gemeint, außer für partielle Ableitungen.



**Abbildung 3.1:** Störungstheoretische Diagramme in (a) Einschleifen- und (b), (c) Zweischleifenordnung.

mit

$$\Pi^{(0)}(q) = -i \int d^4x e^{iqx} \langle : \text{Tr}_{\text{C,D}} [\gamma_5 S_q(0, x) \gamma_5 S_Q(x, 0)] : \rangle, \quad (3.4a)$$

$$\Pi_q^{(2)}(q) = \int d^4x e^{iqx} \langle : \bar{q}(x) \gamma_5 S_Q(x, 0) \gamma_5 q(0) : \rangle, \quad (3.4b)$$

$$\Pi_Q^{(2)}(q) = \int d^4x e^{iqx} \langle : \bar{Q}(0) \gamma_5 S_q(0, x) \gamma_5 Q(x) : \rangle, \quad (3.4c)$$

$$\Pi^{(4)}(q) = -i \int d^4x e^{iqx} \langle : \bar{q}(x) \gamma_5 Q(x) \bar{Q}(0) \gamma_5 q(0) : \rangle, \quad (3.4d)$$

wobei  $(0)$ ,  $(2)$  und  $(4)$  die Anzahl nicht-Wick-kontrahierter Quark-Feldoperatoren angibt. Abhängig von der gewählten Ordnung der Entwicklung des störungstheoretischen Quark-Propagators  $S_i$  aus Gl. (2.48) enthält der vollkontrahierte Term  $\Pi^{(0)}$  den störungstheoretischen Anteil  $\Pi^{\text{pert}}$  der OPE zum Einsoperator, welcher rein perturbativ behandelt werden kann, bzw. den Anteil weicher Gluonen  $\Pi_{G^2}^{(0)}$ :

$$\Pi^{(0)}(q) = \Pi^{\text{pert}}(q) + \Pi_{G^2}^{(2)}. \quad (3.5)$$

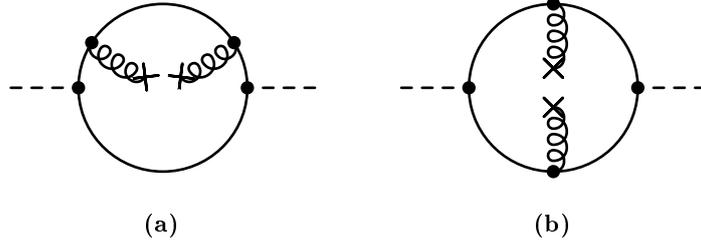
Die Beiträge  $\Pi_{G^2}^{(0)}$ ,  $\Pi_q^{(2)}(q)$  und  $\Pi_Q^{(2)}(q)$  entsprechen dem nicht-perturbativen Teil des Strom-Strom-Korrelators, zu welchem auch der Term mit vier unkontrahierten Quark-Feldoperatoren  $\Pi^{(4)}(q)$  gehört, der jedoch für nicht-verschwindende Impulse  $q^2$  keinen Beitrag liefert.

Nach einer Fourier-Transformation ist der Wilson-Koeffizient des Einheitsoperators wie in Gl. (2.4) gegeben durch:

$$\Pi^{\text{pert}}(q) = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} \text{Tr}_{\text{C,D}} \left[ \gamma_5 S_q^{(0)}(p) \gamma_5 S_Q^{(0)}(p - q) \right] + \mathcal{O}(\alpha_s). \quad (3.6)$$

Dabei entspricht der erste Term dieser Gleichung dem Einschleifen-Diagramm in Abb. 3.1a. Die nicht explizit angegebenen Terme in Ordnung  $\alpha_s^1$ , repräsentiert durch die Zweischleifen-Diagramme in den Abbn. 3.1b und 3.1c, finden sich für den Fall identischer Quark-Massen in Standard-Lehrbüchern. Die Lösung der Gl. (3.6) ist jedoch komplizierter und wird üblicherweise mithilfe der Dispersionsrelation

$$\Pi^{\text{pert}}(q) = \frac{1}{\pi} \int_{M^2}^{\infty} ds \frac{\text{Im} \Pi^{\text{pert}}(s)}{s - q^2} \quad (3.7)$$



**Abbildung 3.2:** Diagramme mit gluonischen Kondensaten der Massendimension 4.

bestimmt, wobei der Imaginärteil des störungstheoretischen Terms über Cutkosky-Schnittregeln ermittelt wird. Im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema ist der störungstheoretische Beitrag IR-konvergent. Für  $m = 0$  erhält man in Feynman-Eichung

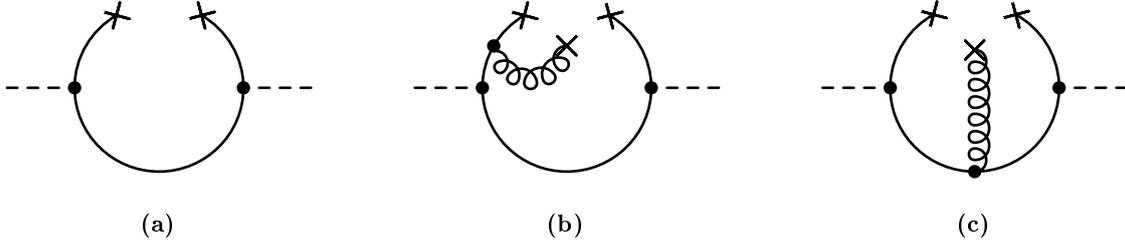
$$\begin{aligned} \text{Im}\Pi^{\text{pert}}(s) &= \frac{3}{8\pi} \frac{(s - M^2)^2}{s} \\ &+ \frac{\alpha_s}{2\pi^2} \frac{(s - M^2)^2}{s} \left[ \frac{9}{4} + 2\text{Li}_2\left(\frac{M^2}{s}\right) + \log\left(\frac{s}{M^2}\right) \log\left(\frac{s}{s - M^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \log\left(\frac{M^2}{s - M^2}\right) + \log\left(\frac{s}{s - M^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{M^2}{s} \log\left(\frac{s - M^2}{M^2}\right) + \frac{M^2}{s - M^2} \log\left(\frac{s}{M^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dabei ist  $\text{Li}_2(x) = -\int_0^x dt t^{-1} \log(1 - t)$  der Dilogarithmus.

Der gluonische Anteil ergibt sich aus den Diagrammen in Abb. 3.2, indem die störungstheoretischen Quark-Propagatoren in Gl. (3.4a) in erster bzw. zweiter Ordnung ihrer Entwicklung mit  $\tilde{A} = \tilde{A}^{(0)}$  benutzt werden. Dabei treten zwei Terme auf, welche dem Diagramm in Abb. 3.2a entsprechen, da die weichen Gluonen sowohl an das leichte als auch an das schwere Quark koppeln. Nach aufwendigen Rechnungen, aufgrund der zwei verschiedenen Quark-Massen, erhält man für den gluonischen Beitrag zur OPE:

$$\begin{aligned} \Pi_{G^2}^{(0)}(q) &= \langle : \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 : \rangle \frac{1}{q^2 - M^2} \left( -\frac{1}{12} \frac{M}{m} - \frac{1}{24} \frac{q^2}{q^2 - M^2} \right) \\ &+ \langle : \frac{\alpha_s}{\pi} \left( \frac{(vG)^2}{v^2} - \frac{G^2}{4} \right) : \rangle \left( q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2} \right) \\ &\times \frac{1}{(q^2 - M^2)^2} \left( -\frac{1}{6} - \frac{1}{9} \log \frac{m^2}{M^2} - \frac{2}{9} \log \left( -\frac{M^2}{q^2 - M^2} \right) \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

wobei die Notationen  $G^2 = G_{\mu\nu}^A G^{A\mu\nu}$  und  $(vG)^2 = v^\mu v_\nu G_{\mu\lambda}^A G^{A\nu\lambda}$  verwendet werden. Der erste Term in Gl. (3.9) enthält das Vakuumkondensat und trägt auch bei verschwindenden Dichten bei. Der zweite Term hingegen ist der mediumspezifische Ausdruck, welcher im Vakuum verschwindet. Das IR-divergente Verhalten des Resultats durch Terme  $\propto 1/m$  und  $\propto \log m^2$ , welche die führenden divergenten Terme für  $m \rightarrow 0$  darstellen, ist offenbar. Diese Divergenzen sind Ausdruck langreichweitiger Effekte, die von den kleinen Impulsbeiträgen



**Abbildung 3.3:** Diagramme mit Quark-Kondensaten bis zur Massendimension 5: (a) Diagramm mit chiralem Kondensat  $\langle \bar{q}q \rangle$ , (b) und (c) Diagramme mit gemischtem Quark-Gluon-Kondensat  $\langle \bar{q}g\sigma_{\mu\nu}G^{\mu\nu}q \rangle$ .

der Schleifenintegrale herrühren. Eine saubere Trennung der Skalen, welche für die OPE notwendig ist, ist nicht mehr gegeben. Durch Redefinition der Kondensate lassen sich die IR-Divergenzen jedoch aus den Wilson-Koeffizienten entfernen. Daher werden die aus dem Wick-Theorem stammenden, normalgeordneten Kondensate in physikalische, nicht-normalgeordnete Kondensate überführt. In diesem Abschnitt wird später eine Formel dafür bereitgestellt.

Der Beitrag  $\Pi_q^{(2)}$ , welcher Kondensate des leichten Quarks birgt, ergibt sich durch die kovariante Entwicklung des Quark-Feldes und die Projektion der Dirac- und Farb-Indizes (s. Abschnitt 2.2). Bis zur Massendimension 5 hat man:

$$\begin{aligned} \Pi_q^{(2)}(q) = \frac{1}{4} \sum_a \left( \langle \bar{q}\Gamma_a \text{Tr}_D [\Gamma^a \gamma_5 S_Q(q) \gamma_5] q \rangle - i \partial_q^\mu \langle \bar{q}\Gamma_a \overleftarrow{D}_\mu \text{Tr}_D [\Gamma^a \gamma_5 S_Q(q) \gamma_5] q \rangle \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \partial_q^\mu \partial_q^\nu \langle \bar{q}\Gamma_a \overleftarrow{D}_\mu \overleftarrow{D}_\nu \text{Tr}_D [\Gamma^a \gamma_5 S_Q(q) \gamma_5] q \rangle \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dabei ist  $\Gamma^a \notin \{\sigma^{\lambda<\rho}, i\gamma_5\gamma^\lambda, \gamma_5\}$ , weil Kondensate mit diesen Dirac-Strukturen nicht invariant unter Paritäts- und Zeitumkehr-Transformationen sind bzw. da solche Erwartungswerte multipliziert mit der Fourier-transformierten symmetrischen Taylor-Entwicklung des Quark-Feldes verschwinden. Die einzelnen Beiträge der Quark-Kondensate erhält man durch Einsetzen des freien Quark-Propagators  $S_Q^{(0)}$  in die drei Terme der Gl. (3.10). Ein vierter Beitrag, assoziiert mit dem Diagramm in Abb. 3.3c, ergibt sich für den störungstheoretischen Propagator erster Ordnung  $S_Q^{(1)}$  im ersten Term der Gl. (3.10), wobei das Gluon-Feld in führender Ordnung  $\tilde{A}^{(0)}$  eingefügt wird. Eine eindeutige Zuordnung der anderen drei Beiträge zu den Diagrammen in den Abbn. 3.3a und 3.3b ist nicht möglich, weil einige Terme Beiträge zu beiden Diagrammen liefern. Die komplikationslose Berechnung auf Baumgraphen-Niveau liefert:

$$\begin{aligned} \Pi_q^{(2)}(q) = \langle : \bar{q}q : \rangle \frac{M}{q^2 - M^2} - \langle : \bar{q}iD_\mu q : \rangle \frac{2Mq^\mu}{(q^2 - M^2)^2} \\ - \langle : \bar{q}\gamma_\lambda q : \rangle \frac{q^\lambda}{q^2 - M^2} + \langle : \bar{q}\gamma_\lambda iD_\mu q : \rangle \left( \frac{2q^\mu q^\nu}{(q^2 - M^2)^2} - \frac{g^{\mu\nu}}{q^2 - M^2} \right) \\ + \langle : \bar{q}D_\mu D_\nu q : \rangle \left( \frac{Mg^{\mu\nu}}{(q^2 - M^2)^2} - \frac{4Mq^\mu q^\nu}{(q^2 - M^2)^3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \langle : \bar{q} \gamma_\lambda D_\mu D_\nu q : \rangle \left( \frac{4q^\mu q^\nu q^\lambda}{(q^2 - M^2)^3} - \frac{q^\mu g^{\nu\lambda} + q^\nu g^{\mu\lambda} + q^\lambda g^{\mu\nu}}{(q^2 - M^2)^2} \right) \\
 & - \langle : \bar{q} g \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} q : \rangle \frac{1}{2} \frac{M}{(q^2 - M^2)^2} + \langle : \bar{q} g \gamma_5 \gamma_\lambda G_{\mu\nu} q : \rangle \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\sigma} q_\sigma}{(q^2 - M^2)^2}, \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

wobei das letzte Kondensat die Dirac-Struktur  $\gamma_5 \gamma_\lambda$  enthält, da ihr Verhalten unter Paritäts- und Zeitumkehr-Transformationen vom Pseudo-Tensor  $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\sigma}$  kompensiert wird. Die Lorentz-Indizes der in Gl. (3.11) notierten Kondensate sind im Anschluss auf die im Medium vorhandenen Strukturen  $g_{\mu\nu}$ ,  $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$  und  $v_\mu$  zu projizieren (s. Unterabschnitt 2.2.2). Durch die darauf folgende Anwendung der Bewegungsgleichung des Quark-Feldes (A.16) sowie der Relation (A.20) lassen sich die Kondensate in ihre wohlbekanntenen Formen überführen. Terme, die dabei ihre Proportionalität zu  $m$  offenbaren, werden trotz verschwindender leichter Quark-Massen nicht vernachlässigt. Solche Ausdrücke werden nach dem Übergang zu physikalischen Kondensaten für die Kanzellierung der IR-divergenten Beiträge der gluonischen Kondensate sorgen. Erst danach wird der Grenzübergang  $m \rightarrow 0$  vorgenommen.

Den Beitrag  $\Pi_Q^{(2)}$ , welcher Kondensate des schweren Quarks birgt, enthält bis auf einen Ausdruck ausschließlich Terme  $\propto m$ . Der einzig verbleibende Ausdruck verschwindet aufgrund des Zusammenspiels der im Folgenden präsentierten Relation zwischen normalgeordneten und physikalischen Kondensaten sowie der SQME. Die in den Gln. (3.7) mit (3.8), (3.9) und (3.11) aufgeführten Resultate summieren sich zur gesamten OPE pseudo-skalarer  $Qq$ -Mesonen bis zur Massendimension 5 im Medium, ausgedrückt durch normalgeordnete Kondensate.

Um eine konsistente Trennung der Skalen zu erreichen, müssen die IR-Divergenzen durch die Kondensate absorbiert werden, d.h. die Koeffizienten-Funktionen werden ausschließlich durch die kurzreichweitige Physik bestimmt und alle nicht-störungstheoretischen Effekte sind in den Kondensaten enthalten. Die IR-Divergenzen, welche für den Grenzübergang  $m \rightarrow 0$  auftreten, sind Fragmente des langreichweitigen Teils des Strom-Strom-Korrelators. Die Überführung der normalgeordneten Kondensate  $\langle : O : \rangle$  mit zugeordneten Diagrammen auf Baumgraphen-Niveau in physikalische Kondensate  $\langle O \rangle$  von Ordnung  $\alpha_s$  ermöglicht die Absorption der IR-Divergenzen. Ausgehend vom Wick-Theorem für Gleichzeit-Operatorprodukte zweier Quark-Felder kann die folgende Relation zwischen normalgeordneten und physikalischen Kondensaten hergeleitet werden:

$$\langle \bar{q} O [D_\mu] q \rangle = \langle : \bar{q} O [D_\mu] q : \rangle - i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \langle : \text{Tr}_{\text{C,D}} \left[ O \left[ -ip_\mu - i\tilde{A}_\mu \right] S(p) \right] : \rangle, \tag{3.12}$$

wobei  $O [D_\mu]$  eine Funktion der kovarianten Ableitung bezeichnet und  $O \left[ -ip_\mu - i\tilde{A}_\mu \right]$  die Fourier-transformierte Operator-Funktion mit  $\tilde{A}_\mu$  entsprechend der Definition (2.57) ist. Für die in  $\Pi_Q^{(2)}$  beitragenden Kondensate erhält man:

$$\langle \bar{q} q \rangle = \langle : \bar{q} q : \rangle + \frac{3}{4\pi^2} m^3 \left( \log \frac{\mu^2}{m^2} + 1 \right) - \frac{1}{12m} \langle : \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 : \rangle, \tag{3.13a}$$

$$\langle \bar{q} i D_\mu q \rangle = \langle : \bar{q} i D_\mu q : \rangle, \tag{3.13b}$$

$$\langle \bar{q} \gamma_\mu q \rangle = \langle : \bar{q} \gamma_\mu q : \rangle, \tag{3.13c}$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{q}\gamma_\mu iD_\nu q \rangle &= \langle : \bar{q}\gamma_\mu iD_\nu q : \rangle + \frac{2}{16\pi^2} m^4 g_{\mu\nu} \left( \log \frac{\mu^2}{m^2} \right) - \frac{g_{\mu\nu}}{48} \langle : \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 : \rangle \\ &+ \frac{1}{18} \left( g_{\mu\nu} - 4 \frac{v_\mu v_\nu}{v^2} \right) \left( \log \frac{\mu^2}{M^2} - \frac{1}{3} \right) \langle : \frac{\alpha_s}{\pi} \left( \frac{(vG)^2}{v^2} - \frac{G^2}{4} \right) : \rangle, \end{aligned} \quad (3.13d)$$

$$\langle \bar{q}iD_\mu iD_\nu q \rangle = \langle : \bar{q}iD_\mu iD_\nu q : \rangle, \quad (3.13e)$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{q}\gamma_\lambda iD_\mu iD_\nu q \rangle &= \langle : \bar{q}\gamma_\lambda iD_\mu iD_\nu q : \rangle + \frac{3m^5}{16\pi^2} g_{\mu\nu} \left( \log \frac{\mu^2}{m^2} + 1 \right) \\ &+ \frac{m}{16} g_{\mu\nu} \left( \log \frac{\mu^2}{m^2} + \frac{1}{3} \right) \langle : \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 : \rangle \\ &+ \frac{m}{36} \left( g_{\mu\nu} - 4 \frac{v_\mu v_\nu}{v^2} \right) \left( \log \frac{\mu^2}{M^2} + \frac{2}{3} \right) \langle : \frac{\alpha_s}{\pi} \left( \frac{(vG)^2}{v^2} - \frac{G^2}{4} \right) : \rangle, \end{aligned} \quad (3.13f)$$

$$\langle \bar{q}g\sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} q \rangle = \langle : \bar{q}g\sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} q : \rangle - \frac{1}{2} m \log \frac{\mu^2}{m^2} \langle : \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 : \rangle, \quad (3.13g)$$

$$\langle \bar{q}g\gamma_5 \gamma_\lambda G_{\mu\nu} q \rangle = \langle : \bar{q}g\gamma_5 \gamma_\lambda G_{\mu\nu} q : \rangle. \quad (3.13h)$$

Die physikalischen Kondensate, die mit ihrem Normalgeordneten identisch sind, sind dies in jeder Ordnung von  $\alpha_s$ , wenn man sich auf die Entwicklung des Gluon-Feldes in führender Ordnung  $\tilde{A}_\mu^{(0)}$  beschränkt. Die entsprechenden Impulsintegrale liefern nur für gerade Potenzen von  $p$  im Integranden nicht-verschwindenden Beiträge. Die Struktur des störungstheoretischen Propagators sorgt aber dafür, dass für diese Kondensate der Integrand ungerade in  $p$  ist. Für die gluonischen Kondensate, die bereits von Ordnung  $\alpha_s$  sind, gilt:

$$\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle = \langle : \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 : \rangle, \quad (3.14a)$$

$$\langle \frac{\alpha_s}{\pi} \left( \frac{(vG)^2}{v^2} - \frac{G^2}{4} \right) \rangle = \langle : \frac{\alpha_s}{\pi} \left( \frac{(vG)^2}{v^2} - \frac{G^2}{4} \right) : \rangle. \quad (3.14b)$$

Das Einsetzen dieser Kondensate in die OPE pseudo-skalarer  $Qq$ -Mesonen im Medium liefert nach der Projektion der Lorenz-Indizes der Quark-Kondensate und Verwendung der Bewegungsgleichung des Quark-Feldes (A.16) sowie der Relation (A.20):

$$\begin{aligned} \Pi(q) &= \Pi^{\text{pert}}(q) + \langle \bar{q}q \rangle \frac{M}{q^2 - M^2} - \langle \bar{q}g\sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} q \rangle \frac{1}{2} \frac{Mq^2}{(q^2 - M^2)^3} \\ &- \langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle \frac{1}{12} \frac{1}{q^2 - M^2} + \langle \frac{\alpha_s}{\pi} \left( \frac{(vG)^2}{v^2} - \frac{G^2}{4} \right) \rangle \left( q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2} \right) \\ &\times \frac{1}{(q^2 - M^2)^2} \left( -\frac{7}{54} - \frac{1}{9} \log \frac{\mu^2}{M^2} - \frac{2}{9} \log \left( -\frac{M^2}{q^2 - M^2} \right) \right) \\ &- \langle \bar{q}\psi q \rangle \frac{(vq)}{v^2} \frac{1}{q^2 - M^2} - \langle \bar{q}\psi^i(vD) q \rangle \left( q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2} \right) \frac{2}{3} \frac{1}{(q^2 - M^2)^2} \\ &- \langle \bar{q}\psi(vD)^2 q \rangle \frac{(vq)}{v^4} \left( q^2 - 2 \frac{(vq)^2}{v^2} \right) \frac{4}{(q^2 - M^2)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \langle \bar{q} \psi g \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} q \rangle \frac{(vq)}{v^2} \left( \frac{2}{3} \frac{q^2 - \frac{(vq)^2}{v^2}}{(q^2 - M^2)^3} - \frac{1}{(q^2 - M^2)^2} \right) \\
 & + \left[ \langle \bar{q} \frac{(vD)^2}{v^2} q \rangle - \frac{1}{8} \langle \bar{q} g \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} q \rangle \right] \left( q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2} \right) \frac{4}{3} \frac{M}{(q^2 - M^2)^3}. \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

Dies ist die OPE bis zur Massendimension 5 im Grenzwert  $m \rightarrow 0$ . Die Kondensatkombination in eckigen Klammern in der letzten Zeile wird als mediumspezifisch interpretiert, da sie im Vakuum verschwindet, ähnlich der mediumspezifischen gluonischen Kombination der zweiten Zeile. Die numerischen Werte sämtlicher in Gl. (3.15) auftretender Kondensate finden sich in [Hil09, Jin93]. Die OPE der pseudo-skalaren  $Qq$ -Mesonen in Gl. (3.15) ist IR-divergenzfrei, da die divergenten Terme des Vakuum-Gluon-Kondensates  $\propto 1/m$  und des mediumspezifischen Gluon-Kondensates  $\propto \log m^2$  durch entsprechende Terme der Quark-Kondensate kompensiert werden.

Die in den folgenden Abschnitten benutzten, normalgeordneten Vier-Quark-Kondensate werden als identisch zu ihrem physikalischen Pendant betrachtet. Zum einen sind diese bereits von Ordnung  $\alpha_s$ , bis zu welcher die Relation (3.12) für Kondensate bis zur Massendimension 5 ausgewertet wurde. Zum anderen ist zu vermuten, dass Korrekturen zu den Vier-Quark-Kondensaten, zusammen mit höheren Korrekturen aus (3.12), die Divergenzen des Drei-Gluon-Kondensates in Massendimension 6 kompensieren, welches in dieser Arbeit nicht in die Resultate der OPE aufgenommen wird. Da die Diagramme zu den Vier-Quark-Kondensaten in führender Ordnung (s. Abbn. 3.4 und 3.5) auf Baumgraphen-Niveau sind, enthalten die Resultate keine IR-divergenten Terme. Ebenso liefert die SQME, welche einzig auf schwere Quarks mit großer Quark-Masse  $M$  angewendet wird, IR-stabile Ausdrücke. Damit ist die in diesem Abschnitt präsentierte OPE, zusammen mit den Vier-Quark-Beiträgen des Abschnittes 3.3, in der angegebenen Form für die Auswertung in den Summenregeln für  $Qq$ -Mesonen bereit.

## 3.2 Wilson-Koeffizienten von Vier-Quark-Kondensaten

Vier-Quark-Kondensate im Vakuum wurden schon mit Einführung der Summenregeln [Shi79] betrachtet. Ihnen wurde jedoch im Vergleich zum chiralen Kondensat  $\langle \bar{q}q \rangle$  zunächst nur geringe Bedeutung beigemessen. Um die Anzahl der in einer Summenregel auftretenden freien Parameter zu reduzieren, wurden die Vier-Quark-Kondensate mittels der Vakuumsättigungshypothese faktorisiert, d.h. sie wurden durch das Quadrat des chiralen Kondensates ersetzt. Strukturell sind Vier-Quark-Kondensate neben dem Drei-Gluon-Kondensat  $\langle G^3 \rangle$  als Beiträge zur Operatorproduktentwicklung in der Massendimension 6 wichtig. Zudem wird erwartet, dass ihre Mediumabhängigkeit einen entscheidenden Einfluss auf die Eigenschaften der Mesonen hat [Hat93].

Es gibt vier verschiedene Typen von Diagrammen für Vier-Quark-Kondensate, wobei sich zwei davon grundlegend von den übrigen beiden unterscheiden [Nar04]. Zum einen kann der äußere Impuls  $q$  durch eine innere Quark-Linie (s. Abb. 3.4), zum anderen durch eine innere Gluonen-Linie (s. Abb. 3.5) fließen; man spricht auch von Diagrammen mit weichem bzw. hartem Gluon.

Die Techniken zur Berechnung der Wilson-Koeffizienten, die diesen beiden Diagrammtypen entsprechen, sind sehr verschieden. Diagramme mit weichem Gluon stammen in der

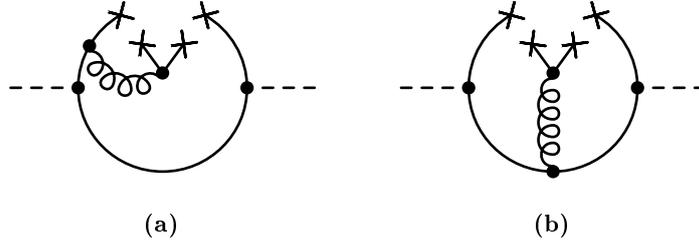


Abbildung 3.4: Diagramme mit weichem Gluon.

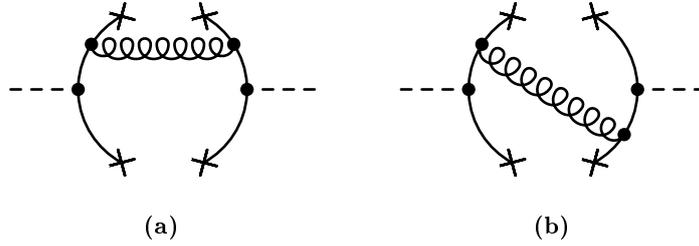


Abbildung 3.5: Diagramme mit hartem Gluon.

nullten Ordnung der Störungstheorie von der Taylor-Entwicklung eines nicht-lokalen Quark-Feldes bzw. von einem an das (gluonische) Hintergrundfeld koppelnden Quark-Propagator. Diagramme mit hartem Gluon hingegen ergeben sich in der ersten Ordnung der Störungstheorie [Shi79,Pas84]. Die Rechnung für beide Fälle soll im Folgenden ausführlicher kommentiert werden.

### 3.2.1 Diagramme mit weichem Gluon

Eine kompakte Darstellung der Methoden zur Berechnung von Wilson-Koeffizienten in der nullten Ordnung der Störungstheorie findet sich in [Hil11]. Das dort präsentierte Kalkül basiert auf der Hintergrundfeld-Methode in Fock-Schwinger-Eichung [Nov84]. Der kausale Strom-Strom-Korrelator mit dem Ansatz für den Strom  $j^X(x) := \bar{q}_1(x)\Gamma^X q_2(x)$  mit  $\Gamma^X \in \{\mathbb{1}, i\gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5\gamma_\mu\}$ , wobei sich X auf einen skalaren (S), pseudoskalaren (P), Vektor(V)- sowie Axialvektor(A)-Strom bezieht, hat folgende Gestalt:

$$\Pi^X(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle T [j^X(x) (j^X(0))^\dagger] \rangle \quad (3.16)$$

mit  $\Pi^X \in \{\Pi^{(S,P)}, \Pi^{(V,A)} \equiv g^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}^{(V,A)}\}$ .  $T[\dots]$  bedeutet die Zeitordnung und  $\langle \dots \rangle$  die Gibbs-Mittelung. Der Korrelator  $\Pi_{\mu\nu}^{(V,A)}$  lässt sich im Ruhesystem des nuklearen Mediums, d.h.  $v = (1, \vec{0})$ , und für ruhende Mesonen, d.h.  $q = (q_0, \vec{0})$ , zerlegen in

$$\Pi_{\mu\nu}^{(V,A)}(q) = \left( \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu} \right) \Pi_T^{(V,A)}(q) + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \Pi_L^{(V,A)}(q) \quad (3.17)$$

mit explizit kovariant notierten

$$\Pi_{\text{T}}^{(\text{V},\text{A})}(q) = \frac{1}{3} \left( \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - g^{\mu\nu} \right) \Pi_{\mu\nu}^{(\text{V},\text{A})}(q), \quad (3.18\text{a})$$

$$\Pi_{\text{L}}^{(\text{V},\text{A})}(q) = \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \Pi_{\mu\nu}^{(\text{V},\text{A})}(q). \quad (3.18\text{b})$$

Dabei enthält  $\Pi_{\text{T}}$  die Information über die (Axial-)Vektorfreiheitsgrade. Die Größe  $\Pi_{\text{L}}$  verweist auf die (pseudo-)skalaren Zustände und kann mit dem (pseudo-)skalaren Korrelator in Beziehung gesetzt werden [Hil11]. Demnach ist es ausreichend den kontrahierten Korrelator  $\Pi^{(\text{V},\text{A})}$  zu betrachten, wie er in Gl. (3.16) aufgeführt ist.

Die im Abschnitt 2.2 bereitgestellten Standard-OPE-Techniken – Wick-Theorem, Projektion der Dirac-Indizes auf Elemente der Clifford-Algebra sowie kovarianter Entwicklung der Quark-Feldoperatoren unter Ausnutzung der Hintergrundfeld-Methode in der Fock-Schwinger-Eichung – liefern nach einer Fourier-Transformation

$$\Pi^{\text{X}}(q) = \Pi_w^{\text{X}(0)}(q) + \Pi_w^{\text{X}(2)}(q) \quad (3.19)$$

mit

$$\Pi_w^{\text{X}(0)}(q) = -(i)^3 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \langle : \text{Tr}_{\text{C,D}} [S_1(p) \Gamma^{\text{X}} S_2(q+p) \Gamma^{\text{X}}] : \rangle, \quad (3.20\text{a})$$

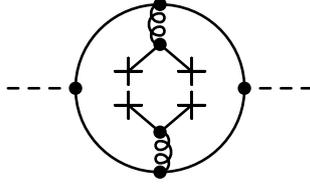
$$\begin{aligned} \Pi_w^{\text{X}(2)}(q) = (i)^2 \sum_{\Gamma} \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \partial_q^{\vec{\alpha}_n} \langle : \bar{q}_2 \Gamma \text{Tr}_{\text{D}} [\Gamma \Gamma^{\text{X}} S_1(-q) \Gamma^{\text{X}}] D_{\vec{\alpha}_n} q_2 \\ + (-1)^n \bar{q}_1 \Gamma \text{Tr}_{\text{D}} [\Gamma \Gamma^{\text{X}} S_2(q) \Gamma^{\text{X}}] D_{\vec{\alpha}_n} q_1 : \rangle \end{aligned} \quad (3.20\text{b})$$

und  $D_{\vec{\alpha}_n} = D_{\alpha_1} \dots D_{\alpha_n}$  (und analoger Notation für die partielle Ableitung). Quark-Felder sowie deren Ableitungen werden bei  $x = 0$  ausgewertet. Falls Vektor- oder Axialvektor-Ströme betrachtet werden, versteht sich  $(\Gamma^{\text{X}})_{ij} (\Gamma^{\text{X}})_{kl} \equiv (\Gamma_{\mu}^{\text{X}})_{ij} (\Gamma^{\text{X}\mu})_{kl}$ . Die Notation der Projektion der Dirac-Indizes ist hier im Vergleich zu Unterabschnitt 2.2.2 vereinfacht: Auf obere und untere Indizes  $a$  wird verzichtet und die Kontraktion von Lorentz-Indizes entsprechender  $\Gamma$  innerhalb und außerhalb des Spurargumentes ist selbstverständlich. Die Größe  $\Pi_w^{\text{X}(0)}$  bezeichnet den voll-kontrahierten Anteil und  $\Pi_w^{\text{X}(2)}$  den Zwei-Quark-Term, wobei  $w$  für Beiträge mit weichem Gluon steht (s. Abb. 3.4).

