

TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DRESDEN

---

# Dynamisch assistierter Schwinger-Effekt in unterschiedlichen Feldkonfigurationen

Bachelor-Arbeit  
zur Erlangung des Hochschulgrades  
Bachelor of Science  
im Bachelor-Studiengang Physik

vorgelegt von

Hans Oppitz  
geboren am 13.06.1990 in Rodewisch

Institut für Theoretische Physik  
Fachrichtung Physik  
Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften  
Technische Universität Dresden  
2013

Eingereicht am 16. 12. 2013

1. Gutachter: Prof. Dr. Burkhard Kämpfer
2. Gutachter: PD Dr. Günther Plunien

---

## Zusammenfassung

### Zusammenfassung

Durch das Anlegen elektrischer Hintergrundfelder können aus dem Vakuum Elektron-Positron-Paare erzeugt werden. Dabei unterscheidet man zwischen zwei grundlegenden Prozessen, dem klassischen Schwinger-Effekt, bei dem die Paarerzeugung als exponentiell von der Feldstärke abhängiger quantenmechanischer Tunnelprozess aufgefasst werden kann, und der dynamischen Paarerzeugung resultierend aus der Absorption eines oder mehrerer virtueller Photonen des Feldes. In dieser Arbeit wird unter Zuhilfenahme numerischer Integrationsroutinen der Verstärkungseffekt im Impulsraum der dynamisch assistierten Schwinger-Paarerzeugung für unterschiedliche Feldkonfigurationen untersucht. Er kann hervorgerufen werden durch die Superposition von einem starken, niederfrequenten mit einem schwachen, hochfrequenten Feld, ist also ein Resultat des Zusammenspiels von Schwinger- und dynamischer Paarerzeugung. Durch die Quantisierung des Dirac-Feldes kann ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem für die Dichte erzeugter Elektron-Positron-Paare hergeleitet werden. Es bildet die Grundlage der in dieser Arbeit vorgestellten numerischen Resultate.

### Abstract

It is possible to produce electron-positron pairs out of the vacuum by applying an electric background field. There are two different processes. The classical Schwinger effect, where the creation can be interpreted as a quantum mechanical tunneling event with an exponential dependence on the field strength, and the dynamical pair creation caused by the absorption of a single or a multiple number of virtual field photons. In this thesis, by using numerical integration methods, the enhancement of dynamically assisted Schwinger pair production is investigated for different field configurations. The effect is caused by the combination of Schwinger and dynamic pair creation. A strong field with low frequency is superimposed by a weak field with high frequency. After quantizing the Dirac field it is possible to get a linear differential equation system that determines the produced electron-positron pair density which is fundamental for the numerical results presented in this thesis.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>6</b>
1.1	Dirac-Gleichung und die Erzeugung von Antiteilchen . . . . .	6
1.2	Klassischer Schwinger-Effekt und Schwinger-Limes . . . . .	8
1.3	Dynamische Paarerzeugung und Multi-Photonen-Absorption . . . . .	10
1.4	Dynamisch assistierter Schwinger-Effekt . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Quantenkinetische Theorie</b>	<b>13</b>
2.1	Diagonalisierung des Dirac-Hamiltonoperators . . . . .	13
2.2	Quasiteilchendichte und quantenkinetische Gleichung . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Vorbetrachtungen</b>	<b>21</b>
3.1	Zeitliche Randbedingungen . . . . .	21
3.2	Feldkonfigurationen . . . . .	22
3.2.1	Sauter-Konfiguration . . . . .	23
3.2.2	Gauß-Konfiguration . . . . .	23
3.2.3	Sauter-Plus-Sinus-Konfiguration . . . . .	25
3.3	Dimensionslose Darstellung . . . . .	26
3.3.1	Dimensionslose Parameterlandschaft . . . . .	26
3.3.2	Dimensionslose Darstellung der quantenkinetischen Gleichung . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Numerische Resultate</b>	<b>29</b>
4.1	Test der Numerik am Beispiel der Sauter-Konfiguration . . . . .	29
4.1.1	Analytische Lösung der erzeugten Teilchendichte . . . . .	29
4.1.2	Numerische und analytische Resultate . . . . .	30
4.1.3	Zeitevolution . . . . .	32
4.1.4	Dynamisch assistierter Schwinger-Effekt . . . . .	38
4.2	Gauß-Konfiguration . . . . .	42
4.2.1	Zeitevolution und Teilchendichte . . . . .	42
4.2.2	Dynamisch assistierter Schwinger-Effekt . . . . .	45
4.3	Sauter-Plus-Sinus-Konfiguration . . . . .	48
4.3.1	Paarerzeugung im Sinus-Feld . . . . .	48
4.3.2	Dynamisch assistierter Schwinger-Effekt . . . . .	49

---

<b>5</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>57</b>
5.1	Vergleich von Sauter- und Gauß-Konfiguration . . . . .	57
5.2	Überlagerung des hochfrequenten Sinus-Feldes mit dem starken Sauter-Puls . .	58
5.3	Experimentelle Grenzen der betrachteten Feldkonfigurationen . . . . .	59
<b>A</b>	<b>Grenzverhalten der durch den Sauter-Puls erzeugten Teilchendichte</b>	<b>60</b>
A.1	Schwinger-Limes . . . . .	60
A.2	Grenzfall dynamischer Paarerzeugung . . . . .	61
<b>B</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>63</b>

# 1 Einleitung

## 1.1 Dirac-Gleichung und die Erzeugung von Antiteilchen

P. Dirac gelang im Jahr 1928 die erste zugleich lorentzinvariante wie quantenmechanische Beschreibung des Elektrons [2]. Die später nach ihm benannte Dirac-Gleichung ermöglichte relativistische Korrekturen zur nichtrelativistischen Schrödinger-Theorie und einen theoretischen Zugang zu Phänomenen wie der Spin-Bahn-Kopplung und daraus resultierenden experimentellen Befunden wie der Feinstrukturaufspaltung im Energiespektrum von Atomen. Sehr bemerkenswert ist die Tatsache, dass die Dirac-Gleichung, obwohl als Ein-Teilchen-Theorie konstruiert, dennoch die theoretische Vorhersage der Existenz von Antiteilchen, d.h. insbesondere des Positrons, möglich machte. Bereits ein Jahr nach der Veröffentlichung durch Dirac zeigte O. Klein [4], dass bei der eindimensionalen Streuung von Elektronen der Energie  $E_e$  und Ladung  $-e$  an einer Potentialstufe der Form  $\phi(x) = -\Theta(x)V_0/e$  mit der Höhe  $V_0 > 2mc^2$  ein Bereich  $m < E_e < V_0 - mc^2$  existiert, in dem der Reflexionskoeffizient  $R = -j_r/j_{ein}$  Werte  $R > 1$  und der Transmissionskoeffizient  $T = j_t/j_{ein}$  Werte  $T < 0$  annimmt. Der Strom reflektierter Teilchen  $j_r$  ist also größer als der Strom einlaufender Teilchen  $j_{ein}$  und die transmittierte Stromdichte  $j_t$  negativ. Die transmittierten Teilchen kommen aus entgegengesetzter Richtung oder haben die entgegengesetzte Ladung  $+e$ . Eine mögliche Interpretation besteht darin, dass bei der Streuung zusätzlich die Erzeugung von Elektron-Positron-Paaren stattfindet.

Für die als Ein-Teilchen-Theorie entwickelte Dirac-Gleichung ist ein solches Resultat zunächst widersprüchlich. Anschaulich lässt es sich jedoch im Modell des Dirac-Sees erklären. Die Lösungen der freien Dirac-Gleichung<sup>1</sup>

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (1.1)$$

sind ebene Wellen der Form

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 e^{i\vec{p}\cdot\vec{r} - iE_e t}. \quad (1.2)$$

Ihre Energieeigenwerte sind gegeben durch

$$E_e = \pm \sqrt{p^2 + m^2}. \quad (1.3)$$

---

<sup>1</sup>In natürlichen Einheiten ( $\hbar = c = 1$ ).

Damit ist das Energiespektrum insbesondere auch nach unten unbeschränkt. Elektronen müssten also, z.B. bei der Kopplung an ein elektromagnetisches Feld, in der Lage sein, unendlich viel Energie abzustrahlen, was nicht zuletzt die Stabilität von Atomen unmöglich machen würde. Dirac postulierte daher den Grund- bzw. Vakuumzustand des Systems als jenen, in dem alle Zustände negativer Energie besetzt sind, siehe Abb. 1.1. Dann folgt gemäß des Pauli-Prinzips, dass ein zusätzlich erzeugtes Elektron die positive Energie  $E_e \geq m$  besitzen muss. Andererseits kann ein Teilchen negativer Energie  $-E_e$  unter Zuführung der positiven Energie  $E_e$  entfernt werden. Der zurückbleibende unbesetzte Zustand („Loch“) kann als Antiteilchen mit entgegengesetzter Ladung  $+e$ , also als Positron interpretiert werden. Um im Vakuum ein Elektron-Positron-Paar zu erzeugen, muss einem Teilchen negativer Energie mindestens die Energie  $2m$  zugeführt werden. Diese Energie wird gerade durch das Anlegen des Stufenpotentials mit  $V_0 > 2m$  zur Verfügung gestellt.

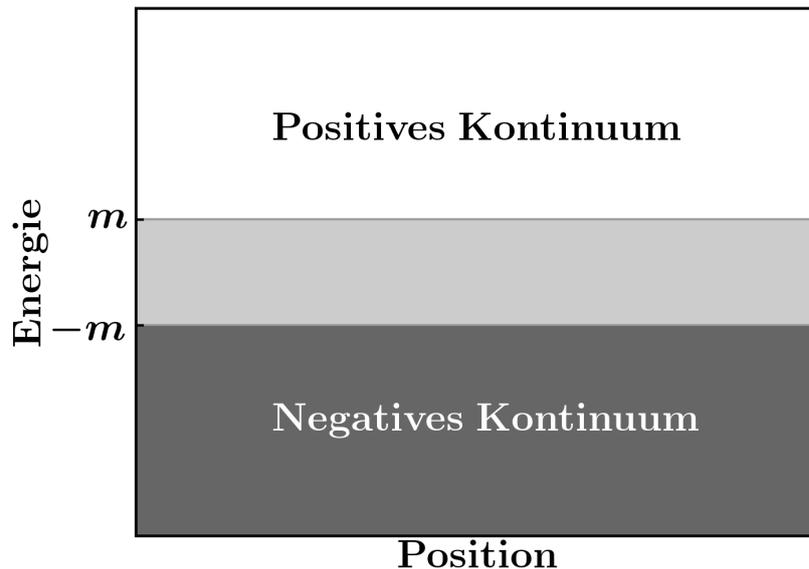


Abbildung 1.1: Vakuumzustand im Bild des Dirac-Sees.

Allerdings bleibt unklar, warum der so definierte Vakuumzustand des Systems trotz offenkundig unendlicher Ladungs- und Energiedichte keinerlei elektromagnetische bzw. gravitierende Wirkung ausüben soll.<sup>2</sup> Eine vollständige, in sich schlüssige Beschreibung der Elektron- und Positronerzeugung kann nur im Rahmen der Quantenfeldtheorie als Mehrteilchen-Theorie gegeben werden. Durch Quantisierung des Dirac-Feldes lässt sich insbesondere das nach unten unbeschränkte Energiespektrum (1.3) beseitigen.<sup>3</sup> Ohne Kopplung an ein äußeres Viererpotential  $A^\mu$  ergibt sich für die Lagrange-Dichte des Dirac-Feldes

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi. \quad (1.4)$$

<sup>2</sup>Vgl. [15] S. 161.

<sup>3</sup>Eine Einführung in die Quantisierung des Dirac-Feldes findet sich z.B. in [9].

Der Hamiltonoperator  $\hat{H}$  des Systems in 2. Quantisierung folgt dann unmittelbar aus

$$\hat{H} = \int dr^3 \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}} \dot{\Psi} - \mathcal{L} \right) \quad (1.5)$$

und kann durch Entwicklung der Quantenfeldoperatoren  $\Psi$  in den Eigenzuständen der freien Dirac-Gleichung (1.1) diagonalisiert werden. Man erhält damit

$$\hat{H} = \int \frac{dp^3}{2\pi^3} E_e(\vec{p}) \sum_{j=1}^2 \left( a_j^\dagger(\vec{p}) a_j(\vec{p}) + b_j^\dagger(\vec{p}) b_j(\vec{p}) \right) \quad (1.6)$$

und kann  $a_j^\dagger(\vec{p})$  als fermionischen Erzeugungsoperator eines Elektrons und  $b_j^\dagger(\vec{p})$  als fermionischen Erzeugungsoperator eines Positrons, jeweils mit Impuls  $\vec{p}$  und Spin  $j$ , betrachten. Der Hamiltonoperator  $\hat{H}$  hängt damit nur noch von den Teilchenzahloperatoren  $n_j^{e^-}(\vec{p}) = a_j^\dagger(\vec{p}) a_j(\vec{p})$  und  $n_j^{e^+}(\vec{p}) = b_j^\dagger(\vec{p}) b_j(\vec{p})$  ab. Die Gesamtenergie  $E_\Omega$  des Vielteilchenzustandes  $|\Omega\rangle$  ergibt sich damit unmittelbar aus der Teilchenzahl der Elektronen und Positronen mit Spin  $j$  und Impuls  $\vec{p}$ . Der Vakuumzustand  $|0\rangle$  ist dann durch

$$n_j^{e^-}(\vec{p}) |0\rangle = n_j^{e^+}(\vec{p}) |0\rangle = 0 \quad (1.7)$$

charakterisiert und hat die Grundzustandsenergie  $E_0 = 0$ . Damit ist das Energiespektrum nach unten beschränkt.

## 1.2 Klassischer Schwinger-Effekt und Schwinger-Limes

Als Schwinger-Effekt bezeichnet man die Erzeugung eines Elektron-Positron-Paares im Vakuum aus den virtuellen Photonen eines zeitlich konstanten, räumlich homogenen elektrischen Feldes der Feldstärke  $E_0$ . Im Bild des Dirac-Sees bedeutet ein externes Feld eine „Verkipfung“ des negativen und positiven Kontinuums um den Winkel  $\alpha$  mit  $\tan(\alpha) = eE_0$ . Dies erhöht die quantenmechanische Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teilchen aus dem negativen Kontinuum in das positive Kontinuum tunnelt. Dabei bezeichne  $L$  die Tunneldistanz, die mindestens zurückgelegt werden muss. Dies ist in Abb. 1.2 anschaulich dargestellt. Mit zunehmender Feldstärke  $E_0$  nimmt  $L$  weiter ab. Für  $L > \lambda_C \equiv 2\pi/m$  sollte die Tunnelwahrscheinlichkeit exponentiell und für  $L \ll \lambda_C$  nicht mehr unterdrückt sein, wobei  $\lambda_C$  die Comptonwellenlänge des Elektrons ist. Unter dieser Annahme lässt sich mit  $L_c := 2/m \lesssim \lambda_C$  aus  $\tan(\alpha) = 2m/L = eE_0$  die kritische Feldstärke  $E_c = m^2/e$  abschätzen, unterhalb derer die Wahrscheinlichkeit der Erzeugung eines Elektron-Positron-Paares exponentiell unterdrückt ist. Eine exakte Herleitung findet sich in den Arbeiten von F. Sauter [11] und J. Schwinger [13], weshalb sich in der Literatur auch der Begriff Sauter-Schwinger-Effekt etabliert hat und  $E_c$  als Sauter-Schwinger-Feldstärke bezeichnet wird. Nach Schwinger gilt für die Paarerzeugungswahrscheinlichkeit  $P$

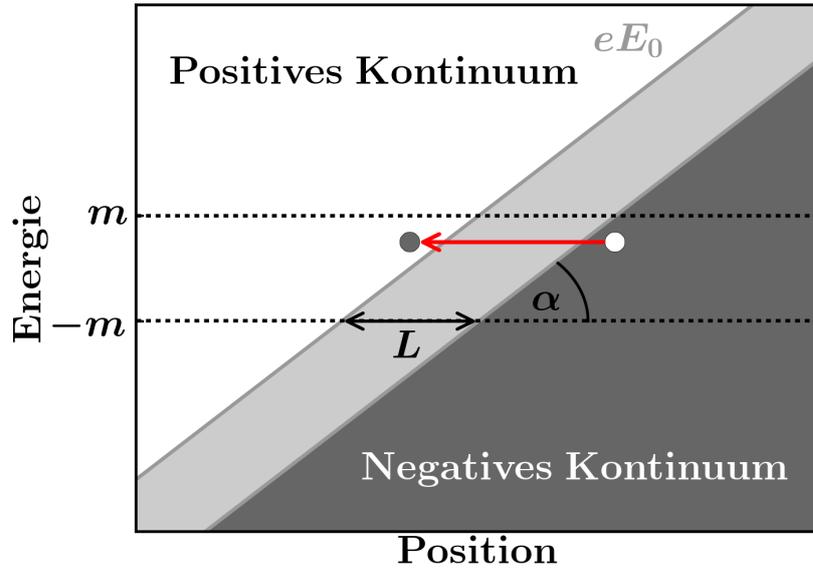


Abbildung 1.2: Schwinger-Paarzeugung im Bild des Dirac-Sees.

pro Volumen  $V$  und Zeit  $t$

$$P \propto E_0^2 e^{-\frac{\pi m^2}{eE_0}} = E_0^2 e^{-\frac{\pi E_c}{E_0}} \quad (1.8)$$

und damit die für quantenmechanische Tunnelprozesse charakteristische exponentielle Abhängigkeit, in diesem Fall von der Feldstärke  $E_0$ . Für die kritische Feldstärke ergibt sich der Wert  $E_c \approx 10^{18} \text{V/m}$ . Bislang konnten Feldstärken in dieser Größenordnung experimentell auf makroskopischer Ebene nicht realisiert werden. Neue Laser-Anlagen wie ELI (Extreme Light Infrastructure) und XFEL (X-Ray Free-Electron Laser) könnten diesbezüglich neue Möglichkeiten schaffen.

Um die Elektron-Positron-Paarzeugung tatsächlich beobachten zu können, bietet sich der Zugang über räumlich homogene jedoch zeitabhängige elektrische Felder an, wie sie zum Beispiel im Schwingungsbauch zweier aufeinander gerichteter Laser erzeugt werden können. Ein solches Feld  $E(t)$  ist neben seiner Amplitude  $E_0$  durch die Frequenz  $1/\tau$  charakterisiert. E. Brezin und C. Itzykson [1] zeigten, dass in räumlich homogenen, zeitlich veränderlichen Feldern die Paarzeugungswahrscheinlichkeit

$$P \propto \frac{E_0^2}{g(\gamma) + 0.5\gamma g'(\gamma)} e^{-\frac{\pi E_c}{E_0} g(\gamma)} \quad (1.9)$$

ist mit der Funktion  $g(\gamma) = (4/\pi) \int_0^1 dx \sqrt{(1-x^2)/(1+\gamma^2 x^2)}$  und ihrer Ableitung  $g'(\gamma)$  nach dem Argument  $\gamma$ . Eine Darstellung von  $g(\gamma)$  findet sich in Abb. 1.3. Dabei wird  $\gamma = m/eE_0\tau$

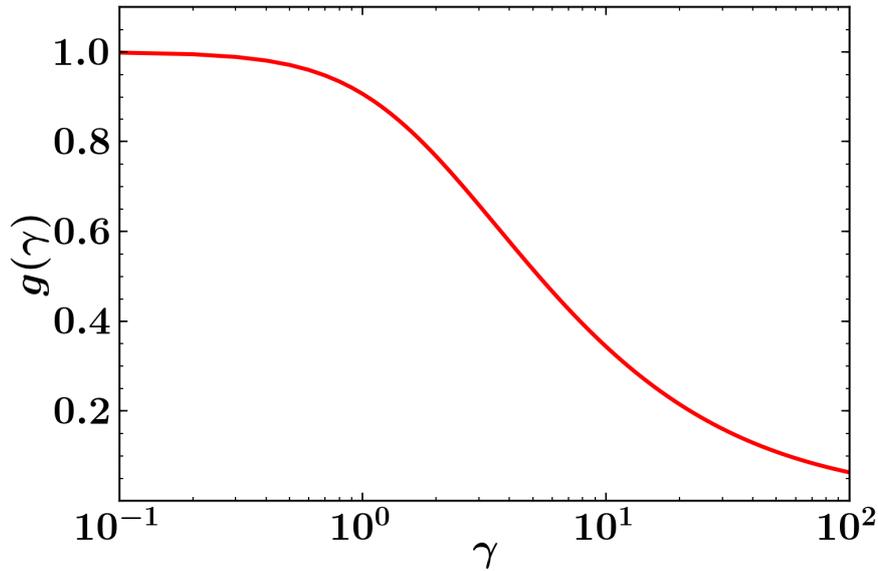


Abbildung 1.3: Verhalten der Funktion  $g(\gamma)$  aus Gl. (1.9).

auch als Keldysh-Parameter bezeichnet.<sup>4</sup> Für  $\gamma \ll 1$  strebt die Funktion  $g(\gamma) \rightarrow 1$  und man erhält im Limes  $\gamma \rightarrow 0$  Gl. (1.8). In zeitabhängigen Feldern mit Feldstärken  $E_0 \approx E_c$  und Frequenzen  $1/\tau \ll m$  dominiert somit der Effekt der klassischen Schwinger-Paarerzeugung.

### 1.3 Dynamische Paarerzeugung und Multi-Photonen-Absorption

Nun soll der zweite Grenzfall  $\gamma \gg 1$  betrachtet werden. In diesem Fall strebt die Funktion  $g(\gamma) \rightarrow 0$ . Sie ist in Abb. 1.3 dargestellt. Aus Gl.(1.9) folgt dann unmittelbar

$$P \propto \left( \frac{eE_0\tau}{2m} \right)^{4m\tau} E_0^2 = \left( \frac{1}{2\gamma} \right)^{4m\tau} E_0^2 \stackrel{\tau \ll 1/4m}{\approx} E_0^2. \quad (1.10)$$

Offenkundig lässt sich in diesem Fall die Elektron-Positron-Paarerzeugung nicht mehr als quantenmechanischer Tunnelprozess mit exponentieller Abhängigkeit von der Feldstärke  $E_0$  verstehen. Der Fall  $\gamma \gg 1$  korrespondiert zu zeitabhängigen Feldern  $E(t)$ , für deren Amplitude  $E_0 \ll E_c$  und für deren Frequenz  $1/\tau \approx m$  gilt. Die zeitliche Änderung des Feldes ist wesentlich kürzer als die benötigte Tunnelzeit. Daher ist die Paarerzeugung nur über die Absorption eines oder mehrerer virtueller Photonen des Feldes möglich. Ein Photon besitzt die Energie  $1/\tau$ . Zur Erzeugung eines Paares muss mindestens die Energie  $2m$  zur Verfügung stehen. Die Anzahl der zu absorbierenden Photonen  $n$ , um ein Paar zu erzeugen, ist dann durch

<sup>4</sup>Vgl. Unterabschnitt 3.3.1.

$n \geq 2m\tau$  gegeben. Für Felder mit  $\tau \leq 1/2m$  ist die Absorption eines einzigen Photons zur Erzeugung eines Elektron-Positron-Paares möglich. Die Multi-Photonen-Paarerzeugung konnte bereits experimentell bestätigt werden.<sup>5</sup>

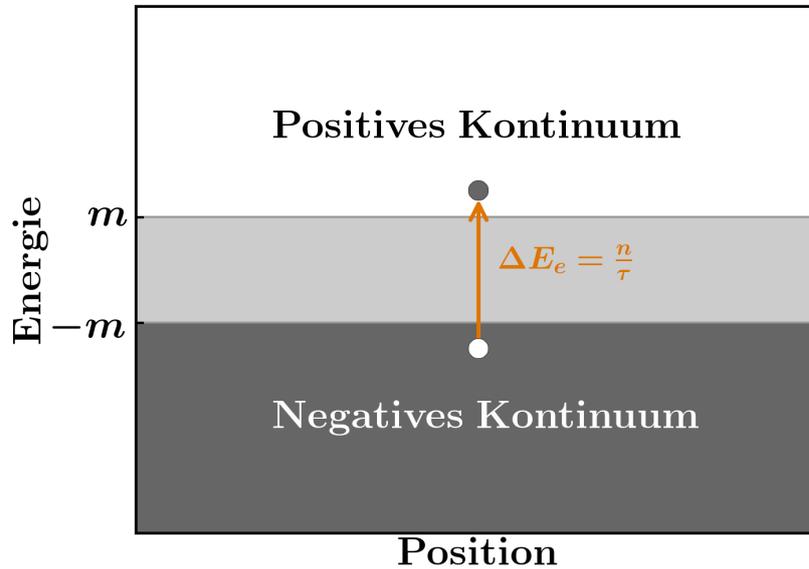
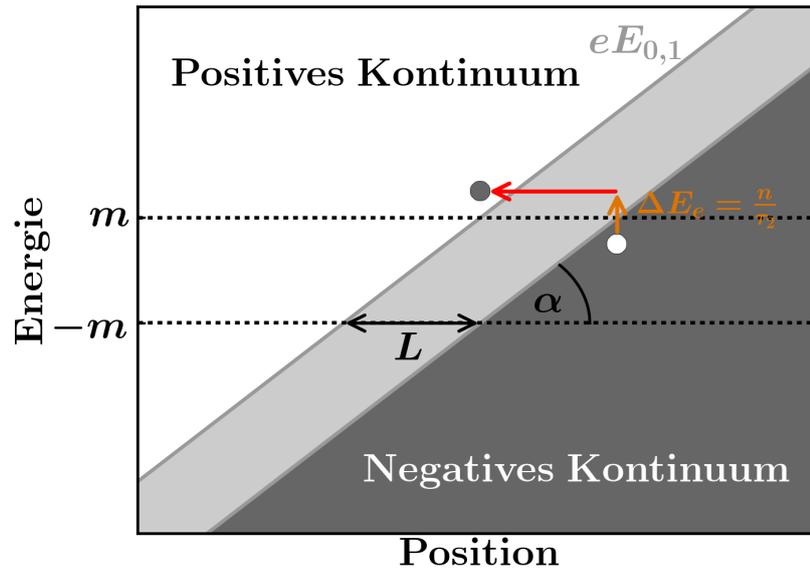


Abbildung 1.4: Dynamische Paarerzeugung im Bild des Dirac-Sees.