Die Differenzen von Strom-Strom-Korrelatoren chiraler Partner,  $\Pi_w^{\text{P-S}} \equiv \Pi_w^{\text{P}} - \Pi_w^{\text{S}}$  sowie  $\Pi_w^{\text{V-A}} \equiv \Pi_w^{\text{V}} - \Pi_w^{\text{A}}$ , lassen eine Reduzierung der Gl. (3.20b) zu. Dirac-Spuren von typischen Anti-Kommutatoren, wie sie in chiralen Differenzen auftreten, schränken die Projektion von Dirac-Indizes auf bestimmte Elemente der Clifford-Algebra ein [Hil11]:

$$\begin{aligned} \Pi_w^{\text{P-S}(2)}(q) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \sum_{\Gamma}^{\{1, \sigma_{\alpha < \beta}, \gamma_5\}} \langle : \bar{q}_2 \Gamma \partial_q^{\vec{\alpha}_n} \text{Tr}_{\text{D}} [\Gamma \Gamma^{\text{X}} S_1(-q) \Gamma^{\text{X}}] D_{\vec{\alpha}_n} q_2 \\ + (-1)^n \bar{q}_1 \Gamma \partial_q^{\vec{\alpha}_n} \text{Tr}_{\text{D}} [\Gamma \Gamma^{\text{X}} S_2(q) \Gamma^{\text{X}}] D_{\vec{\alpha}_n} q_1 : \rangle, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \Pi_w^{\text{V-A}(2)}(q) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \sum_{\Gamma}^{\{1, i\gamma_5\}} \langle : \bar{q}_2 \Gamma \partial_q^{\vec{\alpha}_n} \text{Tr}_{\text{D}} [\Gamma \Gamma^{\text{X}} S_1(-q) \Gamma^{\text{X}}] D_{\vec{\alpha}_n} q_2 \\ + (-1)^n \bar{q}_1 \Gamma \partial_q^{\vec{\alpha}_n} \text{Tr}_{\text{D}} [\Gamma \Gamma^{\text{X}} S_2(q) \Gamma^{\text{X}}] D_{\vec{\alpha}_n} q_1 : \rangle. \end{aligned} \quad (3.22)$$



**Abbildung 3.6:** Vollkontrahiertes Vier-Quark-Diagramm höherer Ordnung mit zwei weichen Gluonen.

Vier-Quark-Kondensatbeiträge erhält man sowohl für  $\Pi_w^{X(0)}$  als auch für  $\Pi_w^{X(2)}$ . Dabei sind die Terme aus  $\Pi_w^{X(0)}$  jeweils eine Ordnung der Störungstheorie höher als jene aus  $\Pi_w^{X(2)}$ , weil ein zusätzlicher Gluon-Propagator benötigt wird, um das Vier-Quark-Kondensat zu bilden (s. Abb. 3.6). Die in führender Ordnung der Störungstheorie relevanten Anteile für Vier-Quark-Kondensate sind somit in  $\Pi_w^{X(2)}$  mit  $n = 3$  und  $S_i = S_i^{(0)}$  sowie  $n = 0$  und  $S_i = S_i^{(1)}(\tilde{A}^{(1)})$  enthalten [Nov84]. Obwohl die Beiträge aus verschiedenen Ordnungen der kovarianten Entwicklungen von Quark- und Gluon-Feldern sowie störungstheoretischen Propagatoren stammen, fällt beim Vergleich der zugehörigen Diagramme lediglich die unterschiedliche Reihenfolge der Vertizes auf.

Der Anteil mit dritter kovarianter Ableitung des Quark-Feldes, assoziiert mit dem Diagramm in Abb. 3.4a, lautet:

$$\begin{aligned} \Pi_{w_1}^X(q) &\equiv \Pi_{w,n=3}^{X(2)}(q) \\ &= (i)^2 \sum_{\Gamma} \frac{1}{4} \frac{(-i)^3}{3!} \left\{ \langle : \bar{q}_2 \Gamma D_\nu D_\lambda D_\rho q_2 : \rangle \text{Tr}_D \left[ \Gamma \Gamma^X \partial_q^\nu \partial_q^\lambda \partial_q^\rho S_1^{(0)}(-q) \Gamma^X \right] \right. \\ &\quad \left. + \langle : \bar{q}_1 \tilde{D}_\nu \tilde{D}_\lambda \tilde{D}_\rho \Gamma q_1 : \rangle \text{Tr}_D \left[ \Gamma \Gamma^X \partial_q^\nu \partial_q^\lambda \partial_q^\rho S_2^{(0)}(q) \Gamma^X \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Der zweite Anteil mit weichem Gluon, entsprechend dem Diagramm in Abb. 3.4b, nimmt folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \Pi_{w_2}^X(q) &\equiv \Pi_{w,n=0}^{X(2)}(q) = (i)^2 \sum_{\Gamma} \frac{1}{4} \langle : \bar{q}_2 \Gamma \text{Tr}_D \left[ \Gamma \Gamma^X S_{1(\tilde{A}^{(1)})}^{(1)}(-q) \Gamma^X \right] q_2 \\ &\quad + \bar{q}_1 \Gamma \text{Tr}_D \left[ \Gamma \Gamma^X S_{2(\tilde{A}^{(1)})}^{(1)}(q) \Gamma^X \right] q_1 : \rangle. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Benutzt man den störungstheoretischen Propagator  $S_{(\tilde{A}^{(1)})}^{(1)}(p) = -S^{(0)}(p) \left( \gamma^\rho \tilde{A}_\rho^{(1)} \right) S^{(0)}(p)$  mit  $\tilde{A}_\rho^{(1)} = \frac{g}{3} D_\nu G_{\rho\lambda}(0) \partial_p^\lambda \partial_p^\nu$  erhält man:

$$\begin{aligned} \Pi_{w_2}^X(q) &= \frac{g}{3} \sum_{\Gamma} \frac{1}{4} \left\{ \langle : \bar{q}_2 \Gamma (D_\nu G_{\rho\lambda}(0)) q_2 : \rangle \text{Tr}_D \left[ \Gamma \Gamma^X S_1^{(0)}(-q) \gamma^\rho \left( \partial_{-q}^\lambda \partial_{-q}^\nu S_1^{(0)}(-q) \right) \Gamma^X \right] \right. \\ &\quad \left. + \langle : \bar{q}_1 \Gamma (D_\nu G_{\rho\lambda}(0)) q_1 : \rangle \text{Tr}_D \left[ \Gamma \Gamma^X S_2^{(0)}(q) \gamma^\rho \left( \partial_q^\lambda \partial_q^\nu S_2^{(0)}(q) \right) \Gamma^X \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Im Weiteren läuft die Behandlung von  $\Pi_{w_1}^X$  und  $\Pi_{w_2}^X$  analog. Durch mehrfaches Anwenden der Relation

$$\partial_p^\mu S^{(0)}(p) = -S^{(0)}(p) \gamma^\mu S^{(0)}(p) \quad (3.26)$$

und dem darauf folgenden Einsetzen des freien Dirac-Propagators  $S^{(0)}(p)$  aus Gl. (A.22) ergeben sich Spuren über Produkte vieler Dirac-Matrizen, welche von einem Element der Clifford-Algebra ( $\Gamma$ ) sowie mehreren Dirac-Propagatoren und Vertex-Funktionen stammen. Nach der Evaluierung der Spuren erhält man Ausdrücke, die mit den Erwartungswerten kontrahiert folgende Strukturen bilden:  $\langle : \bar{q}_i \Gamma D_\mu D_\nu D_\lambda q_i : \rangle$ ,  $\langle : \bar{q}_i \Gamma D^2 D_\lambda q_i : \rangle$ ,  $\langle : \bar{q}_i \Gamma D^\lambda D_\nu D_\lambda q_i : \rangle$ ,  $\langle : \bar{q}_i \Gamma D_\mu D^2 q_i : \rangle$  für  $\Pi_{w_1}^X$  und  $\langle : \bar{q}_i \Gamma D_\mu G_{\nu\lambda} q_i : \rangle$ ,  $\langle : \bar{q}_i \Gamma D^\lambda G_{\nu\lambda} q_i : \rangle$  für  $\Pi_{w_2}^X$ .

Man beachte, dass drei der Clifford-Algebra-Elemente  $\Gamma$  selbst Lorentz-Indizes tragen, welche mit den noch verbliebenen Indizes im Erwartungswert sowohl kontrahiert als auch unkontrahiert sein können. Projiziert man diese unkontrahierten Lorentz-Indizes, ergeben sich Strukturen, die es ermöglichen zu erkennen, ob Terme Beiträge zu Vier-Quark-Kondensaten liefern [Gro95]. Im entgegengesetzten Fall sind die Erwartungswerte – obwohl von der Massendimension 6 – auf Kondensate niedrigerer Massendimension reduzierbar, die mit der nötigen Potenz der Quark-Massen multipliziert sind bzw. enthalten solche Erwartungswerte kovariante Ableitungen, die nicht durch die Anwendung von Bewegungsgleichungen eliminiert werden können. Da in dieser Arbeit Vier-Quark-Kondensate untersucht werden, werden solche Kondensate hier nicht behandelt. Ihre Wilson-Koeffizienten lassen sich als Nebenprodukt mit den in diesem Kapitel bereitgestellten Techniken berechnen; die Auswertung von Erwartungswerten, die sich auf Kondensate niedrigerer Massendimension reduzieren lassen, ist in [Hil08] behandelt. Einzig Strukturen der Art  $D^\lambda D_\nu D_\lambda$  bzw.  $D^\lambda G_{\nu\lambda}$  liefern Beiträge zu Vier-Quark-Kondensaten. Dabei enthält der Ausdruck mit den drei kovarianten Ableitungen auch die zweite Struktur, welche unter Benutzung der Bewegungsgleichung für den Gluon-Feldstärketensor auf Quark-Terme führt

$$\langle : \bar{q}_i \Gamma' D^\lambda G_{\nu\lambda} q_i : \rangle = g \langle : \bar{q}_i \Gamma' t^A q_i \sum_f \bar{q}_f \gamma_\nu t^A q_f : \rangle, \quad (3.27)$$

wobei  $\Gamma' \in \{\mathbb{1}, \gamma^\nu, \gamma_\mu\}$ , da andere Elemente der Clifford-Algebra im Kondensat die Forderung nach Paritäts- und Zeitumkehrinvarianz nicht erfüllen [Jin93, Tho08].

### 3.2.2 Diagramme mit hartem Gluon

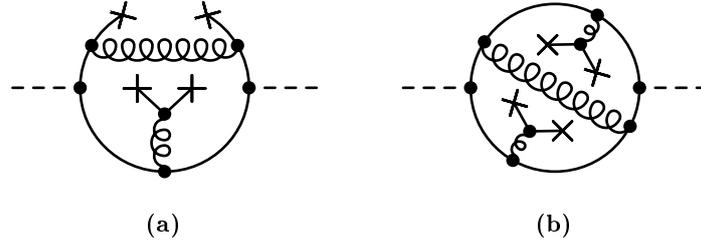
Diagramme mit hartem, also impulstragendem Gluon erfordern eine völlig andere Herangehensweise. Der Strom-Strom-Korrelator wird in der ersten Ordnung der Störungstheorie betrachtet [Pas84]:

$$\Pi^X(q) = i \int d^4x d^4y d^4z e^{iqx} \langle T \left[ j^X(x) (j^X(0))^\dagger \frac{(i)^2}{2!} \mathcal{L}_{\text{int}}(y) \mathcal{L}_{\text{int}}(z) \right] \rangle \quad (3.28)$$

mit

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(y) = g \bar{q}_1(y) \gamma^\lambda t^A q_1(y) a_\lambda^A(y) + (1 \rightarrow 2). \quad (3.29)$$

Dabei soll in  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  nur der Teil der Wechselwirkung in der Lagrange-Dichte eingeschlossen werden, welcher zwischen Quark und Gluon vermittelt, nicht jedoch der Teil, welcher die Selbstwechselwirkung der Gluonen untereinander beschreibt, weil in dieser Arbeit Vier-Quark-Kondensatbeiträge in führender Ordnung der Störungstheorie betrachtet werden sollen. Die Felder in  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  sind als freie Felder zu betrachten, insbesondere das Gluon-Feld  $a_\mu^A$ , im Gegensatz zum Hintergrundfeld  $A_\mu^A$ . In Gl. (3.28) werden alle unverbundenen Diagramme, die sich



**Abbildung 3.7:** Diagramme zu den Vier-Quark-Kondensat-Beiträgen in höherer Ordnung der Störungstheorie: (a)  $\Pi_h^{X(2)}$  und (b)  $\Pi_h^{X(0)}$ .

nach dem Wick-Theorem konstruieren lassen, nicht betrachtet. Damit wird eine Darstellung wie in Gl. (2.4) unnötig.

Bevor das Wick-Theorem zur Anwendung kommt, notiert man die Produkte von Quark- und Gluon-Feldern komponentenweise als Summen, wonach keine Rücksicht mehr auf die Dirac- und Farb-Strukturen genommen werden muss, sondern nur noch beim Vertauschen von Quark-Feldern ein Vorzeichenwechsel zu beachten ist. Der Strom-Strom-Korrelator in der ersten Ordnung der Störungstheorie aus Gl. (3.28) lässt sich zerlegen in

$$\Pi^X(q) = \Pi_h^{X(0)}(q) + \Pi_h^{X(2)}(q) + \Pi_h^{X(4)}(q), \quad (3.30)$$

wobei der Index  $h$  auf das harte Gluon verweist und in den hochgestellten Ausdrücken die Anzahl der nicht-Wick-kontrahierten Quark-Felder in Klammern angegeben ist. Vier-Quark-Kondensate ergeben sich für alle Summanden in Gl. (3.30). Während sich für den Vier-Quark-Term  $\Pi_h^{X(4)}$  die Beiträge in niedrigster Ordnung der Kopplungskonstanten  $\alpha_s^1$  ergeben, sind die Vier-Quark-Kondensat-Beiträge zum Zwei-Quark-Term  $\Pi_h^{X(2)}$  und zum voll-kontrahierten Anteil  $\Pi_h^{X(0)}$  entsprechend von Ordnung  $\alpha_s^2$  und  $\alpha_s^3$ , weil die Benutzung störungstheoretischer Quark-Propagatoren und damit die Einführung weicher Gluonen nötig ist (s. Abb. 3.7).

Um Vier-Quark-Kondensate in führender Ordnung der Störungstheorie zu erhalten, die in  $\Pi_h^{X(4)}$  enthalten sind, werden bis auf vier Quark-Felder alle Quantenfelder Wick-kontrahiert. Lässt man nicht-verbundene Diagramme unberücksichtigt, ergeben sich Graphen sowohl mit hartem als auch mit weichem Gluon-Propagator. Da aber die Störungstheorie für Propagatoren mit verschwindendem Impulsübertrag nicht anwendbar ist, beschränkt man sich auf die Beiträge mit hartem Gluon und berechnet die anderen Diagramme, wie in Unterabschnitt 3.2.1 beschrieben, aus Erwartungswerten niedrigerer Massendimension unter Benutzung der Bewegungsgleichungen.

Aus den vier Produkten von Quark-Feldern in Gl. (3.28) ergeben sich acht Diagramme mit impulstragendem Gluon, wobei die Struktur der Quark-Propagatoren nahelegt, dass je vier durch zwei Transformationen miteinander verbunden sind. Diagramme gehen ineinander über für  $(y \longleftrightarrow z)$  bzw.  $[(\bar{q}_i \longleftrightarrow q_i) \text{ und } (1 \longleftrightarrow 2)]$ . Mithilfe der Bezeichnungen für die acht Terme (mit unterdrückten Dirac- und Farb-Indizes)

$$[a] = \underbrace{q_2(x)\bar{q}_2(y)} \underbrace{q_2(z)\bar{q}_2(0)} \langle : \bar{q}_1(x)q_1(0)\bar{q}_2(z)q_2(y) : \rangle, \quad (3.31a)$$

$$[a'] = \underbrace{q_2(x)\bar{q}_2(z)} \underbrace{q_2(y)\bar{q}_2(0)} \langle : \bar{q}_1(x)q_1(0)\bar{q}_2(y)q_2(z) : \rangle, \quad (3.31b)$$

$$[b] = \underbrace{q_1(0)\bar{q}_1(z)} \underbrace{q_1(y)\bar{q}_1(x)} \langle : \bar{q}_1(y)q_1(z)\bar{q}_2(x)q_2(0) : \rangle, \quad (3.31c)$$

$$[b'] = \underbrace{q_1(0)\bar{q}_1(y)} \underbrace{q_1(z)\bar{q}_1(x)} \langle : \bar{q}_1(z)q_1(y)\bar{q}_2(0)q_2(x) : \rangle, \quad (3.31d)$$

$$[c] = \underbrace{q_1(y)\bar{q}_1(x)} \underbrace{q_2(z)\bar{q}_2(0)} \langle : \bar{q}_1(y)q_1(0)\bar{q}_2(z)q_2(x) : \rangle, \quad (3.31e)$$

$$[c'] = \underbrace{q_1(z)\bar{q}_1(x)} \underbrace{q_2(y)\bar{q}_2(0)} \langle : \bar{q}_1(z)q_1(0)\bar{q}_2(y)q_2(x) : \rangle, \quad (3.31f)$$

$$[d] = \underbrace{q_1(0)\bar{q}_1(z)} \underbrace{q_2(x)\bar{q}_2(y)} \langle : \bar{q}_1(x)q_1(z)\bar{q}_2(0)q_2(y) : \rangle, \quad (3.31g)$$

$$[d'] = \underbrace{q_1(0)\bar{q}_1(y)} \underbrace{q_2(x)\bar{q}_2(z)} \langle : \bar{q}_1(x)q_1(y)\bar{q}_2(0)q_2(z) : \rangle, \quad (3.31h)$$

lässt sich das Transformationsverhalten wie in den Abbn. 3.8 und 3.9 gezeigt darstellen.

Die ( $y \longleftrightarrow z$ )-Symmetrie unter den acht Beiträgen reduziert die Rechnung auf vier Terme. Diese vier Terme (es werden  $[a]$ ,  $[b]$ ,  $[c]$  und  $[d]$  gewählt, weil sie die günstigste Impulsstruktur der Propagatoren ergeben) können so gewählt werden, dass je zwei sich durch die Transformation  $[(\bar{q}_i \longleftrightarrow q_i) \text{ und } (1 \longleftrightarrow 2)]$  ineinander überführen lassen, womit die weiterführende Rechnung erleichtert werden kann. Dies ist uneingeschränkt jedoch nur für Vektormesonen gültig, weil im Allgemeinen auch die Dirac-Struktur der Terme berücksichtigt werden muss. Für Vektormesonen spielt die Vertexreihenfolge in den Dirac-Spuren aufgrund der identischen Vertexfunktionen keine Rolle.

Allerdings lässt sich wegen der Zyklizität der Spur die Transformation zwischen  $[a]$  und  $[b]$  bei der Projektion der Dirac-Indizes geeignet anpassen, indem in den Kondensaten lediglich die Elemente der Clifford-Algebra  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  vertauscht werden. Die Farb-Indizes stören die Transformation nicht.

Nach dem Einführen der Fourier-transformierten freien Propagatoren (mit dem freier Gluon-Propagator in Feynman-Eichung) und der anschließenden Impulsintegration ergibt sich

$$\Pi_h^{X(4)}(q) = \Pi_{h,a}^{X(4)}(q) + \Pi_{h,b}^{X(4)}(q) + \Pi_{h,c}^{X(4)}(q) + \Pi_{h,d}^{X(4)}(q), \quad (3.32)$$

mit

$$\Pi_{h,n}^{X(4)}(q) = -\frac{g^2}{q^2} (t^A)_{\alpha\delta} (t^A)_{\gamma\beta} S_n^X(q) \langle : \bar{q}_{1i}^\alpha q_{1j}^\beta \bar{q}_{2k}^\gamma q_{2l}^\delta : \rangle, \quad (3.33)$$

für  $n = a, b, c$  und  $d$  mit den Dirac-Strukturen

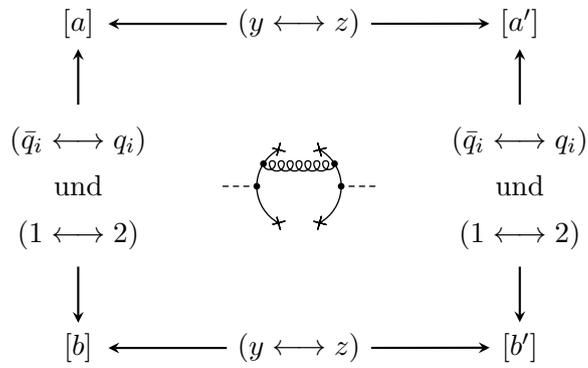
$$S_a^X(q) = \left[ \Gamma^X S_2^{(0)}(q) \gamma^\lambda \right]_{il} \left[ \gamma^\lambda S_2^{(0)}(q) \Gamma^X \right]_{kj}, \quad (3.34a)$$

$$S_b^X(q) = \left[ \gamma^\lambda S_1^{(0)}(-q) \Gamma^X \right]_{il} \left[ \Gamma^X S_1^{(0)}(-q) \gamma^\lambda \right]_{kj}, \quad (3.34b)$$

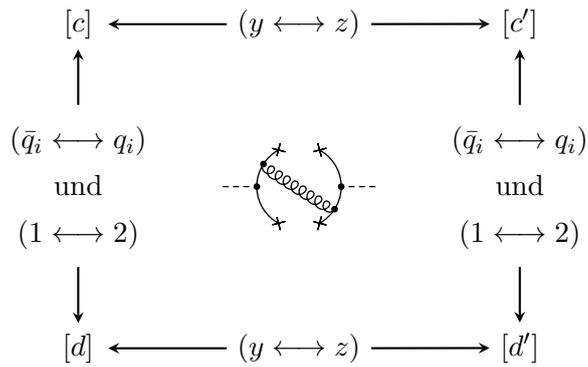
$$S_c^X(q) = \left[ \gamma^\lambda S_1^{(0)}(-q) \Gamma^X \right]_{il} \left[ \gamma^\lambda S_2^{(0)}(q) \Gamma^X \right]_{kj}, \quad (3.34c)$$

$$S_d^X(q) = \left[ \Gamma^X S_2^{(0)}(q) \gamma^\lambda \right]_{il} \left[ \Gamma^X S_1^{(0)}(-q) \gamma^\lambda \right]_{kj}. \quad (3.34d)$$

Dabei ist die Summation über sämtliche doppelt auftretende Indizes zu verstehen, also Dirac-, Lorentz-, Farb- und Generator-Indizes. Die Quark-Felder werden bei  $x = 0$  ausgewertet. Die Beiträge mit den Subskripten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  stammen von den entsprechend



**Abbildung 3.8:** Transformation der Vier-Quark-Beiträge mit hartem Gluon und mit Quark-Propagatoren der gleichen Quark-Sorte.



**Abbildung 3.9:** Transformation der Vier-Quark-Beiträge mit hartem Gluon und mit Quark-Propagatoren verschiedener Quark-Sorten.

bezeichneten Ausdrücken in den Gln. (3.31). Je zwei der Terme in (3.32), welche dem gleichen Diagrammtyp in Abb. 3.5 zuzuordnen sind, werden zusammengefasst:

$$\Pi_{h_1}^X(q) = \Pi_{h,a}^{X(4)}(q) + \Pi_{h,b}^{X(4)}(q) \quad \text{und} \quad \Pi_{h_2}^X(q) = \Pi_{h,c}^{X(4)}(q) + \Pi_{h,d}^{X(4)}(q). \quad (3.35)$$

Im nächsten Schritt widmen wir uns der Projektion der Erwartungswerte und beginnen mit der Farb-Struktur. Für die Vier-Quark-Kondensate existieren zwei Farb-Singulettstrukturen, jeweils gebildet durch Kontraktion mit dem Einselement des Farb-Raums bzw. mit den Generatoren  $t^A$  der Symmetriegruppe  $SU(N_c = 3)$ , die durch das Skalarprodukt  $\text{Tr}_C[t^A t^B] = \delta^{AB}/2$  normiert sind. Daher ergibt sich für die Farb-Projektion (mit unterdrückten Dirac-Indizes und impliziter Summation über Generator-Indizes)

$$\bar{q}_1^\alpha q_2^\beta \bar{q}_3^\gamma q_4^\delta = \frac{1}{9} (\bar{q}_1 q_2 \bar{q}_3 q_4) \mathbb{1}_{\beta\alpha} \mathbb{1}_{\delta\gamma} + \frac{1}{2} (\bar{q}_1 t^A q_2 \bar{q}_3 t^A q_4) (t^B)_{\beta\alpha} (t^B)_{\delta\gamma}. \quad (3.36)$$

Dies ist die korrigierte Projektionsformel der mit einem Schreibfehler behafteten Gl. (39) in [Tho07], welche dort lediglich aus didaktischen Gründen aufgeführt wird [Tho12].

Wir wenden uns nun der Dirac-Projektion zu. Wie im Unterabschnitt 2.2.2 dargelegt, werden die Dirac-Strukturen mithilfe der orthogonalen Basis der Clifford-Algebra  $\mathcal{C}$  abgebildet. Mit den Basiselementen  $\Gamma_1, \Gamma_2$  gilt somit für die Dirac-Projektion (mit unterdrückten Farb-Indizes) [Tho07]

$$\bar{q}_1 q_2 \bar{q}_3 q_4 = \frac{1}{16} \sum_{\Gamma_1, \Gamma_2} (\bar{q}_1 \Gamma_1 q_2 \bar{q}_3 \Gamma_2 q_4) (\Gamma_1)_{ji} (\Gamma_2)_{lk}. \quad (3.37)$$

Nimmt man die Projektionsformeln (3.36) und (3.37) in Anspruch, ergeben sich aus der Farb-Projektion lediglich Vorfaktoren zu den Kondensaten. Nutzt man die Dirac-Projektion, erhält man 25 Spuren von Dirac-Matrizen pro Summanden aus Gl. (3.32), deren Auswertungsstrategie davon abhängt, welche Kombinationen der Ströme  $j^X$  man untersucht. Obwohl für gewöhnliche Strom-Strom-Korrelatoren ungeeignet, können im Fall von chiralen Differenzen von Strom-Strom-Korrelatoren die in [Hil11] angegebenen Projektionsresultate benutzt werden. Die dort aufgeführten Ergebnisse der Dirac-Projektion von typischen Anti-Kommutatoren lassen sich in ähnlicher Form auch auf Anti-Kommutatoren anwenden, welche mit Vier-Quark-Kondensaten assoziiert sind.

Im Fall V – A sind für  $\Pi_{h_1}^{V-A} \equiv \Pi_{h_1}^V - \Pi_{h_1}^A$  (und analog im Fall P – S) nur vier Spuren zu berechnen. Für die Beiträge  $\Pi_{h_2}^{V-A}$  reduziert sich die Anzahl der Dirac-Spuren von 25 auf 18. Im letzteren Fall übersteigt der Aufwand an zusätzlicher Algebra, wegen der Anpassung des zu projizierenden Anti-Kommutators, den Gewinn durch die Reduktion um sieben Spuren bei Weitem, sodass besser alle 25 Spuren systematisch berechnet werden sollten. Für die chirale Differenz P – S reduziert sich die Anzahl der Dirac-Spuren für die Beiträge  $\Pi_{h_1}^{P-S}$  auf acht Spuren, von denen die Hälfte verschwindet. Wenige Vorteile bringt diese Projektionsmethode für  $\Pi_{h_2}^{P-S}$ -Beiträge.

Nach Farb- und Dirac-Projektion müssen noch die unkontrahierten Lorentz-Indizes, die den Elementen der Clifford-Algebra  $\Gamma_i$  anhaften, projiziert werden. Dabei sind lediglich Projektionen von einem bzw. zwei Indizes erforderlich, da die Resultate der Spuren bereits für Kontraktionen von Lorentz-Indizes in den Erwartungswerten sorgen.

Im Allgemeinen lassen Vier-Quark-Kondensate zwei Schreibweisen zu [Jin93, Dru03]. Man kann  $\langle : \bar{q}_1 X q_2 \bar{q}_3 Y q_4 : \rangle$  auch als  $\langle : \bar{q}_1 X' q_4 \bar{q}_3 Y' q_2 : \rangle$  auffassen, wobei  $X, Y, X', Y'$  Dirac-

und Farb-Strukturen tragen. Beide Ausdrücke sind über eine Fierz-Transformation miteinander verbunden [Dru03, Nie04]. Interessant ist die Frage, inwieweit sich die Ausdrücke beider Schreibweisen unterscheiden. Der Umfang der Ergebnisse der OPE lässt sich für Fierz-transformierte Kondensate in bestimmten Fällen reduzieren, wie den Resultaten im Abschnitt 3.3 zu entnehmen ist. Es bietet sich damit auch die Möglichkeit einer Gegenprobe für die Ergebnisse der OPE, wie am Beispiel  $\Pi^{V-A}$  explizit gezeigt wird.

Obwohl die bis hierher behandelte Schreibweise in der Literatur die bei weitem verbreitetere ist, scheint die Fierz-transformierte Schreibweise nicht weniger geeignet. Da das Wick-Theorem die Reihenfolge der unkontrahierten Quark-Felder nicht festlegt, lässt sich in (3.31) und (3.32) auch  $\langle : \bar{q}_1 q_1 \bar{q}_2 q_2 : \rangle$  durch  $\langle : \bar{q}_1 q_2 \bar{q}_2 q_1 : \rangle$  ersetzen. Dabei bemerkt man, dass in Gl. (3.33) eine Projektion der Farb-Indizes überflüssig wird, weil die Farb-Indizes der Quark-Felder auf genau die richtige Weise mit den Komponenten der Generatoren  $t^A$  absummiert werden können. Damit ergibt sich eine Reduktion der Kondensat-Anzahl verglichen mit der üblichen Schreibweise, in der beide Farb-Singulett-Strukturen auftreten (s. Gl. (3.36)).

### 3.3 Pseudoskalare Qq-Mesonen

In diesem Abschnitt werden Ströme leichter ( $q_1 \equiv q$ ) und schwerer ( $q_2 \equiv Q$ ) Quarks mit Massen  $m_1 \equiv m$  und  $m_2 \equiv M$  betrachtet. Der Strom-Strom-Korrelator für pseudoskalare Mesonen ergibt sich aus Gln. (3.16) und (3.28) somit für den Strom  $j^P(x) = \bar{q}(x) i\gamma_5 Q(x)$ . Die Berechnung der Beiträge von Vier-Quark-Kondensaten wird für beliebige Massen  $m$  und  $M$  ausgeführt. Erst nachdem alle in Abschnitt 3.2 erläuterten Techniken zur Berechnung der Wilson-Koeffizienten zur Anwendung gekommen sind, wird der Limes  $m \rightarrow 0$  gebildet. Im Gegensatz zu den Wilson-Koeffizienten der Kondensate niedrigerer Massendimension treten für Vier-Quark-Kondensate keine Divergenzen bei diesem Grenzübergang auf, da die zugeordneten Diagramme stets auf Baumgraphen-Niveau sind. Die Einführung nicht-normalgeordneter Kondensate ist in dem Sinne nicht für die Beseitigung eben jener Divergenzen notwendig [Jam93], sondern vielmehr im Hinblick auf eine Entwicklung bezüglich eines inversen Massenparameters für große Massen (Schwer-Quark-Massen-Entwicklung) zu sehen. Nach SQME werden Kondensate mit Feldern schwerer Quarks nach dem Inversen der schweren Quark-Masse entwickelt. Dabei kommt man auf Kondensate, die Felder leichter Quarks und gluonische Felder enthalten [Gen84b, Gro95].

Die hier präsentierten Ergebnisse sind sehr umfangreich und bleiben daher nach den vier beitragenden Diagrammtypen getrennt, wobei die Benennung der einzelnen Beiträge zum Strom-Strom-Korrelator wie in Abschnitt 3.2 übernommen wird. Diagramme mit weichem und hartem Gluon lassen sich ohnehin nicht zusammenfassen. Während Beiträge mit weichem Gluon zum Teil auf Kondensate mit Feldern ausschließlich leichter Quarks führen, liefern Beiträge mit hartem Gluon aber immer  $Qq$ -Kondensate, d.h. Kondensate, die Felder sowohl leichter als auch schwerer Quarks enthalten.

#### 3.3.1 Exaktes Resultat

Die exakten Ergebnisse für den Strom-Strom-Korrelator aus pseudoskalarem Strom sind im Folgenden tabellarisch angegeben. Dabei sind die auftretenden Kondensate  $K_i$  und die

**Tabelle 3.1:** Liste der Kondensate  $K_i^w$ , die im Resultat für Diagramme mit weichem Gluon vorkommen.

$i$	$K_i^w$
1	$\langle : \bar{q} \gamma^\nu t^A q \sum_f \bar{q}_f \gamma_\nu t^A q_f : \rangle$
2	$\langle : \bar{q} \psi t^A q \sum_f \bar{q}_f \psi t^A q_f : \rangle / v^2$
3	$\langle : \bar{q} t^A q \sum_f \bar{q}_f \psi t^A q_f : \rangle$
4	$\langle : \bar{Q} \gamma^\nu t^A Q \sum_f \bar{q}_f \gamma_\nu t^A q_f : \rangle$
5	$\langle : \bar{Q} \psi t^A Q \sum_f \bar{q}_f \psi t^A q_f : \rangle / v^2$
6	$\langle : \bar{Q} t^A Q \sum_f \bar{q}_f \psi t^A q_f : \rangle$

zugehörigen Wilson-Koeffizienten  $W_i$  separat notiert. Die Trennung von vakuum- und mediumspezifischen Anteilen ist durch die Aufspaltung der Wilson-Koeffizienten in einen Anteil aus der Projektion der Lorentz-Indizes  $L_{ij}$  und den Rest des Wilson-Koeffizienten  $C_{ij}$  gewährleistet.

### Diagramme mit weichem Gluon

Das Resultat für das Diagramm in Abb. 3.4a hat somit folgende allgemeine Form:

$$\Pi_{w_1}^P(q) = g^2 \sum_{i=1}^6 W_i^{P,w_1} K_i^w \quad (3.38)$$

mit

$$W_i^{P,w_1} = \sum_{j=1}^3 C_{ij}^{P,w_1} L_{ij}^{P,w_1}. \quad (3.39)$$

Die Kondensate aus Diagrammen mit weichem Gluon  $K_i^w$  ergeben sich aus dem störungstheoretischen Quark-Propagator unter Benutzung der Bewegungsgleichung für den Gluon-Feldstärketensor. Die Anzahl der möglichen Kondensate ist damit selbst im Medium stark eingeschränkt, da die Bewegungsgleichung die Dirac- und Farb-Struktur vorgibt. Es lassen sich für einen Strom-Strom-Korrelator mit zwei Quark-Sorten  $q$  und  $Q$  nach Gl. (3.27) sechs Kondensate bilden. Im Fall einer verschwindenden Quark-Masse ( $m \rightarrow 0$ ) entfällt jedoch der Beitrag des Kondensates  $\langle : \bar{Q} t^A Q \sum_f \bar{q}_f \psi t^A q_f : \rangle$ , weil der zugehörige Wilson-Koeffizient verschwindet. Die Kondensate sind in Tab. 3.1 aufgelistet. Diese sind sowohl für  $\Pi_{w_1}^P$  als auch  $\Pi_{w_2}^P$  heranzuziehen.

Die nicht-verschwindenden Wilson-Koeffizienten  $W_i^{P,w_1}$ , zerlegt nach  $C_{ij}^{P,w_1}$  und  $L_{ij}^{P,w_1}$ , finden sich entsprechend in den Tabn. 3.2 und 3.3. Verschwindet entweder der vakuum- oder

**Tabelle 3.2:** Liste der Koeffizienten  $C_{ij}^{P,w_1}$ .

$C_{ij}^{P,w_1}$			
$i$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
1	$-\frac{1}{3} \frac{1}{(q^2 - M^2)^2} \left(1 - \frac{q^2}{q^2 - M^2}\right)^2$	$\frac{2}{9} \frac{1}{(q^2 - M^2)^3}$	$-\frac{8}{3} \frac{1}{(q^2 - M^2)^4}$
2	0	$-\frac{4}{9} \frac{1}{(q^2 - M^2)^3}$	$\frac{8}{3} \frac{1}{(q^2 - M^2)^4}$
3	0	$-\frac{4}{3} \frac{M}{(q^2 - M^2)^3}$	$\frac{8}{3} \frac{M}{(q^2 - M^2)^4}$
4	0	$\frac{2}{9} \frac{1}{q^6}$	$-\frac{8}{3} \frac{1}{q^8}$
5	0	$-\frac{4}{9} \frac{1}{q^6}$	$\frac{8}{3} \frac{1}{q^8}$

**Tabelle 3.3:** Liste der Koeffizienten  $L_{ij}^{P,w_1}$ .

$L_{ij}^{P,w_1}$			
$i$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
1	1	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$	$\frac{3}{8} q^4 - 2 \frac{q^2 (vq)^2}{v^2} + \frac{(vq)^4}{v^4}$
2	—	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$	$q^4 - 7 \frac{q^2 (vq)^2}{v^2} + 6 \frac{(vq)^4}{v^4}$
3	—	$\frac{(vq)}{v^2}$	$\frac{(vq)}{v^2} \left( q^2 - \frac{(vq)^2}{v^2} \right)$
4	—	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$	$\frac{3}{8} q^4 - 2 \frac{q^2 (vq)^2}{v^2} + \frac{(vq)^4}{v^4}$
5	—	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$	$q^4 - 7 \frac{q^2 (vq)^2}{v^2} + 6 \frac{(vq)^4}{v^4}$

der mediumspezifische Anteil des Wilson-Koeffizienten eines Kondensates, ist dies in der Tab. 3.2 der Koeffizienten  $C_{ij}^{P,w_1}$  mit einer „0“ markiert. Da die Projektion der Lorentz-Indizes in diesem Fall unnötig ist, sind nicht auftretende Elemente von  $L_{ij}^{P,w_1}$  mit „—“ gekennzeichnet. Die angegebenen Elemente von  $L_{ij}^{P,w_1}$  zeigen an, ob der zugehörige Beitrag zu  $\Pi_{w_1}^P$  vakuum- oder mediumspezifisch ist. Darüber hinaus sind auch die Elemente von  $C_{ij}^{P,w_1}$  so notiert, dass diese Trennung leicht nachzuvollziehen ist. Für beide Koeffizienten ist für  $j = 1$  der Vakuum-Beitrag notiert und für  $j \geq 2$  die mediumspezifischen Anteile. Auf diese Weise lassen sich mediumspezifische Ausdrücke wie Gl. (2.89b) leicht identifizieren.

Für Vakuum-Beiträge ist  $L_{11}^{P,w_1} = 1$ . Für mediumspezifische Beiträge gibt es fünf verschiedene Einträge in Tab. 3.3. Abhängig von der Anzahl der projizierten Lorentz-Indizes für das jeweilige Kondensat sind dies:  $(vq)/v^2$  (ein Lorentz-Index),  $q^2 - 4(vq)^2/v^2$  (zwei Lorentz-Indizes),  $(q^2 - (vq)^2/v^2)(vq)/v^2$  (drei Lorentz-Indizes) sowie  $3q^4/8 - 2q^2(vq)^2/v^2 + (vq)^4/v^4$  und  $q^4 - 7q^2(vq)^2/v^2 + 6(vq)^4/v^4$  (vier Lorentz-Indizes). Die Existenz der zwei verschiedenen Strukturen für die Projektion von vier Lorentz-Indizes bestätigt die Aussage im Unterabschnitt 2.2.2, nach der die Projektionsstrukturen und die mediumspezifischen Kondensatstrukturen im Allgemeinen nicht faktorisieren.

Wie den Termen  $L_{ij}^{P,w_1}$  für zwei und vier Lorentz-Indizes zu entnehmen ist, liefern auch Kondensate, die keine Mediumgeschwindigkeit  $v_\mu$  explizit enthalten (z.B.  $K_1^w$ ), mediumspezifische Beiträge. Diese stammen von Projektionen der Lorentz-Indizes, die insofern mediumspezifisch sind, als dass sie nicht auftauchen, würde man Lorentz-Indizes einzig auf Vakuumstrukturen projizieren (s. Unterabschnitt 2.2.2).

Für die Beiträge aus dem Diagramm in Abb. 3.4b erhält man

$$\Pi_{w_2}^P(q) = g^2 \sum_{i=1}^6 W_i^{P,w_2} K_i^w \quad (3.40)$$

mit

$$W_i^{P,w_2} = \sum_{j=1}^2 C_{ij}^{P,w_2} L_{ij}^{P,w_2}. \quad (3.41)$$

Die beitragenden Kondensate sind genau jene, die auch im Resultat in Gl. (3.38) auftauchen (s. Tab. 3.1). Im Gegensatz zu den Wilson-Koeffizienten aus Gl. (3.38), welche sich aus drei Summanden zusammensetzten, tragen zu  $W_i^{P,w_2}$  zwei Summanden bei: ein vakuum- und ein mediumspezifischer Ausdruck. Dieser Unterschied liegt in der Berechnung der Diagramme in Abb. 3.4 begründet [Pas84]. Wie im Abschnitt 3.2 dargelegt, stammen Kondensate entweder (I) von Diagrammen mit weichem Gluon von der dritten kovarianten Ableitung eines nicht-lokalen Quark-Feldes oder (II) von einem an das gluonische Hintergrundfeld koppelnden Quark-Propagator. Im Fall (I) liefern Lorentz-Projektionen der Strukturen mit drei oder vier Lorentz-Indizes  $\langle: \bar{q}\Gamma D_\mu D_\nu D_\lambda q : \rangle$  mit  $\Gamma \in \{\mathbb{1}, \gamma_\sigma\}$ , deren Indizes entsprechend über drei oder vier äußere Impulse  $q$  abkontrahiert sind, endliche Beiträge. Im Fall (II) jedoch verschwinden die äquivalenten Strukturen  $\langle: \bar{q}\Gamma D_\mu G_{\nu\lambda} q : \rangle$  mit über  $q$  abkontrahierten Indizes aufgrund der Anti-Symmetrie des Gluon-Feldstärketensors  $G_{\nu\lambda}$ . Deshalb treten in Tab. 3.4 für  $L_{ij}^{P,w_2}$  nur zwei verschiedene Einträge mediumspezifischer Strukturen auf, womit auch die Beiträge für  $j = 3$  entfallen. Beide Anteile der Wilson-Koeffizienten,  $C_{ij}^{P,w_2}$  und  $L_{ij}^{P,w_2}$ , sind

**Tabelle 3.4:** Liste der Koeffizienten  $C_{ij}^{P,w_2}$  und  $L_{ij}^{P,w_2}$ .

$i$	$C_{ij}^{P,w_2}$		$L_{ij}^{P,w_2}$	
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 1$	$j = 2$
1	$\frac{1}{3} \frac{1}{(q^2 - M^2)^2} \left( 2 - \frac{q^2}{q^2 - M^2} \right)$	$-\frac{1}{9} \frac{1}{(q^2 - M^2)^3}$	1	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$
2	0	$\frac{2}{9} \frac{1}{(q^2 - M^2)^3}$	—	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$
3	0	$\frac{2}{3} \frac{M}{(q^2 - M^2)^3}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$
4	$\frac{1}{3} \frac{1}{q^4}$	$-\frac{1}{9} \frac{1}{q^6}$	1	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$
5	0	$\frac{2}{9} \frac{1}{q^6}$	—	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$

in Tab. 3.4 notiert.

### Diagramme mit hartem Gluon

Resultate der Berechnung von Diagrammen mit hartem Gluon-Propagator (s. Abb. 3.5) lassen eine zum Fall mit weichem Gluon analoge Aufspaltung zu:

$$\Pi_{h_x}^P(q) = g^2 \sum_{i=1}^{12} W_i^{P,h_x} K_i^h, \quad (3.42)$$

mit

$$K_i^h = 4K_{(\mathbb{1})i}^h - 3K_{(t^A)i}^h, \quad (3.43a)$$

$$W_i^{P,h_x} = \sum_{j=1}^2 C_{ij}^{P,h_x} L_{ij}^{P,h_x}, \quad (3.43b)$$

wobei  $x = 1, 2$ . Dabei liefert  $\Pi_{h_1}^P$  die Beiträge zu dem Diagramm in Abb. 3.5a und  $\Pi_{h_2}^P$  zu dem Diagramm in Abb. 3.5b. Die Kondensate treten aufgrund der Projektion der Farb-Indizes (s. Gl. (3.36)) immer in der festen Kombination (3.43a) auf, wie bereits in [Koi93, Dru02] beobachtet wurde.

In den Resultaten zu den Diagrammen mit hartem Gluon enthalten 24 unabhängige Kondensate, die getrennt nach den beiden Farb-Strukturen mit  $\mathbb{1}$  und den Generatoren  $t^A$  in Tab. 3.5 aufgelistet sind. Diese Kondensate sind alle nach [Tho07] existierende Vier-Quark-Kondensate, deren komplette Klassifizierung erstmals in [Tho07] vorgenommen wurde. Das zwölfte Kondensatpaar  $\langle : \bar{q} \gamma_5 \gamma^\nu q \bar{Q} \sigma^{\sigma\omega} Q : \rangle_{\varepsilon_{\alpha\nu\sigma\omega} v^\alpha}$ ,  $\langle : \bar{q} \gamma_5 \gamma^\nu t^A q \bar{Q} \sigma^{\sigma\omega} t^A Q : \rangle_{\varepsilon_{\alpha\nu\sigma\omega} v^\alpha}$  taucht für  $m \rightarrow 0$  nicht auf, da der zugehörige Wilson-Koeffizient für diesen Grenzübergang verschwindet. Die von  $i = 1$  bis 11 notierten Kondensate, die nicht in den Resultaten für

**Tabelle 3.5:** Liste der Kondensate  $K_{(1)i}^h$  und  $K_{(t^A)i}^h$ , die im Resultat für Diagramme mit hartem Gluon vorkommen.

$i$	$K_{(1)i}^h$	$K_{(t^A)i}^h$
1	$\langle : \bar{q}q\bar{Q}Q : \rangle$	$\langle : \bar{q}t^Aq\bar{Q}t^AQ : \rangle$
2	$\langle : \bar{q}\gamma_\nu q\bar{Q}\gamma^\nu Q : \rangle$	$\langle : \bar{q}\gamma_\nu t^Aq\bar{Q}\gamma^\nu t^AQ : \rangle$
3	$\langle : \bar{q}\sigma_{\nu\rho}q\bar{Q}\sigma^{\nu\rho}Q : \rangle$	$\langle : \bar{q}\sigma_{\nu\rho}t^Aq\bar{Q}\sigma^{\nu\rho}t^AQ : \rangle$
4	$\langle : \bar{q}\gamma_5\gamma_\nu q\bar{Q}\gamma_5\gamma^\nu Q : \rangle$	$\langle : \bar{q}\gamma_5\gamma_\nu t^Aq\bar{Q}\gamma_5\gamma^\nu t^AQ : \rangle$
5	$\langle : \bar{q}\gamma_5q\bar{Q}\gamma_5Q : \rangle$	$\langle : \bar{q}\gamma_5t^Aq\bar{Q}\gamma_5t^AQ : \rangle$
6	$\langle : \bar{q}\not{\psi}q\bar{Q}\not{\psi}Q : \rangle/v^2$	$\langle : \bar{q}\not{\psi}t^Aq\bar{Q}\not{\psi}t^AQ : \rangle/v^2$
7	$\langle : \bar{q}\sigma^{\sigma\omega}q\bar{Q}\sigma^{\nu\rho}Q : \rangle g_{\nu\omega}v_\sigma v_\rho/v^2$	$\langle : \bar{q}\sigma^{\sigma\omega}t^Aq\bar{Q}\sigma^{\nu\rho}t^AQ : \rangle g_{\nu\omega}v_\sigma v_\rho/v^2$
8	$\langle : \bar{q}\gamma_5\not{\psi}q\bar{Q}\gamma_5\not{\psi}Q : \rangle/v^2$	$\langle : \bar{q}\gamma_5\not{\psi}t^Aq\bar{Q}\gamma_5\not{\psi}t^AQ : \rangle/v^2$
9	$\langle : \bar{q}\not{\psi}q\bar{Q}Q : \rangle$	$\langle : \bar{q}\not{\psi}t^Aq\bar{Q}t^AQ : \rangle$
10	$\langle : \bar{q}q\bar{Q}\not{\psi}Q : \rangle$	$\langle : \bar{q}t^Aq\bar{Q}\not{\psi}t^AQ : \rangle$
11	$\langle : \bar{q}\sigma^{\sigma\omega}q\bar{Q}\gamma_5\gamma^\nu Q : \rangle \varepsilon_{\alpha\nu\sigma\omega}v^\alpha$	$\langle : \bar{q}\sigma^{\sigma\omega}t^Aq\bar{Q}\gamma_5\gamma^\nu t^AQ : \rangle \varepsilon_{\alpha\nu\sigma\omega}v^\alpha$
12	$\langle : \bar{q}\gamma_5\gamma^\nu q\bar{Q}\sigma^{\sigma\omega}Q : \rangle \varepsilon_{\alpha\nu\sigma\omega}v^\alpha$	$\langle : \bar{q}\gamma_5\gamma^\nu t^Aq\bar{Q}\sigma^{\sigma\omega}t^AQ : \rangle \varepsilon_{\alpha\nu\sigma\omega}v^\alpha$

pseudoskalare  $Qq$ -Mesonen auftreten, sind Teil der Ergebnisse für die chiralen Differenzen  $P - S$  und  $V - A$ . Im Gegensatz zu den Kondensaten aus Diagrammen mit weichem Gluon  $K_i^w$ , die aus Quark-Feldern sowohl nur leichter Quarks als auch gemischt, schwerer und leichter Quarks bestehen, beinhalten die Kondensate aus Diagrammen mit hartem Gluon  $K_i^h$  immer Quark-Felder schwerer und leichter Quarks.

Die nicht-verschwindenden Wilson-Koeffizienten  $W_i^{P,h_1}$  und  $W_i^{P,h_2}$  sind in Anteile zerlegt in den Tabn. 3.6 und 3.7 aufgeführt. Dabei treten nur zwei mediumspezifische Einträge  $L_{i2}^{P,h_1}$  auf, weil die Projektion von höchstens zwei Lorentz-Indizes vorgenommen werden muss.

Nachfolgend wird das exakte Ergebnis für die Diagramme in Abb. 3.5 mit Fierz-transformierten Vier-Quark-Kondensaten angegeben. Die Resultate für Diagramme mit weichem Gluon lassen sich ebenso durch Fierz-transformierte Kondensate ausdrücken. Darauf wird hier aber verzichtet, da sich für die Rechnung keine Vorteile ergeben. Im Gegenteil, durch die unumgängliche Einführung von Vier-Quark-Kondensaten mit der  $\mathbb{1}$  als Farb-Struktur, neben solchen Farb-Singulett-Strukturen, für welche die Farb-Indizes der Quark-Felder über die Generatoren  $t^A$  absummiert sind, würden die Ergebnisse sogar umfangreicher. Die Fierz-Transformation lässt sich hier erst nachträglich anwenden, wohingegen die Rechnung für Diagramme mit hartem Gluon die Darstellung mit Fierz-transformierten Kondensaten nahe legt (s. Abschnitt 3.2).

Die Ergebnisse mit Fierz-transformierten Kondensaten sind mit überstrichenen Symbolen

**Tabelle 3.6:** Liste der Koeffizienten  $C_{ij}^{P,h_1}$  und  $L_{ij}^{P,h_1}$ .

$i$	$C_{ij}^{P,h_1}$		$L_{ij}^{P,h_1}$	
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 1$	$j = 2$
1	$\frac{1}{9} \frac{1}{q^2} \left( \frac{q^2 + M^2}{(q^2 - M^2)^2} + \frac{1}{q^2} \right)$	0	1	—
2	$-\frac{1}{36} \frac{1}{q^2} \left( \frac{q^2 - 2M^2}{(q^2 - M^2)^2} + \frac{1}{q^2} \right)$	$\frac{1}{108} \frac{1}{q^2} \left( \frac{1}{(q^2 - M^2)^2} + \frac{1}{q^4} \right)$	1	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$
4	$\frac{1}{36} \frac{1}{q^2} \left( \frac{q^2 + 2M^2}{(q^2 - M^2)^2} + \frac{1}{q^2} \right)$	$-\frac{1}{108} \frac{1}{q^2} \left( \frac{1}{(q^2 - M^2)^2} + \frac{1}{q^4} \right)$	1	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$
5	$\frac{1}{9} \frac{1}{q^2} \left( \frac{1}{q^2 - M^2} + \frac{1}{q^2} \right)$	0	1	—
6	0	$-\frac{1}{27} \frac{1}{q^2} \left( \frac{1}{(q^2 - M^2)^2} + \frac{1}{q^4} \right)$	—	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$
8	0	$\frac{1}{27} \frac{1}{q^2} \left( \frac{1}{(q^2 - M^2)^2} + \frac{1}{q^4} \right)$	—	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$
9	0	$-\frac{2}{9} \frac{M}{q^2(q^2 - M^2)^2}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$
10	0	$-\frac{1}{9} \frac{M}{q^2(q^2 - M^2)^2}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$
11	0	$-\frac{1}{18} \frac{M}{q^2(q^2 - M^2)^2}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$

**Tabelle 3.7:** Liste der Koeffizienten  $C_{ij}^{P,h_2}$  und  $L_{ij}^{P,h_2}$ .

$i$	$C_{ij}^{P,h_2}$		$L_{ij}^{P,h_2}$	
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 1$	$j = 2$
1	$\frac{1}{9} \frac{1}{q^2(q^2 - M^2)}$	0	1	—
2	$\frac{1}{18} \frac{1}{q^2(q^2 - M^2)}$	$-\frac{1}{54} \frac{1}{q^4(q^2 - M^2)}$	1	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$
3	$-\frac{1}{18} \frac{1}{q^2(q^2 - M^2)}$	0	1	—
4	$-\frac{1}{18} \frac{1}{q^2(q^2 - M^2)}$	$\frac{1}{54} \frac{1}{q^4(q^2 - M^2)}$	1	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$
5	$\frac{1}{9} \frac{1}{q^2(q^2 - M^2)}$	0	1	—
6	0	$\frac{2}{27} \frac{1}{q^4(q^2 - M^2)}$	—	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$
8	0	$-\frac{2}{27} \frac{1}{q^4(q^2 - M^2)}$	—	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$
9	0	$-\frac{1}{9} \frac{M}{q^4(q^2 - M^2)}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$
10	0	$-\frac{2}{9} \frac{M}{q^4(q^2 - M^2)}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$
11	0	$-\frac{1}{18} \frac{M}{q^4(q^2 - M^2)}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$

**Tabelle 3.8:** Fierz-transformierte Kondensate  $\bar{K}_i^h$ , die im Resultat für Diagramme mit hartem Gluon vorkommen.

$i$	$\bar{K}_i^h$
1	$\langle : \bar{q} t^A Q \bar{Q} t^A q : \rangle$
2	$\langle : \bar{q} \gamma_\nu t^A Q \bar{Q} \gamma^\nu t^A q : \rangle$
3	$\langle : \bar{q} \sigma_{\nu\rho} t^A Q \bar{Q} \sigma^{\nu\rho} t^A q : \rangle$
4	$\langle : \bar{q} \gamma_5 \gamma_\nu t^A Q \bar{Q} \gamma_5 \gamma^\nu t^A q : \rangle$
5	$\langle : \bar{q} \gamma_5 t^A Q \bar{Q} \gamma_5 t^A q : \rangle$
6	$\langle : \bar{q} \psi t^A Q \bar{Q} \psi t^A q : \rangle / v^2$
7	$\langle : \bar{q} \sigma^{\sigma\omega} t^A Q \bar{Q} \sigma^{\nu\rho} t^A q : \rangle g_{\nu\omega} v_\sigma v_\rho / v^2$
8	$\langle : \bar{q} \gamma_5 \psi t^A Q \bar{Q} \gamma_5 \psi t^A q : \rangle / v^2$
9	$\langle : \bar{q} \psi t^A Q \bar{Q} t^A q : \rangle$
10	$\langle : \bar{q} t^A Q \bar{Q} \psi t^A q : \rangle$
11	$\langle : \bar{q} \sigma^{\sigma\omega} t^A Q \bar{Q} \gamma_5 \gamma^\nu t^A q : \rangle \varepsilon_{\alpha\nu\sigma\omega} v^\alpha$
12	$\langle : \bar{q} \gamma_5 \gamma^\nu t^A Q \bar{Q} \sigma^{\sigma\omega} t^A q : \rangle \varepsilon_{\alpha\nu\sigma\omega} v^\alpha$

analog zu Gl. (3.42) notiert:

$$\bar{\Pi}_{h_x}^P(q) = g^2 \sum_{i=1}^{12} \bar{W}_i^{P,h_x} \bar{K}_i^h \quad (3.44)$$

mit

$$\bar{W}_i^{P,h_x} = \sum_{j=1}^2 \bar{C}_{ij}^{P,h_x} \bar{L}_{ij}^{P,h_x} \quad (3.45)$$

mit der Definition von  $\bar{\Pi}_{h_x}^P$ ,  $x = 1, 2$  und den Wilson-Koeffizienten  $\bar{W}_i^{P,h_x}$  wie in Gl. (3.43b).

Die Tab. 3.8 umfasst alle möglichen zwölf Fierz-transformierten Vier-Quark-Kondensate  $\bar{K}_i^h$  mit den Generatoren  $t^A$  als Farb-Struktur, die wie gefordert Dirac- und Lorentz-Skalare, Farb-Singulets und invariant unter Paritäts- und Zeitumkehr-Transformation sind [Jin93, Tho08].

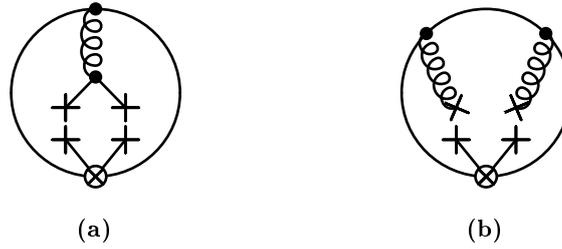
Die nicht-verschwindenden Wilson-Koeffizienten  $\bar{W}_i^{P,h_1}$  und  $\bar{W}_i^{P,h_2}$  sind nach Anteilen zerlegt in den Tabn. 3.9 und 3.10 aufgelistet.

**Tabelle 3.9:** Liste der Koeffizienten  $\overline{C}_{ij}^{P,h_1}$  und  $\overline{L}_{ij}^{P,h_1}$ .

$i$	$\overline{C}_{ij}^{P,h_1}$		Koeffizient $\overline{L}_{ij}^{P,h_1}$	
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 1$	$j = 2$
3	$-\frac{1}{4} \left( \frac{1}{(q^2 - M^2)^2} + \frac{1}{q^4} \right)$	$\frac{1}{12} \frac{1}{q^2} \left( \frac{1}{(q^2 - M^2)^2} + \frac{1}{q^4} \right)$	1	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$
4	$\frac{M^2}{q^2(q^2 - M^2)^2}$	0	1	—
5	$-\left( \frac{1}{(q^2 - M^2)^2} + \frac{1}{q^4} \right)$	0	1	—
7	0	$\frac{1}{3} \frac{1}{q^2} \left( \frac{1}{(q^2 - M^2)^2} + \frac{1}{q^4} \right)$	—	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$
11	0	$-\frac{1}{2} \frac{M}{q^2(q^2 - M^2)^2}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$
12	0	$-\frac{1}{2} \frac{M}{q^2(q^2 - M^2)^2}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$

**Tabelle 3.10:** Liste der Koeffizienten  $\overline{C}_{ij}^{P,h_2}$  und  $\overline{L}_{ij}^{P,h_2}$ .

$i$	$\overline{C}_{ij}^{P,h_2}$		$\overline{L}_{ij}^{P,h_2}$	
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 1$	$j = 2$
3	$-\frac{1}{q^2(q^2 - M^2)}$	$\frac{1}{6} \frac{1}{q^4(q^2 - M^2)}$	1	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$
5	$\frac{2}{q^2(q^2 - M^2)}$	0	1	—
7	0	$\frac{2}{3} \frac{1}{q^4(q^2 - M^2)}$	—	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$
11	0	$-\frac{1}{2} \frac{M}{q^4(q^2 - M^2)}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$
12	0	$-\frac{1}{2} \frac{M}{q^4(q^2 - M^2)}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$



**Abbildung 3.10:** Diagramme, die zur SQME des Vier-Quark-Kondensates mit zwei schweren Quarks  $\langle \bar{Q}Q\bar{q}q \rangle$  beitragen: Diagramme mit (a) leichtem Vier-Quark-Kondensat und (b) gemischtem Quark-Gluon-Kondensat der Massendimension 7.

### 3.3.2 Resultat mit Schwer-Quark-Massen-Entwicklung

Mit Kondensaten schwerer Quarks wird im Fall von  $Qq$ -Mesonen sehr unterschiedlich umgegangen. Für Vier-Quark-Kondensate ergeben sich drei denkbare Ansätze.

- (I) Die einfachste Variante vernachlässigt alle Beiträge mit Kondensaten, die Feldoperatoren schwerer Quarks enthalten.

Diese Ergebnisse lassen sich im nächsten Schritt zur Auswertung der Summenregeln mithilfe der Grundzustandsättigungshypothese<sup>2</sup> umformen, welche die Faktorisierung von allgemeinen Vier-Quark-Kondensaten in Produkte von Zwei-Quark-Kondensaten erlaubt.

- (II) Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die SQME für das Vier-Quark-Kondensat vorzunehmen.

Dabei sind für Kondensate mit zwei schweren und zwei leichten Quark-Feldern die Diagramme in Abb. 3.10 von Bedeutung. Das Resultat des Diagramms in Abb. 3.10a für das Vier-Quark-Kondensat  $K_4^w$  aus Tab. 3.1 findet sich bereits in [Gen84b]. Für alle übrigen Vier-Quark-Kondensate mit zwei schweren Quarks aus dem vorangegangenen Unterabschnitt 3.3.1 sind die Beiträge zur SQME bis zur Massendimension 6 im Anhang C aufgelistet. Zur numerischen Auswertung der Summenregeln dieser Variante kann auch die Grundzustandsättigungshypothese zur Faktorisierung der in inversen Quark-Massen entwickelten Vier-Quark-Kondensate verwendet werden.

- (III) Die dritte Variante im Umgang mit schweren Quarks vertauscht die Methoden der Variante (II).

Faktoriert man zuerst die Vier-Quark-Kondensate des exakten Resultats und wendet danach die SQME an, erhält man von (II) verschiedene Ergebnisse. Das auftretende Zwei-Quark-Kondensate von Feldoperatoren schwerer Quarks wird dabei der SQME gemäß Gl. (2.92) unterzogen. Hat man Zugang zu den numerischen Werten für die exakten Vier-Quark-Kondensate ist in (I) und (II) von einer Faktorisierung abzusehen. Die damit erwarteten

<sup>2</sup>In der Literatur, z.B. [Shi79, Pas84, Nar04], wird die *vacuum saturation hypothesis* diskutiert. In dieser Arbeit wird jedoch nicht nur der QCD-Vakuumgrundzustand betrachtet, sondern ebenso der Mediumgrundzustand. Die Formulierung „Grundzustandsättigungshypothese“ [Jin93] ist daher besser geeignet.

**Tabelle 3.11:** Liste der Koeffizienten  $C_{ij}^P$ .

$C_{ij}^P$			
$i$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
1	$\frac{1}{3} \frac{1}{(q^2 - M^2)^2} \left( 1 + \frac{q^2}{q^2 - M^2} - \frac{q^4}{(q^2 - M^2)^2} \right)$	$\frac{1}{9} \frac{1}{(q^2 - M^2)^3}$	$-\frac{8}{3} \frac{1}{(q^2 - M^2)^4}$
2	0	$-\frac{2}{9} \frac{1}{(q^2 - M^2)^3}$	$\frac{8}{3} \frac{1}{(q^2 - M^2)^4}$
3	0	$-\frac{2}{3} \frac{M}{(q^2 - M^2)^3}$	$\frac{8}{3} \frac{M}{(q^2 - M^2)^4}$

Ergebnisse bleiben von den Schwierigkeiten im Zusammenhang mit der Faktorisierung unberührt.

Berücksichtigt man ausschließlich die Vier-Quark-Kondensate, welche keine Felder schwerer Quarks enthalten, tragen drei Kondensate zum exakten Ergebnis für  $Qq$ -Mesonen bei. Diese Kondensate stammen aus der Evaluierung von Diagrammen mit weichem Gluon. Die Kondensate aus den Diagrammen mit hartem Gluon tragen zu (I) nicht bei. Diese enthalten immer Felder sowohl schwerer als auch leichter Quarks, da (bildhaft gesprochen) bei der Kondensation beide an den Mesonstrom koppelnden Quark-Propagatoren (des schweren und des leichten Quarks) zerschnitten werden. In der Notation wie im Unterabschnitt 3.3.1 tragen die Kondensate  $K_i^w$  mit  $i = 1, 2, 3$  aus Tab. 3.1 bei Vernachlässigung der schweren Kondensate bei. Das Ergebnis wird für beide Diagramme aus Abb. 3.4 wie folgt notiert:

$$\Pi_{(1)}^P(q) = g^2 \sum_{i=1}^3 W_i^P K_i^w \quad (3.46)$$

mit

$$W_i^P = \sum_{j=1}^3 C_{ij}^P L_{ij}^P. \quad (3.47)$$

Die Koeffizienten  $L_{ij}^P$ , welche die Strukturen der Projektion der Lorentz-Indizes der Kondensate tragen, sind identisch mit den entsprechenden  $L_{ij}^{P,w_1}$  in Tab. 3.3. Für die übrigen Anteile der Wilson-Koeffizienten, welche in Tab. 3.11 aufgelistet sind, gilt  $C_{ij}^P = C_{ij}^{P,w_1} + C_{ij}^{P,w_2}$ .

Wählt man diesen Umgang mit den Vier-Quark-Kondensaten, reduzieren sich die Anzahl der zum Resultat beitragenden Terme. In der Literatur wird zudem lediglich der Vakuumbeitrag mit der faktorisierten Form von  $K_1^w$ , d.h.  $\langle \bar{q}q \rangle^2$ , zur Auswertung der Summenregeln herangezogen [Hay04]. Im Gegensatz dazu ermöglicht diese Arbeit eine Behandlung der Summenregeln von  $Qq$ -Mesonen, welche Medium-Abhängigkeiten enthält und schwere Quarks nicht einfach außer Acht lässt, sondern diese in Form der SQME berücksichtigt.

Das Resultat für den Strom-Strom-Korrelator von  $Qq$ -Mesonen mit SQME der Vier-Quark-Kondensate (II) lässt sich für die Beiträge von Diagrammen mit weichem und hartem Gluon

**Tabelle 3.12:** Liste der Kondensate  $K_{M,i}$ , die im Ergebnis mit der SQME vorkommen, und der resultierenden SQME-Koeffizienten  $M_i$ .