## 1.4 Dynamisch assistierter Schwinger-Effekt

Im Folgenden wird die Überlagerung zweier elektrischer Felder betrachtet. Das erste Feld befinde sich im diskutierten Schwinger-Limes aus Abschnitt 1.2 und das zweite im Regime der dynamischen Paarerzeugung, wie sie in Abschnitt 1.3 diskutiert wird. Die durch das Anlegen eines solchen Feldes erzeugte Anzahldichte an Elektron-Positron-Paaren kann die einfache Superposition der einzelnen Anzahldichten um Größenordnungen übersteigen. In [7] wird von Verstärkungsfaktoren von bis zu 500 für die Überlagerung zweier Sauter-Pulse der Form  $E_i(t) = E_{0,i} \text{sech}^2(t/\tau_i)$  berichtet. Dieser Effekt wird als dynamisch assistierter Schwinger-Effekt bezeichnet. Im Bild des Dirac-Sees lässt er sich wie folgt erklären. Durch das angelegte erste Feld  $E_{0,1} \approx E_c$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teilchen aus dem negativen Kontinuum in den Bereich des positiven Kontinuums tunnelt, nicht unterdrückt. Dieser klassische Schwinger-Effekt wird durch die Absorption von virtuellen Photonen des zweiten Feldes der Energie  $1/\tau_2 \approx m$  insofern verstärkt, dass dadurch Teilchen aus dem negativen Kontinuum in den Bereich der klassisch verbotenen Energiebarriere angehoben werden. Dies führt schließlich zu einer Verringerung der Tunneldistanz  $L$ . Die Wahrscheinlichkeit für ein Tunnelereignis steigt. Dies ist in Abb. 1.5 dargestellt.

<sup>5</sup>Vgl. SLAC Experiment E-144: <http://www.slac.stanford.edu/exp/e144/>.



**Abbildung 1.5:** Dynamisch assistierte Schwinger-Paarerzeugung im Bild des Dirac-Sees.

Der dynamisch assistierte Schwinger-Effekt bildet die Grundlage dieser Arbeit. Verschiedene Feldkonfigurationen, die im Abschnitt 3.2 diskutiert werden, sollen unter Zuhilfenahme numerischer Integrationsroutinen auf einen möglichen Verstärkungseffekt bezüglich der Paarerzeugung untersucht werden.

Dazu erfolgt in Kapitel 2 die Herleitung einer Differentialgleichung zur Bestimmung der erzeugten Quasiteilchendichte  $f(\vec{p}, t)$ , die, wie in Abschnitt 2.2 diskutiert, für asymptotische Zeiten  $t \rightarrow \infty$  als die reale Teilchendichte erzeugter Elektron-Positron-Paare interpretiert werden kann.

In Kapitel 3 ist dargestellt, welche Form die in dieser Arbeit untersuchten elektrischen Felder besitzen. Der Abschnitt 3.3 dient der Herleitung einer dimensionslosen Darstellung von dem Differentialgleichungssystem (2.38).

In Kapitel 4 werden die numerisch erhaltenen Teilchendichten  $f(\vec{p}, t_\infty)$  erzeugter Paare für die verschiedenen Feldkonfigurationen diskutiert. Dabei soll insbesondere unter Betrachtung der über den Impulsraum abintegrierten Anzahldichte  $n$  der aus dem dynamisch assistierten Schwinger-Effekt resultierende Verstärkungsfaktor untersucht werden.<sup>6</sup>

<sup>6</sup>Siehe Gl. (2.40).

## 2 Quantenkinetische Theorie

In diesem Abschnitt soll eine kurze Herleitung der quantenkinetischen Theorie für Elektronen im ausschließlich zeitabhängigen klassischen elektrischen Hintergrundfeld  $\vec{E}(t)$  erfolgen. Insbesondere wird der Fall ohne äußeres Magnetfeld  $\vec{B}$  betrachtet. Dies ermöglicht den theoretischen Zugang zur Ermittlung der Anzahl erzeugter Elektron-Positron-Paare, wie er u.a. von S. Schmidt et al. [12] entwickelt wurde, über die zweite Quantisierung des Dirac-Feldes und die Diagonalisierung des zeitabhängigen Dirac-Hamiltonoperators  $\hat{H}(t)$ . In diesem Abschnitt folgen wir im Wesentlichen den Arbeiten von F. Hebenstreit et al. [3], A. Otto [8] und M. Orthaber [6].

### 2.1 Diagonalisierung des Dirac-Hamiltonoperators

In Coulomb-Eichung ist das Viererpotential

$$A^\mu(t) = (0, \vec{A}(t)). \quad (2.1)$$

Wir wählen im Folgenden  $\vec{A}(t) = A(t)\vec{e}_z$  und damit  $\vec{E}(t) = -\dot{A}(t)\vec{e}_z = E(t)\vec{e}_z$ . Nach dem Prinzip minimaler Kopplung ist die Dirac-Gleichung

$$\left( i\gamma^0\partial_t + i\vec{\gamma} \cdot \left[ \vec{\nabla} - ieA(t)\vec{e}_z \right] - m \right) \Psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (2.2)$$

Die Ortswellenfunktion  $\Psi(\vec{r}, t)$  lässt sich in den Impulseigenzuständen  $|\vec{p}\rangle$  entwickeln:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int d^3p \langle \vec{r} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \Psi \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} \phi(\vec{p}, t). \quad (2.3)$$

So erhält man die Dirac-Gleichung

$$\left( i\gamma^0\partial_t - \vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}(\vec{p}, t) - m \right) \phi(\vec{p}, t) = 0 \quad (2.4)$$

für die Modenfunktion  $\phi(\vec{p}, t)$  mit dem zeitabhängigen Feldimpuls  $\vec{\pi}(\vec{p}, t) = \vec{p} - eA(t)\vec{e}_z$ . Um diese zu lösen, wählt man

$$\phi(\vec{p}, t) = \left( i\gamma^0\partial_t - \vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}(\vec{p}, t) + m \right) \tilde{\phi}(\vec{p}, t) \quad (2.5)$$

als Ansatz. Daraus ergibt sich für  $\tilde{\phi}(\vec{p}, t)$  die iterierte Dirac-Gleichung

$$(\partial_t^2 + \omega^2(\vec{p}, t) + ieE(t)\gamma^0\gamma^3)\tilde{\phi}(\vec{p}, t) = 0. \quad (2.6)$$

Dabei ist  $\omega^2(\vec{p}, t) = m^2 + p_\perp^2 + (p_\parallel - eA(t))^2 = \epsilon_\perp^2 + (p_\parallel - eA(t))^2$  mit dem Impuls  $p_\perp = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \geq 0$  senkrecht und  $p_\parallel = p_z$  parallel zur Feldrichtung. Jetzt besteht die Möglichkeit eine Entwicklung von  $\tilde{\phi}(\vec{p}, t)$  in den Eigenvektoren der Matrix  $\gamma^0\gamma^3$  durchzuführen. Sie ist durch

$$\gamma^0\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

gegeben und besitzt die Eigenwerte  $\lambda_{1/2} = 1$  und  $\lambda_{3/4} = -1$ . Für die dazugehörigen Eigenvektoren  $W_j$  mit  $j = \{1, 2, 3, 4\}$  folgt  $\gamma^0\gamma^3 W_j = \lambda_j W_j$ . Es lässt sich  $\tilde{\phi}(\vec{p}, t)$  als

$$\tilde{\phi}(\vec{p}, t) = \sum_{j=1}^4 g_j(\vec{p}, t) W_j \quad (2.8)$$

entwickeln. Um die Entwicklungskoeffizienten  $g_j(\vec{p}, t)$  zu bestimmen, setzt man Gl. (2.8) in Gl. (2.6) ein. Dies ergibt für jeden Koeffizienten eine Gleichung in der Form eines zeitabhängigen Oszillators

$$(\partial_t^2 + \omega^2(\vec{p}, t) + ieE(t)\lambda_j) g_j(\vec{p}, t) = 0. \quad (2.9)$$

Da es sich bei (2.9) um eine Differentialgleichung 2. Ordnung handelt, zerfällt  $g_j(\vec{p}, t)$  in zwei linear unabhängige Lösungen  $g_j^\pm(\vec{p}, t)$  mit

$$g_j(\vec{p}, t) = \tilde{a}_j(\vec{p}) \cdot g_j^+(\vec{p}, t) + \tilde{b}_j(\vec{p}) \cdot g_j^-(\vec{p}, t). \quad (2.10)$$

Damit existieren für jedes  $j = \{1, 2, 3, 4\}$  zwei zusätzliche Lösungen und damit insgesamt acht linear unabhängige. Da die Dirac-Gleichung (2.4) eine Differentialgleichung erster Ordnung ist und nur vier linear unabhängige Lösungen zulässt, sind vier der gefundenen Lösungen redundant. Wir eliminieren diese, indem wir im Folgenden ausschließlich  $j = \{1, 2\}$  wählen.<sup>1</sup> Da  $\lambda_{1/2} = 1$  gilt, müssen nach (2.9) die Funktionen  $g_{1/2}^\pm(\vec{p}, t)$  die gleiche Differentialgleichung erfüllen und es folgt

$$g_1^\pm(\vec{p}, t) = g_2^\pm(\vec{p}, t) = g^\pm(\vec{p}, t). \quad (2.11)$$

Dies ist auch insofern plausibel, als dass kein äußeres Magnetfeld angelegt wird und die Dynamik daher unabhängig von der Spineinstellung sein sollte, was durch (2.11) offenkundig

<sup>1</sup>Alternativ ist natürlich auch die Wahl  $j = \{3, 4\}$  möglich.

gegeben ist.

Jetzt kann man (2.8) als

$$\tilde{\phi}(\vec{p}, t) = \sum_{j=1}^2 \left( \tilde{a}_j(\vec{p}) \cdot g^+(\vec{p}, t) + \tilde{b}_j(\vec{p}) \cdot g^-(\vec{p}, t) \right) W_j. \quad (2.12)$$

schreiben. Durch Quantisierung des Dirac-Feldes wird  $\tilde{a}_j(\vec{p})$  zum fermionischen Vernichtungsoperator  $a_j(\vec{p})$  für Elektronen und  $\tilde{b}_j(\vec{p})$  zum fermionischen Erzeugungsoperator  $b_j^\dagger(-\vec{p})$  für Positronen.<sup>2</sup> Setzt man (2.12) in (2.5) ein, erhält man den Ausdruck

$$\phi(\vec{p}, t) = \sum_{j=1}^2 \left( u_j(\vec{p}, t) a_j(\vec{p}) + v_j(-\vec{p}, t) b_j^\dagger(-\vec{p}) \right) \quad (2.13)$$

für den Feldoperator  $\phi(\vec{p}, t)$  mit

$$\begin{aligned} u_j(\vec{p}, t) &= (i\gamma^0 \partial_t - \vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}(\vec{p}, t) + m) g^+(\vec{p}, t) W_j, \\ v_j(-\vec{p}, t) &= (i\gamma^0 \partial_t - \vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}(\vec{p}, t) + m) g^-(\vec{p}, t) W_j \end{aligned} \quad (2.14)$$

als linear unabhängige Basisspinoren. Es gelten die fermionischen Antikommutator-Relationen

$$\begin{aligned} \{a_j(\vec{p}), a_i^\dagger(\vec{q})\} &= (2\pi)^3 \delta_{ji} \delta(\vec{p} - \vec{q}), \\ \{b_j(\vec{p}), b_i^\dagger(\vec{q})\} &= (2\pi)^3 \delta_{ji} \delta(\vec{p} - \vec{q}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Alle nicht explizit aufgeführten Antikommutatoren verschwinden.

Betrachtet man den Hamiltonoperator  $\hat{H}$  des Systems, so zeigt sich, dass dieser im Allgemeinen auch Nichtdiagonalelemente besitzt.<sup>3</sup> Damit diese verschwinden, überträgt man einen Teil der Zeitabhängigkeit auf die Operatoren  $a_j$  und  $b_j$ . Dies lässt sich über die unitäre, zeitabhängige Bogoliubov-Transformation

$$\begin{aligned} A_j(\vec{p}, t) &= \alpha(\vec{p}, t) a_j(\vec{p}) - \beta^*(\vec{p}, t) b_j^\dagger(-\vec{p}), \\ B_j^\dagger(-\vec{p}, t) &= \beta(\vec{p}, t) a_j(\vec{p}) + \alpha^*(\vec{p}, t) b_j^\dagger(-\vec{p}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

realisieren. Da es sich um eine unitäre Transformation handeln soll, muss für die Koeffizienten

$$|\alpha(\vec{p}, t)|^2 + |\beta(\vec{p}, t)|^2 = 1 \quad (2.17)$$

<sup>2</sup>Eine kurze Einführung zur Quantisierung des Dirac-Feldes findet sich u.a. in [9].

<sup>3</sup>Eine ausführliche Darstellung der Diagonal- und Nichtdiagonalelemente von  $\hat{H}$  findet sich in [6].

gelten. Für die feste Zeit  $t$  ergeben sich daher die Relationen

$$\begin{aligned} \left\{ A_j(\vec{p}, t), A_i^\dagger(\vec{q}, t) \right\} &= (2\pi)^3 \delta_{ji} \delta(\vec{p} - \vec{q}), \\ \left\{ B_j(\vec{p}, t), B_i^\dagger(\vec{q}, t) \right\} &= (2\pi)^3 \delta_{ji} \delta(\vec{p} - \vec{q}). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Alle anderen Antikommutatoren verschwinden. Die so gefundenen zeitabhängigen Operatoren  $A_j(\vec{p}, t)$  und  $B_j(\vec{p}, t)$  können daher ebenfalls als fermionische Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren interpretiert werden. Ist kein elektrisches Feld angelegt, dann müssen sie mit den Vakuum-Operatoren  $a_j(\vec{p})$  und  $b_j(\vec{p})$  zusammenfallen, weshalb

$$\begin{aligned} \alpha_{vak}(\vec{p}, t) &= 1, \\ \beta_{vak}(\vec{p}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

gilt. In der Situation, in der kein äußeres elektrisches Feld angelegt ist, lässt sich (2.9) analytisch lösen. Für die beiden linear unabhängigen Lösungen  $g_{vak}^\pm(\vec{p}, t)$  ergibt sich mit  $w(\vec{p}) = \sqrt{m^2 + p^2}$

$$g_{vak}^\pm(\vec{p}, t) = \frac{e^{\mp i\omega(\vec{p})t}}{\sqrt{2\omega(\vec{p}) (\omega(\vec{p}) \mp p_z)}}. \quad (2.20)$$

Der ausschließlich impulsabhängige Nenner dient der Normierung der Basisspinoren (2.14). Nur in diesem Fall ohne angelegtes elektrisches Feld, d.h. wenn die Lösungen ebene Wellen mit positiver und negativer Energie sind, ist eine Teilchen/Antiteilchen-Interpretation des quantisierten Dirac-Feldes möglich. Nun benutzt man die aus der Bogoliubov-Transformation gewonnenen zeitabhängigen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren zur Darstellung des Feldoperators  $\phi(\vec{p}, t)$ . Dazu ersetzt man in (2.13) die alten Basisspinoren (2.14) durch neue Basisspinoren  $U_j(\vec{p}, t)$  und  $V_j(-\vec{p}, t)$ . Ihr Zusammenhang

$$\begin{aligned} u_j(\vec{p}, t) &= \alpha(\vec{p}, t)U_j(\vec{p}, t) + \beta(\vec{p}, t)V_j(-\vec{p}, t), \\ v_j(-\vec{p}, t) &= \alpha^*(\vec{p}, t)V_j(-\vec{p}, t) - \beta^*(\vec{p}, t)U_j(\vec{p}, t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

ist durch die Bogoliubov-Transformation gegeben. Dann lässt sich der Feldoperator  $\phi(\vec{p}, t)$  als

$$\phi(\vec{p}, t) = \sum_{j=1}^2 \left( U_j(\vec{p}, t)A_j(\vec{p}, t) + V_j(-\vec{p}, t)B_j^\dagger(-\vec{p}, t) \right) \quad (2.22)$$

schreiben. Für die Spinoren  $U_j(\vec{p}, t)$  und  $V_j(-\vec{p}, t)$  wählt man

$$\begin{aligned} U_j(\vec{p}, t) &= (\gamma^0 \omega(\vec{p}, t) - \vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}(\vec{p}, t) + m) G^+(\vec{p}, t) W_j, \\ V_j(-\vec{p}, t) &= (-\gamma^0 \omega(\vec{p}, t) - \vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}(\vec{p}, t) + m) G^-(\vec{p}, t) W_j. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Sie sind im Fall ohne elektrisches Feld mit den Basisspinoren (2.14) identisch. Die Modenfunk-

tionen  $G^\pm(\vec{p}, t)$  sind dabei durch

$$G^\pm(\vec{p}, t) = \frac{e^{\mp i\Theta(\vec{p}, t_0, t)}}{\sqrt{2\omega(\vec{p}, t) (\omega(\vec{p}, t) \mp \pi_z(p_z, t))}} \quad (2.24)$$

gegeben mit der dynamischen Phase

$$\Theta(\vec{p}, t_0, t) = \int_{t_0}^t \omega(\vec{p}, t') dt'. \quad (2.25)$$

Ohne externes Feld (und für  $t_0 = 0$ )<sup>4</sup> ergibt sich

$$\begin{aligned} \omega(\vec{p}, t) &\rightarrow \omega(\vec{p}), \\ \pi_z(p_z, t) &\rightarrow p_z, \\ \Theta(\vec{p}, t_0, t) &\rightarrow \omega(\vec{p})t. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Vergleicht man dies mit (2.20), so sieht man, dass in diesem Fall, wie behauptet, beide Modenfunktionen und damit alte (2.14) und neue Basisspinoren (2.23) übereinstimmen:<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} G_{vak}^\pm(\vec{p}, t) &= g_{vak}^\pm(\vec{p}, t), \\ U_j^{vak}(\vec{p}, t) &= u_j^{vak}(\vec{p}, t), \\ V_j^{vak}(-\vec{p}, t) &= v_j^{vak}(-\vec{p}, t). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Weiter kann man zeigen, dass in der so gewählten Basis (2.23) der Hamiltonoperator

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \bar{\phi}(\vec{p}, t) \left( \vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}(\vec{p}, t) + m \right) \phi(\vec{p}, t) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{j=1}^2 \omega(\vec{p}, t) \left( A_j^\dagger(\vec{p}, t) A_j(\vec{p}, t) + B_j^\dagger(-\vec{p}, t) B_j(-\vec{p}, t) \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

nun tatsächlich diagonal ist.<sup>6</sup> Im Endeffekt verbleibt nur noch die Bestimmung der Bogoliubov-Koeffizienten  $\alpha(\vec{p}, t)$  und  $\beta(\vec{p}, t)$ . Ihre Form ist bereits durch die Wahl der neuen Basisspinoren (2.23) eindeutig festgelegt. Aus dem Vergleich<sup>7</sup> von (2.13) mit (2.22) ergibt sich

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{p}, t) &= i\epsilon_\perp G^-(\vec{p}, t) [\partial_t - i\omega(\vec{p}, t)] g^+(\vec{p}, t), \\ \beta(\vec{p}, t) &= -i\epsilon_\perp G^+(\vec{p}, t) [\partial_t + i\omega(\vec{p}, t)] g^+(\vec{p}, t). \end{aligned} \quad (2.29)$$

<sup>4</sup> $t_0 \neq 0$  liefert nur einen zusätzlichen konstanten Phasenfaktor.

<sup>5</sup>Dies ist insbesondere konsistent mit (2.19) und (2.21).

<sup>6</sup>Auch hier findet sich eine Darstellung in [6].

<sup>7</sup>Eine ausführliche Rechnung findet sich im Anhang von [5].

Mit  $Q(\vec{p}, t) = \frac{eE(t)\epsilon_{\perp}}{\omega^2(\vec{p}, t)}$  folgt daraus das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(\vec{p}, t) &= \frac{1}{2}Q(\vec{p}, t)\beta(\vec{p}, t)e^{2i\Theta(\vec{p}, t_0, t)}, \\ \dot{\beta}(\vec{p}, t) &= -\frac{1}{2}Q(\vec{p}, t)\alpha(\vec{p}, t)e^{-2i\Theta(\vec{p}, t_0, t)}.\end{aligned}\tag{2.30}$$

Die Ermittlung der Bogoliubov-Koeffizienten ermöglicht schließlich die Berechnung der Teilchendichte der erzeugten Elektron-Positron-Paare. Darauf soll im nächsten Abschnitt genauer eingegangen werden.

## 2.2 Quasiteilchendichte und quantenkinetische Gleichung

Im vorherigen Abschnitt 2.1 wird gezeigt, dass unter Durchführung einer entsprechenden Bogoliubov-Transformation für die Dirac-Gleichung mit ausschließlich zeitabhängigem Viererpotential  $A^{\mu}(t) = (0, A(t)\vec{e}_z)$  ein für alle Zeiten diagonaler Hamiltonoperator (2.28) gefunden werden kann. Der Feldoperator (2.22) enthält in Abwesenheit des elektrischen Feldes  $E(t)$  im Wesentlichen ebene Wellen mit positiver und negativer Energie. In diesem Fall ist eine Teilchen/Antiteilchen-Interpretation möglich. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass für asymptotische Zeiten  $t_{\pm\infty} = t \rightarrow \pm\infty$  ein solch reiner Vakuumzustand gegeben, d.h.  $E(t_{\pm\infty}) = 0$  ist. Außerdem befinde sich das System zur Zeit  $t_{-\infty}$  im Grundzustand  $|0\rangle$ , sodass

$$\begin{aligned}A_j(\vec{p}, t_{-\infty})|0\rangle &= a_j(\vec{p})|0\rangle = 0, \\ B_j(-\vec{p}, t_{-\infty})|0\rangle &= b_j(-\vec{p})|0\rangle = 0\end{aligned}\tag{2.31}$$

gilt. Im Falle der Anwesenheit eines elektrischen Feldes  $E(t)$  sei  $|\Omega(t)\rangle$  der Grundzustand des Systems zur Zeit  $t$ . Da der Hamiltonoperator in  $A_j(\vec{p}, t)$  und  $B_j(-\vec{p}, t)$  diagonal ist, folgt mit

$$A_j(\vec{p}, t)|\Omega(t)\rangle = B_j(-\vec{p}, t)|\Omega(t)\rangle = 0\tag{2.32}$$

die Grundzustandsenergie Null. Ziel ist die Ermittlung der im zeitlichen Verlauf erzeugten Elektronen bzw. Positronen. Wir definieren den Teilchenzahloperator  $n_j^{e^-}(\vec{p})$  erzeugter Elektronen mit Impuls  $p$  und Spin  $j$

$$n_j^{e^-}(\vec{p}) := a_j^{\dagger}(\vec{p})a_j(\vec{p}).\tag{2.33}$$

Dann lässt sich das Skalarprodukt

$$\frac{\langle\Omega(t)|n_j^{e^-}(\vec{p})|\Omega(t)\rangle}{V} =: f_j(\vec{p}, t)\tag{2.34}$$

als eine Art Teilchendichte interpretieren. Für  $t_{-\infty}$  gilt offenkundig  $|\Omega(t_{-\infty})\rangle = |0\rangle$ , dann liefert (2.34) für die Anzahl der erzeugten Elektronen mit Impuls  $\vec{p}$  und Spineinstellung  $j$  pro Volumen  $V$  genau Null. Nach Definition besteht zur Zeit  $t_{\infty}$  die zweite Möglichkeit der Interpretation von  $f_j(\vec{p}, t)$  als Anzahl erzeugter Elektronen pro Volumen  $V$ . Zu anderen Zeiten  $t$  ist dies nicht möglich. Man bezeichnet  $f(\vec{p}, t) = \lim_{V \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^2 f_j(\vec{p}, t)$  daher auch als Quasiteilchendichte.

Nun drückt man den zeitunabhängigen Teilchenzahloperator (2.33) in (2.34) über die (inverse) Bogoliubov-Transformation<sup>8</sup> durch die Operatoren  $A_j(\vec{p}, t)$  und  $B_j(-\vec{p}, t)$  aus und erhält

$$\begin{aligned} f_j(\vec{p}, t) &= \frac{\langle \Omega(t) | |\alpha|^2 A_j^\dagger A_j + \alpha \beta^* A_j^\dagger B_j^\dagger + \alpha^* \beta B_j A_j + |\beta|^2 B_j B_j^\dagger | \Omega(t) \rangle}{V} \\ &= \frac{|\beta(\vec{p}, t)|^2 \delta(0)}{V}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Führt man noch die Summe über  $j$  aus und lässt das Systemvolumen  $V \rightarrow \infty$  gehen, um den divergenten Faktor  $\delta(0)$  zu eliminieren, erhält man für die bereits erwähnte Quasiteilchendichte

$$f(\vec{p}, t) = \lim_{V \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^2 f_j(\vec{p}, t) = 2|\beta(\vec{p}, t)|^2. \quad (2.36)$$

Es ergibt sich also ein direkter Zusammenhang zwischen der Anzahl erzeugter Teilchen und dem Bogoliubov-Koeffizienten  $\beta(\vec{p}, t)$ . Wie in Abschnitt 2.1 gezeigt, ist dieser durch Kenntnis der Modenfunktionen  $g^+(\vec{p}, t)$  und  $G^+(\vec{p}, t)$  eindeutig bestimmt.<sup>9</sup> Um analytische Lösungen zu finden, bietet sich daher der Zugang an, für ein konkretes elektrisches Feld  $E(t)$   $g^+(\vec{p}, t)$  über die Differentialgleichung (2.9) und  $G^+(\vec{p}, t)$  durch die Berechnung der dynamischen Phase  $\Theta(\vec{p}, t_0, t)$  zu ermitteln.<sup>10</sup> Mit dieser Vorgehensweise können, wie in [3] beschrieben, analytische Lösungen für das zeitlich konstante elektrische Feld  $E_0$  und das Sauter-Feld  $E(t) = E_0 \text{sech}^2(t/\tau)$  gefunden werden. Vor allem das Ergebnis zu letzterem soll als Test für die Genauigkeit der dieser Arbeit zugrunde liegenden numerischen Resultate dienen, deshalb greift Abschnitt 4.1 den Spezialfall des Sauter-Pulses noch einmal ausführlicher auf.

Für einen numerischen Zugang zur Ermittlung der Quasiteilchendichte  $f(\vec{p}, t)$  für unterschiedliche elektrische Felder  $E(t)$  bietet es sich an, das Differentialgleichungssystem (2.30) für die Bogoliubov-Koeffizienten zu nutzen. Unter Einführung der Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} \rho(\vec{p}, t) &= -2 \text{Re} (\alpha^*(\vec{p}, t) \beta(\vec{p}, t) e^{2i\Theta(\vec{p}, t_0, t)}), \\ \xi(\vec{p}, t) &= -2 \text{Im} (\alpha^*(\vec{p}, t) \beta(\vec{p}, t) e^{2i\Theta(\vec{p}, t_0, t)}) \end{aligned} \quad (2.37)$$

---

<sup>8</sup>Vgl. Gl. (2.16).