$i$	$K_{M,i}$	$M_i$
1	$\langle : \bar{q} \gamma^\nu t^A q \sum_f \bar{q}_f \gamma_\nu t^A q_f : \rangle$	$-\frac{2}{3} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( \log \frac{\mu^2}{M^2} + \frac{1}{2} \right)$
2	$\langle : \bar{q} \psi t^A q \sum_f \bar{q}_f \psi t^A q_f : \rangle / v^2$	$-\frac{2}{3} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( \log \frac{\mu^2}{M^2} + \frac{1}{3} \right)$
3	$\langle : \bar{q} t^A q \sum_f \bar{q}_f \psi t^A q_f : \rangle$	$-\frac{4}{3} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( \log \frac{\mu^2}{M^2} - \frac{1}{8} \right)$
4	$\langle : \sum_f \bar{q}_f \gamma^\nu t^A q_f \sum_{f'} \bar{q}_{f'} \gamma_\nu t^A q_{f'} : \rangle$	$-\frac{2}{3} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( \log \frac{\mu^2}{M^2} + \frac{1}{2} \right)$
5	$\langle : \sum_f \bar{q}_f \psi t^A q_f \sum_{f'} \bar{q}_{f'} \psi t^A q_{f'} : \rangle / v^2$	$-\frac{2}{3} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( \log \frac{\mu^2}{M^2} + \frac{1}{3} \right)$

**Tabelle 3.13:** Liste der Koeffizienten  $C_{M,ij}^P$ .

$i$	$C_{M,ij}^P$		
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
1	$-\frac{1}{9} \frac{1}{q^2} \left( \frac{M^2}{(q^2 - M^2)^2} + \frac{1}{q^2} \right)$	$\frac{1}{27} \frac{1}{q^2} \left( \frac{1}{q^2 - M^2} + \frac{1}{q^2} \right)^2$	0
2	0	$-\frac{4}{27} \frac{1}{q^2} \left( \frac{1}{q^2 - M^2} + \frac{1}{q^2} \right)^2$	0
3	0	$-\frac{4}{9} \frac{M}{q^2(q^2 - M^2)} \left( \frac{1}{q^2 - M^2} + \frac{2}{q^2} \right)$	0
4	$\frac{1}{3} \frac{1}{q^4}$	$\frac{1}{9} \frac{1}{q^6}$	$-\frac{8}{3} \frac{1}{q^8}$
5	0	$-\frac{2}{9} \frac{1}{q^6}$	$\frac{8}{3} \frac{1}{q^8}$

als folgende Summe schreiben:

$$\Pi_{(\text{II})}^{\text{P}}(q) = \Pi_{(\text{I})}^{\text{P}}(q) + g^2 \sum_{i=1}^5 W_{M,i}^{\text{P}} M_i K_{M,i} \quad (3.48)$$

mit

$$W_{M,i}^{\text{P}} = \sum_{j=1}^3 C_{M,ij}^{\text{P}} L_{M,ij}^{\text{P}}, \quad (3.49)$$

wobei das tiefgestellte  $M$  die Verwendung der SQME symbolisiert. Dieses Ergebnis erweitert das Resultat aus (I) um fünf Beiträge mit Kondensaten  $K_{M,i}$ , welche nach der inversen schweren Quark-Masse entwickelten wurden. Diese fünf nicht-verschwindenden  $K_{M,i}$  sind in Tab. 3.12 aufgeführt, zusammen mit den im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema berechneten Koeffizienten  $M_i$  aus jener Entwicklung. Die Kondensate  $K_{M,i}$  mit  $i = 1, 2, 3$  stammen von der SQME der Kondensate  $K_{(\text{I})l}^h$  für  $l = 2, 6, 10$  in Massendimension 6 (s. Anhang C) und sind (zufälligerweise) identisch mit  $K_i^w$  aus dem Ergebnis  $\Pi_{(\text{I})}^{\text{P}}$ . Die Kondensate  $K_{M,4}$  und  $K_{M,5}$  resultieren aus der Entwicklung der Kondensate  $K_4^w$  und  $K_5^w$ . Der Wilson-Koeffizient  $W_{M,i}^{\text{P}}$  lässt sich in zwei Anteile zerlegen. Der Koeffizient  $L_{M,ij}^{\text{P}}$  entspricht  $L_{ij}^{\text{P},w_1}$  aus Tab. 3.3 ohne die Einträge  $L_{i3}^{\text{P},w_1}$  mit  $i = 1, 2, 3$ . Für die Koeffizienten  $C_{M,ij}^{\text{P}}$  in Tab. 3.13 gilt  $C_{M,1(2,3)j}^{\text{P}} = C_{2(6,10)j}^{\text{P},h_1} + C_{2(6,10)j}^{\text{P},h_2}$  und  $C_{M,4(5)j}^{\text{P}} = C_{4(5)j}^{\text{P},w_1} + C_{4(5)j}^{\text{P},w_2}$ . Im Gegensatz zum Resultat der Variante (I) bezieht  $\Pi_{(\text{II})}^{\text{P}}$  die Beiträge schwerer Quarks in führender Ordnung der SQME ein. Die Evaluierung der Summenregeln von  $Qq$ -Mesonen basierend auf diesem Ergebnis erweitert die bis heute untersuchten Summenregeln für D-Mesonen [Hay00, Hay04, Nar05, Hil09, Nar12].

Grundlage der Faktorisierung von Vier-Quark-Kondensaten ist die Grundzustandsättigungshypothese, welche besagt, dass beim Einfügen eines vollständigen Satzes von hadronischen Eigenzuständen in das Vier-Quark-Kondensat einzig der Grundzustand einen relevanten Beitrag liefert. In [Shi79] wird der Beitrag des leichtesten hadronischen Zustandes, des Pion-Zustandes, auf  $1/20$  des Grundzustandsbeitrages beziffert. Das Vier-Quark-Kondensat faktorisiert damit in zwei Grundzustandserwartungswerte von zwei Quark-Operatoren. Dabei ist zu beachten, dass im Medium zwei verschiedene Zwei-Quark-Kondensate existieren,  $\langle : \bar{q}q : \rangle$  und  $\langle : \bar{q}\gamma^\nu q : \rangle$ , wobei letzteres nach der Projektion der Lorentz-Struktur in der Form  $\langle : \bar{q}\psi q : \rangle v^\nu/v^2$  in die Summenregeln eingeht. Formeln für die Faktorisierung, wie sie in dieser Arbeit benötigt werden, finden sich bei [Jin93] für Kondensate mit einer und zwei Quark-Sorten, wobei die letzteren sowohl für Kondensate in Standardnotation als auch für Fierz-transformierte Kondensate angegeben sind. Die in diesem Unterabschnitt benutzten Faktorisierungen sind:

$$\begin{aligned} \langle : \bar{q}\Gamma_1 q Q \Gamma_2 Q : \rangle &= \frac{1}{16} \left\{ \langle : \bar{q}q : \rangle \langle : \bar{Q}Q : \rangle \text{Tr}_{\text{D}} [\Gamma_1] \text{Tr}_{\text{D}} [\Gamma_2] \right. \\ &\quad + \langle : \bar{q}q : \rangle \langle : \bar{Q}\gamma_\mu Q : \rangle \text{Tr}_{\text{D}} [\Gamma_1] \text{Tr}_{\text{D}} [\gamma^\mu \Gamma_2] \\ &\quad + \langle : \bar{q}\gamma^\mu q : \rangle \langle : \bar{Q}Q : \rangle \text{Tr}_{\text{D}} [\gamma^\mu \Gamma_1] \text{Tr}_{\text{D}} [\Gamma_2] \\ &\quad \left. + \langle : \bar{q}\gamma_\mu q : \rangle \langle : \bar{Q}\gamma_\nu Q : \rangle \text{Tr}_{\text{D}} [\gamma^\mu \Gamma_1] \text{Tr}_{\text{D}} [\gamma^\nu \Gamma_2] \right\}, \end{aligned} \quad (3.50a)$$

$$\langle : \bar{q}\Gamma_1 t^A q \bar{Q}\Gamma_2 t^A Q : \rangle = 0, \quad (3.50b)$$

**Tabelle 3.14:** Liste der faktorisierten Kondensate  $K_i^{\text{fak}}$ , wobei nicht-verschwindende Beiträge allein für  $q = q_f$  bzw.  $q_f = q_{f'}$  auftreten.

$i$	$K_{M,i}(= K_i^w)$ unfaktorisiert	$K_i^{\text{fak}}$
1	$K_{M_1} = K_1^w = \langle : \bar{q} \gamma^\nu t^A q \sum_f \bar{q}_f \gamma_\nu t^A q_f : \rangle$	$-\frac{2}{9} \left[ 2 \langle : \bar{q} q : \rangle^2 - \langle : \bar{q} \psi q : \rangle^2 / v^2 \right]$
2	$K_{M_2} = K_2^w = \langle : \bar{q} \psi t^A q \sum_f \bar{q}_f \psi t^A q_f : \rangle / v^2$	$-\frac{1}{9} \left[ \langle : \bar{q} q : \rangle^2 + \langle : \bar{q} \psi q : \rangle^2 / v^2 \right]$
3	$K_{M_3} = K_3^w = \langle : \bar{q} t^A q \sum_f \bar{q}_f \psi t^A q_f : \rangle$	$-\frac{2}{9} \langle : \bar{q} q : \rangle \langle : \bar{q} \psi q : \rangle$
4	$K_{M_4} = \langle : \sum_f \bar{q}_f \gamma^\nu t^A q_f \sum_{f'} \bar{q}_{f'} \gamma_\nu t^A q_{f'} : \rangle$	$-\frac{2}{9} \sum_f \left[ 2 \langle : \bar{q}_f q_f : \rangle^2 - \langle : \bar{q}_f \psi q_f : \rangle^2 / v^2 \right]$
5	$K_{M_5} = \langle : \sum_f \bar{q}_f \psi t^A q_f \sum_{f'} \bar{q}_{f'} \psi t^A q_{f'} : \rangle / v^2$	$-\frac{1}{9} \sum_f \left[ \langle : \bar{q}_f q_f : \rangle^2 + \langle : \bar{q}_f \psi q_f : \rangle^2 / v^2 \right]$

**Tabelle 3.15:** Liste der faktorisierten Kondensate  $K_i^{\prime \text{fak}}$ .

$i$	$K_{(\mathbb{1})i}^h$ unfaktorisiert	$K_i^{\prime \text{fak}}$
1	$K_{(\mathbb{1})1}^h = \langle : \bar{q} q \bar{Q} Q : \rangle$	$\langle : \bar{q} q : \rangle \langle : \bar{Q} Q : \rangle$
2	$K_{(\mathbb{1})2}^h = \langle : \bar{q} \gamma^\nu q \bar{Q} \gamma_\nu Q : \rangle$	$\langle : \bar{q} \psi q : \rangle \langle : \bar{Q} \psi Q : \rangle / v^2$
3	$K_{(\mathbb{1})6}^h = \langle : \bar{q} \psi q \bar{Q} \psi Q : \rangle / v^2$	$\langle : \bar{q} \psi q : \rangle \langle : \bar{Q} \psi Q : \rangle / v^2$
4	$K_{(\mathbb{1})9}^h = \langle : \bar{q} \psi q \bar{Q} Q : \rangle$	$\langle : \bar{q} \psi q : \rangle \langle : \bar{Q} Q : \rangle$
5	$K_{(\mathbb{1})10}^h = \langle : \bar{q} q \bar{Q} \psi Q : \rangle$	$\langle : \bar{q} q : \rangle \langle : \bar{Q} \psi Q : \rangle$

**Tabelle 3.16:** Liste der Kondensate  $K_{M,i}^{\text{fak}}$ , die im Ergebnis mit faktorisierten Kondensaten und anschließender SQME vorkommen, und der resultierenden SQME-Koeffizienten  $M_i^{\text{fak}}$ .

$i$	$K_{M,i}^{\text{fak}}$	$M_i^{\text{fak}}$
1	$\langle : \bar{q} q : \rangle^2$	1
2	$\langle : \bar{q} \psi q : \rangle^2 / v^2$	1
3	$\langle : \bar{q} q : \rangle \langle : \bar{q} \psi q : \rangle$	1
4	$\langle : \bar{q} q : \rangle^2 \langle : G^2 : \rangle^2$	$-g^2 / 48 \pi^2 M$
5	$\langle : \bar{q} \psi q : \rangle \langle : G^2 : \rangle$	$-g^2 / 48 \pi^2 M$

$$\begin{aligned}
 \langle : \bar{q}\Gamma_1 t^A q \bar{q}\Gamma_2 t^A q : \rangle &= -\frac{1}{36} \left\{ \langle : \bar{q}q : \rangle^2 \text{Tr}_D [\Gamma_1 \Gamma_2] \right. \\
 &\quad + \langle : \bar{q}q : \rangle \langle : \bar{q}\gamma_\mu q : \rangle (\text{Tr}_D [\Gamma_1 \gamma^\mu \Gamma_2] + \text{Tr}_D [\gamma^\mu \Gamma_1 \Gamma_2]) \\
 &\quad \left. + \langle : \bar{q}\gamma_\mu q : \rangle \langle : \bar{q}\gamma_\nu q : \rangle \text{Tr}_D [\gamma^\mu \Gamma_1 \gamma^\nu \Gamma_2] \right\}, \quad (3.50c)
 \end{aligned}$$

wobei  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  die Dirac-Strukturen der Kondensate bezeichnen. Die Vier-Quark-Kondensate zweier Quark-Sorten mit über den Generatoren  $t^A$  abkontrahierten Farb-Indizes verschwinden, weil bei der Faktorisierung Spuren über die einzelnen Generatoren der Vier-Quark-Kondensate auftauchen,  $\text{Tr}_C[t^A] = 0$ . Die faktorisierten Resultate der Variante (I) und (II) erhält man durch Ersetzung der unfaktorisierten Kondensate  $K_i^w$  bzw.  $K_{M,i}$  mit  $K_i^{\text{fak}}$  aus Tab. 3.14 in den Gln. (3.46) und (3.48).

Die dritte Variante (III), die Kondensate mit Feldoperatoren schwerer Quarks zu behandeln, benutzt zuerst die Faktorisierung. Für die Kondensate aus den Diagrammen mit weichem Gluon benutzt man die Einträge  $K_i^{\text{fak}}$  mit  $i = 1, 2, 3$  aus Tab. 3.14. Die Kondensate  $K_4^w$  und  $K_5^w$  des exakten Resultates verschwinden ebenso wie die in Tab. 3.5 aufgelisteten Kondensate  $K_{(t^A)_i}^h$  (s. Gl. (3.50b)). Die Kondensate  $K_{(\mathbb{1})_i}^h$  aus Diagrammen mit hartem Gluon in Tab. 3.5 faktorisieren wie in Tab. 3.15 notiert, in welcher ausschließlich die von Null verschiedenen faktorisierten Kondensate aufgeführt sind. Die Anzahl der faktorisierten Kondensate ist geringer als die Anzahl der Kondensate des exakten Ergebnisses, da diese zwei Quark-Sorten enthalten, welche nur auf eine Weise ein Hermite'sches Operatorprodukt bilden, und wegen der Gl. (3.50b).

Die Tab. 3.15 enthält zwei unterschiedliche Zwei-Quark-Kondensate mit Feldoperatoren schwerer Quarks. Neben der wohlbekannten SQME für  $\langle : \bar{Q}Q : \rangle$  wird die Entwicklung nach der inversen schweren Quark-Masse  $M$  für das Kondensat  $\langle : \bar{Q}\gamma^\nu Q : \rangle$  benötigt. Diese Entwicklung lässt sich analog zur Gl. (2.92) mittels der Gl. (2.91) berechnen. Den Beitrag in niedrigster Ordnung  $\propto \langle : G^2 : \rangle / M$  erhält man für den störungstheoretischen Quark-Propagator  $S^{(2)}$  mit  $\tilde{A}^{(0)}$ . Aufgrund des verschwindenden Impulsintegrals liefert die Ordnung  $1/M$  jedoch keinen Beitrag zur SQME von  $\langle : \bar{Q}\gamma^\nu Q : \rangle$ . Höhere Ordnungen werden in dieser Arbeit nicht betrachtet, da die Massendimension der beitragenden Produkte von Kondensaten  $\text{dim}_m = 7$  übersteigt.

Das Resultat für die dritte Möglichkeit im Umgang mit den schweren Quarks in Vier-Quark-Kondensaten kann folgendermaßen notiert werden:

$$\Pi_{(\text{III})}^P(q) = g^2 \sum_{i=1}^5 W_{M,i}^{\text{P,fak}} M_i^{\text{fak}} K_{M,i}^{\text{fak}} \quad (3.51)$$

mit

$$W_{M,i}^{\text{P,fak}} = \sum_{j=1}^5 C_{M,ij}^{\text{P,fak}} L_{M,ij}^{\text{P,fak}}. \quad (3.52)$$

Die beitragenden faktorisierten und nach  $1/M$  entwickelten Kondensate  $K_{M,i}^{\text{fak}}$  sind zusammen mit den SQME-Koeffizienten  $M_i^{\text{fak}}$  in der Tab. 3.16 aufgelistet. Die ersten drei Kondensate stammen von Diagrammen mit weichem Gluon. Da die  $K_i^w$  mit  $i = 1, 2, 3$  keine

**Tabelle 3.17:** Liste der Koeffizienten  $C_{M,ij}^{\text{P,fak}}$  mit der Notation  $s = 1/(q^2 - M^2)$ , die den Nenner des freien Dirac-Propagators für das schwere Quark enthält.

$i$	$C_{M,ij}^{\text{P,fak}}$				
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
1	$-\frac{4}{27}s^2(1 + q^2s - q^4s^2)$	$-\frac{4}{81}s^3$	$\frac{32}{27}s^4$	$\frac{2}{81}s^3$	$-\frac{8}{27}s^4$
2	$\frac{2}{27}s^2(1 + q^2s - q^4s^2)$	$\frac{2}{81}s^3$	$-\frac{16}{27}s^4$	$\frac{2}{81}s^3$	$-\frac{8}{27}s^4$
3	0	$\frac{4}{27}Ms^3$	$-\frac{16}{27}Ms^4$	0	0
4	$\frac{1}{9}\frac{1}{q^2}\left(2q^2s^2 + \frac{1}{q^2}\right)$	0	0	0	0
5	0	$\frac{1}{9}\frac{M}{q^2}s\left(2s + \frac{1}{q^2}\right)$	0	0	0

**Tabelle 3.18:** Liste der Koeffizienten  $L_{M,ij}^{\text{P,fak}}$ .

$i$	$L_{M,ij}^{\text{P,fak}}$				
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
1	1	$q^2 - 4\frac{(vq)^2}{v^2}$	$L_{13}^{\text{P},w_1}$	$q^2 - 4\frac{(vq)^2}{v^2}$	$L_{23}^{\text{P},w_1}$
2	1	$q^2 - 4\frac{(vq)^2}{v^2}$	$L_{13}^{\text{P},w_1}$	$q^2 - 4\frac{(vq)^2}{v^2}$	$L_{23}^{\text{P},w_1}$
3	—	$\frac{(vq)}{v^2}$	$\frac{(vq)}{v^2}\left(q^2 - \frac{(vq)^2}{v^2}\right)$	—	—
4	1	—	—	—	—
5	—	$\frac{(vq)}{v^2}$	—	—	—

Feldoperatoren schwerer Quarks enthalten, ist keine SQME nötig und entsprechend gilt für die resultierenden Koeffizienten  $M_i^{\text{fak}} = 1$ . Die Kondensate  $K_{M,4}^{\text{fak}}$  und  $K_{M,5}^{\text{fak}}$  ergeben sich aus den Diagrammen mit hartem Gluon. Sie folgen aus der Evaluierung der Kondensate  $K_1^{\text{fak}}$  und  $K_4^{\text{fak}}$  aus Tab. 3.15 und haben nach Gl. (2.92) einen identischen SQME-Koeffizient. Die Wilson-Koeffizienten lassen sich zerlegen, wobei der  $L_{M,ij}^{\text{P,fak}}$  (s. Tab. 3.18) das Resultat aus der Projektion der Lorentz-Indizes der exakten Kondensate vom restlichen Koeffizienten  $C_{M,ij}^{\text{P,fak}}$  (s. Tab. 3.17) separiert.

### 3.4 Differenzen chiraler Partner

In diesem Abschnitt werden die Operatorproduktentwicklungen der Strom-Strom-Korrelatoren chiraler Partner untersucht. Im Allgemeinen bezeichnet man den Isektor-Vektorstrom  $\vec{j}_\mu^{\text{V}} = \bar{\psi}\gamma_\mu\vec{\tau}\psi$  und den Isektor-Axialvektorstrom  $\vec{j}_\mu^{\text{A}} = \bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\vec{\tau}\psi$  als chirale Partner, da diese über eine chirale Transformation miteinander verknüpft sind [Leu09]. Gleichsam werden skalärer und pseudoskalärer Strom als chirale Partner bezeichnet, genauso wie Hadronen, welche an entsprechende Ströme koppeln. Die hadronischen Anregungen, deren Quantenzahlen beispielsweise mit den Quantenzahlen des Isektor-Vektorstroms  $J^{PC} = 1^{--}$  und des Isektor-Axialvektorstroms  $J^{PC} = 1^{++}$  übereinstimmen, sind das  $\rho$ - und  $a_1$ -Meson.

Die Ergebnisse von [Hil11] erweiternd sind in diesem Abschnitt die Vier-Quark-Kondensatbeiträge für Differenzen von Strom-Strom-Korrelatoren chiraler Partner angegeben. In den Operatorproduktentwicklungen der Korrelatoren für Differenzen chiraler Partner entfallen chiral-gerade Kondensate. Chiral-ungerade Kondensate – neben bestimmten Vier-Quark-Kondensaten auch das chirale Kondensat – können als Ordnungsparameter der spontanen Brechung der chiralen Symmetrie  $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$  aufgefasst werden. Die unabhängigen links- und rechts-händigen Transformationen<sup>3</sup> lassen sich für die Wahl  $\Theta_a = \Theta_L^a = \Theta_R^a$  ( $\Theta_a = -\Theta_L^a = \Theta_R^a$ ) als Rotationen im  $N_f$ -dimensionalen Raum der Quark-Sorten

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{-i\Gamma\Theta_a t^a} \psi \approx (1 - i\Gamma\Theta_a t^a) \psi \quad (3.53)$$

mit den Generatoren  $t^a$  der  $SU(N_f)$  (mit impliziter Summation über  $a$ ) und  $\Gamma = \mathbb{1}$  ( $\Gamma = \gamma_5$ ) als Vektor(Axial)-Transformation schreiben [Hil12a]. Die  $\Theta_a$  sind dabei  $N_f^2 - 1$  infinitesimale Rotationsparameter. Für masselose Quarks ist die QCD-Lagrange-Dichte unter beiden Rotationen invariant. Die zugehörigen (klassisch) erhaltenen Ströme sind der Vektor- und der Axialvektorstrom<sup>4</sup>. Allerdings spiegelt das Massenspektrum der Mesonen die chirale Symmetrie nicht wider. Die Massen chiraler Partner, wie jene des Vektormesons  $\rho$  und des Axialvektormesons  $a_1$ , sind nicht entartet sondern unterscheiden sich erheblich:  $m_\rho = (775, 49 \pm 0, 34)$  MeV zu  $m_{a_1} = (1230 \pm 40)$  MeV [Ber12]. Die Mischung von Vektor- und Axialvektorstrom unter der Axial-Transformation, welche einen nicht-verschwindenden Grundzustanderwartungswert anzeigt, wird daher als spontane Symmetriebrechung interpretiert [Leu10].

<sup>3</sup>Die Größen  $\Theta_{L,R}^a$  sind die Rotationsparameter der Transformationen  $\psi_{L,R} \longrightarrow \psi'_{L,R} = e^{-i\Theta_{L,R}^a t^a} \psi_{L,R}$ , wobei  $\psi_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi$  ( $\psi_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi$ ) der linkshändige (rechtshändige) Spinor ist. Es gilt  $\psi = \psi_L + \psi_R$ .

<sup>4</sup>Der Axialvektorstrom ist aufgrund einer Quantenanomalie nicht erhalten [Pes95]. Betrachtet man das Matrixelement des schwachen Pion-Zerfalls erkennt man, dass aufgrund der geringen Pion-Masse der Axialvektorstrom jedoch annähernd erhalten ist [Koc97]. Daher wird er als *partially conserved current* bezeichnet.

Für nicht-verschwindende Quark-Massen ist die chirale Symmetrie explizit gebrochen, da der Massenterm der QCD-Lagrange-Dichte  $\bar{\psi}M\psi$  nicht invariant unter der Axialtransformation ist. Obwohl Ströme, die mit Mesonen schwerer und leichter Quarks verknüpft sind, weder erhalten noch mit einer Symmetrietransformation assoziiert sind, mischen sie unter Vektor- und Axialtransformation, wenn man sich auf den Anteil leichter Quarks beschränkt. Der Vektorstrom transformiert sich wie folgt [Hil11]:

$$j_\mu^{V,\tau} = \bar{\psi}\gamma_\mu\tau\psi \longrightarrow j_\mu^{V,\tau} = j_\mu^{V,\tau} \pm i\bar{\psi}\Gamma\gamma_\mu\Theta^a[t^a, \tau]\psi, \quad (3.54)$$

wobei man das Resultat mit  $+(-)$  für die Vektor(Axial)-Transformation erhält und  $\tau$  eine Matrix im Raum der Quark-Sorten ist. Im Fall von drei Quark-Sorten  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$  mit einem schweren Quark ( $\psi_3$ ) lässt sich die Transformation (3.53) durch die Wahl  $\Theta_a = (\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, 0, \dots, 0)$  und  $2t^a = \lambda^a$  (Gell-Mann-Matrizen) die chirale Transformation auf den leichten Quark-Anteil ( $\psi_1, \psi_2$ ) beschränken. Eine solche Transformation lässt auch die zugehörige QCD-Lagrange-Dichte invariant. Wählt man speziell  $\tau = (\lambda^4 + i\lambda^5)/2$ , womit sich der Vektorstrom gemäß [Hil11]

$$j_\mu^{V,\tau} = \bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_3 \longrightarrow j_\mu^{V,\tau} = j_\mu^{V,\tau} - \frac{i}{2} [\Theta_3\bar{\psi}_1\Gamma\gamma_\mu\psi_3 + (\Theta_1 + i\Theta_2)\bar{\psi}_2\Gamma\gamma_\mu\psi_3] \quad (3.55)$$

transformiert, erkennt man die Mischung von Vektor- und Axialvektorstrom für die Axialtransformation mit  $\Gamma = \gamma_5$ . Analoge Ausdrücke erhält man für die Ströme skalarer und pseudoskalarer  $Qq$ -Mesonen. Die Massenaufspaltung zwischen chiralen Partnern der Mesonen, die aus einem leichten und einem schweren Quark bestehen, muss also analog zu Mesonen leichter Quarks [Hil12b] durch Ordnungsparameter der spontanen chiralen Symmetriebrechung bestimmt werden, die durch das chirale Kondensat und die in diesem Abschnitt aufgelisteten Vier-Quark-Kondensate gegeben sind.

### 3.4.1 Der Fall P – S

Die exakten Ergebnisse für die Differenz der Strom-Strom-Korrelatoren aus pseudo-skalarem und skalarem Strom sind tabellarisch angegeben. Die zu den Ergebnissen für pseudo-skalare Mesonen analoge Darstellung der Resultate ermöglicht im Folgenden die Listen der auftretenden Kondensate in den Tabn. 3.1, 3.5 und 3.8 aus Abschnitt 3.3 zu benutzen.

#### Diagramme mit weichem Gluon

Die Ergebnisse für das Diagramm in Abb. 3.4a haben folgende allgemeine Form:

$$\Pi_{w_1}^{P-S}(q) = g^2 \sum_{i=1}^6 W_i^{P-S, w_1} K_i^w \quad (3.56)$$

mit

$$W_i^{P-S, w_1} = \sum_{j=1}^3 C_{ij}^{P-S, w_1} L_{ij}^{P-S, w_1}. \quad (3.57)$$

Das Resultat reduziert Gl. (3.56) enorm, da in der chiralen Differenz zu den Ergebnissen für Diagramme mit weichem Gluon einzig das Kondensat  $K_3^w = \langle : \bar{q}_1 t^A q_1 \sum_f \bar{q}_f \not{t}^A q_f : \rangle$  beiträgt. Der zugehörige Wilson-Koeffizient  $W_3^{P-S, w_1}$ , zerlegt nach  $C_{3j}^{P-S, w_1}$  und  $L_{3j}^{P-S, w_1}$ , findet

**Tabelle 3.19:** Liste der Koeffizienten  $C_{ij}^{\text{P-S},w_1}$  und  $L_{ij}^{\text{P-S},w_1}$ .

$i$	$C_{ij}^{\text{P-S},w_1}$			$L_{ij}^{\text{P-S},w_1}$		
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
3	0	$-\frac{8}{3} \frac{M}{(q^2 - M^2)^3}$	$\frac{16}{3} \frac{M}{(q^2 - M^2)^4}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$	$\frac{(vq)}{v^2} \left( q^2 - \frac{(vq)^2}{v^2} \right)$

**Tabelle 3.20:** Liste der Koeffizienten  $C_{ij}^{\text{P-S},w_2}$  und  $L_{ij}^{\text{P-S},w_2}$ .

$i$	$C_{ij}^{\text{P-S},w_2}$		$L_{ij}^{\text{P-S},w_2}$	
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 1$	$j = 2$
3	0	$\frac{4}{3} \frac{M}{(q^2 - M^2)^3}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$

sich in der Tab. 3.19. Die auftretenden Elemente von  $L_{3j}^{\text{P-S},w_1}$  sind mediumspezifisch und stammen von der Projektion eines Lorentz-Index bzw. dreier Lorentz-Indizes.

Für die Beiträge aus dem Diagramm in Abb. 3.4b erhält man

$$\Pi_{w_2}^{\text{P-S}}(q) = g^2 \sum_{i=1}^6 W_i^{\text{P-S},w_2} K_i^w \quad (3.58)$$

mit

$$W_i^{\text{P-S},w_2} = \sum_{j=1}^2 C_{ij}^{\text{P-S},w_2} L_{ij}^{\text{P-S},w_2}. \quad (3.59)$$

Im Gegensatz zu dem Wilson-Koeffizienten aus Gl. (3.56), welcher sich aus zwei Summanden zusammensetzt, trägt zu  $W_i^{\text{P-S},w_2}$  ein Summand bei, weil die Berechnung von  $\Pi_{w_2}^{\text{P-S}}$  aufgrund der Anti-Symmetrie des Feldstärketensors keine Projektionen von mehr als zwei Lorentz-Indizes erfordert. Beide Anteile des Wilson-Koeffizienten,  $C_{3j}^{\text{P-S},w_2}$  und  $L_{3j}^{\text{P-S},w_2}$ , sind in Tab. 3.20 notiert.

### Diagramme mit hartem Gluon

Die Resultate zu den Diagrammen mit hartem Gluon lassen sich auch im Fall P – S wie im Unterabschnitt 3.3.1 zerlegen:

$$\Pi_{h_x}^{\text{P-S}}(q) = g^2 \sum_{i=1}^{12} W_i^{\text{P-S}, h_x} K_i^h \quad (3.60)$$

mit

$$K_i^h = 4K_{(\mathbb{1})i}^h - 3K_{(t^A)i}^h, \quad (3.61a)$$

$$W_i^{\text{P-S}, h_x} = \sum_{j=1}^2 C_{ij}^{\text{P-S}, h_x} L_{ij}^{\text{P-S}, h_x}, \quad (3.61b)$$

wobei  $x = 1, 2$ . Dabei liefert  $\Pi_{h_1}^{\text{P-S}}$  die Beiträge zu dem Diagramm in Abb. 3.5a und  $\Pi_{h_2}^{\text{P-S}}$  zu dem Diagramm in Abb. 3.5b. Aufgrund der Projektion der Farb-Indizes (s. Gl. (3.36)) treten die Kondensate immer in der festen Kombination (3.61a) auf.

Die nicht-verschwindenden Koeffizienten  $W_i^{\text{P-S}, h_1}$  und  $W_i^{\text{P-S}, h_2}$  sind in Anteile zerlegt in den Tabn. 3.21 und 3.22 aufgeführt. Dabei treten auch hier nur zwei mediumspezifische Einträge  $L_{i2}^{\text{P-S}, h_1}$  auf, weil die Projektion von höchstens zwei Lorentz-Indizes vorgenommen werden muss. Dies ist aber nicht demselben Grund wie dem für  $L_{i2}^{\text{P-S}, w_2}$  geschuldet, sondern resultiert aus den Dirac-Spuren. Tragen die Elemente der Clifford-Algebra ( $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  in Gl. (3.37)) zusammen drei oder vier Lorentz-Indizes, sorgen die Spur-Resultate für die Kontraktion von mindestens zwei Indizes.

Die Ergebnisse für die Diagramme in Abb. 3.5 mit Fierz-transformierten Vier-Quark-Kondensaten werden mit überstrichenen Symbolen analog zu Gl. (3.60) notiert:

$$\overline{\Pi}_{h_x}^{\text{P-S}}(q) = g^2 \sum_{i=1}^{12} \overline{W}_i^{\text{P-S}, h_x} \overline{K}_i^h, \quad (3.62)$$

$$\overline{W}_i^{\text{P-S}, h_x} = \sum_{j=1}^2 \overline{C}_{ij}^{\text{P-S}, h_x} \overline{L}_{ij}^{\text{P-S}, h_x} \quad (3.63)$$

mit  $\overline{\Pi}_{h_x}^{\text{P-S}} \equiv \overline{\Pi}_{h_x}^{\text{P}} - \overline{\Pi}_{h_x}^{\text{S}}$ ,  $x = 1, 2$ . Die nicht-verschwindenden Wilson-Koeffizienten  $\overline{W}_i^{\text{P-S}, h_1}$  und  $\overline{W}_i^{\text{P-S}, h_2}$  sind nach Anteilen zerlegt in den Tabn. 3.23 und 3.24 aufgelistet.

Die Tabn. 3.23 und 3.24 erscheinen umfangreicher als die Resultate in nicht-Fierz-transformierter Schreibweise in den Tab. 3.21 und 3.22, allerdings tragen in den kombinierten Resultaten  $\overline{\Pi}_{h_1}^{\text{P-S}} + \overline{\Pi}_{h_2}^{\text{P-S}}$  neun Kondensate und in  $\overline{\Pi}_{h_1}^{\text{P-S}} + \overline{\Pi}_{h_2}^{\text{P-S}}$  zehn Kondensate bei, da die Wilson-Koeffizienten der übrigen Kondensate verschwinden.

**Tabelle 3.21:** Liste der Koeffizienten  $C_{ij}^{\text{P-S},h_1}$  und  $L_{ij}^{\text{P-S},h_1}$ .

$i$	$C_{ij}^{\text{P-S},h_1}$		$L_{ij}^{\text{P-S},h_1}$	
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 1$	$j = 2$
1	$\frac{2}{9} \frac{1}{q^2} \left( \frac{q^2 + M^2}{(q^2 - M^2)^2} + \frac{1}{q^2} \right)$	0	1	—
5	$\frac{2}{9} \frac{1}{q^2} \left( \frac{1}{q^2 - M^2} + \frac{1}{q^2} \right)$	0	1	—
10	0	$-\frac{2}{9} \frac{M}{q^2 (q^2 - M^2)^2}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$
11	0	$-\frac{1}{9} \frac{M}{q^2 (q^2 - M^2)^2}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$

**Tabelle 3.22:** Liste der Koeffizienten  $C_{ij}^{\text{P-S},h_2}$  und  $L_{ij}^{\text{P-S},h_2}$ .

$i$	$C_{ij}^{\text{P-S},h_2}$		$L_{ij}^{\text{P-S},h_2}$	
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 1$	$j = 2$
1	$\frac{2}{9} \frac{1}{q^2 (q^2 - M^2)}$	0	1	—
3	$\frac{1}{9} \frac{1}{q^2 (q^2 - M^2)}$	0	1	—
5	$\frac{2}{9} \frac{1}{q^2 (q^2 - M^2)}$	0	1	—
10	0	$-\frac{4}{9} \frac{M}{q^4 (q^2 - M^2)}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$

**Tabelle 3.23:** Liste der Koeffizienten  $\bar{C}_{ij}^{\text{P-S},h_1}$  und  $\bar{L}_{ij}^{\text{P-S},h_1}$ .

$i$	$\bar{C}_{ij}^{\text{P-S},h_1}$		Koeffizient $\bar{L}_{ij}^{\text{P-S},h_2}$	
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 1$	$j = 2$
1	$-\left(\frac{1}{(q^2 - M^2)^2} + \frac{1}{q^4}\right)$	0	1	—
2	$-\frac{M^2}{q^2(q^2 - M^2)^2}$	0	1	—
3	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(q^2 - M^2)^2} + \frac{1}{q^4}\right)$	0	1	—
4	$-\frac{M^2}{q^2(q^2 - M^2)^2}$	0	1	—
5	$-\left(\frac{1}{(q^2 - M^2)^2} + \frac{1}{q^4}\right)$	0	1	—
9	0	$-\frac{M}{q^2(q^2 - M^2)^2}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$
10	0	$-\frac{M}{q^2(q^2 - M^2)^2}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$
11	0	$-\frac{1}{2}\frac{M}{q^2(q^2 - M^2)^2}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$
12	0	$-\frac{1}{2}\frac{M}{q^2(q^2 - M^2)^2}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$

**Tabelle 3.24:** Liste der Koeffizienten  $\bar{C}_{ij}^{\text{P-S},h_2}$  und  $\bar{L}_{ij}^{\text{P-S},h_2}$ .

$i$	$\bar{C}_{ij}^{\text{P-S},h_2}$		$\bar{L}_{ij}^{\text{P-S},h_2}$	
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 1$	$j = 2$
1	$\frac{2}{q^2(q^2 - M^2)}$	0	1	—
3	$-\frac{1}{q^2(q^2 - M^2)}$	0	1	—
5	$\frac{2}{q^2(q^2 - M^2)}$	0	1	—
9	0	$-\frac{M}{q^4(q^2 - M^2)}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$
10	0	$-\frac{M}{q^4(q^2 - M^2)}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$
11	0	$-\frac{1}{2}\frac{M}{q^4(q^2 - M^2)}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$
12	0	$-\frac{1}{2}\frac{M}{q^4(q^2 - M^2)}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$

**Tabelle 3.25:** Liste der Koeffizienten  $C_{ij}^{V-A,w_1}$  und  $L_{ij}^{V-A,w_1}$ .

$i$	$C_{ij}^{V-A,w_1}$			$L_{ij}^{V-A,w_1}$		
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
3	0	$\frac{32}{3} \frac{M}{(q^2 - M^2)^3}$	$-\frac{64}{3} \frac{M}{(q^2 - M^2)^4}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$	$\frac{(vq)}{v^2} \left( q^2 - \frac{(vq)^2}{v^2} \right)$

### 3.4.2 Der Fall V – A

Die exakten Ergebnisse für die Differenz der Strom-Strom-Korrelatoren aus Vektor- und Axialvektorstrom sind wie im Unterabschnitt 3.4.1 tabellarisch angegeben. Die Listen der auftretenden Kondensate in den Tabn. 3.1, 3.5 und 3.8 aus Abschnitt 3.3 sind für die Resultate im Fall V – A heranzuziehen, weil eine Notation in analoger Weise zur Notation für den pseudo-skalaren Fall auch hier möglich ist.

#### Diagramme mit weichem Gluon

Das Resultat für das Diagramm in Abb. 3.4a hat somit folgende allgemeine Form:

$$\Pi_{w_1}^{V-A}(q) = g^2 \sum_{i=1}^6 W_i^{V-A,w_1} K_i^w \quad (3.64)$$

mit

$$W_i^{V-A,w_1} = \sum_{j=1}^3 C_{ij}^{V-A,w_1} L_{ij}^{V-A,w_1}. \quad (3.65)$$

Wie im vorangegangenen Unterabschnitt ist  $W_3^{V-A,w_1}$  der einzige nicht-verschwindende Wilson-Koeffizient. Aufgespalten in  $C_{3j}^{V-A,w_1}$  und  $L_{3j}^{V-A,w_1}$  ist er in der Tab. 3.25 notiert. Das Kondensat  $K_3^w$  ist mediumspezifisch, weshalb kein Beitrag für  $j = 0$  existiert. Auch das Resultat zum Diagramm aus Abb. 3.4b liefert das mediumspezifische Kondensat  $K_3^w$ , dessen Wilson-Koeffizient aufgrund der verschiedenen Techniken der Berechnung jedoch keinen Summanden aus der Projektion von drei Lorentz-Indizes enthält.

Im Allgemeinen liefern die Beiträge aus dem Diagramm in Abb. 3.4b

$$\Pi_{w_2}^{V-A}(q) = g^2 \sum_{i=1}^5 W_i^{V-A,w_2} K_i^w \quad (3.66)$$

mit

$$W_i^{V-A,w_2} = \sum_{j=1}^2 C_{ij}^{V-A,w_2} L_{ij}^{V-A,w_2}, \quad (3.67)$$

wobei beide Anteile des nicht-verschwindenden Wilson-Koeffizienten,  $C_{3j}^{V-A,w_2}$  und  $L_{3j}^{V-A,w_2}$ , in Tab. 3.26 notiert sind.

**Tabelle 3.26:** Liste der Koeffizienten  $C_{ij}^{V-A,w_2}$  und  $L_{ij}^{V-A,w_2}$ .

$i$	$C_{ij}^{V-A,w_2}$		$L_{ij}^{V-A,w_2}$	
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 1$	$j = 2$
3	0	$-\frac{16}{3} \frac{M}{(q^2 - M^2)^3}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$

Das Kondensat  $K_3^w = \langle : \bar{q}t^A q \sum_f \bar{q}_f \psi t^A q_f : \rangle$  ist das einzige Kondensat, das zur Differenz der Korrelatoren chiraler Partner für Diagramme mit weichem Gluon beiträgt. Gleichzeitig ist es auch das einzige Kondensat des im äußeren Impuls  $q$  ungeraden Strom-Strom-Korrelators  $\Pi_w^{X,u}$  für Diagramme mit weichem Gluon mit Strömen, die sich aus schweren und leichten Quarks zusammensetzen, da der Wilson-Koeffizient des äquivalenten Kondensates  $K_6^w = \langle : \bar{Q}t^A Q \sum_f \bar{q}_f \psi t^A q_f : \rangle$  im Grenzübergang  $m \rightarrow 0$  verschwindet.

### Diagramme mit hartem Gluon

Die Beiträge der Diagramme mit hartem Gluon-Propagator (s. Abb. 3.5) lassen auch im Fall  $V - A$  eine Zerlegung wie im Unterabschnitt 3.3.1 zu:

$$\Pi_{h_x}^{V-A}(q) = g^2 \sum_{i=1}^{12} W_i^{V-A,h_x} K_i^h \quad (3.68)$$

mit

$$K_i^h = 4K_{(1)i}^h - 3K_{(t^A)i}^h, \quad (3.69a)$$

$$W_i^{V-A,h_x} = \sum_{j=1}^2 C_{ij}^{V-A,h_x} L_{ij}^{V-A,h_x}, \quad (3.69b)$$

wobei  $x = 1, 2$ . Dabei liefert  $\Pi_{h_1}^{V-A}$  die Beiträge zu dem Diagramm in Abb. 3.5a und  $\Pi_{h_2}^{V-A}$  zu dem Diagramm in Abb. 3.5b. Die Kondensate treten aufgrund der Projektion der Farb-Indizes (s. Gl. (3.36)) immer in der festen Kombination (3.69a) auf.

Die nicht-verschwindenden Wilson-Koeffizienten  $W_i^{V-A,h_1}$  und  $W_i^{V-A,h_2}$  sind in den Tabn. 3.27 und 3.28 in Anteile zerlegt aufgeführt. In der chiralen Differenz  $V - A$  der Strom-Strom-Korrelatoren tragen für  $\Pi_{h_1}^{V-A}$  nur drei Kondensat-Kombinationen  $K_i^h$  bei. Daher kann für diese Beträge mit dem geringsten Aufwand die Konsistenz der Ergebnisse mit Standard- und Fierz-transformierten Kondensaten überprüft werden, d.h.  $\Pi_{h_1}^{V-A} = \bar{\Pi}_{h_1}^{V-A}$ . Exemplarisch wird nach der Präsentation der Resultate mit den Kondensaten  $\bar{K}_i^h$  dies verifiziert.

**Tabelle 3.27:** Liste der Koeffizienten  $C_{ij}^{V-A,h_1}$  und  $L_{ij}^{V-A,h_1}$ .

$i$	$C_{ij}^{V-A,h_1}$		$L_{ij}^{V-A,h_1}$	
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 1$	$j = 2$
1	$-\frac{8}{9} \frac{1}{q^2} \left( \frac{q^2 + M^2}{(q^2 - M^2)^2} + \frac{1}{q^2} \right)$	0	1	—
5	$\frac{8}{9} \frac{1}{q^2} \left( \frac{1}{q^2 - M^2} + \frac{1}{q^2} \right)$	0	1	—
10	0	$\frac{8}{9} \frac{M}{q^2(q^2 - M^2)^2}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$

**Tabelle 3.28:** Liste der Koeffizienten  $C_{ij}^{V-A,h_2}$  und  $L_{ij}^{V-A,h_2}$ .

$i$	$C_{ij}^{V-A,h_2}$		$L_{ij}^{V-A,h_2}$	
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 1$	$j = 2$
1	$\frac{4}{9} \frac{1}{q^2(q^2 - M^2)}$	0	1	—
3	0	$-\frac{2}{27} \frac{1}{q^4(q^2 - M^2)}$	—	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$
5	$-\frac{4}{9} \frac{1}{q^2(q^2 - M^2)}$	0	1	—
7	0	$-\frac{8}{27} \frac{1}{q^4(q^2 - M^2)}$	—	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$
10	0	$\frac{4}{9} \frac{M}{q^4(q^2 - M^2)}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$
11	0	$\frac{2}{9} \frac{M}{q^4(q^2 - M^2)}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$

**Tabelle 3.29:** Liste der Koeffizienten  $\bar{C}_{ij}^{V-A,h_1}$  und  $\bar{L}_{ij}^{V-A,h_1}$ .

$i$	$\bar{C}_{ij}^{V-A,h_1}$		$\bar{L}_{ij}^{V-A,h_1}$	
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 1$	$j = 2$
1	$\frac{4M^2}{q^2(q^2 - M^2)^2}$	0	1	—
2	$4 \left( \frac{1}{(q^2 - M^2)^2} + \frac{1}{q^4} \right)$	0	1	—
3	$\frac{2M^2}{q^2(q^2 - M^2)^2}$	0	1	—
4	$-4 \left( \frac{1}{(q^2 - M^2)^2} + \frac{1}{q^4} \right)$	0	1	—
5	$\frac{4M^2}{q^2(q^2 - M^2)^2}$	0	1	—
9	0	$-2 \frac{M}{q^2(q^2 - M^2)^2}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$
10	0	$-2 \frac{M}{q^2(q^2 - M^2)^2}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$
11	0	$\frac{M}{q^2(q^2 - M^2)^2}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$
12	0	$\frac{M}{q^2(q^2 - M^2)^2}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$

**Tabelle 3.30:** Liste der Koeffizienten  $\bar{C}_{ij}^{V-A,h_2}$  und  $\bar{L}_{ij}^{V-A,h_2}$ .

$i$	$\bar{C}_{ij}^{V-A,h_2}$		$\bar{L}_{ij}^{V-A,h_2}$	
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 1$	$j = 2$
2	$-\frac{2}{q^2(q^2 - M^2)}$	$\frac{2}{3} \frac{1}{q^4(q^2 - M^2)}$	1	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$
4	$\frac{2}{q^2(q^2 - M^2)}$	$-\frac{2}{3} \frac{1}{q^4(q^2 - M^2)}$	1	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$
6	0	$-\frac{8}{3} \frac{1}{q^4(q^2 - M^2)}$	—	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$
8	0	$\frac{8}{3} \frac{1}{q^4(q^2 - M^2)}$	—	$q^2 - 4 \frac{(vq)^2}{v^2}$
9	0	$\frac{M}{q^4(q^2 - M^2)}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$
10	0	$\frac{2M}{q^4(q^2 - M^2)}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$
11	0	$\frac{2M}{q^4(q^2 - M^2)}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$
12	0	$\frac{M}{q^4(q^2 - M^2)}$	—	$\frac{(vq)}{v^2}$

Nachfolgend wird das exakte Ergebnis für die Diagramme in Abb. 3.5 mit Fierz-transformierten Vier-Quark-Kondensaten mit überstrichenen Symbolen wie im Unterabschnitt 3.3.1 angegeben:

$$\overline{\Pi}_{h_x}^{V-A}(q) = g^2 \sum_{i=1}^{12} \overline{W}_i^{V-A, h_x} \overline{K}_i^h \quad (3.70)$$

mit

$$\overline{W}_i^{V-A, h_x} = \sum_{j=1}^2 \overline{C}_{ij}^{V-A, h_x} \overline{L}_{ij}^{V-A, h_x}, \quad (3.71)$$

und  $\overline{\Pi}_{h_x}^{V-A} = \overline{\Pi}_{h_x}^V - \overline{\Pi}_{h_x}^A$ ,  $x = 1, 2$ . Die nicht-verschwindenden Wilson-Koeffizienten  $\overline{W}_i^{V-A, h_1}$  und  $\overline{W}_i^{V-A, h_2}$  sind nach Anteilen zerlegt in den Tabn. 3.29 und 3.30 aufgelistet.

Auch wenn die Anzahl der Einträge in den Tabellen für die Ergebnisse zu Diagrammen mit hartem Gluon den vermuten lässt, dass die Resultate mit Fierz-transformierten Kondensaten  $\overline{K}_i^h$  umfangreicher als die mit Standard-Kondensaten  $K_i^h$  seien, ist die Anzahl der beitragenden Kondensate zu der Summe  $\overline{\Pi}_{h_1}^{V-A} + \overline{\Pi}_{h_2}^{V-A}$  geringer als zu  $\Pi_{h_1}^{V-A} + \Pi_{h_2}^{V-A}$ . Damit sind die Resultate ausgedrückt durch Fierz-transformierte Kondensate  $\overline{K}_i^h$  von geringerem Umfang als die Resultate mit Kondensaten  $K_i^h$ . Während die Ergebnisse der Differenzen von Strom-Strom-Korrelatoren chiraler Partner nur wenig von der Fierz-transformierten Schreibweise profitieren, reduzieren sich im Fall des pseudoskalaren Korrelators die Beiträge erheblich.

Im Folgenden wird exemplarisch anhand der Resultate zu Abb. 3.5a im Fall  $V-A$  nachgewiesen, dass die Ergebnisse ausgedrückt durch Kondensate in Standardnotation gleich den Ergebnissen mit Fierz-transformierten Kondensaten sind, d.h. die Gleichung  $\Pi_{h_1}^{V-A} = \overline{\Pi}_{h_1}^{V-A}$  wird verifiziert.

Nach Tab. 3.27 sind die Kondensat-Kombinationen  $K_1^h$ ,  $K_5^h$  und  $K_{10}^h$  einer Fierz-Transformation zu unterziehen. Für das komponentenweise notierte Kondensat

$$K_{(\mathbb{1})\mathbb{1}}^h = \langle : \overline{q}_i^\alpha q_j^\beta \overline{Q}_k^\gamma Q_l^\delta : \rangle \mathbb{1}_{\alpha\beta} \mathbb{1}_{\gamma\delta} \mathbb{1}_{ij} \mathbb{1}_{kl} \quad (3.72)$$

mit Farb(Dirac)-Indizes in griechischen (lateinischen) Buchstaben, wählen wir die Fierz-Transformation im Farb-Raum so, dass ein Teil des Ergebnisses das Kondensat  $K_{(t^A)\mathbb{1}}^h$  kanzelliert. Dafür verwenden wir Gl. (B.8b) in der Form

$$(\mathbb{1})_{\alpha\beta} (\mathbb{1})_{\gamma\delta} = \frac{9}{4} (t^A)_{\alpha\delta} (t^A)_{\gamma\beta} + \frac{3}{4} (t^A)_{\alpha\beta} (t^A)_{\gamma\delta}. \quad (3.73)$$

Damit ergibt sich

$$K_{(\mathbb{1})\mathbb{1}}^h = \frac{9}{4} \langle : \overline{q}_i^\alpha q_j^\beta \overline{Q}_k^\gamma Q_l^\delta : \rangle (t^A)_{\alpha\delta} (t^A)_{\gamma\beta} \mathbb{1}_{ij} \mathbb{1}_{kl} + \frac{3}{4} \langle : \overline{q} t^A q \overline{Q} t^A Q : \rangle. \quad (3.74)$$

Werden die Gln. (B.1) und (B.2) zur Fierz-Transformation der Dirac-Struktur herangezogen, erhält man mit den Basiselementen der Clifford-Algebra  $\Gamma_a, \Gamma_b = \mathbb{1}$  und  $\Gamma_c, \Gamma_d$ :

$$\mathbb{1}_{ij} \mathbb{1}_{kl} = \sum_{c,d} \frac{1}{16} \text{Tr}_D \left[ \mathbb{1} \Gamma^d \mathbb{1} \Gamma^c \right] (\Gamma_c)_{il} (\Gamma_d)_{kj} = \frac{1}{4} \sum_c (\Gamma_c)_{il} (\Gamma^c)_{kj}. \quad (3.75)$$

Achtet man beim Vertauschen der Quark-Felder  $q$  und  $Q$  auf den Vorzeichenwechsel, ergibt sich für das Kondensat

$$K_{(\mathbb{1})1}^h = -\frac{9}{16} \sum_c \langle : \bar{q} \Gamma_c t^A Q \bar{Q} \Gamma_c t^A q : \rangle + \frac{3}{4} K_{(t^A)1}^h. \quad (3.76)$$

Für die Kondensat-Kombination  $K_1^h = 4K_{(\mathbb{1})1}^h - 3K_{(t^A)1}^h$  erhält man:

$$K_1^h = -\frac{9}{4} \sum_c \langle : \bar{q} \Gamma_c t^A Q \bar{Q} \Gamma_c t^A q : \rangle. \quad (3.77)$$

Auf analoge Weise liefern die anderen beiden Kondensat-Kombinationen:

$$K_5^h = -\frac{9}{16} \sum_{c,d} \text{Tr}_D \left[ \gamma_5 \Gamma^d \gamma_5 \Gamma^c \right] \langle : \bar{q} \Gamma_c t^A Q \bar{Q} \Gamma_d t^A q : \rangle, \quad (3.78)$$

$$K_{10}^h = -\frac{9}{16} \sum_{c,d} \text{Tr}_D \left[ \Gamma^d \gamma_\mu \Gamma^c \right] \langle : \bar{q} \Gamma_c t^A Q \bar{Q} \Gamma_d t^A q : \rangle. \quad (3.79)$$

Nach der Evaluierung der Spuren und dem Ausschluss von Kondensaten, die nicht Zeitumkehr-invariant sind, kommt man auf

$$K_5^h = -\frac{9}{4} \left[ \langle : \bar{q} t^A Q \bar{Q} t^A q : \rangle - \langle : \bar{q} \gamma_\nu t^A Q \bar{Q} \gamma^\nu t^A q : \rangle + \frac{1}{2} \langle : \bar{q} \sigma_{\nu\rho} t^A Q \bar{Q} \sigma^{\nu\rho} t^A q : \rangle \right. \\ \left. + \langle : \bar{q} \gamma_5 \gamma_\nu t^A Q \bar{Q} \gamma_5 \gamma^\nu t^A q : \rangle + \langle : \bar{q} \gamma_5 t^A Q \bar{Q} \gamma_5 t^A q : \rangle \right], \quad (3.80)$$

$$K_{10}^h = -\frac{9}{4} \left[ \langle : \bar{q} \not{t} t^A Q \bar{Q} \not{t} t^A q : \rangle + \langle : \bar{q} t^A Q \bar{Q} \not{t} t^A q : \rangle \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left( \varepsilon^{\sigma\omega\mu\nu} v_\mu \langle : \bar{q} \sigma_{\sigma\omega} t^A Q \bar{Q} \gamma_5 \gamma_\nu t^A q : \rangle + \varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu} v_\mu \langle : \bar{q} \gamma_5 \gamma_\sigma t^A Q \bar{Q} \sigma_{\nu\rho} t^A q : \rangle \right) \right]. \quad (3.81)$$

In der Notation der Fierz-transformierten Kondensate hat man:

$$K_1^h = -\frac{9}{4} \left[ \bar{K}_1^h + \bar{K}_2^h + \frac{1}{2} \bar{K}_3^h - \bar{K}_4^h + \bar{K}_5^h \right], \quad (3.82)$$

$$K_5^h = -\frac{9}{4} \left[ \bar{K}_1^h - \bar{K}_2^h + \frac{1}{2} \bar{K}_3^h + \bar{K}_4^h + \bar{K}_5^h \right], \quad (3.83)$$

$$K_{10}^h = -\frac{9}{4} \left[ \bar{K}_9^h + \bar{K}_{10}^h - \frac{1}{2} \left( \bar{K}_{11}^h + \bar{K}_{12}^h \right) \right]. \quad (3.84)$$

Unter Benutzung der Gln. (3.68) und (3.69b) sowie der Wilson-Koeffizienten in Tab. 3.27 kann das erwartete Ergebnis

$$\Pi_{h_1}^{V-A} = \bar{\Pi}_{h_1}^{V-A} \quad (3.85)$$

gezeigt werden.

### 3.5 Andere Beiträge der Massendimension 6 bzw. Ordnung $\alpha_s^1$

Abgesehen von Vier-Quark-Kondensaten existieren weitere Kondensate der Massendimension 6. Im Vakuum sind dies das Drei-Gluon-Kondensat neben Kondensaten geringerer Massendimension multipliziert mit der entsprechenden Potenz der Quark-Massen. Im Medium ergeben sich weitere Kondensate durch die Hinzunahme der Mediumgeschwindigkeit  $v_\mu$  als Projektionsstruktur für Lorentz-Indizes. Aus Gl. (3.19) erhält man in der Massendimension 6 neben Kombinationen von kovarianten Ableitungen und Gluon-Feldstärketensoren, die auf Vier-Quark-Kondensate führen, auch Kombinationen, welche die Benutzung der Bewegungsgleichung des Feldstärketensors nicht zulassen, aber dank der Mediumgeschwindigkeit ebenso Lorentz-Skalare bilden.

Die Wilson-Koeffizienten von Vier-Quark-Kondensaten skalieren mit  $g^2$  bzw.  $\alpha_s$  und sind von erster Ordnung in der Störungstheorie, obwohl die zugeordneten Diagramme auf Baumgraphen-Niveau sind. Demzufolge ist ein Vergleich der Wilson-Koeffizienten von Vier-Quark-Kondensaten mit den Wilson-Koeffizienten des chiralen Kondensates in Einschleifenordnung von Interesse, da letztere in der führenden Ordnung der Störungstheorie mit  $g^0 = \alpha_s^0$  skalieren, aber auf Einschleifen-Niveau von Ordnung  $\alpha_s^1$  sind. Dieser Abschnitt rückt daher das Drei-Gluon-Kondensat und die Einschleifen-Korrektur zum chiralen Kondensat in den Mittelpunkt.

#### 3.5.1 Drei-Gluon-Kondensat

Um Einsichten in die gesamte Operatorproduktentwicklung von Strom-Strom-Korrelatoren bis zur Massendimension 6 zu erhalten, werden neben Vier-Quark-Kondensaten auch die gluonischen Kondensate betrachtet. Die Bestimmung des Wilson-Koeffizienten des Drei-Gluon-Kondensates  $\langle G^3 \rangle$  im Vakuum wird anhand der Darstellung in [Nik83] nachvollzogen. Mediumspezifische Drei-Gluon-Kondensate werden nicht untersucht, da sich diese Arbeit auf Kondensate beschränkt, welche die Projektion von maximal fünf Lorentz-Indizes erfordern. Offensichtlich ist für Drei-Gluon-Kondensate die Projektion von sechs Lorentz-Indizes nötig.

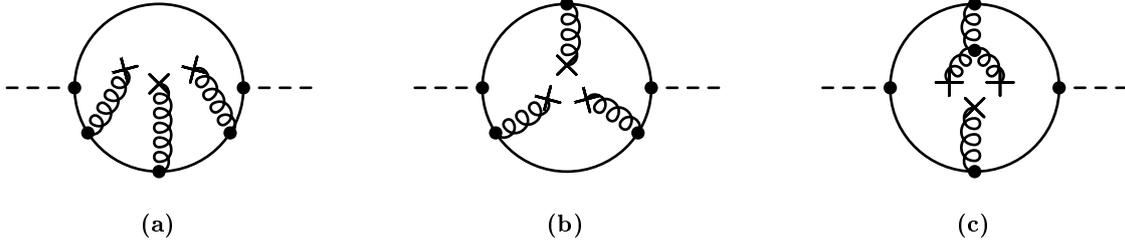
Die Berechnung der Wilson-Koeffizienten des Drei-Gluon-Kondensates erfolgt ähnlich der Bestimmung der Wilson-Koeffizienten der Vier-Quark-Kondensate mit weichem Gluon in der niedrigsten Ordnung der Störungstheorie. Im Gegensatz dazu rückt in Gl. (3.19) der vollkontrahierte Term  $\Pi_w^{X(0)}$  (3.20a) in den Fokus. Die Benutzung des darin enthaltenen störungstheoretischen Quark-Propagators (2.59) in verschiedenen Ordnungen seiner Entwicklung liefert 13 Beiträge zur OPE. Die verschiedenen Typen der zugehörigen Diagramme sind in Abb. 3.11 dargestellt. Nach Feynman-Regeln lassen sich vier lokale und neun nicht-lokale Diagramme generieren. Der vollkontrahierte Ausdruck

$$\Pi_w^{X(0)}(q) = -(i)^3 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \langle : \text{Tr}_{C,D} [S_q(p) \Gamma^X S_Q(q+p) \Gamma^X] : \rangle \quad (3.86)$$

wird mit folgenden Kombinationen der störungstheoretischen Quark-Propagatoren  $S_q$  und  $S_Q$  in der Notation (2.62) betrachtet:

$$\Pi_{w,a}^{X(0)} : \quad S_q = S_{q(\tilde{A}^{(0)})}^{(3)}, \quad S_Q = S_Q^{(0)} \quad + (q \longleftrightarrow Q), \quad (3.87a)$$

$$\Pi_{w,b}^{X(0)} : \quad S_q = S_{q(\tilde{A}^{(0)})}^{(2)}, \quad S_Q = S_{Q(\tilde{A}^{(0)})}^{(1)} \quad + (q \longleftrightarrow Q), \quad (3.87b)$$



**Abbildung 3.11:** Graphische Darstellung der Beiträge zum Drei-Gluon-Kondensat in der führenden Ordnung der Störungstheorie: (a), (b) Diagramme mit lokalem Kondensat und (c) Beispiel eines Diagramms mit nicht-lokalem Kondensat.

$$\begin{aligned}
 \Pi_{w,c}^{X(0)} : \quad & S_q = S_{q(\tilde{A}^{(2)})}^{(1)}, S_Q = S_{Q(\tilde{A}^{(0)})}^{(1)} && + (q \longleftrightarrow Q), \\
 & S_q = S_{q(\tilde{A}^{(2)}, \tilde{A}^{(0)})}^{(2)}, S_Q = S_Q^{(0)} && + (q \longleftrightarrow Q), \\
 & S_q = S_{q(\tilde{A}^{(0)}, \tilde{A}^{(2)})}^{(2)}, S_Q = S_Q^{(0)} && + (q \longleftrightarrow Q), \\
 & S_q = S_{q(\tilde{A}^{(1)})}^{(2)}, S_Q = S_Q^{(0)} && + (q \longleftrightarrow Q), \\
 & S_q = S_{q(\tilde{A}^{(1)})}^{(1)}, S_Q = S_{Q(\tilde{A}^{(1)})}^{(1)}, && \quad \quad \quad (3.87c)
 \end{aligned}$$

wobei der Beitrag  $\Pi_{w,a}^{X(0)}$  ( $\Pi_{w,b}^{X(0)}$ ) dem Diagramm in Abb. 3.11a (3.11b) entspricht und die erste Zeile von  $\Pi_{w,c}^{X(0)}$  dem Diagramm in Abb. 3.11c. Exemplarisch wird die weitere Evaluierung von  $\Pi_{w,a}^{X(0)}$  vorgenommen:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{w,a}^{X(0)}(q) = & -(i)^3 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(-i\frac{g}{2}\right)^3 \langle : \text{Tr}_C [G_{\mu\rho} G_{\nu\sigma} G_{\lambda\tau}] : \rangle \\
 & \times \text{Tr}_D \left[ T_q^{\mu\rho\nu\sigma\lambda\tau}(p) \Gamma^X S_Q(q+p) \Gamma^X \right] + (q \longleftrightarrow Q) \quad (3.88)
 \end{aligned}$$

mit

$$T_q^{\mu\rho\nu\sigma\lambda\tau}(p) = S_q^{(0)}(p) \gamma^\mu \left\{ \partial_p^\rho S_q^{(0)}(p) \gamma^\nu \left[ \partial_p^\sigma S_q^{(0)}(p) \gamma^\lambda \left( \partial_p^\tau S_q^{(0)}(p) \right) \right] \right\}. \quad (3.89)$$

Die partiellen Ableitungen in  $T_q^{\mu\rho\nu\sigma\lambda\tau}(p)$  werden mittels Gl. (3.26) in weitere freie Quark-Propagatoren  $S_q^{(0)}$  und  $\gamma$ -Matrizen überführt. Damit ist in Gl. (3.88) die Dirac-Spur von 15 Termen zu bestimmen, welche Produkte aus acht freien Quark-Propagatoren und acht  $\gamma$ -Matrizen sind. Die Spur über die Farb-Matrix des Produkts der drei Gluon-Feldstärketensoren  $G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^A t^A$  liefert

$$\text{Tr}_C [t^A t^B t^C] = \frac{1}{4} (d^{ABC} + i f^{ABC}), \quad (3.90)$$

wobei die total symmetrische Größe  $d^{ABC}$  in Gl. (A.5) definiert ist und  $f^{ABC}$  die total anti-symmetrische Strukturkonstante der Symmetriegruppe  $SU(3)$  bezeichnet. Obwohl der

Operator  $d^{ABC}G^AG^BG^C$  in den Zwischenergebnissen auftaucht, trägt er aufgrund des Furry-Theorems nicht zum Endergebnis bei [Nik83].