<sup>9</sup>Vgl. Gl. (2.29).

<sup>10</sup>Vgl. Gl. (2.25).

erhält man schließlich die quantenkinetische Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{f}(\vec{p}, t) &= Q(\vec{p}, t)\rho(\vec{p}, t), \\ \dot{\rho}(\vec{p}, t) &= Q(\vec{p}, t)(1 - f(\vec{p}, t)) - 2\omega(\vec{p}, t)\xi(\vec{p}, t), \\ \dot{\xi}(\vec{p}, t) &= 2\omega(\vec{p}, t)\rho(\vec{p}, t). \end{aligned} \tag{2.38}$$

zur Bestimmung der Quasiteilchendichte  $f(\vec{p}, t)$  mit den Anfangsbedingungen

$$f(\vec{p}, t_{-\infty}) = \rho(\vec{p}, t_{-\infty}) = \xi(\vec{p}, t_{-\infty}) = 0. \tag{2.39}$$

Dieses gewöhnliche Differentialgleichungssystem bildet die Grundlage dieser Arbeit und ihrer numerischen Resultate.

Neben der Teilchendichte  $f(\vec{p}, t_{\infty})$  existiert eine zweite, für die Quantisierung der erzeugten Elektron-Positron-Paare bedeutsame Größe, die über den Impulsraum abintegrierte Anzahl-dichte

$$n := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(\vec{p}, t_{\infty}). \tag{2.40}$$

# 3 Vorbetrachtungen

In Abschnitt 2.2 wird gezeigt, dass das gewöhnliche Differentialgleichungssystem (2.38) als eine Form der quantenkinetischen Gleichung zur Bestimmungsgleichung der Quasiteilchendichte  $f(\vec{p}, t)$  wird. Für Zeiten  $t \rightarrow \pm\infty$  kann sie als Anzahldichte von Elektronen mit dem Impuls  $\vec{p}$  interpretiert werden. Dieses Gleichungssystem soll unter Zuhilfenahme der Integrationsroutine „`scipy.integrate.odeint`“ für verschiedene Impulse  $\vec{p}$  numerisch gelöst werden.<sup>1</sup> Die verwendete Programmiersprache ist Python 2.7.<sup>2</sup> Um Gl. (2.38) numerisch behandeln zu können, ist es notwendig, eine praktikable dimensionslose Darstellung zu finden. Doch zuerst soll der Frage nachgegangen werden, wie sich die Randbedingungen bei asymptotischen Zeiten  $t \rightarrow \pm\infty$  numerisch implementieren lassen und welche Felder für diese Arbeit in Frage kommen.

## 3.1 Zeitliche Randbedingungen

Wie in Kapitel 2 diskutiert, ist eine Interpretation der Quasiteilchendichte  $f(\vec{p}, t)$  als reale Teilchendichte nur in den Grenzfällen möglich, in denen kein externes elektrisches Feld  $E(t)$  angelegt ist. In Abschnitt 2.2 wird das angelegte elektrische Feld  $E$  so definiert, dass diese Bedingung für asymptotische Zeiten  $t_{\pm\infty} = t \rightarrow \pm\infty$  erfüllt sein soll; dann gilt

$$E(t_{\pm\infty}) = 0. \tag{3.1}$$

Formal lassen sich numerisch nur elektrische Felder  $E(t)$  behandeln, die zu endlicher Zeit  $t_{an}$  ein- und zu endlicher Zeit  $t_{aus}$  wieder ausgeschaltet werden, d.h.

$$E(t < t_{an}) = E(t > t_{aus}) = 0. \tag{3.2}$$

Diese Arbeit beschränkt sich auf die Rechteckfunktion  $r_a$  als Ein- und Ausschaltfunktion mit

$$r_a := \Theta(t_a - |t|) \tag{3.3}$$

und der endlichen Einschaltzeit  $t_{an} = -t_a$  und Ausschaltzeit  $t_{aus} = t_a$  mit  $t_a > 0$ . Solche Felder erfüllen offenkundig die Randbedingung (3.1) und haben den Vorteil, dass die Interpretation

---

<sup>1</sup><http://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html>.

<sup>2</sup><http://www.python.org/>

der Quasiteilchendichte  $f(\vec{p}, t)$  als verbleibende reale Teilchendichte bereits für endliche Zeiten  $t > t_a$  möglich wird. Für exponentiell abfallende Felder, die (3.1) automatisch erfüllen, wie die Sauter- und Gauß-Feldkonfiguration,<sup>3</sup> bietet es sich an die Wahl der Ein- und Ausschaltzeit  $t_a$  so zu wählen, dass die Bedingung  $E(t_a)/E_{max}(t_0) \rightarrow 0$  erfüllt ist, denn dann lassen sich die ermittelten Teilchendichten  $f(\vec{p}, t > t_a)$  als Teilchendichten  $f(\vec{p}, t_\infty)$  der reinen Felder ohne Ein- und Ausschaltfunktion interpretieren. Für das Sauter-Feld lässt sich unter dieser Vorgehensweise das in [3] analytisch gefundene Ergebnis sehr genau reproduzieren.<sup>4</sup>

## 3.2 Feldkonfigurationen

Wie in Abschnitt 2.1 festgelegt, wird das rein zeitabhängige Viererpotential (2.1) betrachtet. Wir wählen für das Vektorpotential

$$A(t) = E_0 \tau \cdot h(t/\tau). \quad (3.4)$$

Dabei ist  $\tau$  die inverse (Kreis-)frequenz und damit maßgebend für die Energie der virtuellen Photonen des jeweiligen Feldes. Die Funktion  $h(t/\tau)$  liefert die explizite Zeitabhängigkeit und bestimmt damit die Form des angelegten Feldes. Außerdem muss nach (3.2) gelten  $h(|t|/\tau > t_a/\tau) = 0$ . Unter Einführung der dimensionslosen Zeit  $T = \frac{t}{\tau}$  erhält man für das elektrische Feld

$$E(T) = -E_0 \cdot \frac{dh(T)}{dT} = -E_0 \cdot h'(T). \quad (3.5)$$

Außerdem wird die Superposition zweier Felder mit unterschiedlichen Amplituden  $E_{0,1}$ ,  $E_{0,2}$  und Formfunktionen  $h_1(T)$  und  $h_2(\sigma T)$  betrachtet. Dabei ist  $\sigma = \tau_1/\tau_2$  das Verhältnis der Zeitkonstanten von erstem und zweitem Feld. Dann ist  $T = t/\tau_1$  die dimensionslose Zeit bezüglich des ersten Feldes. Für die Funktionen  $h_i$  gelten weiterhin oben angegebene Eigenschaften, allerdings unter der Voraussetzung, dass beide die identische Ein- und Ausschaltzeit  $t_a$  besitzen. Bei exponentiell abfallenden Funktionen soll wiederum angenommen werden können, dass  $E(t_a)/E_{max}(t_0) \rightarrow 0$  erfüllt ist und wir damit die Teilchendichte  $f(\vec{p}, t_\infty)$  des Feldes ohne Ein- und Ausschaltfunktion erhalten.

Für das Vektorpotential  $A(T)$  und das elektrische Feld  $E(T)$  der Superposition folgt

$$\begin{aligned} A(T) &= E_{0,1} \tau_1 \cdot h_1(T) + E_{0,2} \tau_2 \cdot h_2(\sigma T), \\ E(T) &= -E_{0,1} \cdot h'_1(T) - E_{0,2} \cdot h'_2(T_0) \Big|_{T_0=\sigma T}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Zur Untersuchung des assistierten Schwinger-Effektes bedarf es der Überlagerung eines starken,

<sup>3</sup>Vgl. Abschnitt 3.2.

<sup>4</sup>Vgl. Abschnitt 4.1.

niederfrequenten Feldes mit  $E_{0,1} \approx E_c$  und  $\tau_1 \gg 1/m$  mit einem schwachen hochfrequenten Feld, charakterisiert durch  $E_{0,2} \ll E_c$  und  $\tau_2 \approx 1/m$ .

### 3.2.1 Sauter-Konfiguration

(i) Für die Formfunktionen der Sauter-Konfiguration soll gelten

$$\begin{aligned} h_{\text{Sauter}}(T) &= h_1(T) = h_2(T) = -\Theta(T_a - |T|)\tanh(T) \stackrel{E(T_a)/E_{\text{max}}(T_0) \rightarrow 0}{=} -\tanh(T), \\ h'_{\text{Sauter}}(T) &= h'_1(T) = h'_2(T) = -\Theta(T_a - |T|)\text{sech}^2(T) \stackrel{E(T_a)/E_{\text{max}}(T_0) \rightarrow 0}{=} -\text{sech}^2(T). \end{aligned} \quad (3.7)$$

(ii) Der einzelne Sauter-Puls ist dann charakterisiert durch

$$\begin{aligned} A(T) &\stackrel{E(T_a)/E_{\text{max}}(T_0) \rightarrow 0}{=} -E_0\tau \cdot \tanh(T), \\ E(T) &\stackrel{E(T_a)/E_{\text{max}}(T_0) \rightarrow 0}{=} E_0 \cdot \text{sech}^2(T). \end{aligned} \quad (3.8)$$

(iii) Die Superposition zweier Sauter-Pulse ergibt

$$\begin{aligned} A(T) &\stackrel{E(T_a)/E_{\text{max}}(T_0) \rightarrow 0}{=} -E_{0,1}\tau_1 \cdot \tanh(T) - E_{0,2}\tau_2 \cdot \tanh(\sigma T), \\ E(T) &\stackrel{E(T_a)/E_{\text{max}}(T_0) \rightarrow 0}{=} E_{0,1} \cdot \text{sech}^2(T) + E_{0,2} \cdot \text{sech}^2(\sigma T). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die Funktion  $\text{sech}(T)$  ist der inverse Kosinus Hyperbolicus

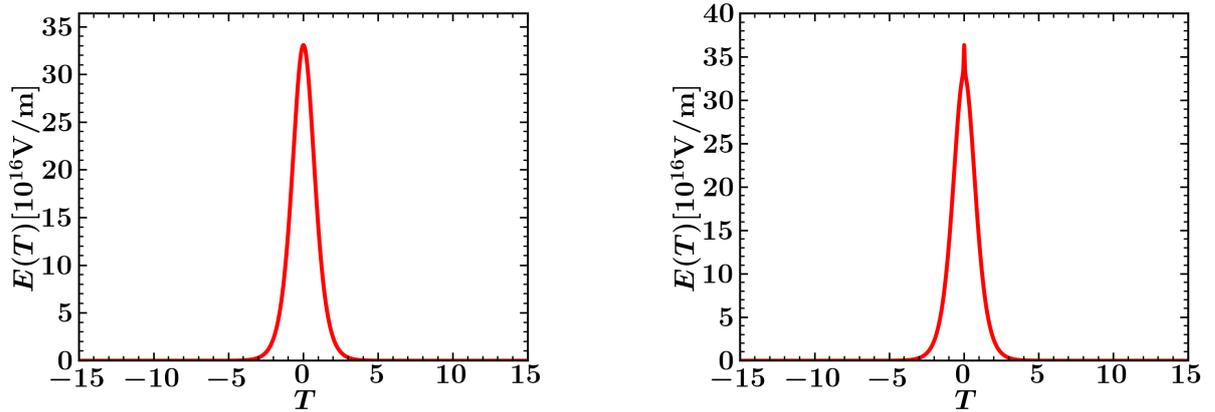
$$\text{sech}^2(T) = \frac{1}{\cosh^2(T)}. \quad (3.10)$$

In Abb. 3.1 sind der einzelne starke Puls  $E_{0,1} = 0.25E_c$  und seine Überlagerung mit dem schwachen, hochfrequenten Puls  $\tau_2 = 4 \cdot 10^{-6}(\text{eV})^{-1} \approx 2/m$  dargestellt.

### 3.2.2 Gauß-Konfiguration

(i) Für die Formfunktionen der Gauß-Konfiguration soll gelten

$$\begin{aligned} h_{\text{Gauß}}(T) &= h_1(T) = h_2(T) = -\Theta(T_a - |T|)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\text{erf}\left(\frac{T}{\sqrt{2}}\right) \stackrel{E(T_a)/E_{\text{max}}(T_0) \rightarrow 0}{=} -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\text{erf}\left(\frac{T}{\sqrt{2}}\right), \\ h'_{\text{Gauß}}(T) &= h'_1(T) = h'_2(T) = -\Theta(T_a - |T|)\exp\left(-\frac{T^2}{2}\right) \stackrel{E(T_a)/E_{\text{max}}(T_0) \rightarrow 0}{=} -\exp\left(-\frac{T^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.11)$$



**Abbildung 3.1:** Links: Einzelner starker Sauter-Puls  $E_1(T)$  mit  $E_{0,1} = 0.25E_c$  und  $\tau_1 = 1 \cdot 10^{-4}(\text{eV})^{-1}$ . Rechts: Überlagerung des starken Pulses  $E_1(t)$  mit dem schwachen, hochfrequenten Puls  $E_2(T)$ , charakterisiert durch  $E_{0,2} = 0.1E_{0,1}$  und  $\tau_2 = 4 \cdot 10^{-6}(\text{eV})^{-1}$ .

(ii) Der einzelne Gauss-Puls ist dann charakterisiert durch

$$\begin{aligned} A(T) &\stackrel{E(T_a)/E_{max}(T_0) \rightarrow 0}{=} -E_0\tau \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{T}{\sqrt{2}}\right), \\ E(T) &\stackrel{E(T_a)/E_{max}(T_0) \rightarrow 0}{=} E_0 \cdot \exp\left(-\frac{T^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

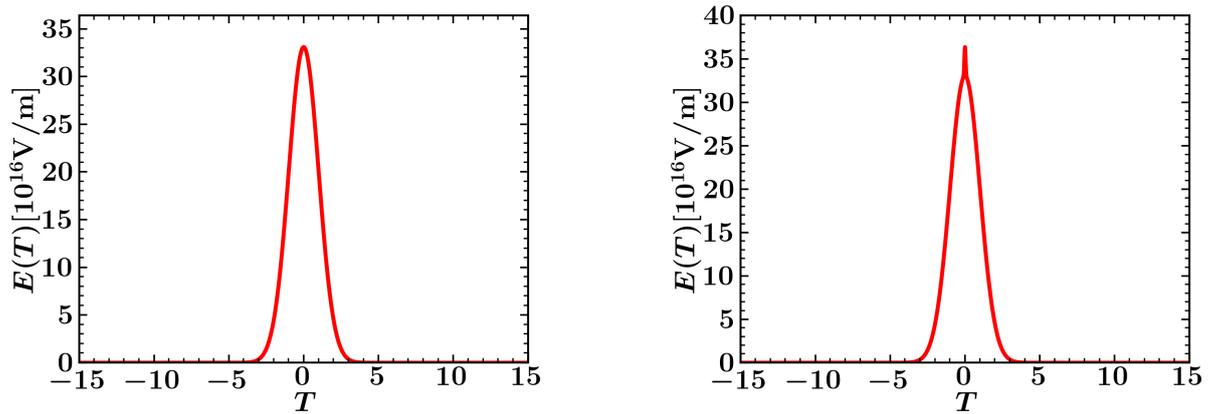
(iii) Die Superposition zweier Gauß-Pulse ergibt

$$\begin{aligned} A(T) &\stackrel{E(T_a)/E_{max}(T_0) \rightarrow 0}{=} -E_{0,1}\tau_1 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{T}{\sqrt{2}}\right) - E_{0,2}\tau_2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma T}{\sqrt{2}}\right), \\ E(T) &\stackrel{E(T_a)/E_{max}(T_0) \rightarrow 0}{=} E_{0,1} \cdot \exp\left(-\frac{T^2}{2}\right) + E_{0,2} \cdot \exp\left(-\frac{(\sigma T)^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Die Funktion  $\operatorname{erf}(T)$  ist definiert als

$$\operatorname{erf}(T) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^T d\nu e^{-\nu^2} \quad (3.14)$$

und wird in der Literatur auch als Gaußsche Fehlerfunktion bezeichnet. In Abb. 3.2 sind der einzelne starke Puls  $E_{0,1} = 0.25E_c$  und seine Überlagerung mit dem schwachen, hochfrequenten Puls  $\tau_2 = 4 \cdot 10^{-6}(\text{eV})^{-1} \approx 2/m$  dargestellt.



**Abbildung 3.2:** Links: Einzelner starker Gauß-Puls  $E_1(t)$  mit  $E_{0,1} = 0.25E_c$  und  $\tau_1 = 1 \cdot 10^{-4}(\text{eV})^{-1}$ . Rechts: Überlagerung des starken Pulses  $E_1(T)$  mit dem schwachen, hochfrequenten Puls  $E_2(T)$ , charakterisiert durch  $E_{0,2} = 0.1E_{0,1}$  und  $\tau_2 = 4 \cdot 10^{-6}(\text{eV})^{-1}$ .

### 3.2.3 Sauter-Plus-Sinus-Konfiguration

(i) Für die Formfunktionen der Sauter-Plus-Sinus-Konfiguration soll

$$\begin{aligned}
 h_1(T) &= h_{\text{Sauter}}(T), \\
 h'_1(T) &= h'_{\text{Sauter}}(T), \\
 h_2(T) &= h_{\text{Sinus}}(T) = \Theta(T_a - |T|) \cdot \cos(T), \\
 h'_2(T) &= h'_{\text{Sinus}}(T) = -\Theta(T_a - |T|) \cdot \sin(T)
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

gelten.<sup>5</sup>

(ii) Das einzelne Sinus-Feld ist dann charakterisiert durch

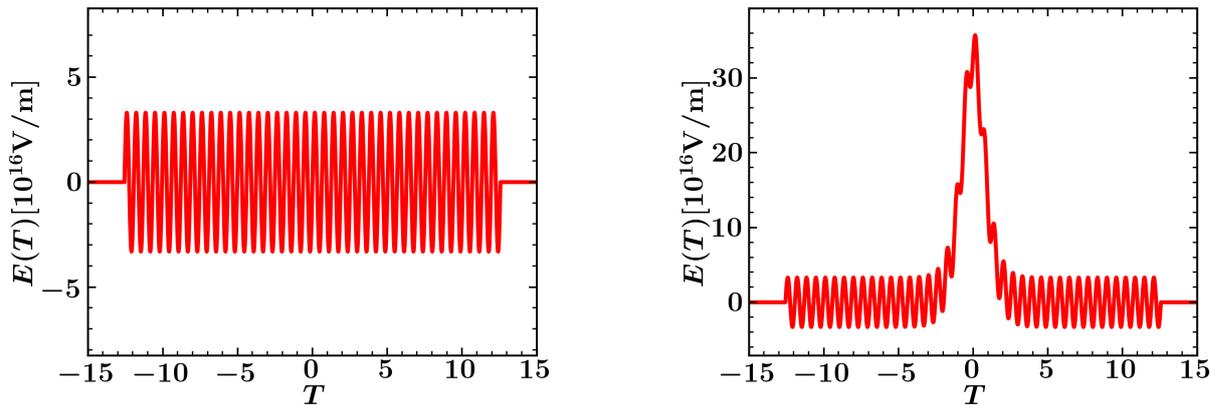
$$\begin{aligned}
 A(T) &= \Theta(T_a - |T|)E_0\tau \cdot \cos(T), \\
 E(T) &= \Theta(T_a - |T|)E_0 \cdot \sin(T).
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

(iii) Die Superposition aus Sauter-Puls und Sinus-Feld ergibt

$$\begin{aligned}
 A(T) &= \Theta(T_a - |T|)(-E_{0,1}\tau_1 \cdot \tanh(T) + E_{0,2}\tau_2 \cdot \cos(\sigma T)), \\
 E(T) &= \Theta(T_a - |T|)(E_{0,1} \cdot \text{sech}^2(T) + E_{0,2} \cdot \sin(\sigma T)).
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

In Abb. 3.3 sind das einzelne hochfrequente Sinus-Feld  $E_2(t)$  mit  $\tau_2 = 1 \cdot 10^{-5}(\text{eV})^{-1}$  und die Überlagerung mit dem starken Sauter-Puls  $E_1(T)$  mit  $E_{0,1} = 0.25E_c$  dargestellt.

<sup>5</sup>Da  $\sin(\pm\infty) \neq 0$  ist, muss an dieser Stelle die Heavyside-Funktion  $\Theta$  tatsächlich stehengelassen werden. Wie in [8] gezeigt wird, hängt die erzeugte Teilchendichte  $f(\vec{p}, T > T_a)$  maßgeblich von der Ein- und Ausschaltzeit  $T_a$  ab.



**Abbildung 3.3:** Links: Einzelnes Sinus-Feld  $E_2(T)$  mit  $E_{0,2} = 0.025E_c$  und  $\tau_2 = 1 \cdot 10^{-5}(\text{eV})^{-1}$ . Rechts: Überlagerung des hochfrequenten Sinus-Feldes  $E_2(T)$  mit dem starken Sauter-Puls  $E_1(T)$ , charakterisiert durch  $E_{0,1} = 0.25E_c$  und  $\tau_1 = 1 \cdot 10^{-4}(\text{eV})^{-1}$ .

### 3.3 Dimensionslose Darstellung

Damit das gewöhnliche Differentialgleichungssystem (2.38) numerisch effektiv gelöst werden kann, sodass eine Untersuchung der Quasiteilchendichte  $f(\vec{p}, t)$  für eine möglichst große Bandbreite an verschiedenen Parametereinstellungen möglich wird, bedarf es der Überführung von (2.38) in eine dimensionslose Darstellung. Dazu sollen zunächst in Unterabschnitt 3.3.1 die entsprechenden dimensionslosen Parameter definiert und diskutiert werden. In Abschnitt 3.3.2 folgt schließlich für die in Abschnitt 3.2 getroffene Wahl an Feldkonfigurationen eine adäquate dimensionslose Darstellung der quantenkinetischen Gleichung (2.38).

#### 3.3.1 Dimensionslose Parameterlandschaft

Im Kapitel 1 ist festgehalten, dass die Art und Weise der Paarerzeugung direkt mit den Eigenschaften der vorliegenden Feldkonfiguration, d.h. mit den Eigenschaften des Vektorpotentials  $A(t)$  und des elektrischen Feldes  $E(t)$  verknüpft ist. Für die in Abschnitt 3.2 diskutierten einzelnen Felder impliziert dies eine zweidimensionale Parameterlandschaft. Dabei bestimmt  $\tau$  die Energie  $E_{\text{photon}} = 1/\tau$  der virtuellen Photonen des Feldes und  $E_0$  dessen Amplitude. Wie in Kapitel 1 dargestellt, unterscheidet man bei der betrachteten Elektron-Positron-Paarerzeugung grundsätzlich zwischen zwei Regimen. Für Feldamplituden  $E_0 \approx E_C$  und niedrige Frequenzen  $1/\tau \ll m$  dominiert die Paarerzeugung durch Tunnelereignisse, bezeichnet als Schwinger-Paarerzeugung.<sup>6</sup> Im Fall deutlich kleinerer Amplituden  $E_0 \ll E_C$  ist sie exponentiell unterdrückt. Für Frequenzen  $1/\tau \approx m$  steigt die Wahrscheinlichkeit der Absorption mehrerer Photonen der Energie  $E_{\text{photon}} = 1/\tau$  zur Erzeugung eines Elektron-Positron-Paares. Da dies

<sup>6</sup>Vgl. Abschnitt 1.2.

nur in zeitabhängigen Feldern möglich ist, spricht man auch von dynamischer Paarerzeugung.<sup>7</sup> Beide Parameter  $E_0$  und  $\tau$  bestimmen das Differentialgleichungssystem (2.38) vollständig, sind jedoch nicht dimensionslos und eignen sich somit nicht für die angestrebten numerischen Berechnungen. Man definiert deshalb die dimensionslosen Größen

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{m}{eE_0\tau} = \frac{E_C}{E_0m\tau}, \\ \chi &= m\tau.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Die Größe  $\gamma$ , auch als Keldysh-Parameter bezeichnet, wird bereits in Abschnitt 1.2 eingeführt. Demnach korrespondiert der Fall  $\gamma \ll 1$  mit dem Regime der Schwinger-Paarerzeugung. Für die dimensionslose Größe  $\chi$  ergibt sich die Bedingung  $\chi \gg 1$ .

Im Fall  $\gamma \gg 1$  ist der Tunneleffekt stark unterdrückt. Eine Paarerzeugung ist effektiv nur noch durch die Absorbtion von Photonen gegeben, beruht also auf dem Effekt der dynamischen Paarerzeugung. Der Fall  $\chi_0 = 0.5$  korrespondiert mit  $E_{\text{Photon}} = m/\chi_0 = 2m$ , d.h. für Parameter  $\chi \leq \chi_0$  ist die Absorbtion eines einzigen Photons ausreichend, um ein Elektron-Positron-Paar zu erzeugen.

Damit ist gezeigt, dass unter Einführung der dimensionslosen Größen  $\gamma$  und  $\chi$  eine zu  $E_0$  und  $\tau$  äquivalente zweidimensionale Parameterlandschaft zur Beschreibung der Paarerzeugung gefunden ist. Im Fall der Superposition zweier Felder, ist sie entsprechend vierdimensional, charakterisiert durch  $E_{0,1}$ ,  $E_{0,2}$ ,  $\tau_1$  und  $\tau_2$ . Mit dem in Abschnitt 3.2 eingeführten dimensionslosen Frequenzverhältnis der einzelnen Felder  $\sigma$ , lässt sich auch hier eine äquivalente dimensionslose Darstellung finden, die nun charakterisiert ist durch

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\tau_1}{\tau_2}, \\ \chi &= m\tau_1, \\ \gamma_1 &= \frac{E_C}{E_{0,1}m\tau_1}, \\ \gamma_2 &= \frac{E_C}{E_{0,2}m\tau_2}.\end{aligned}\tag{3.19}$$

### 3.3.2 Dimensionslose Darstellung der quantenkinetischen Gleichung

Mit denen im vorigen Unterabschnitt 3.3.1 eingeführten dimensionslosen Parametern ist es nun möglich, die quantenkinetische Gleichung (2.38) ebenfalls dimensionslos darzustellen. Sie besitzt eine Abhängigkeit von den Funktionen  $Q(\vec{p}, t) = \frac{eE(t)\epsilon_{\perp}}{\omega^2(\vec{p}, t)}$  und  $\omega^2(\vec{p}, t) = \epsilon_{\perp}^2 + (p_{\parallel} - eA(t))^2$ . Es liegt nahe, die im Abschnitt 3.2 eingeführte dimensionslose Zeit  $T = t/\tau$  im Folgenden weiter zu verwenden. Weiterhin definiert man den dimensionslosen Impuls  $\vec{\Pi} = \vec{p}/m$ .