Die der Dirac-Spur entstammenden Ausdrücke werden mit der Projektion der Lorentz-Indizes des Drei-Gluon-Kondensates [Hub82,Nik83]

$$\begin{aligned} \langle f^{ABC}G_{\mu\rho}^AG_{\nu\sigma}^BG_{\lambda\tau}^C \rangle &= \frac{1}{24} \langle f^{ABC}G_{\alpha\beta}^AG^{B\beta}{}_\gamma G^{C\gamma\alpha} \rangle \\ &\quad \times (g_{\mu\tau}g_{\nu\rho}g_{\sigma\lambda} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}g_{\tau\rho} + g_{\nu\tau}g_{\mu\lambda}g_{\rho\sigma} + g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu}g_{\sigma\tau} \\ &\quad - g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau}g_{\lambda\rho} - g_{\mu\tau}g_{\nu\lambda}g_{\rho\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\lambda}g_{\sigma\tau} - g_{\sigma\lambda}g_{\mu\nu}g_{\rho\tau}) \end{aligned} \quad (3.91)$$

im Vakuum multipliziert. Für den Korrelator mit pseudo-skalaren Strömen, d.h.  $\Gamma^X = i\gamma_5$ , erhält man damit

$$\begin{aligned} \Pi_{w,a}^{P(0)}(q) &= i\frac{g^3}{4} \langle : f^{ABC}G_{\alpha\beta}^AG^{B\beta}{}_\gamma G^{C\gamma\alpha} : \rangle \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \\ &\quad \times \left\{ -\frac{1}{(p^2 - m_q^2)^3 [(q+p)^2 - m_Q^2]} - \frac{(qp)}{(p^2 - m_q^2)^4 [(q+p)^2 - m_Q^2]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3m_q(m_Q - 3m_q)p^2 - 8m_q^2(qp) + m_q^3(2m_Q + m_q)}{(p^2 - m_q^2)^5 [(q+p)^2 - m_Q^2]} \right\} \\ &\quad + (q \longleftrightarrow Q). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Zur Evaluierung der drei benötigten Impulsintegrale in dimensionaler Regularisierung benutzt man die Wick-Rotation, welche  $\int d^4p/(2\pi)^4 = i\mu^{4-D} \int d^Dp/(2\pi)^D$  liefert, und die Feynman-Parametrisierung. Die Integrale haben folgende Form [Itz80]:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(q-p)^2 + m_1^2]^n (p^2 + m_2^2)^m} \\ = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(n+m-D/2)}{\Gamma(n)\Gamma(m)} I_{n-1,m-1,n+m-D/2}(q^2, m_1^2, m_2^2), \end{aligned} \quad (3.93a)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} \frac{p_\mu}{[(q-p)^2 + m_1^2]^n (p^2 + m_2^2)^m} \\ = \frac{q_\mu}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(n+m-D/2)}{\Gamma(n)\Gamma(m)} I_{n,m-1,n+m-D/2}(q^2, m_1^2, m_2^2), \end{aligned} \quad (3.93b)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} \frac{p_\mu p_\nu}{[(q-p)^2 + m_1^2]^n (p^2 + m_2^2)^m} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(n)\Gamma(m)} \\ \times \left\{ \frac{g^{\mu\nu}}{2} \Gamma(n+m-D/2-1) I_{n-1,m-1,n+m-D/2-1}(q^2, m_1^2, m_2^2) \right. \\ \left. + q_\mu q_\nu \Gamma(n+m-D/2) I_{n+1,m-1,n+m-D/2}(q^2, m_1^2, m_2^2) \right\}, \end{aligned} \quad (3.93c)$$

wobei  $\Gamma(x) = \int_0^\infty dt t^{x-1} e^{-t}$  mit  $x > 0$  die Gamma-Funktion ist und für das Integral  $I_{i,j,k}$

$$I_{i,j,k}(q^2, m_1^2, m_2^2) = \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha^i (1-\alpha)^j}{[\alpha(1-\alpha)q^2 + \alpha m_1^2 + (1-\alpha)m_2^2]^k} \quad (3.94)$$

gilt. Im Gegensatz zu Charmonium [Nik83] ergeben sich aufgrund der voneinander verschiedenen Quark-Massen  $m_q \neq m_Q$  bei der Auswertung der Integrale  $I_{i,j,k}$  sehr umfangreiche und komplizierte Ausdrücke, deren Verhalten für  $m_q \rightarrow 0$  nicht abzulesen ist. In [Zsc11] werden Methoden bereitgestellt, welche die Bestimmung des Divergenzverhaltens der Integrale bei einer verschwindenden Quark-Masse erlauben.

Die Behandlung der Beiträge  $\Pi_{w,b}^X$  zum Drei-Gluon-Kondensat in Abb. 3.11b ist analog zum dargestellten Verfahren für  $\Pi_{w,a}^X$  vorzunehmen. Berechnet man die nicht-lokalen Beiträge  $\Pi_{w,c}^X$  erhält man Erwartungswerte  $\langle \text{Tr}_C [G_{\mu\nu} D_\lambda D_\rho G_{\sigma\tau}] \rangle$  und  $\langle \text{Tr}_C [D_\lambda G_{\mu\nu} D_\rho G_{\sigma\tau}] \rangle$ , wobei der letztere Ausdruck dank der Translationsinvarianz des Grundzustandes in den erstgenannten überführt werden kann. Die Evaluierung der Farb-Spur ist in diesem Fall trivial. Die Projektion der Lorentz-Indizes auf Vakuumstrukturen liefert unter Zuhilfenahme der Bianchi-Identität und der Bewegungsgleichung des Gluon-Feldstärketensors [Nik83, Nov80]

$$\begin{aligned} \langle G_{\mu\nu}^A D_\lambda D_\rho G_{\sigma\tau}^A \rangle &= 2K^- g_{\lambda\rho} (g_{\mu\tau} g_{\sigma\nu} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau}) \\ &\quad + K^- (g_{\mu\tau} g_{\nu\rho} g_{\sigma\lambda} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda} g_{\tau\rho} - g_{\nu\tau} g_{\mu\lambda} g_{\rho\sigma} - g_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} g_{\tau\rho}) \\ &\quad + K^+ (g_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} g_{\tau\lambda} + g_{\mu\tau} g_{\sigma\lambda} g_{\rho\nu} - g_{\mu\rho} g_{\sigma\lambda} g_{\nu\tau} - g_{\lambda\tau} g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) \end{aligned} \quad (3.95)$$

mit

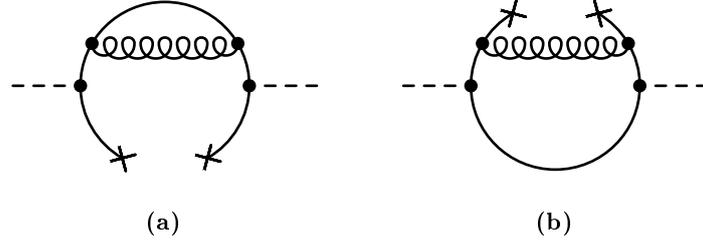
$$K^\pm = \frac{g^2}{72} \langle \sum_f \bar{q}_f \gamma_\mu t^A q_f \sum_{f'} \bar{q}_{f'} \gamma_\mu t^A q_{f'} \rangle \pm \frac{g}{48} \langle f^{ABC} G_{\alpha\beta}^A G^{B\beta}{}_\gamma G^{C\gamma\alpha} \rangle. \quad (3.96)$$

Dabei taucht ein Vier-Quark-Kondensat auf, welches man nicht in der führenden Ordnung der Störungstheorie erhält. Das zugeordnete Diagramm ist von Einschleifenordnung und skaliert mit  $g^4 \propto \alpha_s^2$ . Im Abschnitt 3.2, in welchem die Berechnung der Diagramme mit Vier-Quark-Kondensaten auf Baumgraphen-Niveau dargestellt ist, wird es deshalb nicht behandelt. Ohnehin ist für die Berechnung dieses Vier-Quark-Kondensates die Projektion von sechs Lorentz-Indizes auf alle möglichen Vakuum- und mediumspezifischen Strukturen erforderlich, die sich aus den Größen  $g_{\mu\nu}$ ,  $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$  und  $v_\mu$  bilden lassen, was über den Rahmen dieser Arbeit hinausgeht. Die Evaluierung der Dirac-Spur sowie die Berechnung der auftretenden Impulsintegrale im Rahmen der dimensional Regularisierung mit anschließendem Grenzübergang  $m_q \rightarrow 0$  birgt ähnliche Schwierigkeiten wie im Fall der lokalen Beiträge aus Abb. 3.11a und 3.11b.

Um das Drei-Gluon-Kondensat als Kondensat der Massendimension 6 in ebenso rigoroser Weise wie das Vier-Quark-Kondensat in die Medium-OPE des Strom-Strom-Korrelators einzubeziehen, muss das im Unterabschnitt 2.2.2 beschriebene Kalkül zur Projektion von Lorentz-Indizes für den Fall von sechs Indizes erweitert werden. Damit einhergehend wird die Anzahl der Drei-Gluon-Kondensate zunehmen. Für mediumspezifische Drei-Gluon-Kondensate ist man genauso wie bei Vier-Quark-Kondensaten konfrontiert mit der nur ungenügenden Kenntnis der numerischen Werte der Kondensate. Eine Parametrisierung z.B. der Dichteabhängigkeit, welche auch im Sektor der Vier-Quark-Kondensate erfolgreich zur Anwendung gebracht wird [Tho07], ermöglicht jedoch Aussagen über die mediumspezifischen Modifikationen jener Kondensate.

### 3.5.2 Chirales Kondensat in Einschleifenordnung

Vier-Quark-Kondensate sind in der OPE Potenz-Korrekturen höherer Ordnung, wohingegen die Quark-Beiträge in führender Ordnung der Potenz-Korrekturen durch das chirale Kondensat repräsentiert werden. Auf Einschleifen-Niveau skaliert das chirale Kondensat allerdings



**Abbildung 3.12:** Diagramme der Einschleifenkorrekturen zum chiralen Kondensat, welche der Vertex-Struktur des Diagramms in Abb. 3.5a entsprechen.

genauso wie das Vier-Quark-Kondensat in der führenden Ordnung der Störungstheorie mit  $\alpha_s^1$ . Allein die Ähnlichkeit der Diagramme zu Vier-Quark-Kondensaten mit hartem Gluon in Abb. 3.5 zu den Diagrammen des chiralen Kondensates in Einschleifenordnung in Abb. 3.12 lässt Berührungspunkte bei der Berechnung vermuten und wirft gleichzeitig die Frage nach dem numerischen Verhältnis dieser Beiträge auf.

Wie im Unterabschnitt 3.2.2 erfolgt die Berechnung der Einschleifenkorrekturen des chiralen Kondensates gemäß Gl. (3.28) in der ersten Ordnung der Störungstheorie. Die Zwei-Quark-Kondensatbeiträge erhält man, indem alle Feldoperatoren bis auf zwei Quark-Felder Wick-kontrahiert werden. Man findet damit den Beitrag  $\Pi_h^{X(2)}$  aus Gl. (3.30). Das Wick-Theorem liefert 16 beitragende Diagramme, von denen je zwei durch die Transformation ( $y \longleftrightarrow z$ ) ineinander übergehen. Dies ist die doppelte Anzahl von Beiträgen wie im Fall  $\Pi_h^{X(4)}$ , da es genau zwei Möglichkeiten gibt, zwei der vier nicht-Wick-kontrahierten Quark-Feldoperatoren zu kontrahieren. Im Weiteren wird in diesem Unterabschnitt die Berechnung des zu  $\Pi_{h,a}^{X(4)}$  analogen Ausdrucks vorgenommen, d.h. es werden die mit dem Diagramm in Abb. 3.5a assoziierten Diagramme in Abb. 3.12 evaluiert. Die betrachteten Terme des Wick-Theorems sind (mit unterdrückten Dirac- und Farb-Indizes):

$$\underbrace{Q(x)\bar{Q}(y)} \underbrace{Q(z)\bar{Q}_2(0)} \underbrace{Q(y)\bar{Q}(z)} \langle : \bar{q}(x)q(0) : \rangle, \quad (3.97)$$

$$\underbrace{Q(x)\bar{Q}(y)} \underbrace{Q(z)\bar{Q}_2(0)} \underbrace{q(0)\bar{q}(x)} \langle : \bar{Q}(z)Q(y) : \rangle. \quad (3.98)$$

Mit den Standard-OPE-Techniken – Projektion von Dirac- und Farb-Indizes sowie der kovarianten Entwicklung von Quark-Feldern – erhält man nach der Fouriertransformation

$$\begin{aligned} \Pi_h^{X(2)}(q) = & -i \frac{g^2}{6} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \sum_a \\ & \times \left\{ \langle : (\bar{q} \overleftarrow{D}_{\bar{\alpha}_n}) \Gamma_a q : \rangle \partial_q^{\bar{\alpha}_n} \text{Tr}_D \left[ \Gamma^a \Gamma^X S_Q(q) \gamma^\lambda S_Q(q-k) \gamma_\lambda S_Q(q) \Gamma^X \right] \right. \\ & \left. + (-1)^n \langle : (\bar{Q} \overleftarrow{D}_{\bar{\alpha}_n}) \Gamma_a Q : \rangle \partial_k^{\bar{\alpha}_n} \text{Tr}_D \left[ \Gamma^a \gamma_\lambda S_Q(k) \Gamma^X S_q(k-q) \Gamma^X S_Q(k) \gamma^\lambda \right] \right\}. \quad (3.99) \end{aligned}$$

Um ausschließlich Zwei-Quark-Kondensate zu erhalten sind für die störungstheoretischen Quark-Propagatoren  $S_{Q,q}$  die freien Propagatoren  $S_{Q,q}^{(0)}$  zu verwenden und es muss die kovariante Entwicklung der Quark-Felder bei  $n = 1$  abgebrochen werden. Verwendet man höhere Ordnungen der Entwicklungen von  $S_{Q,q}$  und/oder des Quark-Feldes erhält man analog zu

Gl. (3.20b) Quark-Kondensate ab der Massendimension 5 auf Einschleifen-Niveau, wie das gemischte Quark-Gluon-Kondensat oder Vier-Quark-Kondensate (s. Abb. 3.7a).

Der Abbruch der kovarianten Entwicklung des Quark-Feldoperators bei  $n = 1$  und die Forderungen nach Invarianz unter Paritäts- und Zeitumkehr-Transformationen an die Kondensate, welche zudem Lorentz-Skalare sind, schränken die Projektion der Dirac-Indizes auf  $\mathbb{1}$  und  $\gamma^\mu$  ein. Man erhält für den Erwartungswert mit den Quark-Feldern  $q$  in Gl. (3.99) vier Kombinationen:  $\langle : \bar{q}q : \rangle$ ,  $\langle : \bar{q}D_\mu q : \rangle$ ,  $\langle : \bar{q}\gamma_\mu q : \rangle$  und  $\langle : \bar{q}\gamma_\mu D_\nu q : \rangle$ . Die Erwartungswerte mit den Quark-Feldern  $Q$  liefern die gleichen Kombinationen, sollen aber im Folgenden nicht weiter berücksichtigt werden, da wir an der Größenordnung des Wilson-Koeffizienten des chiralen Kondensates interessiert sind. Schwere Zwei-Quark-Kondensate erfordern die Anwendung der SQME, womit diese in gluonische Kondensate überführt werden. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass das Diagramm in Abb. 3.12b, assoziiert mit dem schweren Zwei-Quark-Kondensat, drei verschiedenen Propagatoren enthält: den Gluon-, den schweren und den leichten Quark-Propagator, was für die Berechnung die Verallgemeinerung der Gln. (3.93) auf drei voneinander verschiedene Massen erfordert [Rom06].

Für den Korrelator mit pseudo-skalarem Strom sind im nächsten Schritt die Dirac-Spuren mit  $\Gamma^X = i\gamma_5$  zu berechnen und mit den Ergebnissen der Projektion der Lorentz-Indizes für die Erwartungswerte im vorigen Absatz zu kontrahieren. Die in den umfangreichen resultierenden Ausdrücken enthaltenen Impulsintegrale lassen sich mithilfe der Gln. (3.93) auswerten, nachdem man im Zähler auftretende, gerade Potenzen des Impulses (über dessen Richtungen integriert wird) durch geschicktes Kürzen mit dem Nenner des Integranden beseitigt hat. Es wird vermieden, die umfangreichen Ergebnisse für alle vier Erwartungswerte explizit anzugeben. Stattdessen wird das Resultat

$$\begin{aligned} \Pi_h^{\text{P}(2)}(q) &= \frac{g^2}{3\pi^2} \frac{M}{q^2 - M^2} \left( 1 + \frac{M^2}{q^2 - M^2} \right) \langle : \bar{q}q : \rangle \\ &\quad \times \left\{ \log \frac{\mu^2}{q^2} \left( 1 + 2\frac{M^2}{q^2} \right) - \frac{M^2}{q^2} \left( 2 + \frac{M^2}{q^2} \right) \log \left( -\frac{M^2}{q^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 - \frac{M^2}{q^2} \right) \log \left( 1 - \frac{M^2}{q^2} \right) + 3\frac{M^2}{q^2} + 2 \right\} \end{aligned} \quad (3.100)$$

für den ersten Erwartungswert aufgeführt, d.h. es wird in Gl. (3.99)  $n = 0$  und  $\Gamma_a = \mathbb{1}$  gesetzt. Das Ergebnis ist im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema und mit der Renormierungsskala  $\mu$  notiert. Wertet man Gl. (3.100) für große raumartige Impulse aus, d.h. für  $-q^2 \gg M^2$ , erhält man:

$$\Pi_h^{\text{P}(2)}(q) = \frac{g^2}{3\pi^2} \frac{M}{q^2 - M^2} \left( \log \frac{\mu^2}{q^2} + 2 \right) \langle : \bar{q}q : \rangle, \quad (3.101)$$

welches einen größeren Beitrag als  $C_{21}^{\text{P},h1} \langle : \bar{q}\gamma_\nu t^A q \bar{Q}\gamma^\nu t^A Q : \rangle$  aus Gl. (3.42) für jene Annahme liefert, vorausgesetzt die numerischen Werte für die Kondensate sind in der gleichen Größenordnung. Die Summenregeln werden aber erst nach Anwendung der SQME auf die Vier-Quark-Kondensate und einer Borel-Transformation ausgewertet. Obwohl diese den Grenzübergang  $Q^2 = -q^2 \rightarrow \infty$  benutzt, werden die Beiträge für eine endliche Borel-Masse  $M_B$  evaluiert. Letztlich kann nur ein Borel-transformiertes Resultat entscheiden, welches numerische Verhältnis Vier-Quark-Kondensatbeiträge und solche mit dem chiralen Kondensat in Einschleifenordnung haben.

## 4 Zusammenfassung und Ausblick

Das in vielen Anwendungen so erfolgreiche Konzept der QCD-Summenregeln für Mesonen wurde mit seinen wichtigsten Komponenten dargelegt. Dabei wurden vakuum- und mediumspezifische Unterschiede bezüglich der Dispersionsrelation, OPE und Borel-Transformation herausgestellt. Insbesondere die Operatorproduktentwicklung (OPE) erfuhr eine detaillierte Darstellung. Hervorzuheben sind die Ausführungen zur Projektion von Lorentz-Indizes, welche die bisherigen ungünstigen Formulierungen ablösen und das Problem auf das Finden des Vektors aller möglichen Projektionsstrukturen reduzieren. Neben dem störungstheoretischen Quark-Propagator fand auch der oft vernachlässigte störungstheoretische Gluon-Propagator Beachtung, da dieser für Schleifen-Korrekturen zu gluonischen und gemischten Kondensaten von Bedeutung ist. Die reichhaltige OPE-Struktur der Summenregeln, welche technisch bis zu sechs Entwicklungen enthält, wurde diskutiert und dabei die Ordnung der Entwicklungen allein nach der Kopplung  $\alpha_s$  und der Massendimension der Kondensate hinterfragt. Zur Behandlung schwerer Quarks wurde der Kalkül der Schwer-Quark-Massen-Entwicklung präsentiert und für die Anwendung auf Vier-Quark-Kondensate mit Feldoperatoren schwerer und leichter Quarks abgestimmt.

Diese Arbeit erweitert die OPE (pseudo-skalarer)  $Qq$ -Mesonen um Vier-Quark-Kondensatbeiträge zur Massendimension 6. Die detailreiche Herleitung der Wilson-Koeffizienten von Vier-Quark-Kondensaten offenbart die duale Natur dieser Kondensate. Vier-Quark-Kondensate mit assoziierten Diagrammen auf Baumgraphen-Niveau treten sowohl in der führenden als auch in der ersten Ordnung der Störungstheorie auf. Die Berechnung der Wilson-Koeffizienten aus Diagrammen mit weichem und hartem Gluon unterscheidet sich dabei maßgeblich. Das exakte Resultat der Vier-Quark-Kondensatbeiträge zur OPE pseudo-skalarer  $Qq$ -Mesonen wurde hier erstmals präsentiert. Bisherige D-Meson-Summenregeln enthalten keine Vier-Quark-Kondensate aufgrund der komplizierten Berechnung ihrer Wilson-Koeffizienten und der unzureichenden Kenntnis ihrer numerischen Werte. Die Bestimmung dieser Werte wird dank des raschen Fortschritts auf dem Gebiet der QCD-Gitterrechnung in Kürze erwartet. Um die Vier-Quark-Kondensatbeiträge sofort zur Auswertung von Summenregeln heranziehen zu können, wurde jedes der fünf vakuum- und sieben mediumspezifischen Kondensate der Faktorisierung bzw. der Schwer-Quark-Massen-Entwicklung unterzogen. Drei verschiedene Ansätze liefern dabei Vier-Quark-Kondensatbeiträge reduziert auf Produkte von Kondensaten geringerer Massendimension, deren numerische Werte und Dichteabhängigkeiten bekannt sind. Diese Arbeit ermöglicht damit die konsistenten Einbeziehung von Vier-Quark-Kondensaten in die Summenregeln von  $Qq$ -Mesonen im nuklearen Medium.

Neben dem chiralen Kondensat können bestimmte Vier-Quark-Kondensate als Ordnungsparameter der spontanen chiralen Symmetriebrechung aufgefasst werden. Diese chiral-ungeraden Kondensate treten in der Differenz-OPE chiraler Partner auf. Die Resultate mit vakuum- und mediumspezifischen Vier-Quark-Kondensaten für die Partner  $P - S$  und  $V - A$  wurden dargelegt, da das exakte Wissen um die Mediumabhängigkeit dieser Kondensate Voraussetzung für die Untersuchung der chiralen Symmetrierestauration ist, welche auf der Änderung jener Ordnungsparameter beruht. Die diskutierten Fierz-Transformationen verknüpfen Vier-Quark-Kondensate mit verschiedenen angeordneten Quark-Feldoperatoren und

eröffnet damit die Möglichkeit einer Gegenprobe für die Ergebnisse der Diagramme mit hartem Gluon, wie sie im Fall  $V - A$  explizit durchgeführt ist.

Die in dieser Arbeit präsentierten Resultate der OPE pseudo-skalarer  $Qq$ -Mesonen drängen auf eine erneute Evaluierung der Summenregeln von D-Mesonen. Die Erweiterung der Methode zur Projektion der Lorentz-Indizes von Feldoperatoren auf sechs Indizes wird die Hinzunahme von mediumspezifischen Drei-Gluon-Kondensaten ermöglichen. Damit kann die gesamte OPE der Massendimension 6 in die Analyse der Summenregeln einbezogen werden. Zudem erlaubt die Projektion von sechs Lorentz-Indizes den direkten Vergleich der Ansätze zur Behandlung der Vier-Quark-Kondensate mithilfe der Schwer-Quark-Massen-Entwicklung in Massendimension 7.

Im nächsten Schritt kann die dabei verwendete Faktorisierung von einer Parametrisierung durch zusätzliche dichteabhängige Faktoren  $\kappa$  abgelöst werden [Tho08]. Exakte Vier-Quark-Kondensate, deren Faktorisierung verschwindet, sind nicht identisch Null, sondern faktorisieren aufgrund ihrer Dirac-Struktur nicht in chirale Kondensate. Parametrisiert man diese Kondensate über Faktoren  $\tilde{\kappa}$  lässt sich die Gesamtheit aller Vier-Quark-Kondensate für die Auswertung von Summenregeln nutzbar machen.

Neben der Erweiterung der OPE und damit verbundenen erneuten Auswertung der  $Qq$ -Meson-Summenregeln im umgebenden nuklearen Medium sind auch weitere strukturelle Untersuchungen relevant. So ist der Ursprung des unterschiedlichen Verhaltens von Vier-Quark-Kondensaten, in exakter und faktorisierter (bzw. parametrisierter) Form, unter chiralen Symmetrie-Transformationen ungeklärt.

# A Quantenchromodynamik im Überblick

Dieses Kapitel erhebt nicht den Anspruch eine Einführung in die QCD zu geben, sondern klärt die in dieser Arbeit verwendete Notation und stellte benutzte Definitionen und Relationen zusammen. Insbesondere werden keine Details zur Quantisierung und BRS-Transformation angegeben. Ein Blick auf die Lagrange-Dichte der klassischen Chromodynamik reicht zur Einführung der verwendeten Konventionen. Eine empfehlenswerte Einführung in die QCD ist in [Pas84] gegeben. Die eichinvariante klassische Lagrange-Dichte, welche Grundlage der QCD ist, lautet:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - M) \psi - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^A G^{A\mu\nu}, \quad (\text{A.1})$$

mit der folgenden Notation:

$$D_\mu^{\alpha\beta}(x) = \partial_\mu(\mathbb{1}_{N_c})^{\alpha\beta} - igA_\mu^{\alpha\beta}(x) \quad \text{kovariante Ableitung,} \quad (\text{A.2a})$$

$$A_\mu^{\alpha\beta}(x) = (t^A)^{\alpha\beta} A_\mu^A(x) \quad \text{Gluon-Feld,} \quad (\text{A.2b})$$

$$G_{\mu\nu}(x) = \frac{i}{g} [D_\mu(x), D_\nu(x)] = t^A G_{\mu\nu}^A(x) \quad \text{Gluon-Feldstärketensor,} \quad (\text{A.2c})$$

$$\psi_i^\alpha(x) \quad \text{Quark-Felder,} \quad (\text{A.2d})$$

$$(\gamma^\mu)_{ij} \quad \text{Dirac-Matrizen,} \quad (\text{A.2e})$$

$$t^A = \frac{1}{2} \lambda^A \quad \text{Generatoren der Eichgruppe } SU(N_c), \quad (\text{A.2f})$$

$$\lambda^A \quad \text{Gell-Mann-Matrizen für } N_c = 3. \quad (\text{A.2g})$$

Dabei werden Lorentz-Indizes durch die griechischen Buchstaben  $\mu, \nu, \lambda, \dots$ , Dirac-Indizes durch lateinische Buchstaben  $i, j, k, \dots$ , Farb-Indizes durch die griechischen Buchstaben  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  und Generator-Indizes durch lateinische Großbuchstaben  $A, B, C, \dots$  bezeichnet.  $N_c$  gibt die Anzahl der Farben an, für die QCD gilt:  $N_c = 3$ . Über doppelt auftretende Generator-Indizes ist die Summation von 1 bis  $N_c^2 - 1$  zu verstehen und kontrahierte Lorentz-Indizes werden in Einstein'scher Summenkonvention notiert. Für die Generatoren der Symmetriegruppe  $SU(N_c)$  gelten die folgenden Relationen:

$$[t^A, t^B] = if^{ABC} t^C, \quad (\text{A.3})$$

$$\text{Tr}_C [t^A] = 0, \quad \text{Tr}_C [t^A t^B] = \frac{1}{2} \delta^{AB}, \quad \text{Tr}_C [t^A t^B t^C] = \frac{1}{4} (d^{ABC} + if^{ABC}), \quad (\text{A.4})$$

wobei  $f^{ABC}$  die total anti-symmetrische Strukturkonstante der  $SU(N_c)$  ist und die symmetrische Größe  $d^{ABC}$  durch den Anti-Kommutator

$$\{t^A, t^B\} = \frac{1}{4} \delta^{AB} \mathbb{1}_{N_c} + d^{ABC} t^C \quad (\text{A.5})$$

definiert ist. Damit erhält man aus Gl. (A.2c) für den Gluon-Feldstärketensor:

$$G_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + gf^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C \quad \text{und} \quad G_{\mu\nu}^A = -G_{\nu\mu}^A. \quad (\text{A.6})$$

Zudem genügt der Gluon-Feldstärketensor der Bianchi-Identität:

$$D_\lambda G_{\mu\nu} + D_\mu G_{\nu\lambda} + D_\nu G_{\lambda\mu} = 0. \quad (\text{A.7})$$

Wie der Gl. (A.6) zu entnehmen ist, enthält der letzte Term der Lagrange-Dichte (A.1) die Gluon-Selbstwechselwirkung, d.h. Drei- und Vier-Gluon-Vertex.

Die Dirac-Matrizen genügen den Relationen:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}_4, \quad (\text{A.8})$$

$$\text{Tr}_D [\gamma^\mu] = 0, \quad \text{Tr}_D [\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}, \quad \text{Tr}_D [\text{ungerade Anzahl von } \gamma^\mu] = 0, \quad (\text{A.9})$$

mit der Minkowski-Metrik  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Spuren mit einer höheren geraden Anzahl von Dirac-Matrizen lassen sich mit Gl. (A.8) und unter Ausnutzung der Zyklichkeit der Spur berechnen. Häufig wird die Notation  $\not{a} = \gamma^\mu a_\mu$  für Vierervektoren  $a_\mu$  eingeführt, z.B. lässt sich die eichinvariante Lagrange-Dichte mit der kovarianten Ableitung  $\not{D}$  schreiben.

Das Quark-Feld  $\psi = q_f = (u, d, c, s, t, b)^T$  ist ein Vektor im Raum der Quark-Sorten, für welchen die Massenmatrix  $M$  diagonal ist. Entsprechend ihrer Masse, die der Referenz [Ber12] entnommen werden kann, lassen sich leichte und schwere Quarks unterscheiden. Up- und down-Quark sind nahezu masselos. Das nächst schwerere Quark ist das strange-Quark. Die Massen der schweren Quarks vom Typ charm, bottom und top sind um Größenordnungen höher.

Die Kopplungsstärke  $g$  der QCD, welche im Wechselwirkungsteil

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}(x) &= g \bar{\psi}(x) \gamma^\mu t^A \psi(x) A_\mu^A(x) \\ &\quad - \frac{1}{2} g f^{ABC} (\partial_\mu A_\nu^A(x) - \partial_\nu A_\mu^A(x)) A^{B\mu}(x) A^{C\nu}(x) \\ &\quad - \frac{1}{4} g^2 f^{ABC} f^{ADE} A_\mu^B(x) A_\nu^C(x) A^{D\mu}(x) A^{E\nu}(x) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

der Lagrange-Dichte (A.1) auftaucht, ist definiert durch

$$g = \sqrt{4\pi\alpha_s}, \quad (\text{A.11})$$

$$\alpha_s(q^2) = \frac{4\pi}{(33 - 2N_f) \log\left(\frac{-q^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}\right)}, \quad (\text{A.12})$$

wobei  $N_f$  die Anzahl der aktiven Quark-Sorten angibt und  $\Lambda_{\text{QCD}}^2$  die Renormalisierungsskala der QCD ist. Die laufende Kopplung (A.12) ist das Einschleifenergebnis. Aufgrund des Verhaltens der Kopplungskonstante für große Impulsüberträge wird die QCD auch als asymptotische frei bezeichnet.

Die Lagrange-Dichte (A.1) folgt aus der Forderung nach der Invarianz von  $\mathcal{L}$  unter folgender Transformation:

$$\psi^\alpha(x) \longrightarrow \psi'^\alpha(x) = U^{\alpha\beta}(x) \psi^\beta(x) \quad (\text{A.13})$$

mit der unitären ( $N_c \times N_c$ )-Matrix

$$U(x) = e^{-igt^A \theta^A(x)}. \quad (\text{A.14})$$

Damit erhält man folgende Transformationen im Farbraum:

$$\bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)U^\dagger(x), \quad (\text{A.15a})$$

$$D_\mu \psi(x) \longrightarrow D'_\mu \psi'(x) = U(x)D_\mu \psi(x), \quad (\text{A.15b})$$

$$D_\mu(x) \longrightarrow D'_\mu(x) = U(x)D_\mu(x)U^\dagger(x), \quad (\text{A.15c})$$

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) + \frac{1}{ig} [\partial_\mu U(x)] U^\dagger(x), \quad (\text{A.15d})$$

$$G_{\mu\nu}(x) \longrightarrow G'_{\mu\nu}(x) = UG_{\mu\nu}(x)U^\dagger(x). \quad (\text{A.15e})$$

Aus der Lagrange-Dichte (A.1) erhält man die Bewegungsgleichungen für die Quark- und Gluon-Felder:

$$\gamma^\mu D_\mu q = -imq, \quad (\text{A.16})$$

$$\bar{q} \overleftarrow{D}_\mu = im\bar{q}, \quad (\text{A.17})$$

$$D^\mu G_{\mu\nu} = -gt^A \sum_f \bar{q}_f \gamma_\nu t^A q_f, \quad (\text{A.18})$$

wobei für weiche Gluonen, die Summe über die Quark-Sorten  $f$  auf leichte Quarks beschränkt ist, d.h.  $f = u, d, s$ . Mithilfe der Bewegungsgleichungen zeigt man:

$$D^2 \equiv g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu = \gamma^\mu D_\mu \gamma^\nu D_\nu + \frac{1}{2} g \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu}, \quad (\text{A.19})$$

$$D^2 q = \left( \frac{1}{2} g \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} - m_q^2 \right) q, \quad (\text{A.20})$$

wobei die Dirac-Matrizen  $\sigma_{\mu\nu}$  durch

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] = i(\gamma_\mu \gamma_\nu - g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.21})$$

definiert sind.