Als erstes wird der Fall der Superposition zweier Felder aus Gl. (3.6) betrachtet. Den Fall eines

---

<sup>7</sup>Siehe Abschnitt 1.3.

einzelnen Feldes, charakterisiert durch die Gln. (3.4) und (3.5), erhält man dann automatisch, indem  $h_2(T) = 0$  gesetzt wird. Mit denen in Gl. (3.19) zur Verfügung stehenden Parametern, lassen sich die dimensionslosen Funktionen

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}^2(\vec{\Pi}, T) &:= \frac{\omega^2}{m^2} = \tilde{\epsilon}_\perp^2 + \left( \Pi_\parallel - \frac{h_1(T)}{\gamma_1} - \frac{h_2(\sigma T)}{\gamma_2} \right)^2, \\ \tilde{Q}(\vec{\Pi}, T) &:= \tau_1 Q = -\frac{\tilde{\epsilon}_\perp}{\tilde{\omega}^2} \left( \frac{h'_1(T)}{\gamma_1} + \frac{\sigma h'_2(T_0)|_{T_0=\sigma T}}{\gamma_2} \right)\end{aligned}\quad (3.20)$$

mit  $\tilde{\epsilon}_\perp = \sqrt{1 + \Pi_\perp}$  einführen. Das Differentialgleichungssystem (2.38) ist in einer dimensionslosen Darstellung dann gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{df(\vec{\Pi}, T)}{dT} &= \tilde{Q}(\vec{\Pi}, T)\rho(\vec{\Pi}, T), \\ \frac{d\rho(\vec{\Pi}, T)}{dT} &= \tilde{Q}(\vec{\Pi}, T)(1 - f(\vec{\Pi}, T)) - 2\chi\tilde{\omega}(\vec{\Pi}, T)\xi(\vec{\Pi}, T), \\ \frac{d\xi(\vec{\Pi}, T)}{dT} &= 2\chi\tilde{\omega}(\vec{\Pi}, T)\rho(\vec{\Pi}, T)\end{aligned}\quad (3.21)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$f(\vec{p}, T_{-\infty}) = \rho(\vec{\Pi}, T_{-\infty}) = \xi(\vec{\Pi}, T_{-\infty}) = 0. \quad (3.22)$$

Ist nur ein einzelnes Feld angelegt, gegeben durch die Gln. (3.4) und (3.5), reduziert sich die Parameterlandschaft auf zwei Dimensionen, charakterisiert durch Gl. (3.18). Dann gilt Gl. (3.21) analog und für die dimensionslosen Funktionen  $\tilde{Q}$  und  $\tilde{\omega}$  ergibt sich

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}^2(\vec{\Pi}, T) &= \tilde{\epsilon}_\perp^2 + \left( \Pi_\parallel - \frac{h(T)}{\gamma} \right)^2, \\ \tilde{Q}(\vec{\Pi}, T) &= -\frac{\tilde{\epsilon}_\perp}{\tilde{\omega}^2} \frac{h'(T)}{\gamma}.\end{aligned}\quad (3.23)$$

# 4 Numerische Resultate

## 4.1 Test der Numerik am Beispiel der Sauter-Konfiguration

In diesem Abschnitt betrachten wir die Sauter-Konfiguration, die in Unterabschnitt 3.2.1 definiert wird. Bezüglich der erzeugten Quasiteilchendichte  $f(\vec{p}, t)$  finden sich in der Literatur bereits zahlreiche Untersuchungen.<sup>1</sup> Dies ist vor allem dem Fakt geschuldet, dass für den einzelnen Sauter-Puls eine analytische Lösung der erzeugten Teilchendichte  $f(\vec{p}, t_\infty)$  hergeleitet werden kann. Diese Ergebnisse sollen genutzt werden, um die Genauigkeit der numerischen Resultate zu testen.

### 4.1.1 Analytische Lösung der erzeugten Teilchendichte

Für den in Abschnitt 1.2 beschriebenen klassischen Schwinger-Effekt, d.h. für die Paarerzeugung aus dem Vakuum durch ein angelegtes konstantes elektrisches Feld der Stärke  $E_0$ , lässt sich eine analytische Lösung der quantenkinetischen Gleichung (2.38) finden.<sup>2</sup> Die asymptotische Quasiteilchendichte  $f_{const}(\vec{p}, t_\infty)$  ist dann durch

$$f_{const}(\vec{p}, t_\infty) = 2 \exp\left(-\pi \left[\frac{E_c \tilde{\epsilon}_1^2}{E_0}\right]\right) \quad (4.1)$$

gegeben. Ebenso kann, wie in [3] gezeigt, eine analytische Lösung für die erzeugte Quasiteilchendichte  $f(\vec{p}, t)$  der Sauter-Feldkonfiguration 3.2.1 hergeleitet werden. Sie lässt sich auf hypergeometrische Funktionen zurückführen. Für asymptotische Zeiten  $t \rightarrow \infty$  erhält man

$$f(\vec{p}, t_\infty) = 2 \frac{\sinh(\pi[eE_0\tau^2 + \kappa^- - \kappa^+]) \sinh(\pi[eE_0\tau^2 - \kappa^- + \kappa^+])}{\sinh(2\pi\kappa^-) \sinh(2\pi\kappa^+)} \quad (4.2)$$

mit  $\kappa^\pm = \frac{\tau}{2} \sqrt{\epsilon_1^2 + (p_\parallel \pm eE_0\tau)^2}$ . Für Feldstärken  $E_0 \approx E_c$  und Frequenzen bzw. Pulsbreiten  $1/\tau \ll m$  ( $\chi \gg 1$ ) sollte sich nach Gl. (1.9) die ermittelte Teilchendichte (4.2) annähernd wie die durch das konstante Feld erzeugte aus Gl. (4.1) verhalten.<sup>3</sup> Der Effekt der klassischen

---

<sup>1</sup>Vgl. Artikel [7].

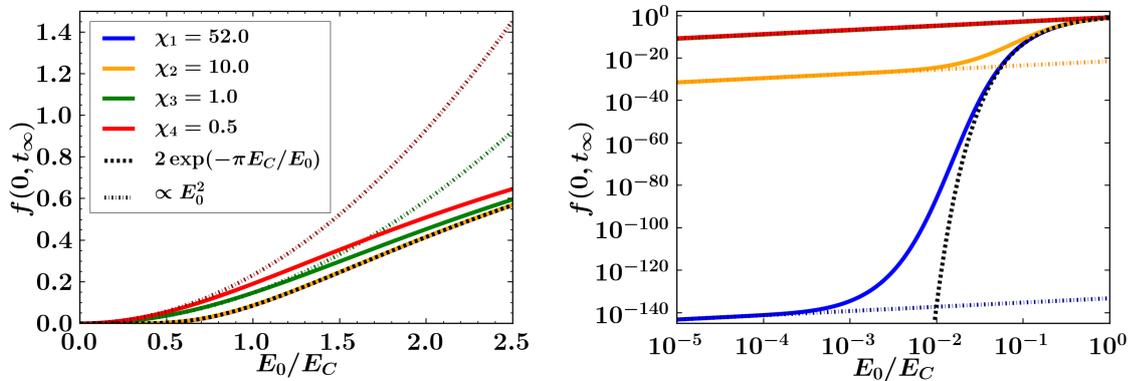
<sup>2</sup>Eine Herleitung findet sich u.a. in [3].

<sup>3</sup>Vgl. Anhang A.1.

Schwinger-Paarerzeugung dominiert. Für  $E_0 \ll E_c$  und für Pulsbreiten  $1/\tau \approx m$  ( $\chi \approx 1$ ) sollte keine exponentielle Abhängigkeit mehr vorhanden sein, da Paare, wie in Abschnitt 1.3 diskutiert, hauptsächlich durch Multi-Photonen-Absorption erzeugt werden. In Anhang A.2 ist gezeigt, dass sich  $f(0, t_\infty)$  für  $\gamma \gg 1$  dann näherungsweise wie

$$f(0, t_\infty) \stackrel{\gamma \gg 1}{\approx} 2 \frac{\pi^2 \chi^2}{\sinh^2(\pi \chi)} \frac{1}{\gamma^2} \propto E_0^2 \quad (4.3)$$

verhält. Ein ähnliches Verhalten zeigt Gl. (1.10). Zur Bestätigung dieser Ergebnisse ist in Abb. 4.1  $f(0, t_\infty)$  in Abhängigkeit der Feldstärke  $E_0$  für verschiedene Frequenzen bzw. Breiten  $1/\tau$  dargestellt.

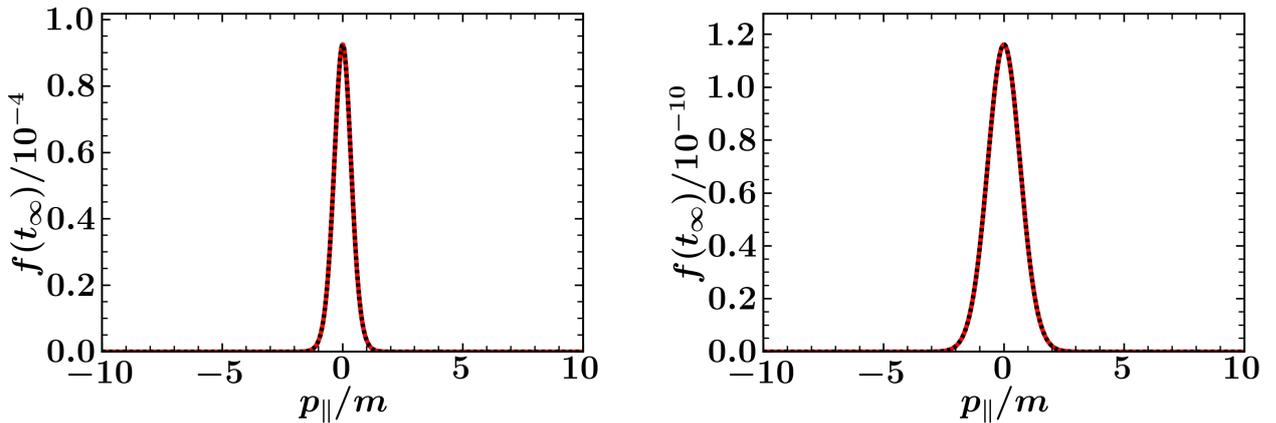


**Abbildung 4.1:** Verhalten der Quasiteilchendichte  $f(0, t_\infty)$  der Sauter-Feldkonfiguration in Abhängigkeit der Feldstärke  $E_0$  für verschiedene Parameter  $\chi = m\tau$  (siehe Legende) in einfach logarithmischer (links) und doppelt logarithmischer Darstellung (rechts, Linienstil wie in linker Abbildung).

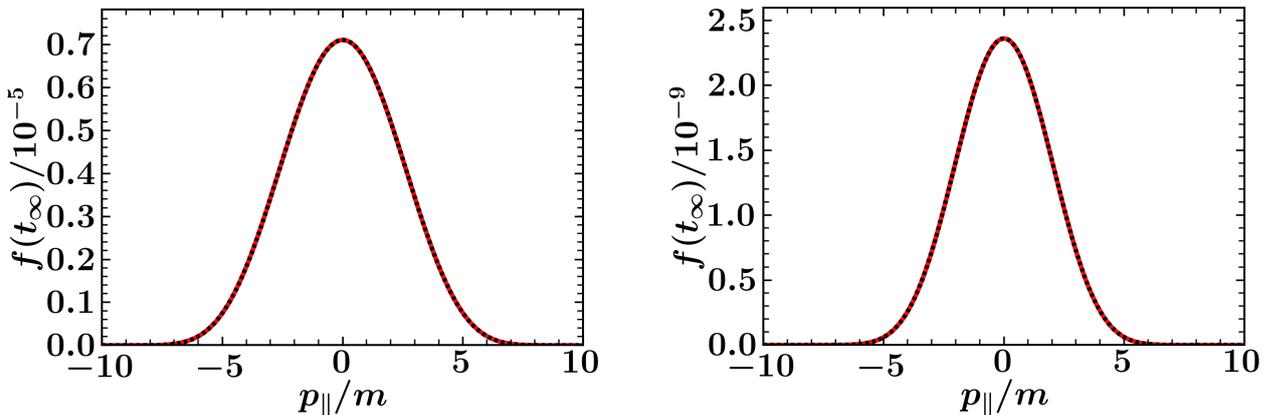
### 4.1.2 Numerische und analytische Resultate

Es sollen die für die Sauter-Feldkonfiguration durch numerische Integration der dimensionslosen Differentialgleichung (3.21) gewonnenen Resultate mit der analytischen Lösung (4.2) verglichen werden. In Kapitel 3 wird diskutiert, dass für  $E(T_a)/E_{max}(T_0) \rightarrow 0$  die Interpretation der resultierenden Teilchendichte  $f(\vec{p}, t > t_a)$  als erzeugte Teilchendichte  $f(\vec{p}, t_\infty)$  des Sauter-Pulses ohne Ein- und Ausschaltfunktion möglich ist. Für die gewählte dimensionslose Ein- und Ausschaltzeit  $T_a = 13$  ergibt sich schließlich  $E(T_a)/E_{max}(T_0) = 1/\cosh^2(13) \approx 2 \cdot 10^{-11}$ . In den Abbn. 4.2 und 4.3 erkennt man, dass die numerischen und analytischen Resultate sehr genau übereinstimmen. Eine quantitative Abschätzung der Genauigkeit erhält man z.B. über das Verhältnis der in Feldrichtung erzeugten Paare mit dem Impuls  $p_{\parallel}$ . Wir betrachten also den Quotienten  $\Gamma := n(p_{\perp})_{\text{numerisch}}/n(p_{\perp})_{\text{analytisch}}$ . Dabei ist  $n(p_{\perp}) = \int dp_{\parallel} f(p_{\perp}, p_{\parallel}, t_\infty)$  die über den Impulsraum parallel zur Feldrichtung abintegrierte Anzahldichte für einen gegebenen

Impuls  $p_{\perp}$  senkrecht zum Feld. Dann gilt im Idealfall  $\Gamma = 1$ . Wie auch in den folgenden Abschnitten wird zur numerischen Integration der Teilchendichte die Simpsonregel aus dem Paket „scipy.integrate.simps“ verwendet.<sup>4</sup> Da für große  $|p_{\parallel}| \gg 1$  die Teilchendichte stark unterdrückt ist, wählen wir die Integrationsgrenzen  $a = \pm p_{\parallel,a}$  stets so, dass  $f(a, t_{\infty})/f_{\max}(p_{\parallel}, t_{\infty}) \rightarrow 0$  strebt.



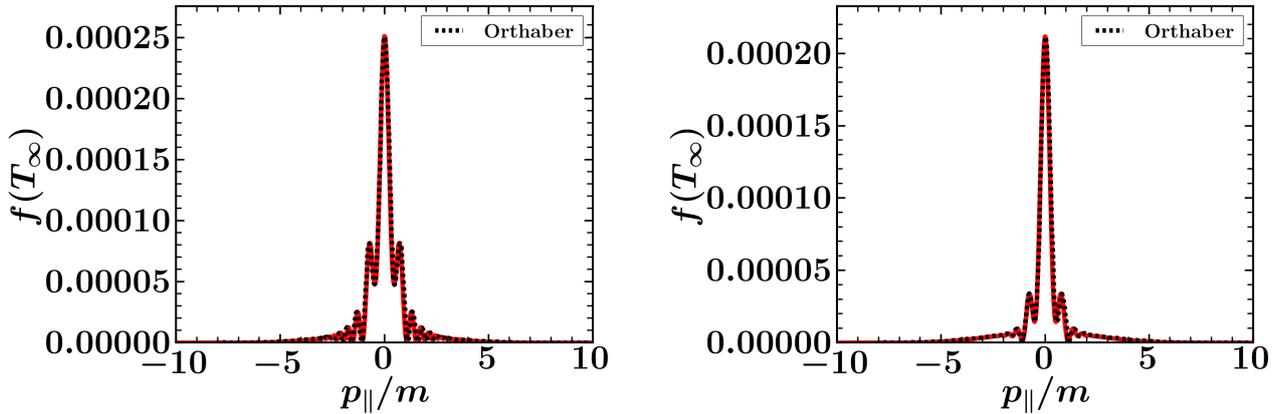
**Abbildung 4.2:** Vergleich zwischen numerisch und analytisch erhaltener Teilchendichte  $f(\vec{p}, t_{\infty})$  für den Sauter-Puls der Feldstärke  $E_0 = 0.025$  und Breite  $1/\tau = m$ . Das numerische Resultat ist durch die rote, das analytische durch die gestrichelte Linie gekennzeichnet. Links:  $p_{\perp} = 0$ ,  $\Gamma = 1 + 2 \cdot 10^{-11}$ . Rechts:  $p_{\perp} = 3m$ ,  $\Gamma = 1 + 3.2 \cdot 10^{-8}$ .



**Abbildung 4.3:** Vergleich zwischen numerisch und analytisch erhaltener Teilchendichte  $f(\vec{p}, t_{\infty})$  für den Sauter-Puls der Feldstärke  $E_0 = 0.25$  und Breite  $1/\tau = 1 \cdot 10^{-4}(\text{eV})^{-1} \approx 51/m$ . Das numerische Resultat ist durch die rote, das analytische durch die gestrichelte Linie gekennzeichnet. Links:  $p_{\perp} = 0$ ,  $\Gamma = 1 + 4.5 \cdot 10^{-8}$ . Rechts:  $p_{\perp} = 0.8m$ ,  $\Gamma = 1 + 2.7 \cdot 10^{-5}$ .

Das Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung des dynamisch assistierten Schwinger-Effektes resultierend aus der Superposition eines starken ( $E_{0,1} \approx E_c$ ) niederenergetischen ( $1/\tau_1 \ll m$ )

<sup>4</sup>Eine Dokumentation findet sich unter <http://docs.scipy.org/doc/scipy-dev/reference/tutorial/integrate.html>.



**Abbildung 4.4:** Vergleich der numerisch erhaltenen Resultate der aus der Überlagerung zweier Sauter-Pulse erzeugten Teilchendichte  $f(p_{||}, t_{\infty})$  für  $p_{\perp} = 0$  mit den zur Verfügung stehenden Daten von M. Orthaber [7]. Die festen Parameter sind  $E_{0,1} = 0.25E_c$ ,  $E_{0,2} = 0.025E_c$  und  $\tau_1 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ (eV)}^{-1}$ . Links:  $\tau_2 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ (eV)}^{-1}$ . Rechts:  $\tau_2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ (eV)}^{-1}$ .

Pulses mit einem schwachen ( $E_{0,2} \ll E_c$ ) hochenergetischen ( $1/\tau_2 \approx m$ ) Puls. Von M. Orthaber [7] wird das Impulsspektrum zweier überlagerter Sauter-Pulse für eine Vielzahl an Parametern dargestellt. Nun soll überprüft werden, inwieweit die hier gewonnenen numerischen Resultate mit denen aus [7] übereinstimmen. Exemplarische Ergebnisse sind in Abb. 4.4 festgehalten.<sup>5</sup>

### 4.1.3 Zeitevolution

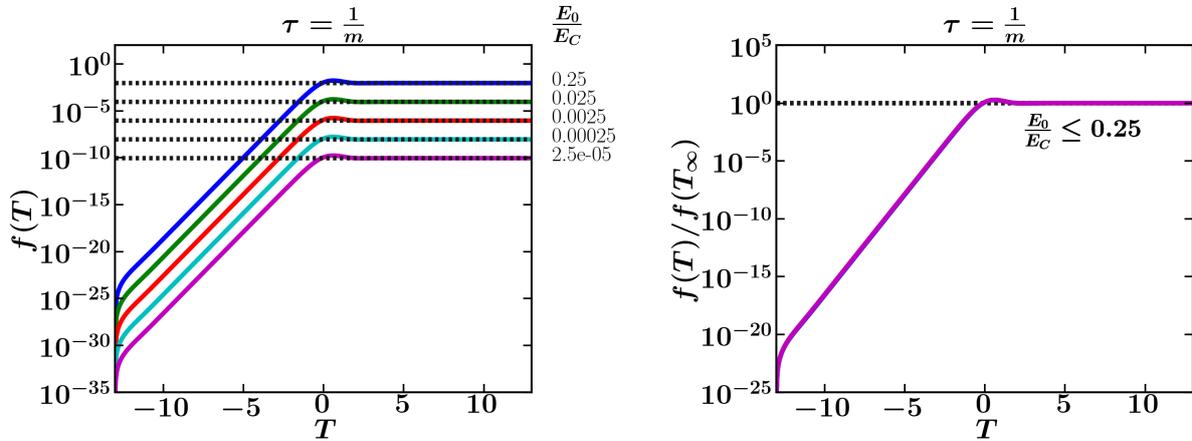
In diesem Abschnitt soll das Konvergenzverhalten der durch den Sauter-Puls erzeugten Quasiteilchendichte  $f(\vec{p}, T)$  gegen den analytischen Wert  $f(\vec{p}, T_{\infty})$  untersucht werden. Dazu werden die numerischen Resultate der Zeitentwicklung von  $f(0, T)$  betrachtet, d.h. wir wählen im Folgenden  $p_{\perp} = p_{||} = 0$ .

Für den einzelnen Sauter-Puls zeigt sich eine starke Abhängigkeit des Konvergenzverhaltens von der Peak-Breite  $1/\tau$  und damit von der Art und Weise der Paarerzeugung. Gemäß Gl. (4.3) ist für Breiten  $1/\tau \lesssim m$  bis in den Bereich  $E_0 \lesssim E_c$  ein quadratisches Verhalten  $f \propto E_0^2$  charakteristisch. Durch das Anlegen derartiger Felder, besteht die Möglichkeit der Multi-Photonen-Absorption, wie sie in Abschnitt 1.3 diskutiert wird. In Abb. 4.5 ist erkennbar, dass dann das Konvergenzverhalten nahezu unabhängig von der Feldstärke  $E_0$  ist. Ähnliches lässt sich für kleine Feldstärken in Abb. 4.6 erkennen, da hier der klassische Schwinger-Effekt stark unterdrückt ist.

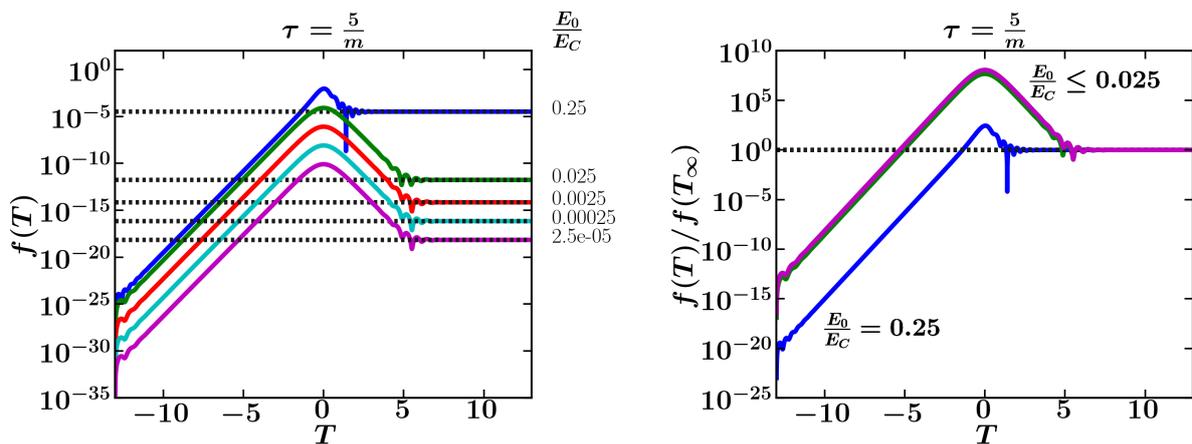
Mit wachsender Pulsbreite sinkt die Energie der virtuellen Photonen des Feldes und das System nähert sich dem klassischen Schwinger-Limes.<sup>6</sup> Die Abhängigkeit von der Feldstärke  $E_0$

<sup>5</sup>Die Implementierung der Daten aus [7] erfolgte unter Verwendung des Programms „Engauge Digitizer“, vgl. <http://digitizer.sourceforge.net>.

<sup>6</sup>Vgl. Abschnitt 1.2.



**Abbildung 4.5:** Zeitentwicklung der Quasiteilchendichte  $f(T)$  für  $p_{\perp} = p_{\parallel} = 0$ . Für alle Feldamplituden  $E_0$  dominiert der Effekt der Multi-Photonen-Absorption. Daher ist das Konvergenzverhalten unabhängig von der Feldstärke. Der analytische Wert  $f(T_{\infty})$  ist jeweils durch die gestrichelte Linie gekennzeichnet.



**Abbildung 4.6:** Zeitentwicklung der Quasiteilchendichte  $f(T)$  für  $p_{\perp} = p_{\parallel} = 0$ . Für die Feldamplituden  $E_0 \leq 0.025E_c$  dominiert der Effekt der Multi-Photonen-Absorption. Daher ist das Konvergenzverhalten nahezu unabhängig von der Feldstärke. Für  $E_0 = 0.25E_c$  befindet sich das System im Limes der klassischen Schwinger-Paarzeugung. Der analytische Wert  $f(T_{\infty})$  ist jeweils durch die gestrichelte Linie gekennzeichnet.

nimmt drastisch zu. Für  $1/\tau \ll m$  ist die dynamische Paarerzeugung stark unterdrückt. Nur durch das Anlegen starker Felder  $E_0 \approx E_c$  ist die Möglichkeit der Schwinger-Paarerzeugung effektiv gegeben. Im Bereich des Feldmaximums  $E_{max}(T_0) = E_0$  zur Zeit  $T_0 = 0$  entsteht ein globales Maximum  $f_{max}$  der Quasiteilchendichte  $f(T)$ , welches um Größenordnungen oberhalb des asymptotischen Wertes  $f(T_\infty)$  liegt. Die physikalische Bedeutung ist unklar, da, wie in Kapitel 2 beschrieben, für Zeiten  $|T| < T_a$  keine Interpretation der Quasiteilchendichte als reale Elektron-Positron-Paardichte möglich ist. Bevor der analytische Wert  $f(T_\infty)$  erreicht ist, oszilliert die Quasiteilchendichte  $f(T)$  um diesen. Für Feldstärken  $E_0 \approx E_c$  strebt  $f_{max} \rightarrow 1$ . In diesem Fall blockiert der Pauli-Term  $1 - f(T)$  aus Gl. (3.21) schlagartig das weitere Anwachsen der Quasiteilchendichte  $f(T)$  und sorgt für eine schnelle Konvergenz gegen den Wert  $f(T_\infty)$ . Für kleine Feldstärken  $E_0 < 0.1E_c$  ist  $f(T) \ll 1$  und das Pauli-Blocking ist unterdrückt, entsprechend länger ist die benötigte Konvergenzzeit. Dieses Verhalten ist besonders gut in Abb. 4.6 zu erkennen. Doch auch in Abb. 4.8 zeigt sich, dass für kleinere Feldstärken  $E_0$  und damit für kleinere  $f_{max}$  der Quasiteilchendichte die Konvergenz immer später einsetzt.

Sind weder die Bedingungen der dynamischen noch der klassischen Schwinger-Paarerzeugung gegeben, d.h. für Feldstärken  $E_0 < 0.1E_c$  und Frequenzen  $1/\tau \ll m$ , dann ist die Paarerzeugung sehr stark unterdrückt. Hier liegen die numerischen Resultate  $f(T_a)$  um Größenordnungen über dem analytischen Wert  $f(T_\infty)$ , siehe Abbn. 4.7 und 4.8.

Um die Zeitentwicklung der Quasiteilchendichte  $f(T)$  besser zu verstehen, wird die Zeitentwicklung der Funktionen  $\tilde{Q}(T) = \gamma \operatorname{sech}^2(T)/(\gamma^2 + \tanh^2(T))$  und  $2\chi\tilde{\omega}(T) = 2\chi\sqrt{1 + \tanh^2(T)}/\gamma^2$  der dimensionslosen quantenkinetischen Gleichung (3.21) für  $p_\perp = p_\parallel = 0$  betrachtet. Sie ist in Abb. 4.9 für die Feldstärken  $E_0 = 0.025E_c$  und  $0.25E_c$  in Abhängigkeit der Frequenz  $1/\tau$  dargestellt. Für  $\tau \approx 1/m$  ist  $2\chi\tilde{\omega}(T)$  nahezu konstant, da  $\gamma \gg 1$  ist und damit der Term  $\tanh^2(T)/\gamma^2 \rightarrow 0$  strebt. Es gilt

$$2\chi\tilde{\omega}(T) \stackrel{\gamma \gg 1}{\approx} 2\chi\tilde{\omega}(T=0) = 2\chi. \quad (4.4)$$

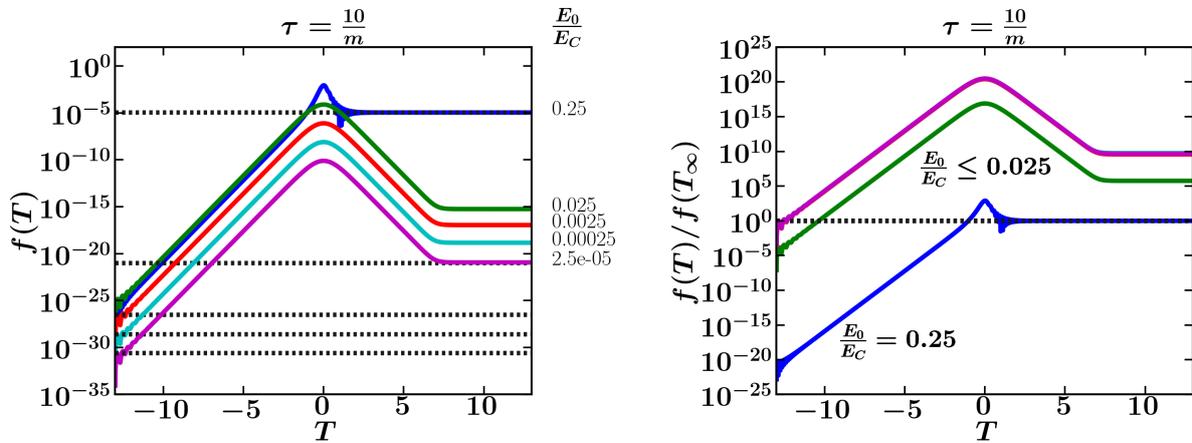
Mit abnehmender Frequenz  $1/\tau$  wird  $\gamma$  immer kleiner. Der Term  $\tanh^2(T)/\gamma^2$  wird immer größer. Für  $\gamma \ll 1$  ist er wesentlich größer als eins. Er dominiert dann  $\sqrt{1 + \tanh^2(T)}/\gamma^2$ , sodass  $2\chi\tilde{\omega}(T) \approx 2\chi|\tanh(T)|/\gamma$  ist. Da  $\tanh^2(|T| > 2) \approx 1$  folgt für  $|T| > 2$

$$2\chi\tilde{\omega}(|T| > 2) \stackrel{\gamma \ll 1}{\approx} 2\chi/\gamma. \quad (4.5)$$

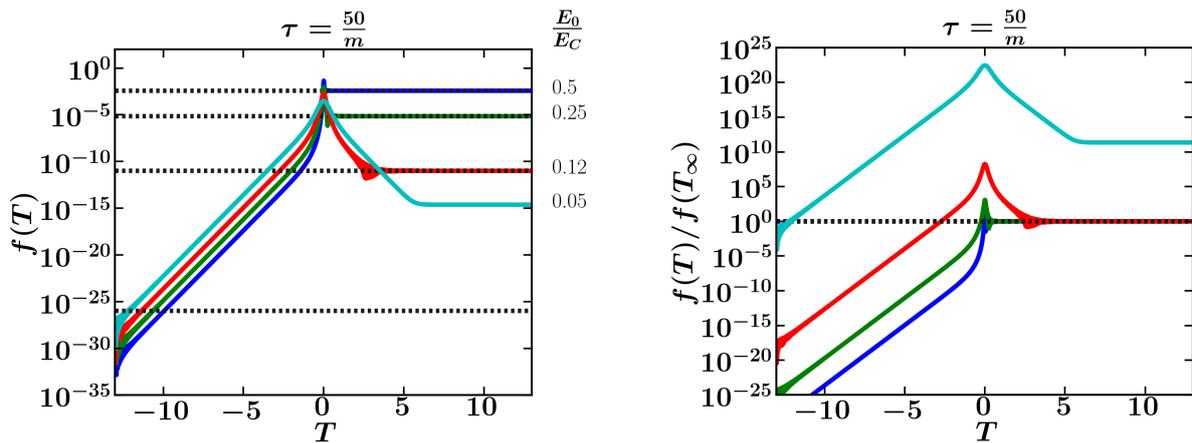
Für  $T \rightarrow 0$  sinkt die Funktion steil gegen das Minimum  $2\chi\tilde{\omega}(T=0) = 2\chi$ . Der Abstand

$$D_{min} := 2\chi\tilde{\omega}(|T| > 2) - 2\chi\tilde{\omega}(T=0) \stackrel{\gamma \ll 1}{\approx} 2\chi(1/\gamma - 1) \quad (4.6)$$

wird dann mit abnehmendem  $\gamma \ll 1$  bzw. bei konstanter Feldstärke  $E_0$  mit zunehmendem  $\tau$  immer größer. Dann fällt die Funktion für  $T \rightarrow 0$  immer steiler. Die Folge ist, dass

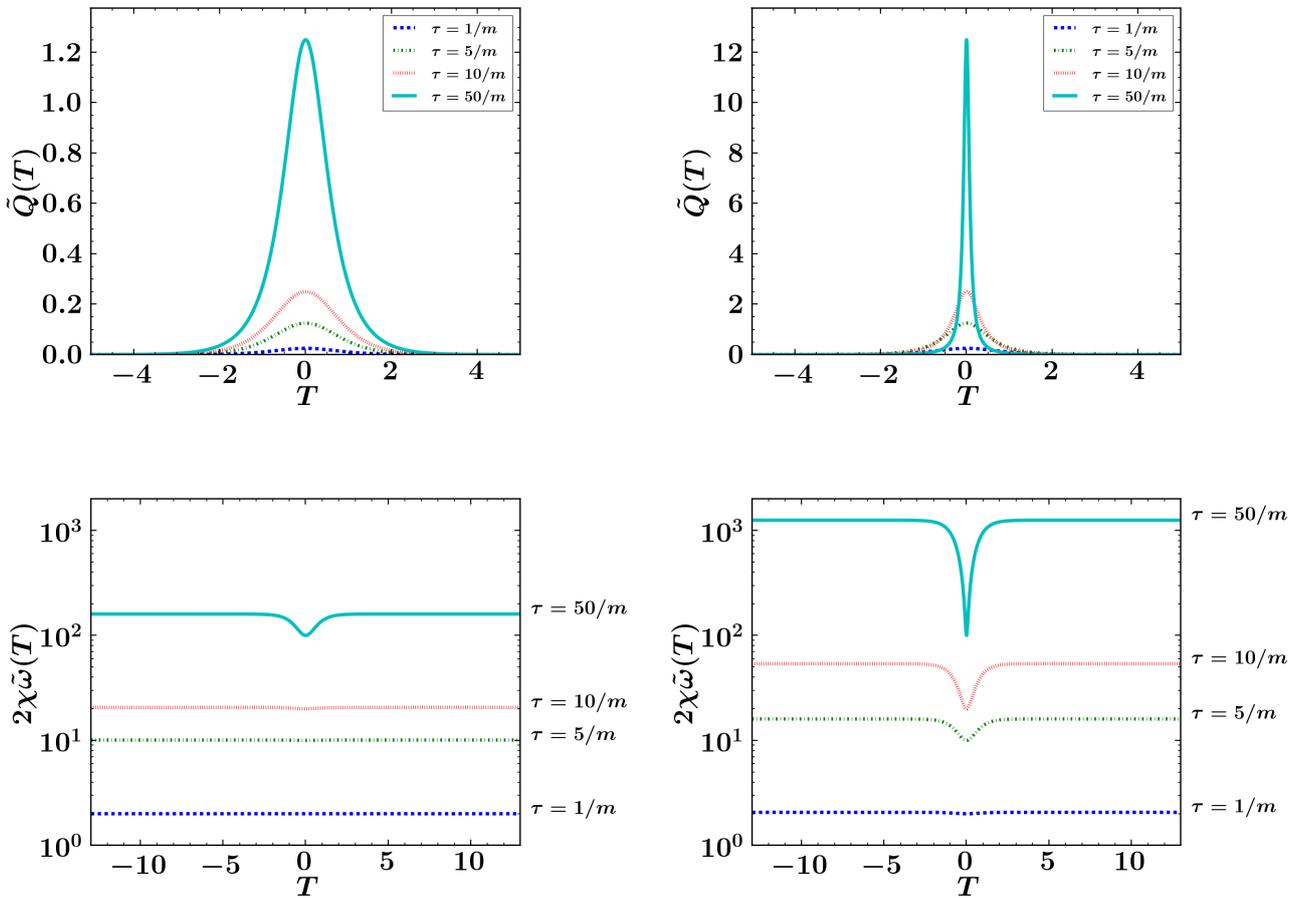


**Abbildung 4.7:** Zeitentwicklung der Quasiteilchendichte  $f(T)$  für  $p_{\perp} = p_{\parallel} = 0$ . Für  $E_0 = 0.25E_c$  befindet sich das System im Limes der klassischen Schwinger-Paarerzeugung. Für die Feldamplituden  $E_0 \leq 0.025E_c$  ist die Paarerzeugung stark unterdrückt. Die numerische Lösung der Quasiteilchendichte  $f(T)$  konvergiert nicht mehr gegen den analytischen Wert  $f(T_{\infty})$  (gestrichelte Linie).



**Abbildung 4.8:** Zeitentwicklung der Quasiteilchendichte  $f(T)$  für  $p_{\perp} = p_{\parallel} = 0$ . Paarerzeugung ist effektiv nur noch über den klassischen Schwinger-Effekt möglich. Für Feldstärken  $E_0 < 0.1E_c$  ist die Paarerzeugung stark unterdrückt. Die numerische Lösung der Quasiteilchendichte  $f(T)$  konvergiert nicht mehr gegen den analytischen Wert  $f(T_{\infty})$  (gestrichelte Linie).

der „Solver“ des zur numerischen Integration der Differentialgleichung verwendeten Pakets „scipy.integrate.odeint“ immer mehr Zeitschritte benötigt, um die von außen fest vorgegebene Fehlertoleranz  $\Delta = \Delta_{rel}|f(T_i)| + \Delta_{abs}$  nicht zu überschreiten. Da für die Quasiteilchendichte häufig  $f(\vec{p}, T) \ll 1$  gilt, wird  $\Delta_{rel}$  und  $\Delta_{abs}$  stets sehr klein ( $\Delta \leq 10^{-12}$ ) gewählt, wobei immer zwischen vernünftiger Rechenzeit und ausreichend hoher Genauigkeit abgewogen werden muss.<sup>7</sup> Für kleine Keldysh-Parameter  $\gamma \ll 1$  resultieren daraus um Größenordnungen längere Rechenzeiten, um numerische Ergebnisse für die Teilchendichte  $f(T_\infty)$  zu erhalten als für den Fall  $\gamma \gg 1$ . Wie in Gl. (4.4) zu erkennen, ist in diesem Fall  $\tilde{\omega}(T) \approx \text{konstant}$ . Insbesondere für  $\chi \rightarrow 0$  ist die Rechenzeit erheblich beschleunigt.



**Abbildung 4.9:** Funktionen  $\tilde{Q}(T)$  und  $2\chi\tilde{\omega}(T)$  der dimensionslosen quantenkinetischen Gleichung (3.21) für  $p_\perp = p_\parallel = 0$  und  $h_{\text{Sauter}}(T) = -\tanh(T)$ . Links:  $E_0 = 0.025E_c$ . Rechts:  $E_0 = 0.25E_c$ .

Nun wird die Funktion  $\tilde{Q}(T)$  betrachtet. Solange  $\rho(T) > 0$  gilt, trägt sie gemäß Gl. (3.21) direkt zum Anwachsen der Quasiteilchendichte  $f(T)$  bei. Sie nimmt bei  $T = 0$  den Maximalwert  $\tilde{Q}(T = 0) = 1/\gamma$  an, also genau dann, wenn  $2\chi\tilde{\omega}(T)$  gerade minimal ist. Da  $2\chi\tilde{\omega}(T) \geq 0$  und damit auch  $\xi \geq 0$  gilt, unterdrückt  $2\chi\tilde{\omega}(T)$  wiederum das Anwachsen von  $\rho(T)$  und damit

<sup>7</sup>In der Dokumentation zu „scipy.integrate.odeint“ findet man die Notation  $\Delta_{rel} = \text{rtol}$  bzw.  $\Delta_{abs} = \text{atol}$ .

indirekt auch das der Quasiteichendichte  $f(T)$ . Damit ist plausibel, dass gerade im Bereich  $T = 0$  die Quasiteilchendichte  $f(T)$  maximal wird.<sup>8</sup> Wie bereits diskutiert strebt für hohe Frequenzen  $1/\tau > m$  die Funktion  $2\chi\tilde{\omega}(T) \rightarrow 0$ . Das Anwachsen von  $f(T)$  wird somit im Wesentlichen dadurch beschränkt, dass  $\tilde{Q}(T)$  für  $T > 2$  exponentiell gegen Null strebt. Dann ist näherungsweise  $f_{max} \approx f(T_\infty)$ .<sup>9</sup>

Nun soll der Fall kleiner Feldstärken  $E_0 < E_c$  betrachtet werden. Der entscheidende Unterschied zwischen  $E_0 = 0.25E_c$  und  $E_0 = 0.025E_c$  besteht darin, dass der Keldysh-Parameter größer wird, d.h.  $\gamma(0.025E_c) = 10 \cdot \gamma(0.25E_c)$ . Damit sinkt der Abstand  $D_{min}$  aus Gl. (4.6) erheblich, sodass  $2\chi\tilde{\omega}(T) \approx 2\chi$  näherungsweise auch für größere  $\tau$  angenommen werden kann. Je kleiner die gewählte Feldstärke  $E_0$ , um so größer wird  $\gamma$  und umso größer kann  $\tau$  gewählt werden. Da  $2\chi\tilde{\omega}(T)$  dann nicht mehr von der gewählten Feldstärke  $E_0$  abhängt, ist plausibel, warum das Konvergenzverhalten für kleine Feldstärken  $E_0 \leq 0.025E_c$  zunehmend unabhängig von der gewählten Feldstärke  $E_0$  ist. Dann hängt  $f(T_\infty)$  im Wesentlichen nur noch von der Höhe des Maximums  $\tilde{Q}(T=0) = 1/\gamma$  ab. Man betrachte hierzu die Abbn. 4.5 bis 4.7.

Mit abnehmender Frequenz wird das Anwachsen von  $f(T)$  durch die Funktion  $\tilde{Q}(T)$  zusehends durch  $2\chi\tilde{\omega}(T)$  unterdrückt. Wie in Abb. 4.9 dargestellt, unterscheiden sich beide Funktionen für größer werdende  $\tau$  um immer mehr Größenordnungen. Da das Maximum  $\tilde{Q}(T=0)$  und der Abstand  $D_{min}$  für kleiner werdende  $\gamma$  immer größer werden, muss, wie bereits diskutiert, die Zeitschrittweitenanzahl  $N_T$  der numerischen Integrationsroutine erhöht werden, um die extern vorgegebene Fehlertoleranz  $\Delta$  für einen durchgeführten Integrationsschritt nicht zu überschreiten. Je mehr Zeitschritte  $N_T$  nötig sind, umso größer ist der resultierende globale Fehler  $\Delta_{global}$ . Geht man davon aus, dass bei jedem Schritt der Fehler  $\Delta$  begangen wird und diese schlimmstenfalls additiv sind, ergibt sich für den resultierenden globalen Fehler  $\Delta_{global} \leq N_T\Delta$ .<sup>10</sup> Insbesondere kann der globale Fehler nicht beliebig verkleinert werden, da  $N_T$  wiederum von  $\Delta$  abhängig ist. Für  $N_T = 5 \cdot 10^7$  und  $\Delta = 10^{-20}$  folgt die Abschätzung  $\Delta_{global} \leq 5 \cdot 10^{-13}$ . Da die Teilchendichte  $f(T_\infty)$ , wie bereits ausführlich diskutiert, für  $E_0 < 0.1E_c$  und niedrige Frequenzen  $1/\tau \ll m$  stark unterdrückt ist, besteht die Möglichkeit, dass  $\Delta_{global}$  um Größenordnungen über dem analytischen Wert  $f(T_\infty)$  liegt, wie es für kleine Feldstärken in den Abbn. 4.7 und 4.8 der Fall ist.

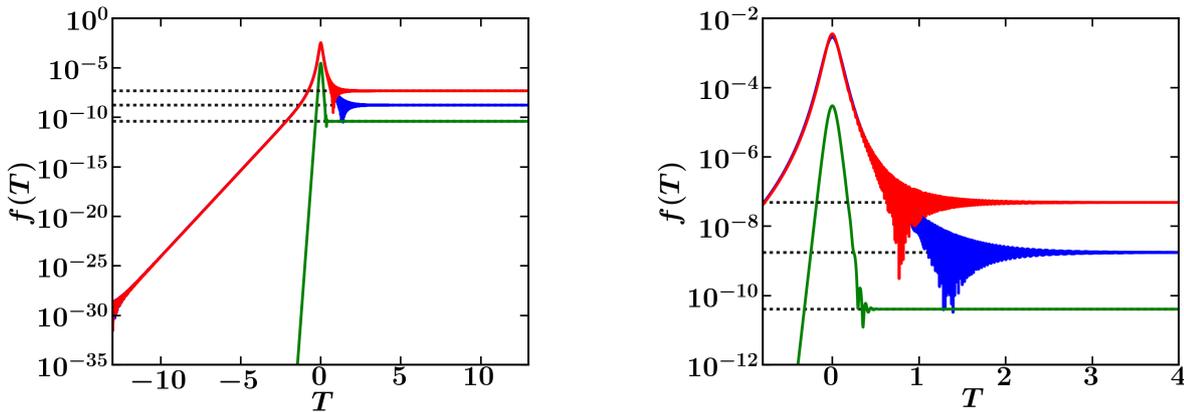
Im Folgenden soll das Konvergenzverhalten im Bereich des dynamisch assistierten Schwinger-Effekts untersucht werden. Man vergleiche dazu die numerisch erhaltenen Zeitevolutionen der einzelnen Quasiteilchendichten  $f_1(T)$  und  $f_2(T)$  mit der zeitlichen Entwicklung der durch den dynamisch assistierten Schwinger-Effekt erzeugten Quasiteilchendichte  $f_{assist}(T)$ . In Abb. 4.10 ist das Verhalten für die Feldstärken  $E_{0,1} = 0.15E_c$ ,  $E_{0,2} = 0.1E_{0,1}$  und die Parameter  $\tau_1 = 1 \cdot 10^{-4}(\text{eV})^{-1}$ ,  $\tau_2 = 8 \cdot 10^{-6}(\text{eV})^{-1}$  dargestellt. Insgesamt dominiert die Schwinger-

<sup>8</sup>Vgl. Abbn. 4.6 bis 4.8.

<sup>9</sup>Vgl. Abb. 4.5.

<sup>10</sup>Vgl. [10] S. 910-915. Dabei handelt es sich nur um eine Abschätzung, die keine Allgemeingültigkeit besitzt. Insbesondere gilt für chaotische Systeme das exponentielle Verhältnis  $\Delta_{global} = e^{\lambda N_T} \Delta$ .

Paarerzeugung des starken Pulses  $E_1$  gegenüber der dynamischen Paarerzeugung des hochenergetischen Pulses  $E_2$ . Der zeitliche Verlauf von  $f_1(T)$  und  $f_{assist}(T)$  ist bis in den Bereich  $E_{max}(T_0 = 0) \approx E_{max,1}(T_0 = 0) = E_{0,1}$  nahezu identisch. Hier erreichen beide Quasiteilchendichten ein globales Maximum. Dabei ist  $f_{max,assist}$  wie zu erwarten minimal größer als  $f_{max,1}$ . Im weiteren zeitlichen Verlauf fallen  $f_{assist}(T)$  und  $f_1(T)$  stark oszillierend gegen den jeweiligen asymptotischen Wert. Dabei liegt  $f_{assist}(T_\infty)$  jedoch um Größenordnungen über  $f_1(T_\infty)$ . Eine mögliche Erklärung liefert die Zeitentwicklung der Quasiteilchendichte  $f_2(T)$ , die bereits bei  $0 \lesssim T_k \ll 1$  konvergiert und damit für Zeiten  $T > T_k$  näherungsweise konstant bleibt. Dadurch wird offenbar der weitere Abfall der Teilchendichte  $f_{assist}(T)$  blockiert. Eine anschauliche Erklärung bietet die Interpretation, dass für Zeiten  $T \gtrsim 0$  nach Durchlaufen des Feldmaximums bei  $E_{max}(T_0 = 0) = E_{0,1} + E_{0,2} \approx E_{0,1}$  durch die Absorption mehrerer virtueller Photonen des hochenergetischen zweiten Feldes der Frequenz  $1/\tau_2 \approx 4m$  noch mehr Tunnelereignisse von Teilchen aus dem negativen in das positive Kontinuum stattfinden können als bei dem einzelnen starken Puls  $E_{0,1}$ , bei dem die Multi-Photonen-Absorption aufgrund der niedrigen Energie  $1/\tau_1 \ll m$  stark unterdrückt ist.<sup>11</sup>



**Abbildung 4.10:** Zeitentwicklung der Quasiteilchendichten des starken Pulses  $f_1(T)$  (blau), des hochenergetischen Pulses  $f_2(T)$  (grün) und ihrer Überlagerung  $f_{assist}(T)$  für  $p_\perp = p_\parallel = 0$  und  $T = t/\tau_1$ . Die Feldstärken der einzelnen Felder sind  $E_{0,1} = 0.15E_c$  und  $E_{0,2} = 0.1E_{0,1}$ . Weiterhin gilt  $\tau_1 = 1 \cdot 10^{-4}(\text{eV})^{-1} \gg 1/m$  und  $\tau_2 = 8 \cdot 10^{-6}(\text{eV})^{-1} \approx 4/m$ .

#### 4.1.4 Dynamisch assistierter Schwinger-Effekt

In diesem Unterabschnitt soll für verschiedene Parameter der Sauter-Konfiguration die aus der Superposition erzeugte Teilchendichte  $f_{assist}(\vec{p}, t_\infty)$  mit den erzeugten Teilchendichten der einzelnen Pulse  $f_1(\vec{p}, t_\infty)$  und  $f_2(\vec{p}, t_\infty)$  verglichen werden. Unter Integration über den Impulsraum  $p_\parallel$  in Feldrichtung und für  $p_\perp = 0$  soll der Verstärkungsfaktor  $V := n_{assist}/n_{1+2}$  ermittelt

<sup>11</sup>Vgl. Abschnitt 1.4.

werden mit

$$V := \frac{n_{assist}}{n_{1+2}} = \frac{\int dp_{\parallel} f_{assist}(p_{\parallel}, t_{\infty})}{\int dp_{\parallel} (f_1(p_{\parallel}, t_{\infty}) + f_2(p_{\parallel}, t_{\infty}))}. \quad (4.7)$$

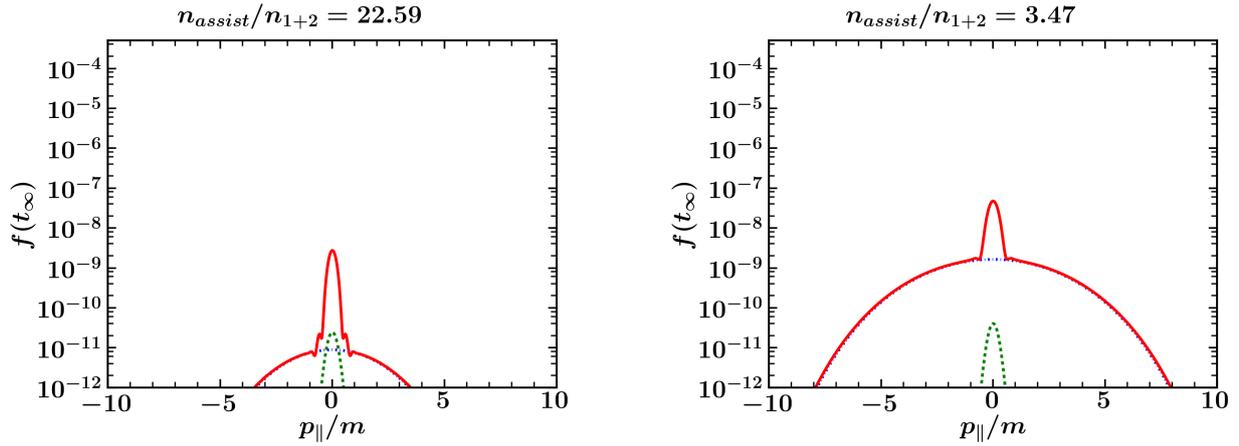
Der Verstärkungsfaktor  $V$  ist äußerst sensitiv auf die gewählte Feldamplitude des starken Pulses  $E_{0,1}$ . In Abb. 4.11 nimmt sie die Werte  $E_{0,1} = 0.12E_c$  und  $0.15E_c$  an mit dem konstanten Verhältnis  $E_{0,2} = 0.1E_{0,1}$ . Alle anderen Parameter sind fest gewählt. Für die niedrigere Feldstärke werden zwar auch weniger Elektronen erzeugt, der Verstärkungsfaktor des assistierten Schwinger-Effektes nimmt jedoch um den Faktor  $V/V' = 22.59/3.47 \approx 6.51$  zu. Für  $E_{0,1} = 0.12E_c$  gilt  $n_1 \gtrsim n_2$ . Es dominiert gerade noch die Schwinger-Paarzeugung des starken gegenüber der Multi-Photonen-Absorption des hochfrequenten Pulses.