Die Green-Funktionen der in (A.1) enthaltenen Differentialoperatoren liefern als 2-Punkt-Funktionen im Impulsraum den freien Quark-Propagator

$$S^{(0)}(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\eta} \quad (\text{A.22})$$

und den freien Gluon-Propagator

$$D_{\mu\nu}^{(0)}(k) = \frac{1}{k^2 + i\eta} \left[ -g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\eta} \right] \quad (\text{A.23})$$

mit dem Eichfixierungsparameter  $\xi$  und  $\eta \downarrow 0$ . Die Eichfixierung erfolgt durch die Hinzunahme des Terms  $-\frac{1}{2\xi}(D^\mu A_\mu^A)^2$  zur Lagrange-Dichte (A.1), womit die kanonischen Vertauschungsrelationen von Feldern und ihren kanonisch konjugierten Impulsen erfüllt sind. Ohne den eichfixierenden Term verschwindet die nullte Komponente des zum Gluon-Feld gehörigen kanonisch konjugierten Impulses und ein wichtiger Schritt der kanonisch Quantisierung der Lagrange-Dichte der Chromodynamik kann nicht vollzogen werden. In dieser Arbeit wird die Feynman-Eichung mit  $\xi = 1$  verwendet.



## B Fierz-Transformationen

Im Folgenden werden allgemeine Fierz-Transformationen [Pes95, Nie04] und solche mit Symmetriebeschränkungen [Zha10, Bra12] betrachtet. Der präsentierte Zusammenhang zwischen Fierz-transformierten Vier-Quark-Kondensaten und Kondensaten in üblicher Notation ermöglicht einen Vergleich der Ergebnisse mit  $\overline{K}_i^h$  und  $K_i^h$ . Trotz der hier auf andere Weise notierten Summen über Basiselemente der Clifford-Algebra bzw. Generatoren der Symmetriegruppe  $SU(N_c)$  wird die enge Verbindung zwischen der Fierz-Transformation und der Projektion von Dirac- bzw. Farb-Indizes der Vier-Quark-Kondensate sichtbar (vgl. Unterabschnitt 2.2.2).

Die betrachteten Quark-Felder tragen Dirac- und Farb-Indizes, weshalb die Fierz-Transformation sowohl im Dirac- als auch im Farb-Raum vorgenommen werden muss, um die Vier-Quark-Kondensate mit den Strukturen  $\langle: \bar{q}_1 \Gamma_a q_2 \bar{q}_3 \Gamma_b q_4 : \rangle$  und  $\langle: \bar{q}_1 t^A \Gamma_a q_2 \bar{q}_3 t^A \Gamma_b q_4 : \rangle$  in Kondensate mit vertauschten Quark-Feldern  $q_2$  und  $q_4$  zu überführen:  $\langle: \bar{q}_1 \Gamma_c q_4 \bar{q}_3 \Gamma_d q_2 : \rangle$ ,  $\langle: \bar{q}_1 t^A \Gamma_c q_4 \bar{q}_3 t^A \Gamma_d q_2 : \rangle$ .

Im Dirac-Raum ist also die Relation zwischen  $(\Gamma_a)_{ij}(\Gamma_b)_{kl}$  und  $(\Gamma_c)_{il}(\Gamma_d)_{kj}$  gesucht. Im Allgemeinen ist diese gegeben durch die lineare Kombination

$$(\Gamma_a)_{ij}(\Gamma_b)_{kl} = \sum_{c,d} C_{ab}{}^{cd} (\Gamma_c)_{il}(\Gamma_d)_{kj}, \quad (\text{B.1})$$

wobei  $\Gamma_a \in \{\mathbb{1}, \gamma_\mu, \sigma_{\mu<\nu}, i\gamma_5 \gamma_\mu, \gamma_5\}$  der Basis der Clifford-Algebra  $\mathcal{C}$  mit dem Skalarprodukt  $\text{Tr}_D [\Gamma_a \Gamma_b] = 4\delta_{ab} \equiv \eta_{ab}$ , welches eine Metrik  $\eta_{ab}$  mit  $\Gamma_a = \sum_b \eta_{ab} \Gamma^b$  induziert; entsprechend gilt  $4\Gamma^a \in \{\mathbb{1}, \gamma^\mu, \sigma^{\mu<\nu}, i\gamma_5 \gamma^\mu, \gamma_5\}$ . Multipliziert man Gl. (B.1) mit  $(\Gamma_e)_{li}(\Gamma_f)_{jk}$  erhält man

$$C_{ab}{}^{cd} = \frac{1}{16} \text{Tr}_D [\Gamma_a \Gamma_d \Gamma_b \Gamma_c]. \quad (\text{B.2})$$

Die allgemeine Fierz-Transformation (B.1) mit den Koeffizienten  $C_{abcd} = \text{Tr} [\Gamma_a \Gamma_d \Gamma_b \Gamma_c]$  gilt nicht nur für die Clifford-Algebra des Dirac-Raumes, sondern für alle Gruppen, deren Basiselemente sich als Matrizen  $\Gamma_a$  darstellen lassen und deren Skalarprodukt eine invertierbare Metrik  $\eta_{ab} \equiv \text{Tr} [\Gamma_a \Gamma_b]$  induziert.

Die Fierz-Transformation im Farb-Raum ist aufgrund der Forderung nach Invarianz der Vier-Quark-Kondensate unter den Transformationen der Symmetriegruppe  $SU(N_c = 3)$  spezieller als Gl. (B.1), da nicht alle Kombinationen von Matrizen, welche die Basis im Farb-Raum bilden, diese Forderung erfüllen. Invarianten zu gewählter irreduzibler Darstellung  $\mathcal{A}$  einer beliebigen Symmetriegruppe sind Summen der Art  $\sum_a (\Gamma_a^{\mathcal{A}})_{mn} (\Gamma_a^{\mathcal{A}})_{rs}$  ( $a = 1, \dots, \dim \mathcal{A}$ ). Damit stellen die Fierz-Transformationen bei gegebener Symmetrie kein Umordnen der Komponenten von Basis-Matrizen dar, sondern von Invarianten der Symmetriegruppe:

$$\sum_a (\Gamma_a^{\mathcal{A}})_{ij} (\Gamma_a^{\mathcal{A}})_{kl} = \sum_{\mathcal{B}} C_{\mathcal{A}\mathcal{B}} \sum_b (\Gamma_b^{\mathcal{B}})_{il} (\Gamma_b^{\mathcal{B}})_{kj}, \quad (\text{B.3})$$

wobei die Fierz-Koeffizienten  $C_{\mathcal{AB}}$  lediglich von den entsprechenden Darstellungen abhängen. Summiert man Gl. (B.1) mit  $a = b$  über  $a$  und beachtet, dass die Koeffizienten (B.2) nur für  $c = d$  nicht verschwinden, erhält man

$$C_{\mathcal{AB}} = \sum_a C_a^{ab} = \sum_a \text{Tr} \left[ \Gamma_a^A \Gamma_b^B \Gamma^{Aa} \Gamma^{Bb} \right]. \quad (\text{B.4})$$

Im Farb-Raum der  $SU(N_c)$  gibt es die Eins-Darstellung  $\mathcal{I}$  ( $\dim \mathcal{I} = 1$ ) und die fundamentale Darstellung  $\mathcal{T}$  ( $\dim \mathcal{T} = N_c^2 - 1$ ) mit den Generatoren  $t^a$ , die durch das Skalarprodukt  $\text{Tr}_{\mathcal{C}} [t^a t^b] = \delta^{ab}/2$  normiert sind. Im Zuge der einheitlichen Darstellung der Fierz-Transformationen wird hier der Generator-Index  $a$  statt wie bisher  $A$  verwendet und Summen über die Generator-Indizes werden explizit notiert. Die endgültigen Transformationsformeln werden dann wieder in der Standard-Notation mit  $A$  und impliziter Summation angegeben. Wählt man  $\Gamma_a^{\mathcal{I}} = \mathbb{1}$  und  $\Gamma_a^{\mathcal{T}} = t^a$ , gilt wegen der Definition der Metriken

$$\eta_{ab}^{\mathcal{I}} \equiv \text{Tr} [\Gamma_a^{\mathcal{I}} \Gamma_b^{\mathcal{I}}] = \text{Tr}_{\mathcal{C}} [\mathbb{1}] = N_c, \quad (\text{B.5a})$$

$$\eta_{ab}^{\mathcal{T}} \equiv \text{Tr} [\Gamma_a^{\mathcal{T}} \Gamma_b^{\mathcal{T}}] = \text{Tr}_{\mathcal{C}} [t^a t^b] = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (\text{B.5b})$$

für  $\Gamma^{\mathcal{I}a} = \mathbb{1}/N_c$  und  $\Gamma^{\mathcal{T}a} = 2t^a$ . Damit ergeben sich die Fierz-Koeffizienten

$$C_{\mathcal{II}} = \frac{1}{N_c}, \quad C_{\mathcal{IT}} = \frac{1}{N_c}, \quad C_{\mathcal{TI}} = \frac{N_c^2 - 1}{N_c}, \quad C_{\mathcal{TT}} = -\frac{1}{N_c}. \quad (\text{B.6})$$

Benutzt man Gl. (B.3) mit den Koeffizienten (B.6) erhält man im Fall der Symmetriegruppe  $SU(N_c)$  die beiden Fierz-Transformationen

$$(\mathbb{1})_{ij} (\mathbb{1})_{kl} = \frac{1}{N_c} (\mathbb{1})_{il} (\mathbb{1})_{kj} + 2 \sum_a (t^a)_{il} (t^a)_{kj}, \quad (\text{B.7a})$$

$$\sum_a (t^a)_{ij} (t^a)_{kl} = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c^2} (\mathbb{1})_{il} (\mathbb{1})_{kj} - \frac{1}{N_c} \sum_a (t^a)_{il} (t^a)_{kj}. \quad (\text{B.7b})$$

Setzt man  $N_c = 3$  und schreibt in Standard-Notation den Generator-Index  $A$  mit impliziter Summation und die Farb-Indizes mit kleinen griechischen Buchstaben  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $\delta$ , so haben die Fierz-Transformationen folgende Form:

$$(\mathbb{1})_{\alpha\beta} (\mathbb{1})_{\gamma\delta} = \frac{1}{3} (\mathbb{1})_{\alpha\delta} (\mathbb{1})_{\gamma\beta} + 2 (t^A)_{\alpha\delta} (t^A)_{\gamma\beta}, \quad (\text{B.8a})$$

$$(t^A)_{\alpha\beta} (t^A)_{\gamma\delta} = \frac{4}{9} (\mathbb{1})_{\alpha\delta} (\mathbb{1})_{\gamma\beta} - \frac{1}{3} (t^A)_{\alpha\delta} (t^A)_{\gamma\beta}. \quad (\text{B.8b})$$

Soll überprüft werden, ob die Resultate für den Strom-Strom-Korrelator ausgedrückt durch Vier-Quark-Kondensate in üblicher Schreibweise und durch Fierz-transformierte Kondensate identisch sind, müssen die Kondensate der kompletten Beiträge für die Diagramme in Abb. 3.5a und 3.5b transformiert werden. Ein kondensatweiser Vergleich der Wilson-Koeffizienten zu den einzelnen Kondensaten ist wegen Gl. (B.1) im Allgemeinen nicht möglich. Der geschickte Gebrauch der Fierz-Transformationen im Farb-Raum (B.8) verkürzt die Rechnung erheblich, wie die exemplarischen Rechnung im Fall V – A in Unterabschnitt 3.4.2 zeigt.

## C Schwer-Quark-Massen-Entwicklung von Vier-Quark-Kondensaten

Für die Entwicklung von Vier-Quark-Kondensaten, welche Feldoperatoren zweier schwerer Quarks enthalten, in Potenzen der inversen schweren Quark-Masse  $M$  wird die zu Gl. (2.91) äquivalente Formel verwendet. Diese erhält man durch Anwendung der in [Gen84a] angegebenen Schritte zur Herleitung von (2.91):

$$\langle : \bar{q} \Gamma^X t^A q \bar{Q} \Gamma^{X'} t^A Q : \rangle = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \langle : \bar{q} \Gamma^X t^A q \text{Tr}_{\text{C,D}} \left[ \Gamma^{X'} t^A S_Q(p) \right] : \rangle \quad (\text{C.1})$$

mit dem störungstheoretischen Propagator  $S_Q(p)$  aus Gl. (2.59) und  $A = 0, 1, \dots, 8$ , d.h. die Farb-Struktur mit  $\mathbb{1}$  ist wie im Unterabschnitt 2.2.2 hier ebenfalls enthalten. Die Ordnung der Entwicklung in  $1/M$  und die Massendimension des assoziierten gluonischen Kondensates hängt von der zugrunde liegenden Ordnung  $S^{(n)}(q)$  des störungstheoretischen Propagators und der benutzten Ordnung der Entwicklung des gluonischen Hintergrundfeldes  $\tilde{A}_\mu^{(k)}$  aus Gl. (2.58) ab. Im folgenden sind die Ergebnisse der Entwicklung bzw. die allgemeinen Techniken zu deren Berechnung dargestellt. Es werden gluonische Kondensate der Massendimension 6 und 7 behandelt.

### C.1 Massendimension 6

Die Schwer-Quark-Massen-Entwicklung von Vier-Quark-Kondensaten der Massendimension 6 erhält man mit dem störungstheoretischen Quark-Propagator

$$\begin{aligned} S_Q(p) &= S_{(\tilde{A}^{(1)})}^{(1)}(p) \\ &= -\frac{g}{3} S^{(0)}(p) \gamma^\nu (D_\alpha G_{\nu\lambda}) S^{(0)}(p) \left\{ \gamma^\lambda S^{(0)}(p) \gamma^\alpha + \gamma^\alpha S^{(0)}(p) \gamma^\lambda \right\} S^{(0)}(p). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Das entsprechende Diagramm der 1-Punkt-Funktion ist in Abb. 3.10a dargestellt. Die Ergebnisse der Entwicklung für die Kondensate aus den Tabn. 3.1 und 3.5 mit über die Generatoren  $t^A$  abkontrahierten Farb-Indizes der Quark-Felder in Ordnung  $1/M^0$  sind:

$$\langle : \bar{q} t^A q \bar{Q} t^A Q : \rangle = 0, \quad (\text{C.3a})$$

$$\langle : \bar{q} \gamma_\nu t^A q \bar{Q} \gamma^\nu t^A Q : \rangle = -\frac{2}{3} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( \log \frac{\mu^2}{M^2} + \frac{1}{2} \right) K_{M,1}, \quad (\text{C.3b})$$

$$\langle : \bar{q} \gamma_5 t^A q \bar{Q} \gamma_5 t^A Q : \rangle = 0, \quad (\text{C.3c})$$

$$\langle : \bar{q} \gamma_\nu \gamma_5 t^A q \bar{Q} \gamma^\nu \gamma_5 t^A Q : \rangle = 0, \quad (\text{C.3d})$$

$$\langle : \bar{q} \sigma_{\nu\rho} t^A q \bar{Q} \sigma^{\nu\rho} t^A Q : \rangle = 0, \quad (\text{C.3e})$$

$$g_{\nu\omega} v_\sigma v_\rho \langle : \bar{q} \sigma^{\sigma\omega} t^A q \bar{Q} \sigma^{\nu\rho} t^A Q : \rangle / v^2 = 0, \quad (\text{C.3f})$$

$$\langle : \bar{q} \psi t^A q \bar{Q} \psi t^A Q : \rangle / v^2 = -\frac{2}{3} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( \log \frac{\mu^2}{M^2} + \frac{1}{3} \right) K_{M,2}, \quad (\text{C.3g})$$

$$\langle : \bar{q} \gamma_5 \psi t^A q \bar{Q} \gamma_5 \psi t^A Q : \rangle / v^2 = 0, \quad (\text{C.3h})$$

$$\langle : \bar{q} t^A q \bar{Q} \psi t^A Q : \rangle = -\frac{4}{3} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( \log \frac{\mu^2}{M^2} - \frac{1}{8} \right) K_{M,3}, \quad (\text{C.3i})$$

$$\langle : \bar{q} \psi t^A q \bar{Q} t^A Q : \rangle = 0, \quad (\text{C.3j})$$

$$v^\alpha \varepsilon_{\alpha\nu\sigma\omega} \langle : \bar{q} \gamma_5 \gamma^\nu q t^A \bar{Q} \sigma^{\sigma\omega} t^A Q : \rangle = 0, \quad (\text{C.3k})$$

$$v^\alpha \varepsilon_{\alpha\nu\sigma\omega} \langle : \bar{q} \sigma^{\sigma\omega} t^A q \bar{Q} \gamma_5 \gamma^\nu t^A Q : \rangle = 0. \quad (\text{C.3l})$$

Die Kondensate  $K_{(1)i}^h$  aus der Tab. 3.5 verschwinden. Die Null-Ergebnisse haben seitens der Rechnung verschiedene Ursachen. Zum einen tauchen Spuren über einzelne Farb-Matrizen auf ( $K_{(1)i}^h$ ), es verschwinden Impulsintegrale (Gln. (C.3a),(C.3e),(C.3f),(C.3j)) sowie Dirac-Spuren (Gl. (C.3c)) und es gibt Kanzellierungen aufgrund der Symmetrien der Lorentz-Indices (Gln. (C.3d),(C.3h)). Die Kondensate in den Gln. (C.3k) und (C.3l) führen auf Erwartungswerte, die nicht invariant unter der Zeitumkehr-Transformation sind. Das erste von Null verschiedene Resultat (C.3b) ist bereits in [Gen84b] zu finden, allerdings ohne den Summanden  $1/2$  in der Klammer. In [Gen84b, Gen84a] wird weder eine allgemeine Gleichung zur Berechnung der SQME von Vier-Quark-Kondensaten noch des gemischten Quark-Gluon-Kondensates angegeben. Da die durch die gleichen Schritte hergeleitete allgemeine Formel der SQME des gemischten Kondensates die in [Gen84b] aufgeführten Ergebnisse reproduziert, wird auch die Herleitung der Gl. (2.91) für korrekt erachtet und für die Berechnungen verwendet.

Für Fierz-transformierte Kondensate aus der Tab. 3.8 ist die SQME schwieriger, da nicht die schweren Quark-Felder ein Skalar bilden, sondern immer die gemischten Skalare  $\bar{q} \Gamma^X t^A Q$  und  $\bar{Q} \Gamma^{X'} t^A q$  auftreten. Um den störungstheoretischen Quark-Propagator (2.59) benutzen zu können, müssen Dirac- und Farb-Indices der schweren Quark-Feldoperatoren projiziert werden (s. Unterabschnitt 2.2.2). Dies bedeutet, dass für Fierz-transformierte Kondensate in jeder Ordnung der SQME mehrere Kondensate beitragen. Für ein allgemeines Fierz-transformiertes Kondensat gilt:

$$\begin{aligned} & \langle : \bar{q} \Gamma^X t^A Q \bar{Q} \Gamma^{X'} t^A q : \rangle \\ &= i \sum_a \frac{1}{4} \sum_{B=0}^8 2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \langle : \bar{q} \Gamma_a t^B q \text{Tr}_{C,D} [t^B t^A \Gamma^a \Gamma^X S_Q(p) \Gamma^{X'} t^A] : \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Benutzt man den störungstheoretischen Quark-Propagator (C.2), erhält man

$$\begin{aligned} & \langle : \bar{q} \Gamma^X t^A Q \bar{Q} \Gamma^{X'} t^A q : \rangle \\ &= -i \frac{g}{3} \sum_a \frac{1}{4} \sum_{B=0}^8 2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S^{\Gamma^a, \alpha\nu\lambda}(\Gamma^X, \Gamma^{X'}) \langle : \bar{q} \Gamma_a t^B q \text{Tr}_C [t^B t^A (D_\alpha G_{\nu\lambda}) t^A] : \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

mit der Dirac-Spur

$$\begin{aligned} & S^{\Gamma^a, \alpha\nu\lambda}(\Gamma^X, \Gamma^{X'}) \\ &= \text{Tr}_D \left[ \Gamma^a \Gamma^X S^{(0)}(p) \gamma^\nu S^{(0)}(p) \left\{ \gamma^\lambda S^{(0)}(p) \gamma^\alpha + \gamma^\alpha S^{(0)}(p) \gamma^\lambda \right\} S^{(0)}(p) \Gamma^{X'} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

welche umfangreiche Ausdrücke ergibt, die nicht geeignet sind, mit den Vakuumerwartungswerten kontrahiert zu werden. Stattdessen sollen die Lorentz-Strukturen der Erwartungswerte projiziert werden (s. Unterabschnitt 2.2.2). Diese Projektionen, kontrahiert mit den Spurresultaten, ergeben häufig kompakte Ausdrücke, wie im Fall von Gluon-Kondensaten. Mit der Schreibweise

$$\langle : \bar{q} \Gamma_a t^B q \text{Tr}_C [t^B t^A (D_\alpha G_{\nu\lambda}) t^A] : \rangle \hat{=} \langle \Gamma_a D_\alpha G_{\nu\lambda} \rangle \quad (\text{C.7})$$

reduziert man das Kondensat auf die relevanten Anteile für die Projektion der Lorentz-Indizes, welche, wie in Unterabschnitt 2.2.2 dargestellt, vorgenommen wird. Der Ansatz hat folgende Form:

$$\langle \Gamma_a D_\alpha G_{\nu\lambda} \rangle = \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}_{\Gamma_a, \alpha\nu\lambda}, \quad (\text{C.8})$$

wobei  $\mathbf{p}_{\Gamma_a, \alpha\nu\lambda}$  der Vektor aller Projektionsstrukturen ist, welcher für verschiedene Dirac-Strukturen  $\Gamma_a$  im Medium den folgenden  $\mathbf{p}_{\vec{\mu}_n}$  aus den Gln. (2.80) entnommen werden kann:

$$\Gamma_a = \mathbb{1}, \gamma_5 \quad \mathbf{p}_{\Gamma_a, \alpha\nu\lambda} = \mathbf{p}_{\alpha\nu\lambda}, \quad (\text{C.9a})$$

$$\Gamma_a = \gamma_\epsilon, \gamma_5 \gamma_\epsilon \quad \mathbf{p}_{\Gamma_a, \alpha\nu\lambda} = \mathbf{p}_{\epsilon\alpha\nu\lambda}, \quad (\text{C.9b})$$

$$\Gamma_a = \sigma_{\varphi\epsilon} \quad \mathbf{p}_{\Gamma_a, \alpha\nu\lambda} = \mathbf{p}_{\varphi\epsilon\alpha\nu\lambda}. \quad (\text{C.9c})$$

Mit  $\mathbf{c}^B = \langle \Gamma_a D_\alpha G_{\nu\lambda} \rangle \mathbf{p}^{\Gamma_a, \alpha\nu\lambda}$ , dem Vektor der mit allen Projektionsstrukturen kontrahierten Kondensate, und dem Inversen der Matrix  $\bar{P} = (\mathbf{p}_{\Gamma_a, \alpha\nu\lambda}) \circ (\mathbf{p}^{\Gamma_a, \alpha\nu\lambda})$  erhält man

$$\begin{aligned} \langle : \bar{q} \Gamma^X t^A Q \bar{Q} \Gamma^{X'} t^A q : \rangle \\ = -i \frac{g}{3} \sum_a \frac{1}{4} \sum_{B=0}^8 2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S^{\Gamma_a, \alpha\nu\lambda}(\Gamma^X, \Gamma^{X'}) (\bar{P}^{-1} \mathbf{c}^B) \cdot \mathbf{p}_{\Gamma_a, \alpha\nu\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Die Ergebnisse der Projektion, kontrahiert mit den Spurergebnissen, liefern nicht die erhofften kompakten Resultate. Daher verbleiben wir mit der allgemein gültigen SQME (C.10) für Fierz-transformierte Vier-Quark-Kondensate bis zur Massendimension 6 und geben exemplarisch die kürzeste Entwicklung

$$\begin{aligned} \langle : \bar{q} \gamma_5 t^A Q \bar{Q} \gamma_5 t^A q : \rangle = \frac{g^2}{72\pi^2} \sum_{B=0}^8 \left\{ \left( \frac{1}{4} \log \frac{\mu^2}{M^2} + \frac{1}{6} \right) \langle : \bar{q} \gamma_\nu t^B q \sum_{f=u,d} \bar{q}_f \gamma^\nu t^B q_f : \rangle \right. \\ - \frac{1}{12} \frac{1}{v^2} \langle : \bar{q} \not{t} t^B q \sum_{f=u,d} \bar{q}_f \not{t} t^B q_f : \rangle \\ \left. + \frac{1}{g} \frac{v^\nu}{v^2} \langle : \bar{q} \gamma^\lambda t^B q \text{Tr}_C [t^B t^A ((vD)G_{\nu\lambda}) t^A] : \rangle \right\} \quad (\text{C.11}) \end{aligned}$$

explizit an.

## C.2 Massendimension 7

Um Beiträge der SQME von Vier-Quark-Kondensaten mit zwei schweren Quarks in der Massendimension 7 zu erhalten, wie sie in Abb. 3.10b dargestellt sind, nutzt man den störungstheoretischen Quark-Propagator

$$\begin{aligned} S_Q(p) &= S_{(\tilde{A}^{(0)})}^{(2)}(p) \\ &= -\frac{g^2}{4} G_{\lambda\mu} G_{\sigma\nu} S^{(0)}(p) \gamma^\mu S^{(0)}(p) \left\{ \gamma^\lambda S^{(0)}(p) \gamma^\nu S^{(0)}(p) \gamma^\sigma \right. \\ &\quad \left. + \gamma^\nu S^{(0)}(p) \gamma^\lambda S^{(0)}(p) \gamma^\sigma + \gamma^\nu S^{(0)}(p) \gamma^\sigma S^{(0)}(p) \gamma^\lambda \right\} S^{(0)}(p) \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

für die Berechnung mit Gl. (C.1). Man erhält:

$$\langle \bar{q} \Gamma^X t^A q \bar{Q} \Gamma^{X'} t^A Q \rangle = \frac{g^2}{4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S^{\Gamma^{X'}, \mu\lambda\nu\sigma} \langle : \bar{q} \Gamma^X t^A q G_{\mu\lambda}^B G_{\nu\sigma}^C : \rangle \text{Tr}_C [t^A t^B t^C] \quad (\text{C.13})$$

mit der Dirac-Spur

$$\begin{aligned} S^{\Gamma^{X'}, \mu\lambda\nu\sigma} &= \text{Tr}_D \left[ \Gamma^{X'} S^{(0)}(p) \gamma^\mu S^{(0)}(p) \left\{ \gamma^\lambda S^{(0)}(p) \gamma^\nu S^{(0)}(p) \gamma^\sigma \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \gamma^\nu S^{(0)}(p) \gamma^\lambda S^{(0)}(p) \gamma^\sigma + \gamma^\nu S^{(0)}(p) \gamma^\sigma S^{(0)}(p) \gamma^\lambda \right\} S^{(0)}(p) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Die Auswertung der Farb-Spur erfolgt mit

$$\text{Tr}_C [t^A t^B t^C] = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{6}} \delta^{BC} & \text{für } A = 0, \\ \frac{1}{4} (d^{ABC} + i f^{ABC}) & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{C.15})$$

wobei nach der Definition (2.72) im Unterabschnitt 2.2.2 für  $t^0 = 1/\sqrt{6}$  gilt und die Matrizen  $t^A$  mit  $A = 1, \dots, 8$  die Generatoren der Symmetriegruppe  $SU(3)$  bezeichnen. Der zusätzliche Faktor im Fall  $A = 0$  ist so gewählt, dass die Normierungsbedingung  $\text{Tr}_C [t^A t^B] = \delta^{AB}/2$  erfüllt wird.

Die Evaluierung der Dirac-Spur  $S^{\Gamma^{X'}, \mu\lambda\nu\sigma}$  liefert im Gegensatz zur Farb-Spur weniger komprimierte Ausdrücke. Lediglich für  $\Gamma^{X'} = \gamma_5$  folgt mit

$$S^{\gamma_5, \mu\lambda\nu\sigma} = \frac{4iM}{(p^2 - M^2)^3} \varepsilon^{\nu\lambda\sigma\mu} \quad (\text{C.16})$$

ein kompaktes Ergebnis. Für alle übrigen Basiselemente der Clifford-Algebra erhält man überaus umfangreiche Resultate. Daher wird, wie für Fierz-transformierte Kondensate der Massendimension 6, die Projektion der Lorentz-Indizes des Erwartungswertes in Gl. (C.13) vorgenommen. Die Kontraktion der Resultate der Dirac-Spur mit den Projektionsstrukturen liefert häufig kompaktere Ausdrücke. Mit der Schreibweise

$$\langle : \bar{q} \Gamma^X t^A q G_{\mu\lambda}^B G_{\nu\sigma}^C : \rangle \hat{=} \langle \Gamma^X G_{\mu\lambda} G_{\nu\sigma} \rangle \quad (\text{C.17})$$

reduziert man das Kondensat auf die relevanten Anteile für die Projektion der Lorentz-Indizes. Der Projektionsansatz hat folgende Form:

$$\langle \Gamma^X G_{\mu\lambda} G_{\nu\sigma} \rangle = \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}_{\Gamma^X, \mu\lambda\nu\sigma}, \quad (\text{C.18})$$

wobei  $\mathbf{P}_{\Gamma^X, \mu\lambda\nu\sigma}$  der Vektor aller Projektionsstrukturen ist, welcher für verschiedene Dirac-Strukturen  $\Gamma^X$  im Medium den folgenden  $\mathbf{p}_{\vec{\mu}_n}$  aus den Gln. (2.80) entnommen werden kann:

$$\Gamma^X = \mathbb{1}, \gamma_5 \quad \mathbf{P}_{\Gamma^X, \mu\lambda\nu\sigma} = \mathbf{P}_{\mu\lambda\nu\sigma}, \quad (\text{C.19a})$$

$$\Gamma^X = \gamma_\rho, \gamma_5 \gamma_\rho \quad \mathbf{P}_{\Gamma^X, \mu\lambda\nu\sigma} = \mathbf{P}_{\rho\mu\lambda\nu\sigma}, \quad (\text{C.19b})$$

$$\Gamma^X = \sigma_{\tau\rho} \quad \mathbf{P}_{\Gamma^X, \mu\lambda\nu\sigma} = \mathbf{P}_{\tau\rho\mu\lambda\nu\sigma}. \quad (\text{C.19c})$$

Die Projektion mit der Größe  $\sigma_{\tau\rho}$  erfordert die Erweiterung des in Unterabschnitt 2.2.2 dargelegten Verfahrens zur Projektion der Lorentz-Indizes auf sechs Indizes. Eine konsistente Einbeziehung der SQME mit Kondensaten der Massendimension 7 geht daher über den Rahmen dieser Arbeit hinaus. Die Resultate der Projektionen von vier und fünf Indizes soll aber nicht unkommentiert bleiben. Die Projektion von fünf Lorentz-Indizes liefert ausschließlich mediumspezifische Ausdrücke und geht mit der Einführung von zehn Kondensaten der Massendimension 7 einher. Die Resultate der Projektion, kontrahiert mit den Ergebnissen der zugehörigen Dirac-Spuren, sind insbesondere für die SQME von mediumspezifischen Kondensaten sehr umfangreich und werden hier nicht dargestellt.

Die Projektion der Erwartungswerte mit vier Lorentz-Indizes, d.h.  $\Gamma^X = \mathbb{1}, \gamma_5$ , ergibt aufgrund der Anti-Symmetrie in den Indexpaaren  $(\mu\lambda)$  und  $(\nu\sigma)$  die komprimierten Resultate

$$\langle \Gamma^X G_{\mu\lambda} G_{\nu\sigma} \rangle = \langle \Gamma^X G_{\mu\lambda} G_{\nu\sigma} \rangle^{\text{vak}} + \langle \Gamma^X G_{\mu\lambda} G_{\nu\sigma} \rangle^{\text{med}}, \quad (\text{C.20})$$

$$\begin{aligned} \langle \Gamma^X G_{\mu\lambda} G_{\nu\sigma} \rangle^{\text{vak}} &= \frac{1}{24} \varepsilon^{\mu'\lambda'\nu'\sigma'} \langle \Gamma^X G_{\mu'\lambda'} G_{\nu'\sigma'} \rangle \varepsilon_{\sigma\mu\lambda\nu} \\ &\quad + \frac{1}{12} \langle \Gamma^X G^2 \rangle \{ g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\lambda\nu} \}, \end{aligned} \quad (\text{C.21a})$$

$$\begin{aligned} \langle \Gamma^X G_{\mu\lambda} G_{\nu\sigma} \rangle^{\text{med}} &= \frac{1}{12} \left( 4 \frac{\langle \Gamma^X (vG)^2 \rangle}{v^2} - \langle \Gamma^X G^2 \rangle \right) \{ g_{\mu\sigma} g_{\lambda\nu} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} \\ &\quad + 2 \left( \frac{v_\mu v_\nu}{v^2} g_{\lambda\sigma} - \frac{v_\mu v_\sigma}{v^2} g_{\lambda\nu} + \frac{v_\lambda v_\sigma}{v^2} g_{\mu\nu} - \frac{v_\lambda v_\nu}{v^2} g_{\mu\sigma} \right) \} \end{aligned} \quad (\text{C.21b})$$

mit

$$\langle \Gamma^X G^2 \rangle = \langle \Gamma^X G_{\mu'\lambda'} G^{\mu'\lambda'} \rangle, \quad (\text{C.22a})$$

$$\langle \Gamma^X (vG)^2 \rangle = v^{\mu'} v^{\nu'} \langle \Gamma^X G_{\mu'\lambda'} G_{\nu'}^{\lambda'} \rangle. \quad (\text{C.22b})$$

Die kontrahierten Produkte aus den Spurergebnissen und den Projektionen der Lorentz-Indizes liefern kompakte Ausdrücke mit konvergenten Impulsintegralen [Pas84]. Exemplarisch wird hier das Resultat der SQME in Massendimension 7 für das Kondensat  $K_{(1)1}^h$  aus Tab. 3.5 angegeben:

$$\langle : \bar{q}q \bar{Q}Q : \rangle = -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{g^2}{3} \frac{1}{M} \langle : \bar{q}q G_{\mu\nu}^A G^{A\mu\nu} : \rangle. \quad (\text{C.23})$$

Das allgemeine Resultat der SQME von Vier-Quark-Kondensaten mit Feldoperatoren zweier leichter und zweier schwerer Quarks in der Massendimension 7 erhält man mit der Definition

$\mathbf{c}^{ABC} = \langle \Gamma^X G_{\mu\lambda} G_{\nu\sigma} \rangle \mathbf{p}^{\Gamma^X, \mu\lambda\nu\sigma}$ , des Vektors der mit allen Projektionsstrukturen kontrahierten Kondensate, und dem Inversen der Matrix  $P = (\mathbf{p}_{\Gamma^X, \mu\lambda\nu\sigma}) \circ (\mathbf{p}^{\Gamma^X, \mu\lambda\nu\sigma})$ :

$$\begin{aligned} & \langle : \bar{q} \Gamma^X t^A Q \bar{Q} \Gamma^{X'} t^A q : \rangle \\ &= -i \frac{g^2}{4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S^{\Gamma^{X'}, \mu\lambda\nu\sigma} \text{Tr}_C [t^A t^B t^C] (P^{-1} \mathbf{c}^{ABC}) \cdot \mathbf{p}_{\Gamma^X, \mu\lambda\nu\sigma} . \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

## D QCD-Lichtkegel-Summenregeln

Die Methode der QCD-Lichtkegel-Summenregeln ist ein Hybrid aus den von Shifman, Vainshtein und Zakharov eingeführten Techniken und der Theorie von harten Prozessen. Dabei werden Ströme eines im Vergleich zu (2.1) leicht abgeänderten Strom-Strom-Korrelators in der Nähe des Lichtkegels entwickelt. Dieser Zugang ermöglicht die Bestimmung von Übergangsformfaktoren, wobei sowohl die harten Streubeiträge, als auch die weichen (Endpunkt-) Beiträge erfasst werden. Das hier präsentierte Einführungsbeispiel zur Herleitung einer QCD-Lichtkegel-Summenregel ist [Col01] entnommen.