Nun wird der Parameter  $\tau_1 = 1 \cdot 10^{-4}$  fest gewählt. Die Feldstärke des Sauter-Pulses nimmt die Werte  $E_{0,1} = 0.15E_c$  und  $0.25E_c$  an, während das Verhältnis  $E_{0,2} = 0.1E_{0,1}$  konstant gehalten wird. Die Frequenz des hochfrequenten Pulses  $1/\tau_2$  wird variiert. Die Ergebnisse sind in Abb. 4.12 dargestellt. Für  $\tau_2 = 8 \cdot 10^{-6}(\text{eV})^{-1}$  ist der Verstärkungsfaktor  $V$  für beide Feldstärken  $E_{0,1}$  am größten. In diesem Fall dominiert die aus dem starken Sauter-Puls resultierende Schwinger-Paarzeugung gegenüber der dynamischen Paarzeugung des schwachen, hochenergetischen Pulses. Entsprechend der im Schwinger-Limes zu erwartenden exponentiellen Abhängigkeit der Teilchendichte  $f_1(p_{\parallel}, t_{\infty})$  von der Feldstärke  $E_{0,1}$  ist die resultierende Teilchendichte  $f_{assist}(p_{\parallel}, t_{\infty})$  für  $E_{0,1} = 0.25E_c$  um drei Größenordnungen verstärkt im Vergleich zu  $E_{0,1} = 0.15E_c$ .<sup>12</sup> Analog zu Abb. 4.11 ist auch hier der Verstärkungseffekt des dynamisch assistierten Schwinger-Effektes für die kleinere Feldstärke  $E_{0,1} = 0.15E_c$  wesentlich größer als für  $E_{0,1} = 0.25E_c$ , es gilt  $V/V' = 5.71/1.73 \approx 3.30$ .

Auch für  $\tau_2 = 4 \cdot 10^{-6}(\text{eV})^{-1}$  ist der Verstärkungsfaktor  $V$  für  $E_{0,1} = 0.15E_c$  größer als für  $E_{0,1} = 0.25E_c$ . Allerdings nur noch um den Faktor  $V/V' = 2.37/1.63 \approx 1.45$ . Für  $E_{0,1} = 0.15E_c$  dominiert die dynamische Paarzeugung des hochfrequenten, für  $E_{0,1} = 0.25E_c$  dagegen die Schwinger-Paarzeugung des starken Pulses. Fällt  $f_2(p_{\parallel}, t_{\infty})$  mit steigendem oder sinkendem  $p_{\parallel}$  schneller gegen Null als  $f_1(p_{\parallel}, t_{\infty})$  treten in dem Bereich  $f_1 = f_2$  charakteristische Oszillationen der Teilchendichte  $f_{assist}(p_{\parallel}, t_{\infty})$  auf, wie es bei  $E_{0,1} = 0.15E_c$  der Fall ist. Für große Impulse überwiegt dann die Schwinger-Paarzeugung.

Dieser Effekt lässt sich ebenfalls bei  $\tau_2 = 1 \cdot 10^{-6}(\text{eV})^{-1} \approx 1/2m$  für  $E_{0,1} = 0.25E_c$  beobachten. Zwar ist die dynamische Paarzeugung des hochenergetischen gegenüber der Schwinger-Paarzeugung des starken Pulses dominant, doch für größere Impulse  $|p_{\parallel}| \gg 2$  gilt  $f_1(p_{\parallel}, t_{\infty}) \gg f_2(p_{\parallel}, t_{\infty})$ . Für  $E_{0,1} = 0.15E_c$  dominiert  $f_2(p_{\parallel}, t_{\infty})$  für alle  $p_{\parallel}$ . Wenn  $f_1(p_{\parallel}, t_{\infty})$  und  $f_2(p_{\parallel}, t_{\infty})$  den geringsten Abstand zueinander einnehmen, oszilliert  $f_{assist}(p_{\parallel}, t_{\infty})$  auch hier, allerdings mit wesentlich geringerer Amplitude als im Fall  $E_{0,1} = 0.25E_c$ . Der Verstärkungseffekt des dynamisch assistierten Schwinger-Effektes ist für beide Feldstärken kaum noch zu beobachten.

<sup>12</sup>Vgl. Abb. 4.1.



**Abbildung 4.11:** Dynamisch assistierter Schwingereffekt der Sauter-Konfiguration für  $p_{\perp} = 0$ . Die Parameter  $\tau_1 = 2 \cdot 10^{-4}(\text{eV})^{-1}$  und  $\tau_2 = 8 \cdot 10^{-6}(\text{eV})^{-1}$  sind fest gewählt. Für die linke Abbildung gilt  $E_{0,1} = 0.12E_c$ , für die rechte  $E_{0,1} = 0.15E_c$  mit dem Verhältnis  $E_{0,2} = 0.1E_{0,1}$ . Die erzeugte Teilchendichte des starken Sauter-Pulses  $f_1(p_{\parallel}, t_{\infty})$  ist blau (gestrichelt-gepunktete Linie), die des schwachen  $f_2(p_{\parallel}, t_{\infty})$  grün (gestrichelte Linie) und die der Superposition  $f_{\text{assist}}(p_{\parallel}, t_{\infty})$  rot dargestellt.

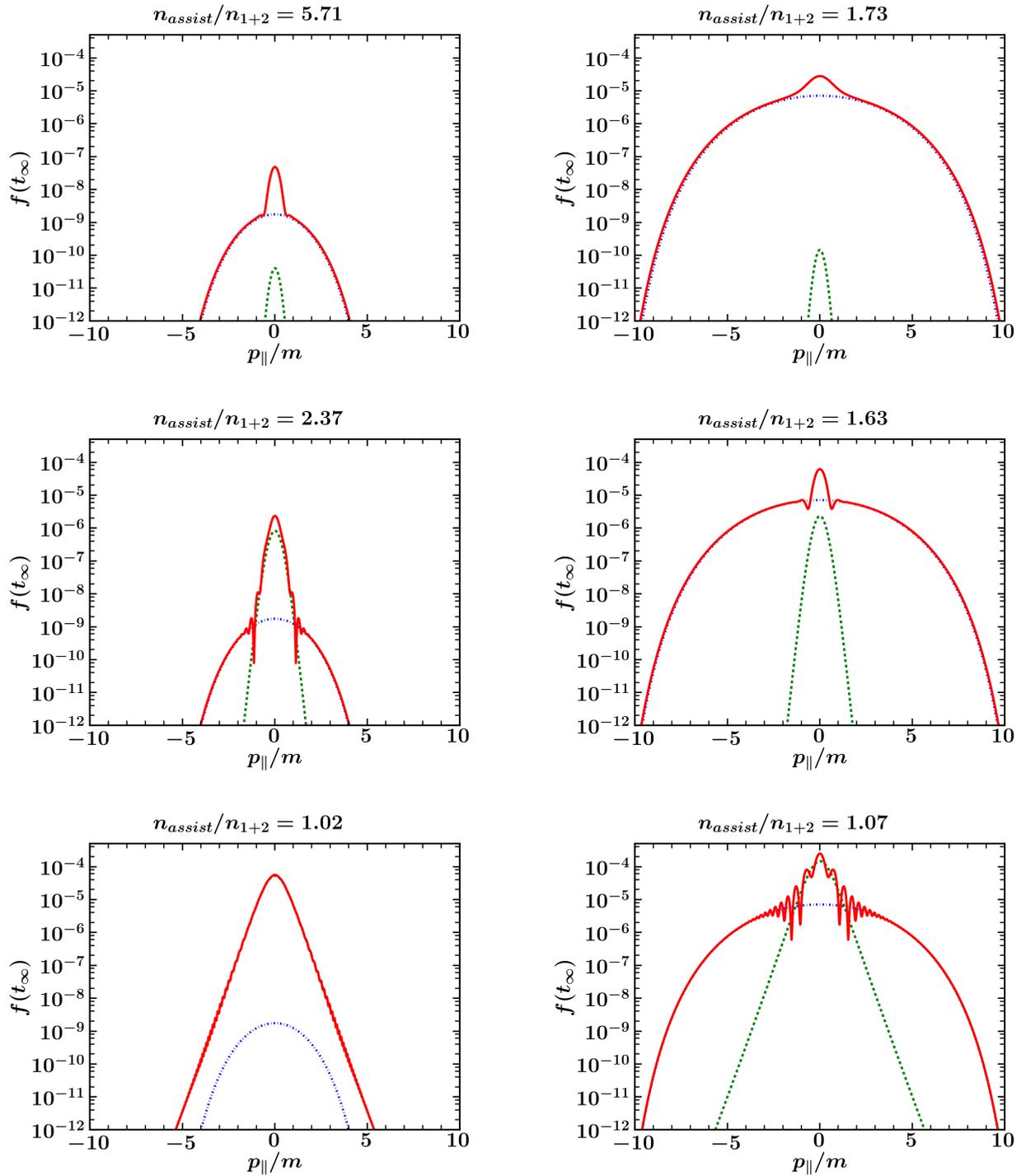
Es ergibt sich  $f'_{\text{assist}}(p_{\parallel} = 0, t_{\infty}, E_{0,1} = 0.25E_c)/f_{\text{assist}}(p_{\parallel} = 0, t_{\infty}, E_{0,1} = 0.15E_c) \approx 4.44$ . Im Bereich der dominanten dynamischen Paarerzeugung liegen damit die resultierenden Teilchendichten  $f_{\text{assist}}(p_{\parallel}, t_{\infty})$  für unterschiedliche Feldstärken nicht mehr um Größenordnungen auseinander, sondern nähern sich der für die Multi-Photonen-Absorption charakteristischen  $E_{0,2}^2$ -Abhängigkeit an.<sup>13</sup>

Der Verstärkungseffekt des dynamisch assistierten Schwinger-Effektes wird also im Wesentlichen von der Wahl der Parameter  $E_{0,1}$  und  $\tau_2$  und insbesondere ihrem Verhältnis zueinander beeinflusst. In [7] wird daher der kombinierte Keldysh-Parameter

$$\gamma_k = \frac{E_c}{E_{0,1}m\tau_2} = \sigma\gamma_1 \quad (4.8)$$

eingeführt. Gemäß M. Orthaber [7] finden sich für  $\tau_1 = 2 \cdot 10^{-4}(\text{eV})^{-1}$  die größten Verstärkungseffekte der Sauter-Konfiguration bei  $\gamma_k \approx 2$ .

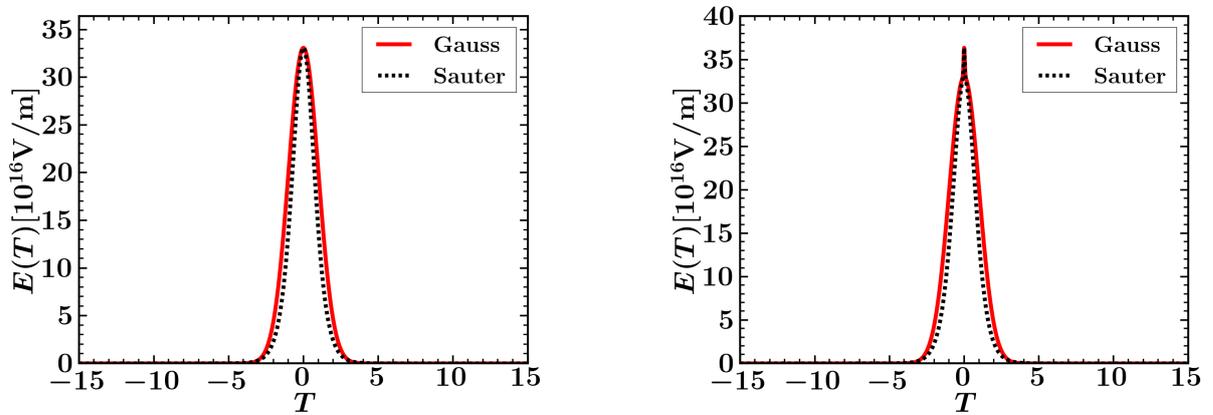
<sup>13</sup>Vgl. Abb. 4.1.



**Abbildung 4.12:** Dynamisch assistierter Schwingereffekt der Sauter-Konfiguration für  $p_{\perp} = 0$ . Der Parameter  $\tau_1 = 1 \cdot 10^{-4}(\text{eV})^{-1}$  ist fest gewählt. Für die linken Abbildungen gilt  $E_{0,1} = 0.15E_c$ , für die rechten  $E_{0,1} = 0.25E_c$  mit dem Verhältnis  $E_{0,2} = 0.1E_{0,1}$ . Die Frequenz des schwachen Pulses wird variiert. Es gilt  $\tau_2 = s \cdot 10^{-6}(\text{eV})^{-1}$ . Oben:  $s = 8$ . Mitte:  $s = 4$ . Unten:  $s = 1$ . Die erzeugte Teilchendichte des starken Sauter-Pulses  $f_1(p_{\parallel}, t_\infty)$  ist blau (gestrichelt-gepunktete Linie), die des schwachen  $f_2(p_{\parallel}, t_\infty)$  grün (gestrichelte Linie) und die der Superposition  $f_{assist}(p_{\parallel}, t_\infty)$  rot dargestellt.

## 4.2 Gauß-Konfiguration

In diesem Abschnitt soll der Fragestellung nachgegangen werden, inwiefern sich die Gauß-Feldkonfiguration aus Unterabschnitt 3.2.2 und die Sauter-Konfiguration aus Unterabschnitt 3.2.1 bezüglich der Paarerzeugung unterscheiden. Intuitiv sind keine wesentlichen Unterschiede zu erwarten, da sich beide Feldkonfigurationen von der Form her sehr ähnlich sind. In Abb. 4.13 sind die entsprechenden elektrischen Felder  $E(t)$  zum Vergleich dargestellt. Der Gauß-Peak ist im  $T$ -Raum breiter als der Sauter-Peak. Im Limes  $t \rightarrow \pm\infty$  fällt die Gauß-Funktion schneller ab als die Sauter-Funktion. Für die Ein- und Ausschaltzeit des Feldes wird im Folgenden wieder  $T_a = 13$  gewählt, man erhält  $E(T_a)/E_{max}(T_0) = 1/e^{169} \approx 5 \cdot 10^{-12}$ .

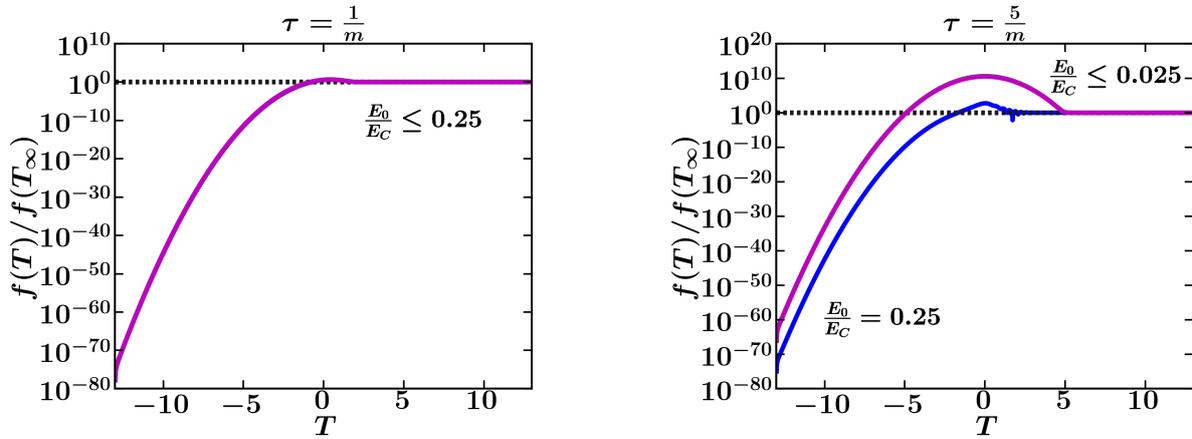


**Abbildung 4.13:** Vergleich von Sauter- und Gauß-Konfiguration. Links: Starker Puls  $E_1(T)$  mit Parametern  $E_{0,1} = 0.25E_c$  und  $\tau_1 = 1 \cdot 10^{-4}(\text{eV})^{-1}$ . Rechts: Überlagerung des links dargestellten starken Pulses  $E_1(T)$  mit dem höherenergetischen Puls  $E_2(T)$ , charakterisiert durch  $E_{0,2} = 0.025E_c$  und  $\tau_2 = 4 \cdot 10^{-6}(\text{eV})^{-1}$ .

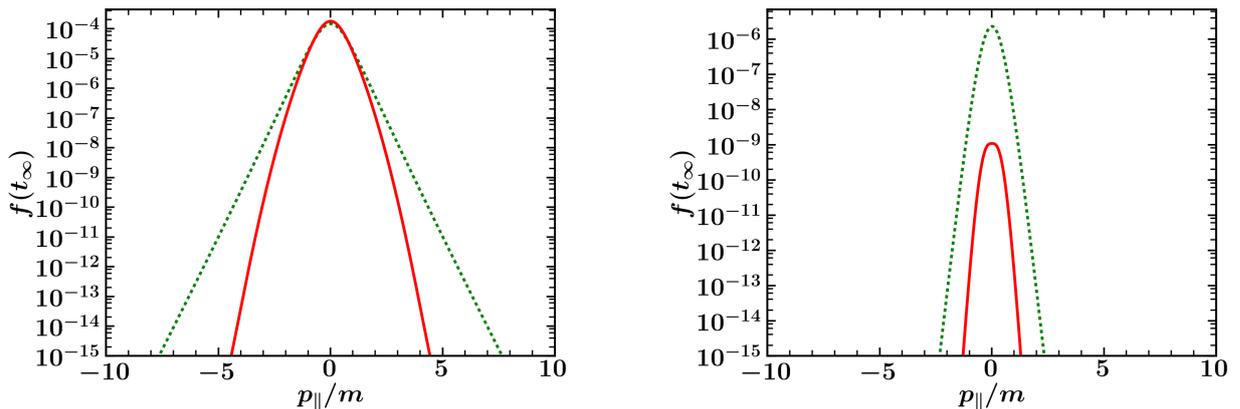
### 4.2.1 Zeitevolution und Teilchendichte

Zunächst wird für die Gauß-Konfiguration die Zeitevolution der Quasiteilchendichte  $f(T)$  für  $p_\perp = p_\parallel = 0$  betrachtet. Im Wesentlichen stimmt das Konvergenzverhalten mit der Sauter-Konfiguration überein.<sup>14</sup> Im Regime der dynamischen Paarerzeugung, d.h. für  $\tau \approx 1/m$  und  $E_0 \ll E_c$  ist das Konvergenzverhalten der Teilchendichte  $f(T)$  unabhängig von der Feldstärke  $E_0$ . Die Quasiteilchendichte  $f(T)$  wird im Wesentlichen durch die Energie der virtuellen Photonen  $1/\tau$  bestimmt, siehe Abb. 4.14. Im Vergleich zur Sauter-Konfiguration ist die Multi-Photonen-Absorption in der Gauß-Konfiguration für  $\tau \gtrsim 1/m$  stark unterdrückt. Die erzeugte Teilchendichte  $f_{\text{Gauß}}(\vec{p}, t)$  liegt um Größenordnungen unterhalb der Teilchendichte  $f_{\text{Sauter}}(\vec{p}, t)$ . Eine Darstellung findet sich in Abb. 4.15. Ist die Paarerzeugung stark unterdrückt, dann versagt die numerische Integrationsroutine. Dies wird in Unterabschnitt 4.1.3 ausführlich

<sup>14</sup>Vgl. Unterabschnitt 4.1.3.

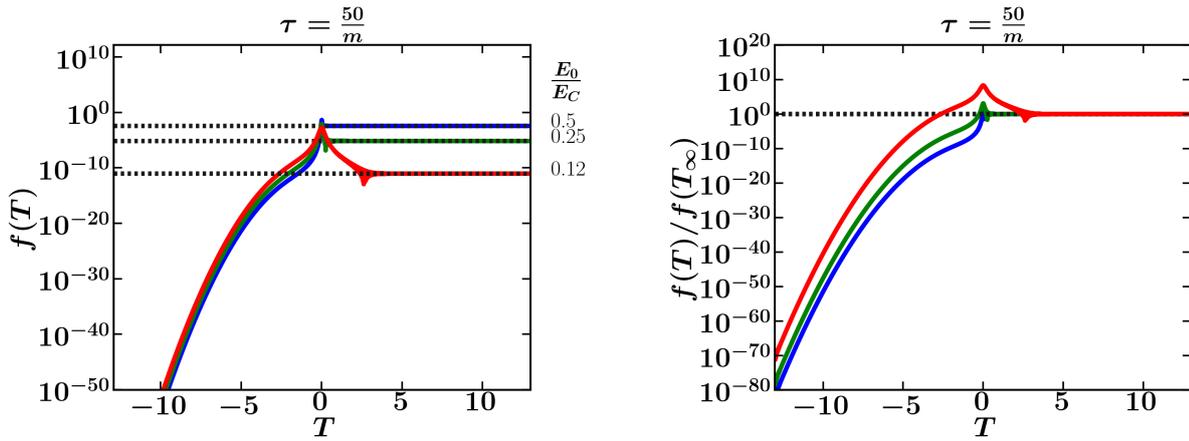


**Abbildung 4.14:** Zeitentwicklung der Quasiteilchendichte  $f(T)$  für  $p_{\perp} = p_{\parallel} = 0$  und das Konvergenzverhalten gegen den (numerischen) Wert  $f(T_a) = f(T_{\infty})$  für unterschiedliche Parameter  $E_0$ . Links:  $\tau = 1/m$ . Rechts:  $\tau = 5/m$ .

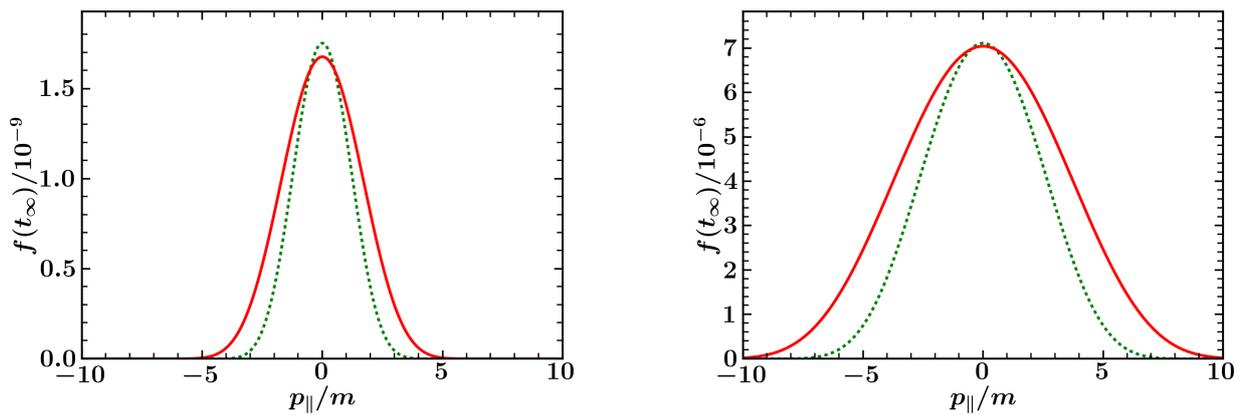


**Abbildung 4.15:** Vergleich der erzeugten Teilchendichten  $f_{\text{Gauß}}(p_{\parallel}, t_{\infty})$  (rote Linie) und  $f_{\text{Sauter}}(p_{\parallel}, t_{\infty})$  (grün gestrichelte Linie) für  $p_{\perp} = 0$  und  $E_0 = 0.025 E_c$ . Links:  $\tau = 1 \cdot 10^{-6} (\text{eV})^{-1} \approx 1/2m$ . Rechts:  $\tau = 4 \cdot 10^{-6} (\text{eV})^{-1} \approx 2/m$ .

diskutiert. Für die erzeugte Teilchendichte der Gauß-Konfiguration  $f_{\text{Gauß}}(\vec{p}, t_\infty)$  existiert bislang keine analytische Lösung. Dies erschwert erheblich die Untersuchung des assistierten Schwinger-Effektes. In Unterabschnitt 4.1.4 wird gezeigt, dass für die Sauter-Konfiguration gerade im Fall  $\tau \gtrsim 1/m$  die größten Verstärkungseffekte bezüglich  $f_{\text{assist}}(T)$  zu erwarten sind. Für die Gauß-Konfiguration sind in diesem Bereich für kleine Feldstärken  $E_0 \ll E_c$  vernünftige numerische Resultate, vor allem für Impulse  $|p_{\parallel}| \gg 1$ , nur dann möglich, wenn  $\Delta_{\text{abs}} \leq 10^{-80}$ , d.h. die Fehlertoleranz des „Solvers“  $\Delta$  sehr klein gewählt wird, was einen enormen Anstieg in der benötigten Rechenzeit zur Folge hat.



**Abbildung 4.16:** Zeitentwicklung der Quasiteilchendichte  $f(T)$  für  $p_{\perp} = p_{\parallel} = 0$  im Limes der Schwinger-Paarerzeugung und das Konvergenzverhalten gegen den (numerischen) Wert  $f(T_a) = f(T_\infty)$ . Der Parameter  $\tau = 50/m$  ist fest gewählt. Die Feldstärke  $E_0$  wird variiert.



**Abbildung 4.17:** Vergleich der erzeugten Teilchendichten  $f_{\text{Gauß}}(p_{\parallel}, t_\infty)$  (rote Linie) und  $f_{\text{Sauter}}(p_{\parallel}, t_\infty)$  (grün gestrichelte Linie) für  $p_{\perp} = 0$  und  $\tau = 1 \cdot 10^{-4} (\text{eV})^{-1}$ . Links:  $E_0 = 0.15E_c$ . Rechts:  $E_0 = 0.25E_c$ .

Im Bereich dominierender Schwinger-Paarerzeugung, also für  $E_0 \approx E_c$  und  $\tau \gg 1/m$ , ist das Konvergenzverhalten maßgeblich von der Feldstärke  $E_0$  abhängig. Für  $E_0 \approx E_c$  lässt sich auch

hier aufgrund des zunehmenden Einflusses des Pauli-Terms  $1-f(T)$  in der Differentialgleichung (3.21) mit wachsendem  $f_{max} \rightarrow 1$  eine beschleunigte Konvergenz der Quasiteilchendichte gegen den Wert  $f(T_\infty)$  erkennen. Dies ist in Abb. 4.16 dargestellt. In Abb. 4.17 ist zu erkennen, dass im Limes der Schwinger-Paarzeugung und für  $p_\perp = 0$   $n_{\text{Gauß}} \gtrsim n_{\text{Sauter}}$  ist.

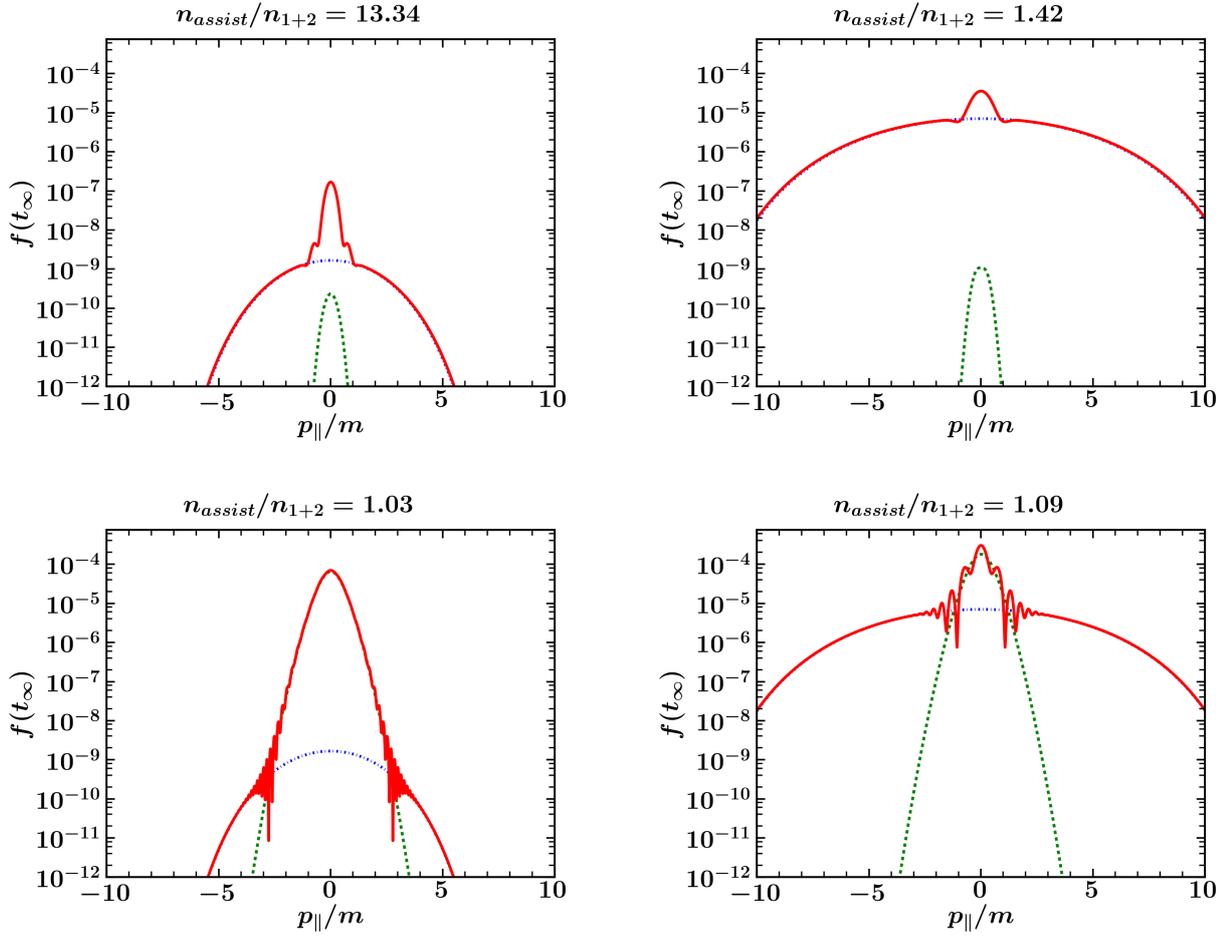
## 4.2.2 Dynamisch assistierter Schwinger-Effekt

In Analogie zu Unterabschnitt 4.1.4 soll die Gauß-Konfiguration bezüglich des Auftretens von Verstärkungseffekten im Rahmen der dynamisch assistierten Schwinger-Paarzeugung untersucht werden. Im Folgenden wird aus rechentechnischen Gründen wieder der Fall  $p_\perp = 0$  diskutiert. Um den dynamisch assistierten Schwinger-Effekt zu quantifizieren betrachtet wir den Verstärkungsfaktor  $V$ , der in Gl. (4.7) definiert wird. Im vorigen Unterabschnitt 4.2.1 wird gezeigt, dass im Grenzfall der Mono-Photonen-Absorption  $\tau \leq 1/2m$  und im Schwinger-Limes  $E_0 \approx E_c$  sich die erzeugten Teilchendichten für Gauß- und Sauter-Konfiguration sehr ähnlich sind. Der Wesentliche Unterschied zwischen beiden Konfigurationen besteht im Regime der Multi-Photonen-Absorption für  $\tau \gtrsim 1/m$ , dann ist  $f_{\text{Sauter}}(\vec{p}, t) \gg f_{\text{Gauß}}(\vec{p}, t)$ . Dies wirkt sich auch auf den dynamisch assistierten Schwinger-Effekt aus. Wie bereits diskutiert, ist der Verstärkungseffekt besonders groß, wenn die Schwinger-Paarzeugung, resultierend aus dem starken Puls  $E_{0,1} \approx E_c$  gegenüber der dynamischen Paarzeugung des hochfrequenten Feldes mit der Frequenz  $1/\tau_2$  dominiert. Da nun die Multi-Photonen-Absorption in der Gauß-Konfiguration sehr stark unterdrückt ist, dominiert die Schwingerpaarzeugung des starken Feldes auch noch für sehr hohe Frequenzen  $\tau \approx 1/m$ . Man betrachte hierzu in Abb. 4.18 die Parameterwahl  $\tau_2 = 4 \cdot 10^{-6}(\text{eV})^{-1} \approx 2/m$ . Insbesondere kann dann der Verstärkungsfaktor  $V$  wesentlich größer sein als in der Sauter-Konfiguration, wie der Vergleich zwischen den Abbn. 4.18 und 4.12 deutlich macht. Für  $\tau_2 = 4 \cdot 10^{-6}(\text{eV})^{-1}$  und  $E_{0,1} = 0.15E_c$  mit dem Verhältnis  $E_{0,2} = 0.1E_{0,1}$  ist  $V_{\text{Gauß}} \approx 5.63V_{\text{Sauter}}$ .

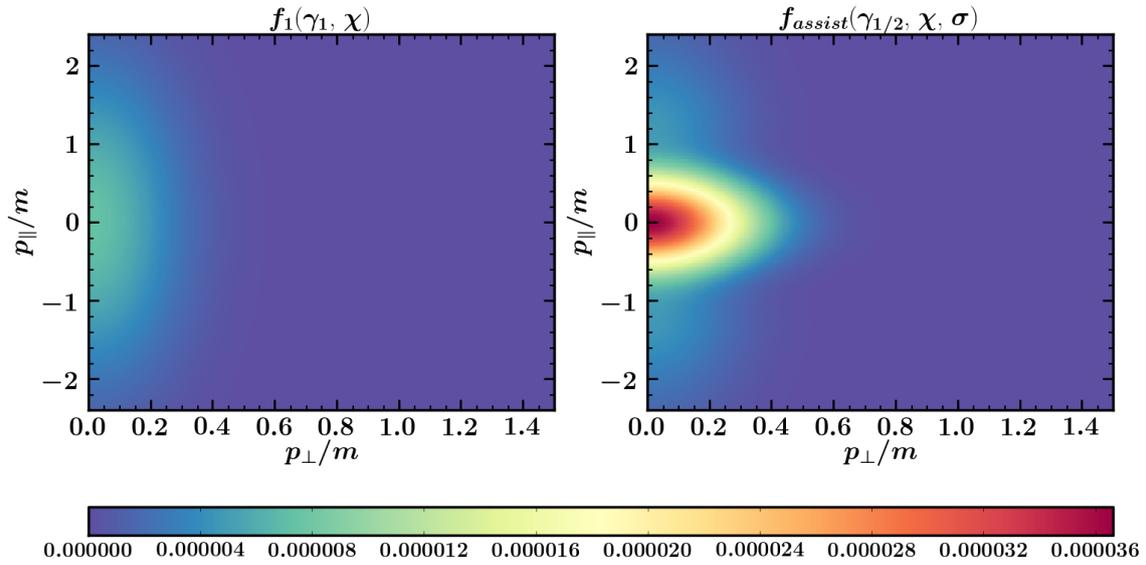
Für Frequenzen  $1/\tau_2 \geq 2m$  dominiert auch in der Gauß-Konfiguration die dynamische Paarzeugung. Dann gilt in Analogie zur Sauter-Konfiguration  $V \approx 1$ . Dieses Verhalten ist in Abb. 4.18 für den Parameter  $\tau_2 = 1 \cdot 10^{-6}(\text{eV})^{-1}$  und die Feldstärken  $E_{0,1} = 0.15E_c$  und  $0.25E_c$  festgehalten.

Nun soll der dynamisch assistierte Schwinger-Effekt für die Parameterwahl  $E_{0,1} = 0.25E_c$ ;  $\tau_1 = 4 \cdot 10^{-5}(\text{eV})^{-1}$  für den starken Puls und  $E_{0,2} = 0.1E_{0,1}$ ;  $\tau_2 = 4 \cdot 10^{-6}(\text{eV})^{-1}$  für den schwachen Puls betrachtet werden. In Abb. 4.19 ist die Teilchendichte  $f(\vec{p}, t_\infty)$  insbesondere auch für den Fall  $p_\perp \neq 0$  dargestellt. Auch hier dominiert der Effekt der Schwinger-Paarzeugung des starken Pulses gegenüber der Multi-Photonen-Absorption des hochenergetischen Pulses, da diese in der Gauß-Konfiguration stark unterdrückt ist. In Abb. 4.19 ist zu erkennen, dass sich der dynamisch assistierte Schwinger-Effekt auch in Impulsrichtung senkrecht zum Feld  $p_\perp$  verstärkend auswirkt. In Abb. 4.20 ist links der Schnitt  $p_\perp = 0$  und rechts der Schnitt  $p_\parallel = 0$  dargestellt. Der Verstärkungsfaktor ist im Impulsraum senkrecht zum Feld hier mehr

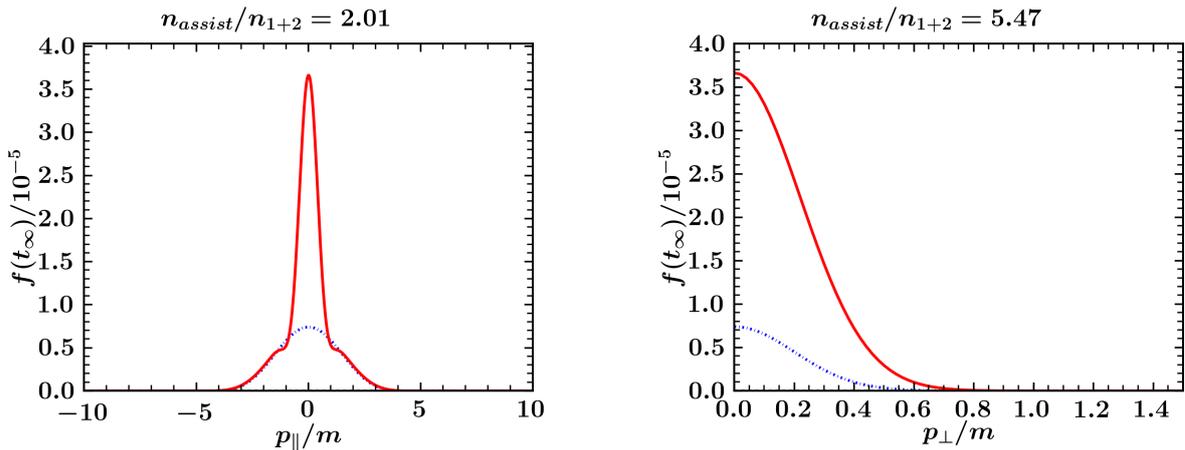
als doppelt so groß wie in Feldrichtung.



**Abbildung 4.18:** Dynamisch assistierter Schwingereffekt der Gauß-Konfiguration für  $p_{\perp} = 0$ . Der Parameter  $\tau_1 = 1 \cdot 10^{-4}(\text{eV})^{-1}$  ist fest gewählt. Für die linken Abbildungen gilt  $E_{0,1} = 0.15E_c$ , für die rechten  $E_{0,1} = 0.25E_c$  mit dem Verhältnis  $E_{0,2} = 0.1E_{0,1}$ . Die Frequenz des schwachen Pulses wird variiert. Es gilt  $\tau_2 = s \cdot 10^{-6}(\text{eV})^{-1}$ . Oben:  $s = 4$ . Unten:  $s = 1$ . Die erzeugte Teilchendichte des starken Sauter-Pulses  $f_1(p_{\parallel}, t_{\infty})$  ist blau (gestrichelt-gepunktete Linie), die des schwachen  $f_2(p_{\parallel}, t_{\infty})$  grün (gestrichelte Linie) und die der Superposition  $f_{\text{assist}}(p_{\parallel}, t_{\infty})$  rot dargestellt.



**Abbildung 4.19:** Dynamisch assistierter Schwinger-Effekt im Impulsraum. Für die Feldstärken gilt  $E_{0,1} = 0.25E_c$ ,  $E_{0,2} = 0.1E_c$ . Weiterhin sind  $\tau_1 = 4 \cdot 10^{-5}(\text{eV})^{-1}$  und  $\tau_2 = 4 \cdot 10^{-6}(\text{eV})^{-1}$ . Die vom schwachen Feld erzeugte Teilchendichte  $f_2(\vec{p}, t_{\infty})$  ist um Größenordnungen kleiner und daher nicht dargestellt. Links: Erzeugte Teilchendichte des starken Pulses  $f_1(\vec{p}, t_{\infty})$ . Rechts: Erzeugte Teilchendichte der Überlagerung beider Pulse  $f_{\text{assist}}(\vec{p}, t_{\infty})$ .



**Abbildung 4.20:** Dynamisch assistierter Schwinger-Effekt im Impulsraum. Für die Feldstärken gilt  $E_{0,1} = 0.25E_c$ ,  $E_{0,2} = 0.1E_c$ . Weiterhin sind  $\tau_1 = 4 \cdot 10^{-5}(\text{eV})^{-1}$  und  $\tau_2 = 4 \cdot 10^{-6}(\text{eV})^{-1}$ . Die vom schwachen Feld erzeugte Teilchendichte  $f_2(\vec{p}, t_{\infty})$  ist um Größenordnungen kleiner und daher nicht zu erkennen. Die erzeugte Teilchendichte des starken Pulses  $f_1(\vec{p}, t_{\infty})$  ist blau (gestrichelt gepunktete Linie) und die der Überlagerung beider Pulse  $f_{\text{assist}}(\vec{p}, t_{\infty})$  rot dargestellt. Links:  $p_{\perp} = 0$ . Rechts:  $p_{\parallel} = 0$ .

## 4.3 Sauter-Plus-Sinus-Konfiguration

Im letzten Abschnitt betrachten wir die Überlagerung eines starken Sauter-Pulses der Feldstärke  $E_{0,1} \approx E_c$  und Breite  $1/\tau_1 \ll m$  mit einem hochfrequenten  $1/\tau_2 \approx m$  Sinus-Feld der Amplitude  $E_{0,2} \ll E_c$ . Die genaue Darstellung findet sich in Unterabschnitt 3.2.3. Für verschiedene Parameter soll die Konfiguration auf Verstärkungseffekte bezüglich des assistierten Schwinger-Effektes untersucht werden.

### 4.3.1 Paarerzeugung im Sinus-Feld

In diesem Unterabschnitt soll kurz auf die dynamische Paarerzeugungstruktur im Impulsraum eingegangen werden, wie sie durch das Anlegen eines hochfrequenten Sinus-Feldes erzeugt wird.<sup>15</sup> Um ein Elektron-Positron-Paar zu erzeugen, muss mindestens die Energie  $2m$  zur Verfügung stehen. Diese Energie muss im Bereich der dynamischen Paarerzeugung durch die Absorption virtueller Photonen der Energie  $1/\tau$  bereitgestellt werden. Für  $1/\tau \lesssim 2m$  besteht nur die Möglichkeit der Multi-Photonen-Absorption. Nach der relativistischen Energie-Impuls-Relation gilt dann für die Energie  $E_e$  eines erzeugten Elektrons

$$E_e^2 = \left(\frac{n}{2\tau}\right)^2 = m^2 + p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2. \quad (4.9)$$

Durch Multi-Photonen-Absorption können also nur Elektronen mit den diskreten Impulsen

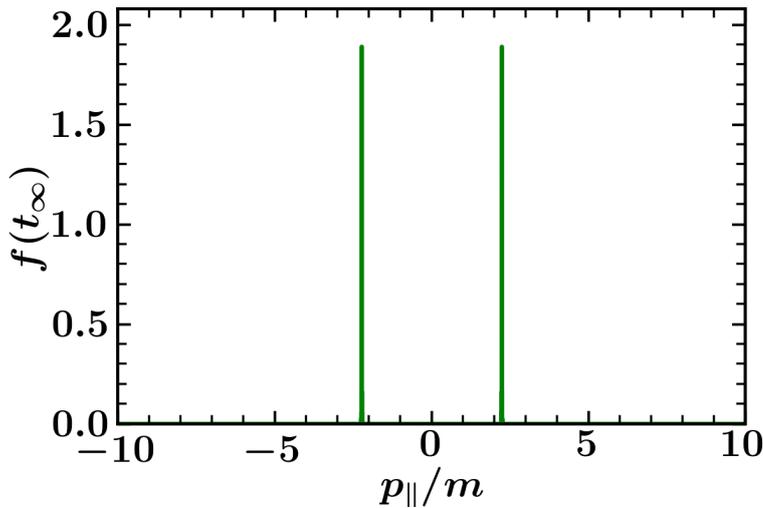
$$p_n = \sqrt{p_{\parallel,n}^2 + p_{\perp,n}^2} = m\sqrt{\left(\frac{n}{2m\tau}\right)^2 - 1} \quad (4.10)$$

erzeugt werden. Im Impulsraum erhält man für die Teilchendichte  $f(\vec{p}, t)$  Akkumulationsschalen mit dem Radius  $p_n$  aus Gl. (4.10). Für Frequenzen  $1/\tau \geq 2m/n$  existiert die  $n$ -te Schale. Die Anzahl erzeugter Paare hängt wesentlich von der Ein- und Ausschaltzeit  $T_a$  und damit von der Akkumulationsdauer  $T_{ak}$  ab. Für

$$T_{ak,n} = \left(\frac{n^2\gamma}{2\chi^2}\right)^n \quad (4.11)$$

gilt für die  $n$ -te Schale  $f(p_n, t_{\infty}) \approx 1$ . Für hochfrequente Felder gilt insbesondere  $\gamma \gg 1$  und  $\chi \lesssim 1$ . Die Akkumulation höherer Schalen  $n > 1$  ist daher stark unterdrückt. In Abb. 4.21 ist die erzeugte Teilchendichte  $f(p_{\parallel}, t_{\infty})$  für  $\tau_2 = 4 \cdot 10^{-7}(\text{eV})^{-1} < 1/2m$  dargestellt. Für die dominante erste Schale ergeben sich in der Darstellung zwei scharfe Peaks bei  $p_{\parallel}/m \approx \pm 2.23$ .

<sup>15</sup>Eine ausführliche Diskussion findet sich in [8].



**Abbildung 4.21:** Aus angelegtem Sinus-Feld resultierende Teilchendichte  $f(t_\infty)$  für  $p_\perp = 0$  mit  $E_0 = 0.025E_C$  und  $\tau = 4 \cdot 10^{-7}(\text{eV})^{-1} \approx 0.2/m$ . Die Ein- und Ausschaltzeit beträgt  $T_a = 1000\pi$ .

### 4.3.2 Dynamisch assistierter Schwinger-Effekt

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, ob der dynamisch assistierte Schwinger-Effekt auch bei der gewählten Sauter-Plus-Sinus-Konfiguration zu beobachten ist. Dabei soll insbesondere der Einfluss des starken Sauter-Pulses auf die typische Akkumulationsschalenstruktur im Impulsraum der durch das Sinus-Feld erzeugten Teilchendichte untersucht werden.<sup>16</sup> Von Interesse ist daher vor allem der Parameterbereich, in dem die dynamische Paarerzeugung des Sinus-Feldes dominiert. In den Unterabschnitten 4.1.4 und 4.2.2 wird gezeigt, dass für die Sauter- und Gauss-Konfiguration dann keine wesentlichen Verstärkungseffekte mehr zu beobachten sind.

Wir betrachten hier ausschließlich den Fall  $p_\perp = 0$ . Die Ein- und Ausschaltzeit beträgt  $T_a = t_a/\tau_1 = t_a/(\tau_2\sigma) = 4\pi$ . Die Akkumulationszeit  $T_{ak}$  des einzelnen Sinus-Feldes ergibt sich damit zu  $T_{ak} = 8\pi\sigma$ . Für das Sauter-Feld wählen wir zunächst  $1/\tau = 1 \cdot 10^{-4}(\text{eV})^{-1}$ . Die Feldstärke nimmt die Werte  $E_{0,1} = 0.15E_c$  und  $0.25E_c$  an. Desweiteren soll für die Feldamplitude  $E_{0,2} = 0.1E_{0,1}$  gelten. Im Folgenden wird die Frequenz  $1/\tau_2$  variiert. Wir betrachten zunächst Wellenlängen des Sinus-Feldes knapp oberhalb der Comptonwellenlänge,  $\lambda_2 \gtrsim \lambda_C \equiv 2\pi/m$ . Die Comptonwellenlänge entspricht der Frequenz  $1/\tau_C \equiv m$ , damit ist  $\tau_C \approx 2 \cdot 10^{-6}(\text{eV})^{-1}$ . Die Paarerzeugung des einzelnen Sinus-Feldes ist dann aufgrund der kleinen Feldstärke  $E_{0,2} \ll E_c$  im Wesentlichen nur über die Multi-Photonen-Absorption möglich, von der nach Gl. (4.11) und im Vergleich zur hier gewählten Akkumulationszeit  $T_{ak}$  ebenfalls nur geringe Beiträge zur Teilchenproduktion zu erwarten sind. In Abb. 4.22 wird  $\tau_2 = 4 \cdot 10^{-6}(\text{eV})^{-1}$  gewählt. Die vom einzelnen Sinus-Feld erzeugte Teilchendichte konzentriert sich nahe  $p_\parallel = 0$  und erreicht

<sup>16</sup>Vgl. Unterabschnitt 4.3.1

für  $p_{\parallel} = 0$  ihr Maximum. Sie oszilliert mit sehr hoher Frequenz. Für die gewählte Feldstärke  $E_{0,1} = 0.25E_c$  ist die durch den einzelnen Sauter-Puls erzeugte Teilchendichte  $n_1 > n_2$ . Für  $E_{0,1} = 0.15E_c$  dominiert die Paarerzeugung des hochfrequenten Sinus-Feldes.

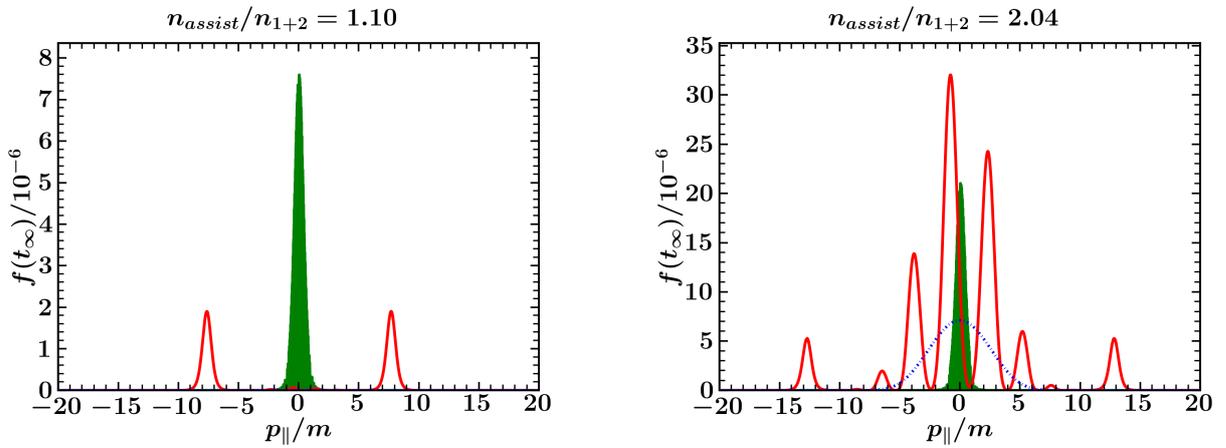
Nun soll die Teilchendichte der Superposition betrachtet werden. Durch die Überlagerung des schwachen hochfrequenten Sinus-Feldes mit dem starken Sauter-Puls bilden sich lokale Akkumulationsmaxima in der Umgebung von  $p_{\parallel}/m = \pm 1/\gamma_1$ . Daraus folgt für den Impuls in Feldrichtung  $p_{\parallel} = \pm eE_{0,1}\tau_1$ . Im Fall  $E_{0,1} = 0.25E_c$  sind zusätzliche Akkumulationsmaxima im Bereich des Maximums der durch den einzelnen Sauter-Puls erzeugten Teilchendichte zu erkennen. Der Abstand dieser steht offenbar in direktem Zusammenhang mit der Frequenz  $1/\tau_2$  des Sinus-Feldes. Zu dieser Schlussfolgerung gelangt man, wenn man Abb. 4.23 betrachtet. Hier wird  $\tau_2 = 2 \cdot 10^{-6}(\text{eV})^{-1} \approx \tau_C$  gewählt, die Frequenz ist also doppelt so groß wie in Abb. 4.22. Auch hier finden sich Akkumulationsmaxima im Bereich  $p_{\parallel} = \pm eE_{0,1}\tau_1$ . Für  $E_{0,1} = 0.25E_c$  sind wieder Maxima der Teilchendichte im Bereich  $|p_{\parallel}/m| < 1/\gamma_1$  zu erkennen, deren Höhe nach außen hin abnimmt. Ihr Abstand ist im Vergleich zur rechten Darstellung in Abb. 4.23 verringert. Dies ist möglicherweise ein Resultat der höher gewählten Frequenz  $1/\tau_2$ . Der Bereich  $|p_{\parallel}/m| < 1/\gamma_1$  trägt einen Großteil der erzeugten Anzahldichte  $n_{assist}$  der Superposition und ist damit wesentlich für den Verstärkungsfaktor  $V = n_{assist}/n_{1+2}$  des assistierten Schwinger-Effektes.<sup>17</sup> Für  $E_{0,1} = 0.25E_c$  ist er in Abb. 4.23 bereits mehr als doppelt so groß wie in Abb. 4.22.