Der Ausgangspunkt von Lichtkegel-Summenregeln ist das T-Produkt zweier Ströme, welches von rechts mit dem QCD-Grundzustand und von links mit einem leichten hadronischen Zustand auf der Massenschale multipliziert wird. Ein physikalisches Beispiel ist durch den Prozess  $e^+e^- \rightarrow \pi^0 e^+e^-$  gegeben. Der rein hadronische Anteil dieser Reaktion ist die über elektromagnetische Ströme stattfindende Fusion zweier virtueller Photonen zu einem neutralen Pion. Der Korrelator dieses Prozesses hat die Form:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(p, q) &= i \int d^4x e^{-iqx} \langle \pi^0(p) | T [j_\mu^{\text{em}}(x) j_\nu^{\text{em}}(0)] | \Omega \rangle \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} p^\lambda q^\sigma F(Q^2, (p-q)^2), \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

wobei  $p$  der Pion-Impuls ist und  $q$  sowie  $p-q$  die Photonen-Impulse sind, mit  $Q^2 = -q^2$ . Der elektromagnetische Quark-Strom ist definiert durch

$$j_\mu^{\text{em}}(x) = \sum_{q=u,d} e_q \bar{q} \gamma_\mu q \quad (\text{D.2})$$

mit den zur jeweiligen Quark-Sorte gehörenden elektrischen Ladung  $e_q$ . Wir betrachten den Korrelator im chiralen Grenzwert, d.h. es gilt  $p^2 = m_\pi^2 = 0$ .

Zur Herleitung der Lichtkegel-Summenregeln wird der Korrelator (D.1) für große Impulse  $Q^2$  und  $|(p-q)^2|$  ausgewertet und mittels der analogen Dispersionsrelation zu (2.13) dem hadronischen Spektrum verknüpft. Modelliert man die Spektraldichte auf die einfachste Weise mithilfe eines „Pol+Kontinuum“-Ansatzes, erhält man für den Kanal des  $j_\nu^{\text{em}}$  mit dem Impuls  $p-q$  eine Dispersionsrelation in der Variablen  $(p-q)^2$ :

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(p, q) &= 2 \sum_{\text{pol}} \frac{\langle \pi^0(p) | j_\mu^{\text{em}}(x) | \rho^0(p-q) \rangle \langle \rho^0(p-q) | j_\nu^{\text{em}}(0) | \Omega \rangle}{m_\rho^2 - (p-q)^2} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{s_0^h}^{\infty} ds \frac{\text{Im} F_{\mu\nu}(Q^2, s)}{s - (p-q)^2}, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

wobei  $Q^2$  fest ist. Die niedrigste hadronische Anregung mit den Quantenzahlen des Photons entspricht dem  $\rho^0$ -Meson. Damit alle  $\rho^0$ -Zustände erfasst sind, wird über die Polarisation

summiert. Die Resonanz des  $\omega^0$ -Mesons, welche sehr nah an der  $\rho^0$ -Resonanz liegt, wird durch den Faktor 2 einbezogen. Alle höheren Anregungen werden ab dem Schwellenwert  $s_0^h$  durch ein Kontinuum modelliert. Für die Matrixelemente gelten die Definitionen:

$$\langle \pi^0(p) | j_\mu^{\text{em}}(x) | \rho^0(p-q) \rangle = \frac{F^{\rho\pi}(Q^2)}{m_\rho} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \epsilon^{(\rho)\nu'} q^\lambda p^\sigma, \quad (\text{D.4})$$

$$\langle \rho^0(p-q) | j_\nu^{\text{em}}(0) | \Omega \rangle = \frac{f_\rho}{\sqrt{2}} m_\rho \epsilon_\nu^{(\rho)*}. \quad (\text{D.5})$$

Dabei ist  $F^{\rho\pi}$  der Formfaktor des Übergangs  $\gamma^*\rho \rightarrow \pi$ ,  $f_\rho$  die Zerfallskonstante des  $\rho$ -Mesons,  $m_\rho$  dessen Masse und  $\epsilon_\nu^{(\rho)}$  dessen Polarisation.

Der Strom-Strom-Korrelator (D.1) wird nicht, wie in der OPE, in lokale Operatoren entwickelt, sondern in der Nähe des Lichtkegels  $x^2 = 0$ , was einer Summation unendlich vieler lokaler Operatoren entspricht. Die folgende Argumentation zeigt, dass bei großen  $Q^2 = -q^2$  und  $(p-q)^2$  der dominante Teil des des Integranden in (D.1) von der Region des Lichtkegels  $x^2 = 0$  stammt. Trotz der Annahme  $p^2 = 0$  des chiralen Limes, ist  $p$  nicht notwendigerweise identisch Null. Für die invariante Variable

$$\nu = qp = \frac{1}{2} (q^2 - (p-q)^2) \quad (\text{D.6})$$

gilt

$$|\nu| \sim |(p-q)^2| \sim Q^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}^2. \quad (\text{D.7})$$

Es ist Konvention das Verhältnis

$$\xi = \frac{2\nu}{Q^2} \quad (\text{D.8})$$

so zu definieren, dass es für große Impulse (D.7) endliche Werte annimmt, d.h.  $\xi \sim 1$ . Betrachtet man ein Inertialsystem, in welchem der Pion-Impuls  $\vec{p}$  klein ist aber nicht verschwindet, d.h. es gilt  $|\vec{p}| \sim \mu$ ,  $|p_0| \sim \mu$  und  $\mu^2 \ll Q^2, \nu$ , dann ergibt sich für

$$q_0 \sim Q^2 \xi / 4\mu + \mathcal{O}(\mu) \quad (\text{D.9})$$

und das Argument der Exponentialfunktion in Gl. (D.1) lässt sich wie folgt approximieren:

$$qx = q_0 x_0 - q_3 x_3 \simeq \frac{Q^2 \xi}{4\mu} x_0 - \left( \sqrt{\frac{Q^4 \xi^2}{16\mu^2} + Q^2} \right) x_3 \simeq \frac{Q^2 \xi}{4\mu} (x_0 - x_3) - \frac{2\mu}{\xi} x_3. \quad (\text{D.10})$$

Um einen stark oszillierenden Integranden, welcher keinen signifikanten Beitrag zum Integral liefern würde, zu vermeiden, fordert man  $x_0 - x_3 \sim 4\mu/Q^2 \xi$  und gleichzeitig  $x_2 \sim \xi/2\mu$ . Daraus folgt:

$$x_0^2 \simeq \left( x_3 + \frac{4\mu}{Q^2 \xi} \right)^2 \simeq x_3^2 + \frac{4}{Q^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\mu}{Q^4}\right) \quad (\text{D.11})$$

und damit  $x^2 = x_0^2 - x_3^2 \sim 1/Q^2 \rightarrow 0$  für  $Q^2 \rightarrow \infty$ . Zugleich gilt  $x_0 \sim x_3 \sim \xi/2\mu \gg 1/\sqrt{Q^2}$ , d.h. es ist kein OPE in lokale Operatoren um  $x = 0$  anwendbar.

Im Folgenden wird die führende Ordnung der Lichtkegel-OPE des Strom-Strom-Korrelators (D.1) berechnet. Dafür beschränken wir uns bezüglich des elektromagnetischen Stroms auf eine Quark-Sorte. Die Auswertung des zeitgeordneten Produktes führt auf den Propagator leichter Quarks  $S^{(0)}(x, 0) = -i\langle 0|T [q(x)\bar{q}(0)] |0\rangle$  im Ortsraum:

$$S^{(0)}(x, 0) = -i\frac{\not{x}}{2\pi^2 x^4}. \quad (\text{D.12})$$

Mithilfe der Identität  $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda = -i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\gamma^\sigma\gamma_5 + g_{\mu\nu}\gamma_\lambda + g_{\nu\lambda}\gamma_\mu + g_{\lambda\mu}\gamma_\nu$  erhält man den relevanten Ausdruck für den Strom-Strom-Korrelator:

$$F_{\mu\nu}(p, q) = -ie_q^2\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \int d^4x e^{-iqx} \frac{x^\lambda}{2\pi^2 x^4} \langle \pi^0(p) | : \bar{q}(x)\gamma^\sigma\gamma_5 q(0) : | \Omega \rangle. \quad (\text{D.13})$$

Um zu zeigen, dass die Lichtkegel-OPE in jeder Ordnung einer Summation über unendlich viele lokale Operatoren entspricht, wird aus didaktischen Gründen im Folgenden die Entwicklung des Erwartungswertes in lokalen Operatoren vorgenommen. In Fock-Schwinger-Eichung gilt für das Operatorprodukt

$$\bar{q}(x)\gamma_\sigma\gamma_5 q(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{\bar{\alpha}_n} \left( \bar{q}(0) \overleftarrow{D}_{\bar{\alpha}_n} \right) \gamma_\sigma\gamma_5 q(0), \quad (\text{D.14})$$

wobei sich das Matrixelement jedes Summanden wie folgt zerlegen lässt:

$$\langle \pi^0(p) | : \bar{q} \overleftarrow{D}_{\alpha_1} \overleftarrow{D}_{\alpha_2} \dots \overleftarrow{D}_{\alpha_n} \gamma_\sigma\gamma_5 q : | \Omega \rangle = (-i)^n p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \dots p_{\alpha_n} p_\sigma M_n + (-i)^n g_{\alpha_1\alpha_2} p_{\alpha_3} \dots p_{\alpha_n} p_\sigma M'_n + \dots \quad (\text{D.15})$$

Der erste Term in Gl. (D.15) ist total symmetrisch und im chiralen Grenzwert, d.h.  $p^2 = 0$ , spurlos. Er enthält einzig Vierervektoren. Die nächsten Terme enthalten eine oder mehrere Minkowski-Metriken, wobei einer explizit angegeben ist. Setzt man die Entwicklung (D.14) in Gl. (D.13) ein und benutzt die Definitionen (D.15) und (D.8), erhält man:

$$F(Q^2, (p-q)^2)/e_q^2 = \frac{1}{Q^2} \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n M_n + \frac{4}{Q^4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\xi^{n-2}}{n(n-1)} M'_n + \dots \quad (\text{D.16})$$

Da  $\xi \sim 1$  gilt, können die Summen nicht abgebrochen werden. Damit ist gezeigt, dass eine Entwicklung in eine endliche Anzahl lokaler Operatoren nicht möglich ist. Stattdessen muss über unendlich viele Matrixelemente  $M_n, M'_n, \dots$  lokaler Operatoren summiert werden. Es existiert eine Hierarchie der Terme in Gl. (D.16). Die Koeffizienten der Summen sind in höheren Ordnungen durch entsprechende Potenzen von  $1/Q^2$  unterdrückt. Der Unterschied der Matrixelemente im ersten und zweiten Term der rechten Seite von Gl. (D.16) ist deren Twist, wobei Twist als die Differenz zwischen der Massendimension und dem Spin eines spurlosen und total symmetrischen, lokalen Operators definiert ist. Die Matrixelemente  $M_n$  haben Twist 2. Dies wird leicht ersichtlich, wenn man den Operator ohne kovariante Ableitung betrachtet: Massendimension 3, Lorentz-Spin 1. Kovariante Ableitungen haben Massendimension und Spin 1, ändern also den Twist der Matrixelemente nicht. Multipliziert man beide Seiten der Gl. (D.16) mit  $g_{\alpha_1\alpha_2}$  wird klar, dass die Matrixelemente  $M'_n$  Operatoren mit Twist 4 enthalten. Der beitragende Operator mit der niedrigsten Massendimension ist  $(\bar{q} \overleftarrow{D}^2) \gamma_\sigma \gamma_5 q$ . Eine Entwicklung von Operatorprodukten in der Nähe des Lichtkegels wird demzufolge in Komponenten mit steigendem Twist vorgenommen.

In führender Ordnung dieser Entwicklung um  $x^2 = 0$  wird das Matrixelement in Gl. (D.13) parametrisiert durch

$$\langle \pi^0(p) | : \bar{q}(x) \gamma_\sigma \gamma_5 q(0) : | \Omega \rangle_{x^2=0} = -i p_\sigma \frac{f_\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 du e^{iupx} \varphi_\pi(u, \mu), \quad (\text{D.17})$$

wobei  $\varphi_\pi(u, \mu)$  die Lichtkegel-Verteilungsamplitude des Pions für den Twist 2 ist, normiert durch  $\int_0^1 du \varphi_\pi(u, \mu) = 1$ .<sup>1</sup> Die Größe  $\mu$  bezeichnet ab hier die Renormierungsskala. Entwickelt man die linke Seite von Gl. (D.17) wie in Gl. (D.14) mit (D.15) und benutzt man die Reihendarstellung der Exponentialfunktion auf der rechten Seite von (D.17), identifiziert man:

$$M_n = -i \frac{f_\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 du u^n \varphi_\pi(u, \mu). \quad (\text{D.18})$$

Die Funktion  $\varphi_\pi(u)$  multipliziert mit  $f_\pi$  ist ein universales nicht-perturbatives Objekt, welches die langreichweitigen Effekte des Pions parametrisiert. Zusammen mit den Verteilungsfunktionen höheren Twists ist  $\varphi_\pi(u)$  das Äquivalent zu den Kondensaten der SVZ-Summenregeln.

Einsetzen von Gl. (D.17) in (D.13) liefert:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(p, q) &= (i)^2 e_q^2 \frac{f_\pi}{\sqrt{2}} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} p^\sigma \int_0^1 du \varphi_\pi(u, \mu) \int d^4x e^{i(up-q)x} \frac{x^\lambda}{2\pi^2 x^4} \\ &= -e_q^2 \frac{f_\pi}{\sqrt{2}} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} p^\sigma \int_0^1 du \varphi_\pi(u, \mu) \frac{(up^\lambda - q^\lambda)}{(up - q)^2}, \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

wobei der Anteil  $up^\lambda$  im Zähler aufgrund der (Anti-)Symmetrie der Lorentz-Indizes im Produkt mit  $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} p^\sigma$  verschwindet. Mit  $p^2 = 0$  und  $\bar{u} = 1 - u$  erhält man:

$$F_{\mu\nu}(p, q) = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} p^\lambda q^\sigma F_{\text{Tw2}}(Q^2, (p - q)^2) \quad (\text{D.20})$$

mit

$$F_{\text{Tw2}}(Q^2, (p - q)^2) = \frac{f_\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 du \frac{\varphi_\pi(u, \mu)}{\bar{u}Q^2 - u(p - q)^2}, \quad (\text{D.21})$$

wobei  $1/(\bar{u}Q^2 - u(p - q)^2)$  als Streuamplitude bezeichnet wird.

Der erste Term des hadronischen Ausdrucks (D.3) liefert mit den Definitionen (D.4) und (D.5):

$$2 \sum_{\text{pol}} \frac{\langle \pi^0(p) | j_\mu^{\text{em}}(x) | \rho^0(p - q) \rangle \langle \rho^0(p - q) | j_\nu^{\text{em}}(0) | \Omega \rangle}{m_\rho^2 - (p - q)^2} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} p^\lambda q^\sigma \frac{\sqrt{2} F^{\rho\pi}(Q^2) f_\rho}{m_\rho^2 - (p - q)^2} \quad (\text{D.22})$$

---

<sup>1</sup>Um die Eichinvarianz zu erhalten, enthält die komplette Definition den Weg-geordneten Faktor  $\text{P exp} \left[ ig \int_0^1 d\alpha x^\mu A_\mu^A(\alpha x) t^A \right]$ , welcher in Fock-Schwinger-Eichung (2.30) den Wert Eins annimmt.

Mit der Quark-Hadron-Dualität

$$\text{Im}F(Q^2, s) = \text{Im}F_{\text{Tw}2}(Q^2, s) = \pi \frac{f_\pi(e_u^2 + e_d^2)}{\sqrt{2}} \int_0^1 du \varphi_\pi(u) \delta(\bar{u}Q^2 - us) \quad (\text{D.23})$$

im Integranden des zweiten Terms von (D.3) erhält man:

$$\frac{1}{\pi} \int_{s_0^h}^{\infty} ds \frac{\text{Im}F_{\mu\nu}(Q^2, s)}{s - (p - q)^2} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} p^\lambda q^\sigma \frac{f_\pi(e_u^2 + e_d^2)}{\sqrt{2}} \int_0^{u_0^\rho} du \frac{\varphi_\pi(u)}{\bar{u}Q^2 - u(p - q)^2}, \quad (\text{D.24})$$

wobei  $u_0^\rho = Q^2/(s_0^\rho + Q^2)$  als obere Integrationsgrenze aus der Dirac'schen  $\delta$ -Distribution in Gl. (D.23) stammt. Damit können die explizit kovarianten Größen allein betrachtet werden, d.h. auf die Lorentz-Struktur  $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} p^\lambda q^\sigma$  kann verzichtet werden.

Subtrahiert man den Ausdruck des hadronischen Kontinuums (D.24) von der Lichtkegel-Entwicklung, erhält man die Summenregel:

$$\frac{\sqrt{2}F^{\rho\pi}(Q^2)f_\rho}{m_\rho^2 - (p - q)^2} = \frac{f_\pi(e_u^2 + e_d^2)}{\sqrt{2}} \int_{u_0^\rho}^1 du \frac{\varphi_\pi(u)}{\bar{u}Q^2 - u(p - q)^2}. \quad (\text{D.25})$$

Eine Borel-Transformation bezüglich des Impulses  $(p - q)^2$  mithilfe der Transformationsformel (2.119) führt auf den Übergangsformfaktor:

$$F^{\rho\pi}(Q^2) = \frac{f_\pi(e_u^2 + e_d^2)}{2f_\rho} \int_{u_0^\rho}^1 du \frac{\varphi_\pi(u)}{u} \exp\left[-\frac{\bar{u}Q^2}{uM_B^2} + \frac{m_\rho^2}{M_B^2}\right]. \quad (\text{D.26})$$

Ersetzt man den elektromagnetischen Strom  $j_\mu^{\text{em}}$  im Strom-Strom-Korrelator (D.1) durch Ströme mit anderen Quantenzahlen und Quark-Sorten, ist man in der Lage mit der hier präsentierten Methode auch Formfaktoren von Übergängen anderer Hadronen zu bestimmen, an welchen das Pion beteiligt ist. Diese Ersetzung liefert eine andere harte Streuamplitude, wohingegen die Verteilungsamplituden der Lichtkegel-Entwicklung die gleichen sind.

Die Lichtkegel-Verteilungsamplitude  $\varphi_\pi(u)$  wurden zuerst bei Untersuchungen zu Prozessen mit großen Impulsüberträgen in der störungstheoretischen QCD eingeführt. In diesem Zugang beschreibt  $\varphi_\pi(u)$  die Verteilung des Anteils des longitudinalen Pion-Impulses, welcher von einem Valenzquark im Inertialsystem mit unendlichem Impuls getragen wird. Die Lichtkegel-Verteilungsamplitude des Pions mit Twist 2 hat folgende Form:

$$\varphi_\pi(u, \mu) = 6u\bar{u} \left[ 1 + \sum_{n=2,4,\dots} a_n(\mu) C_n^{3/2}(u - \bar{u}) \right], \quad (\text{D.27})$$

wobei  $C_n^{3/2}$  die Gegenbauer-Polynome bezeichnen und die Koeffizienten  $a_n$  renormierungsskalaabhängig sind. Für  $\mu \rightarrow \infty$  verschwinden die  $a_n$  und man erhält die sogenannte asymptotische Verteilungsamplitude  $\varphi_\pi^{(\text{as})}(u) = 6u\bar{u}$ .



## Literaturverzeichnis

- [Bag85] E. BAGÁN, J. I. LATORRE, P. PASCUAL AND R. TARRACH: *Heavy-quark expansion, factorization and 8-dimensional gluon condensates*, Nucl. Phys. B **254**, 555 (1985).
- [Bag86] D. BAGÁN, J. I. LATORRE AND P. PASCUAL: *Heavy and Heavy to Light Quark Expansion*, Z. Phys. C **32**, 43 (1986).
- [Ber12] J. BERINGER ET AL. (PARTICLE DATA GROUP): *Review on Particle Physics*, Phys. Rev. D **86**, 010001 (2012).
- [Boc86] A. I. BOCHKAREV AND M. E. SHAPOSHNIKOV: *The spectrum of hot hadronic matter and finite-temperature QCD sum rules*, Nucl. Phys. B **268**, 220 (1986).
- [Bra12] T. BRAUNER: *Fierz transform* (2012), <http://gemma.ujf.cas.cz/~brauner/>.
- [Bro08] I. N. BRONSTEIN, K. A. SEMENDJAJEW, G. MUSIOL AND H. MÜHLIG: *Taschenbuch der Mathematik*, Harri Deutsch, 2008.
- [Col01] P. COLANGELO AND A. KHODJAMIRIAN: *QCD sum rules, a modern perspective*, in M. A. SHIFMAN (Editor), *At the frontier of particle physics / Handbook of QCD*, volume 3, page 1495, World Scientific, Singapore, 2001.
- [Dru02] E. G. DRUKAREV, M. G. RYSKIN, V. A. SADOVNIKOVA AND A. FAESSLER: *Expectation values of four-quark operators in pions*, Phys. Rev. D **65**, 074015 (2002).
- [Dru03] E. G. DRUKAREV, M. G. RYSKIN, V. A. SADOVNIKOVA, V. E. LYUBOVITSKIJ, T. GUTSCHE AND A. FAESSLER: *Expectation values of four-quark operators in the nucleon*, Phys. Rev. D **68**, 054021 (2003).
- [Foc37] V. FOCK: *Proper time in classical and quantum mechanics*, Phys. Z. Sowjetunion **12**, 404 (1937).
- [Fur92] R. J. FURNSTAHL, D. K. GRIEGEL AND T. D. COHEN: *QCD sum rules for nucleons in nuclear matter*, Phys. Rev. C **64**, 1507 (1992).
- [Gel51] M. GELL-MANN AND F. LOW: *Bound States in Quantum Field Theory*, Phys. Rev. **84**, 350 (1951).
- [Gen84a] S. C. GENERALIS: *Analysis of current correlators within the framework of quantum chromodynamics*, Ph.D. thesis, The Open University, Milton Keynes, England (1984).
- [Gen84b] S. C. GENERALIS AND D. J. BROADHURST: *The heavy-quark expansion and QCD sum rules for light quarks*, Phys. Lett. B **139**, 85 (1984).

- [Gro95] A. G. GROZIN: *Methods of calculation of higher power corrections in QCD*, Int. J. Mod. Phys. A **10**, 3497 (1995).
- [Hat92] T. HATSUDA AND S. H. LEE: *QCD sum rules for vector mesons in the nuclear medium*, Phys. Rev. C **46**, R34 (1992).
- [Hat93] T. HATSUDA, Y. KOIKE AND S. H. LEE: *Finite-temperature QCD sum rules re-examined:  $\rho$ ,  $\omega$  and  $A_1$  mesons*, Nucl. Phys. B **394**, 221 (1993).
- [Hay00] A. HAYASHIGAKI: *Mass modification of D-meson at finite density in QCD sum rule*, Phys. Lett. B **487**, 96 (2000).
- [Hay04] A. HAYASHIGAKI AND K. TERASAKI: *Charmed-meson spectroscopy in QCD sum rule* (2004), arXiv:hep-ph/0411285.
- [Hil08] T. HILGER: *QCD Sum Rules for D Mesons in Nuclear Matter*, Diploma thesis, Technische Universität Dresden (2008).
- [Hil09] T. HILGER, R. THOMAS AND B. KÄMPFER: *QCD sum rules for D and B mesons in nuclear matter*, Phys. Rev. C **97**, 025202 (2009).
- [Hil11] T. HILGER, B. KÄMPFER AND S. LEUPOLD: *Chiral QCD sum rules for open-charm mesons*, Phys. Rev. C **84**, 045202 (2011).
- [Hil12a] T. HILGER: *Medium Modifications of Mesons*, Ph.D. thesis, Technische Universität Dresden (2012).
- [Hil12b] T. HILGER, R. THOMAS, B. KÄMPFER AND S. LEUPOLD: *The impact of chirally odd condensates on the rho meson*, Phys. Lett. B **709**, 200 (2012).
- [Hub82] W. HUBSCHMID AND S. MALLIK: *Operator expansion at short distances in QCD*, Nucl. Phys. B **207**, 29 (1982).
- [Itz80] C. ITZYKSON AND J.-B. ZUBER: *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, 1980.
- [Jam93] M. JAMIN AND M. MÜNZ: *Current correlators to all orders in quark masses*, Z. Phys. C **60**, 569 (1993).
- [Jin93] X. JIN, T. D. COHEN, R. J. FURNSTAHL AND D. K. GRIEGEL: *QCD sum rules for nucleons in nuclear matter II*, Phys. Rev. C **47**, 2882 (1993).
- [Koc97] V. KOCH: *Aspects of Chiral Symmetry*, Int. J. Mod. Phys. E **6**, 203 (1997).
- [Koi93] Y. KOIKE: *Octet baryons at finite temperature: QCD sum rules versus chiral symmetry*, Phys. Rev. D **48**, 2313 (1993).
- [Leu09] S. LEUPOLD AND M. WAGNER: *Chiral partners in a chirally broken world*, Int. J. Mod. Phys. A **24**, 229 (2009).
- [Leu10] S. LEUPOLD, V. METAG AND U. MOSEL: *Hadrons in strongly interacting matter*, Int. J. Mod. Phys. E **19**, 147 (2010).
- [Mor01] P. MORATH: *Schwere Quarks in dichter Materie*, Ph.D. thesis, Technische Universität München (2001).

- [Nar04] S. NARISON: *QCD as a Theory of Hadrons – From Partons to Confinement*, Cambridge University Press, 2004.
- [Nar05] S. NARISON: *Open charm and beauty chiral multiplets in QCD*, Phys. Lett. B **605**, 319 (2005).
- [Nar12] S. NARISON: *A fresh look into  $\bar{m}_{c,b}$  and precise  $f_{D_{(s)},B_{(s)}}$  from heavy-light QCD spectral sum rules* (2012), arXiv:hep-ph/1209.2023.
- [Nie04] J. F. NIEVES AND P. B. PAL: *Generalized Fierz identities*, Am. J. Phys. **72**, 1100 (2004).
- [Nik83] S. N. NIKOLAEV AND A. V. RADYUSHKIN: *Vacuum corrections to QCD charmonium sum rules: Basic formalism and  $O(G^3)$  results*, Nucl. Phys. B **213**, 285 (1983).
- [Nov80] V. A. NOVIKOV, M. A. SHIFMAN, A. I. VAINSHTEIN AND V. I. ZAKHAROV: *Operator expansion in quantum chromodynamics beyond perturbation theory*, Nucl. Phys. B **174**, 378 (1980).
- [Nov84] V. A. NOVIKOV, M. A. SHIFMAN, A. I. VAINSHTEIN AND V. I. ZAKHAROV: *Calculation in External Fields in Quantum Chromodynamics. Technical Review*, Fortschr. Phys. **32**, 585 (1984).
- [Pas84] P. PASCUAL AND R. TARRACH: *QCD: Renormalization for the Practitioner*, Springer-Verlag, 1984.
- [Pes95] M. E. PESKIN AND D. V. SCHROEDER: *Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books, 1995.
- [Rei85] L. J. REINDERS, H. RUBINSTEIN AND S. YAZAKI: *Hadron properties from QCD sum rules*, Phys. Rept. **127**, 1 (1985).
- [Rom69] P. ROMAN: *Introduction to Quantum Field Theory*, John Wiley and Sons, 1969.
- [Rom06] J. C. ROMAO: *Modern Techniques for One-Loop Calculations* (2006), <http://porthos.ist.utl.pt/OneLoop>.
- [Sch51] J. SCHWINGER: *On Gauge Invariance and Vacuum Polarization*, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [Shi79] M. A. SHIFMAN, A. I. VAINSHTEIN AND V. I. ZAKHAROV: *QCD and resonance physics. Theoretical foundations*, Nucl. Phys. B **147**, 385 (1979).
- [Shi98] M. A. SHIFMAN: *Snapshots of Hadrons*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **131**, 1 (1998).
- [Shu82] E. V. SHURYAK AND A. A. VAINSHTEIN: *Theory of power corrections to deep inelastic scattering in quantum chromodynamics (I).  $Q^{-2}$  effects*, Nucl. Phys. B **199**, 451 (1982).
- [Ste93] G. STERMAN: *An Introduction to Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1993.

- [Sug61] M. SUGAWARA AND A. KANAZAWA: *Subtractions in Dispersion Relations*, Phys. Rev. **123**, 1895 (1961).
- [Tho07] R. THOMAS, T. HILGER AND B. KÄMPFER: *Four-quark condensates in nuclear QCD sum rules*, Nucl. Phys. A **795**, 19 (2007).
- [Tho08] R. THOMAS: *In-Medium QCD Sum Rules for  $\omega$  Meson, Nucleon and D Meson*, Ph.D. thesis, Technische Universität Dresden (2008).
- [Tho12] R. THOMAS: Private Kommunikation (2012).
- [Wil69] K. G. WILSON: *Non-Lagrangian Models of Current Algebra*, Phys. Rev. **179**, 1499 (1969).
- [Zha10] T. ZHANG, T. BRAUNER AND D. H. RISCHKE: *QCD-like theories at nonzero temperature and density*, JHEP **1006**, 064 (2010).
- [Zsc11] S. ZSCHOCKE, T. HILGER AND B. KÄMPFER: *In-medium operator product expansion for heavy-light-quark pseudoscalar mesons*, Eur. Phys. J. A **47**, 151 (2011).

## Danksagung

Ich danke Prof. Dr. Burkhard Kämpfer für die Möglichkeit dieses sehr interessante Thema bearbeiten zu können und für die hervorragende Betreuung während des gesamten Jahres meiner Arbeit am Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf. Seine fortwährende fachliche Unterstützung war von unschätzbarem Wert. Des Weiteren bin ich für die mir ermöglichte Teilnahme an der Hadron Physics Summer School 2012 in Bad Honnef sehr dankbar.

Prof. Dr. Rüdiger Schmidt sowie dem gesamten Institut für Theoretische Physik der Technischen Universität Dresden sei für die Aufnahme ins Institut und die ausgezeichneten Arbeitsbedingungen gedankt.

Ein ganz besonderer Dank gilt Dr. Thomas Hilger, er half mir mich in die Methode der QCD-Summenregeln einzuarbeiten. Sowohl seine fachlichen Hinweise als auch die aufmunternden Worte in schwierigen Phasen der Bearbeitung unterstützten mich sehr. Unsere zahlreichen Diskussionen zu technischen und konzeptionellen Aspekten verhalfen mir zu einem tiefen Verständnis in diesem Feld der Hadronenphysik.

Ich bedanke mich bei den Mitgliedern meiner Arbeitsgruppe für ihre vielfältige Unterstützung. Die freundliche Atmosphäre sowie Diskussionen auch abseits physikalischer Themen ermöglichten ein motiviertes und angenehmes Arbeiten.

In den Dank einschließen möchte ich nicht zuletzt meine Kommilitonen und Freunde, welche mich durch das gesamte Studium begleitet haben. Besonders Klaus, Roland und Mo verdanke ich wunderbare Jahre in Dresden. Bei Bruno bedanke ich mich für die geteilten philosophischen Einsichten.

Meinen Eltern, meinem Bruder Michael und Margarete danke ich für das in mich gesetzte Vertrauen und den moralischen Rückhalt.



## **Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Thomas Buchheim

Dresden, den 11. Oktober 2012