Als nächstes wird der Fall  $\tau_2 = \frac{4}{3} \cdot 10^{-6}(\text{eV})^{-1}$  untersucht. Die erste erlaubte Akkumulationsschale  $n = 2$  der durch das einzelne Sinus-Feld erzeugten Teilchendichte liegt ungefähr bei  $p_2 \approx 1.074m$ . In Abb. 4.24 sind für  $p_{\parallel}/m \approx \pm 1.074$  daher deutliche Peaks zu erkennen. Durch die Überlagerung mit dem starken Sauter-Puls bilden sich auch hier Maxima nahe  $p_{\parallel}/m \approx \pm 1/\gamma_1$ . Insbesondere existieren um dieses Maximum diskrete Schalenstrukturen. Auf deren Position soll später genauer eingegangen werden. Für beide Feldstärken  $E_{0,1} = 0.15E_c$  und  $0.25E_c$  findet auch hier im Bereich  $|p_{\parallel}/m| < 1/\gamma_1$  eine zusätzliche Teilchenakkumulation statt. Die Abstände der lokalen Maxima in diesem Intervall sind im Vergleich zu jenen, die sich in den Abbn. 4.23 und 4.22 finden, weiter verringert. Für  $E_{0,1} = 0.25E_c$  erreicht der Verstärkungsfaktor  $V = 16.92$  den Maximalwert der hier betrachteten Parametereinstellungen.

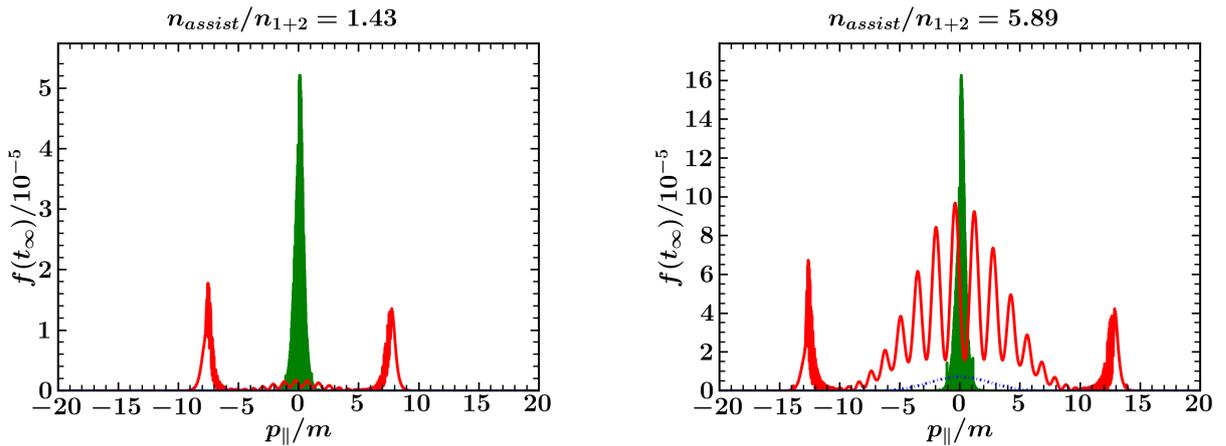
Für  $\tau_2 = 1 \cdot 10^{-6}(\text{eV})^{-1} \approx 1/2m$  reicht annähernd die Absorption eines Photons zur Erzeugung eines Elektron-Positron-Paares. Entsprechend befindet sich der Peak der erzeugten Teilchendichte des einzelnen Sinus-Feldes im Ursprung  $p_{\parallel} = 0$ . Dies ist in Abb. 4.25 dargestellt. Durch Überlagerung mit dem Sauter-Puls entstehen nun scharfe Akkumulations-Peaks bei  $p_{\parallel}/m = \pm 1/\gamma_1$ . Zwischen diesen Peaks erfolgt auch hier eine kontinuierliche Akkumulation von Teilchen, allerdings in diesem Fall mit einem Minimum bei  $p_{\parallel} = 0$ . Der Verstärkungsfaktor  $V$  des assistierten Schwinger-Effekts hängt kaum von der gewählten Feldstärke  $E_{0,1}$  ab.

---

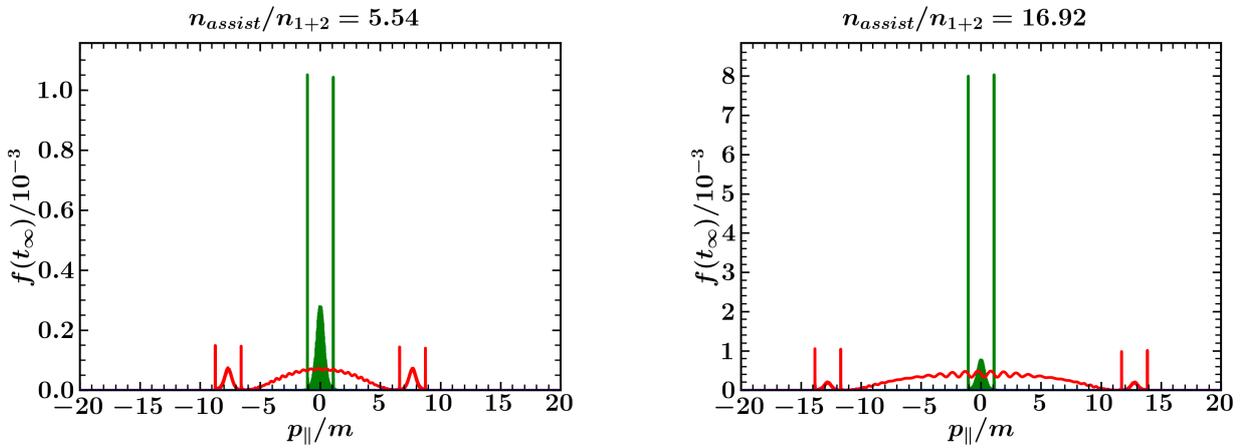
<sup>17</sup>Vgl. Gl.(4.7)



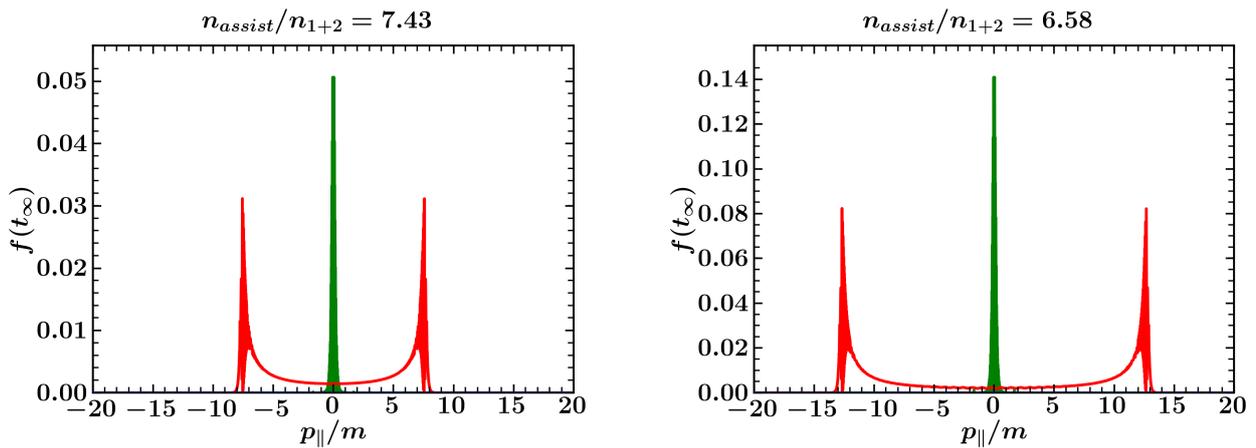
**Abbildung 4.22:** Dynamisch assistierter Schwinger-Effekt in der Sauter-Plus-Sinus-Konfiguration für  $p_{\perp} = 0$ ,  $\tau_1 = 1 \cdot 10^{-4}(\text{eV})^{-1}$  und  $\sigma = 25$ . Das Verhältnis  $E_{0,1} = 0.1 E_{0,2}$  ist fest gewählt. Die erzeugte Teilchendichte des einzelnen Sauter-Pulses  $f_1(p_{\parallel}, t_{\infty})$ , sofern nicht um Größenordnungen kleiner, ist blau (gestrichelt-gepunktete Linie), die des Sinus-Feld  $f_2(p_{\parallel}, t_{\infty})$  grün und die der Superposition  $f_{\text{assist}}(p_{\parallel}, t_{\infty})$  rot dargestellt. Links:  $E_{0,1} = 0.15 E_c$ . Rechts:  $E_{0,1} = 0.25 E_c$ .



**Abbildung 4.23:** Dynamisch assistierter Schwinger-Effekt in der Sauter-Plus-Sinus-Konfiguration. Die Darstellung und Parameterwahl ist bis auf das veränderte Frequenzverhältnis  $\sigma = 50$  identisch zu Abb. 4.22.



**Abbildung 4.24:** Dynamisch assistierter Schwinger-Effekt in der Sauter-Plus-Sinus-Konfiguration. Die Darstellung und Parameterwahl ist bis auf das veränderte Frequenzverhältnis  $\sigma = 75$  identisch mit Abb. 4.22.



**Abbildung 4.25:** Dynamisch assistierter Schwinger-Effekt in der Sauter-Plus-Sinus-Konfiguration. Die Darstellung und Parameterwahl ist bis auf das veränderte Frequenzverhältnis  $\sigma = 100$  identisch mit Abb. 4.22.

Im Folgenden wird das Regime der Mono-Photonen-Absorption betrachtet, d.h. die Akkumulationsschale  $n = 1$  der durch das Sinus-Feld erzeugten Teilchendichte ist zulässig. Die Absorption eines virtuellen Photons der Energie  $1/\tau_2$  ist ausreichend, um ein Paar zu erzeugen. Dabei soll insbesondere auf die Veränderungen in der Akkumulationsschalenstruktur, die in Unterabschnitt 4.3.1 diskutiert wird, eingegangen werden. Für  $\tau_2 = 8 \cdot 10^{-7}(\text{eV})^{-1}$ , siehe Abb. 4.26, liegt die erste Schale der durch das einzelne Sinus-Feldes erzeugten Teilchendichte bei  $p_{\parallel} \approx 0.704m$ . Die aus der Überlagerung mit dem starken Sauter-Puls resultierende Struktur der erzeugten Elektronen im Impulsraum hat hier ebenfalls Schalencharakter. Insgesamt bilden sich zwei Schalen, die jeweils eine größere Anzahl erzeugter Teilchen enthalten als die des einzelnen Sinus-Feldes. In der Betrachtung  $p_{\perp} = 0$  in Abb. 4.26 entpricht dies den vier Peaks in der Nähe von  $p_{\parallel}/m = \pm 1/\gamma_1$ . Bei genauerer Betrachtung stellt sich heraus, dass die Position der Peaks unmittelbar aus der Energie-Impulsrelation

$$E_{e,n}^2 = \left( \frac{n}{2\tau_2} \right)^2 = (p_{\parallel,n} \pm eE_{0,1}\tau_1)^2 + m^2 \quad (4.12)$$

folgt.<sup>18</sup> Die relevanten Feldparameter in Gl. (4.12) sind damit  $\tau_2$  des hochfrequenten Sinus-Feldes und die Feldstärke  $E_{0,1}$  des starken Sauter-Pulses. Nach elementarer Umformung von Gl. (4.12) und unter Verwendung der Parameter  $\chi$  und  $\sigma$  folgt die Resonanzbedingung

$$\left( \frac{p_{\parallel,n}}{m} \pm \frac{1}{\gamma_1} \right)^2 = \left( \frac{n\sigma}{2\chi} \right)^2 - 1. \quad (4.13)$$

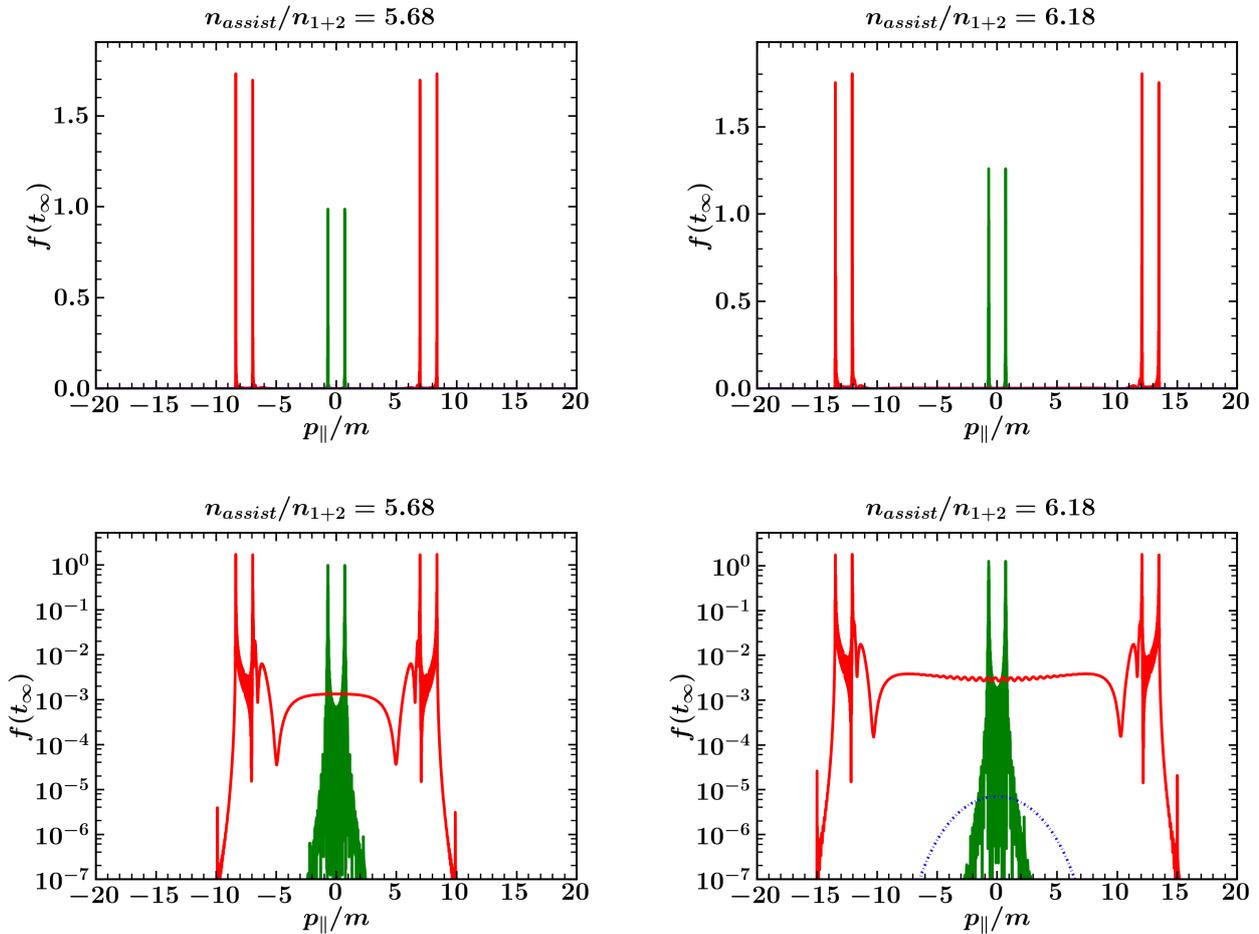
Dann existieren für den diskreten Impuls  $p_{\parallel,n}$  die vier Lösungen

$$\begin{aligned} \frac{p_{\parallel,n}^+}{m} &= \pm \sqrt{\left( \frac{n\sigma}{2\chi} \right)^2 - 1} \pm \frac{1}{\gamma_1}, \\ \frac{p_{\parallel,n}^-}{m} &= \pm \sqrt{\left( \frac{n\sigma}{2\chi} \right)^2 - 1} \mp \frac{1}{\gamma_1}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Für die Position der in Abb. 4.26 aus der Überlagerung mit dem Sauter-Puls erzeugten Akkumulations-Peaks der Teilchendichte  $f_{assist}(p_{\parallel}, t_{\infty})$  für  $n = 1$  gilt demnach  $p_{\parallel,1}^+/m \approx \pm 8.37$ ,  $p_{\parallel,1}^-/m \approx \pm 6.96$  für  $E_{0,1} = 0.15E_c$  und  $p_{\parallel,1}^+/m \approx \pm 13.48$ ,  $p_{\parallel,1}^-/m \approx \pm 12.07$  für  $E_{0,1} = 0.25E_c$ . In der logarithmischen Darstellung erkennt man zwei zusätzliche Peaks bei  $p_{\parallel}/m \approx \pm 15$ . Sie sind offensichtlich im Vergleich zu den anderen um Größenordnungen kleiner. Es liegt nahe davon auszugehen, dass es sich dabei um eine der Akkumulationsschalen für  $n = 2$  handelt. Unter Verwendung von Gl. (4.14) zeigt sich, dass die Position der Peaks dann gegeben ist durch  $p_{\parallel,2}^+/m \approx \pm 9.90$  für  $E_{0,1} = 0.15E_c$  und  $p_{\parallel,2}^+/m \approx \pm 15.01$  für  $E_{0,1} = 0.25E_c$ . Die Peaks bei  $p_{\parallel,2}^-/m$  sind nicht zu erkennen, da sie von anderen Effekten um Größenordnungen überlagert

<sup>18</sup>Vgl. mit Gl. (4.9).

werden.

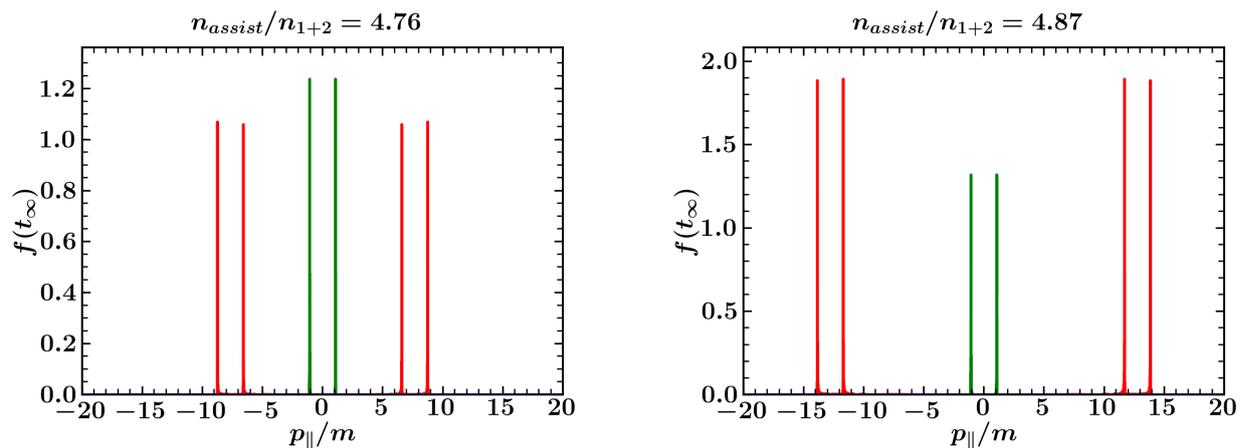


**Abbildung 4.26:** Dynamisch assistierter Schwinger-Effekt in der Sauter-Plus-Sinus-Konfiguration. Die Darstellung und Parameterwahl ist bis auf das veränderte Frequenzverhältnis  $\sigma = 125$  identisch mit Abb. 4.22.

Analog lassen sich die Peaks der Teilchendichte im Impulsraum auch für die Parameter in Abb. 4.27 ermitteln, wobei  $\tau_2 = \frac{1}{15} \cdot 10^{-5} (\text{eV})^{-1} \approx 6.67 \cdot 10^{-7} (\text{eV})^{-1}$  gewählt wird. Für die erste Schale  $n = 1$  ergibt sich  $p_{\parallel,1}^+/m \approx \pm 8.74$ ,  $p_{\parallel,1}^-/m \approx \pm 6.59$  für  $E_{0,1} = 0.15E_c$  und  $p_{\parallel,1}^+/m \approx \pm 13.85$ ,  $p_{\parallel,1}^-/m \approx \pm 11.70$  für  $E_{0,1} = 0.25E_c$ .

Wie bereits angedeutet finden sich auch in Abb. 4.24 entsprechende Peaks der Ordnung  $n = 2$ .

Nun soll genauer auf den Verstärkungsfaktor  $V$  des dynamisch assistierten Schwinger-Effektes eingegangen werden. Er ändert sich unter Variation der Feldstärke  $E_{0,1}$  bei konstant gehaltenem Verhältnis  $E_{0,2} = 0.1E_{0,1}$  für die in den Abbn. 4.25, 4.26 und 4.27 dargestellten erzeugten Teilchendichten nur minimal. Für die betrachteten Felder mit  $\tau_2 > 1/2m$  ist  $V$  wiederum enorm abhängig von der gewählten Stärke des Sauter-Pulses  $E_{0,1}$ . Dieses Verhalten wird in Abb. 4.28 durch die Darstellung des Quotienten  $V'(E_{0,1} = 0.25E_c)/V(E_{0,1} = 0.15E_c)$  deutlich gemacht. Die Frequenz  $1/\tau_2 = 2m$  ist gerade die Frequenz, ab der die Mono-Photonen-

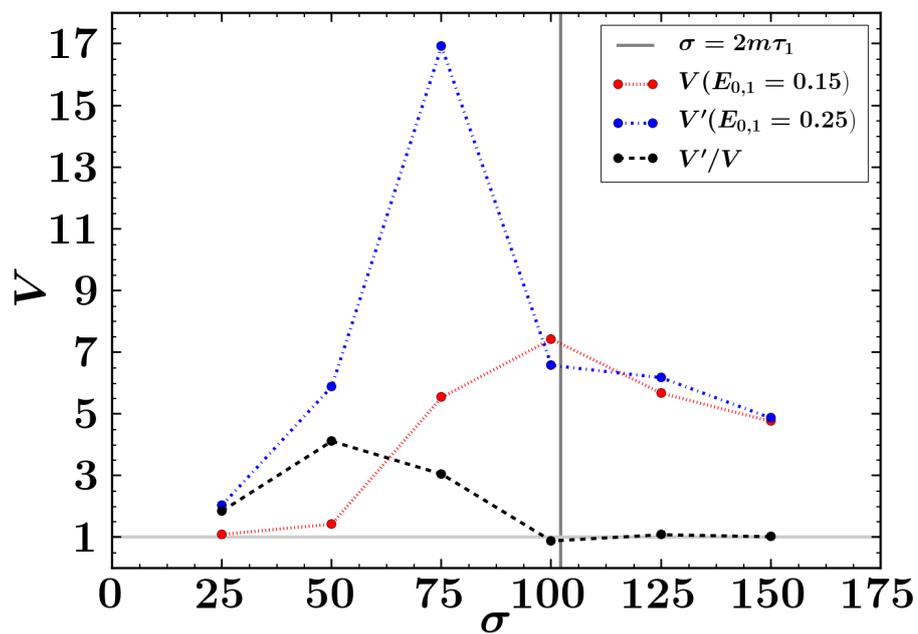


**Abbildung 4.27:** Dynamisch assistierter Schwinger-Effekt in der Sauter-Plus-Sinus-Konfiguration. Die Darstellung und Parameterwahl ist bis auf das veränderte Frequenzverhältnis  $\sigma = 150$  identisch mit Abb. 4.22.

Absorption des hochfrequenten Sinus-Feldes möglich wird. Es bleibt festzuhalten, dass für die hier betrachteten Parameter die maximale Verstärkung durch den assistierten Schwinger-Effekt im Bereich  $1/m > \tau_2 \gtrsim 1/2m$  zu beobachten ist. Daraus lässt sich die Bedingung

$$\chi < \sigma \lesssim 2\chi \quad (4.15)$$

für das zu wählende Frequenzverhältnis  $\sigma$  der beiden Felder ableiten, um einen möglichst großen Verstärkungseffekt zu erzielen. Für  $\tau_1 = 1 \cdot 10^{-4}(\text{eV})^{-1}$  ergibt sich für  $m \approx 511\text{keV}$  das Intervall  $51.1 < \sigma \lesssim 102.2$  für den größtmöglichen Verstärkungsfaktor. Dies ist in Abb. 4.28 dargestellt.



**Abbildung 4.28:** Verstärkungsfaktor  $V = n_{assist}/n_{1+2}$  des dynamisch assistierten Schwinger-Effekts für  $p_{\perp} = 0$ . Die gewählten Parameter für den starken Sauter-Puls sind  $\tau_1 = 1 \cdot 10^{-4}(\text{eV})^{-1}$  und  $E_{0,1} = 0.15E_c$  und  $0.25E_c$ . Für das hochfrequente Sinus-Feld gilt  $E_{0,2} = 0.1E_{0,1}$ . Der Parameter  $\tau_2$  und damit das Frequenzverhältnis  $\sigma$  werden variiert. Für  $\sigma \geq 2m\tau_1 = 2\chi$  ist die Absorbtion eines Photons des Sinus Feldes ausreichend, um ein Paar zu erzeugen.

# 5 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt soll auf die Ergebnisse und Grenzen der in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen zum assistierten Schwinger-Effekt eingegangen werden. Zunächst ist festzuhalten, dass für alle in Unterabschnitt 3.2 diskutierten Felder für entsprechend gewählte Parameter ein Verstärkungseffekt bezüglich der Teilchendichte erzeugter Elektron-Positron-Paare beobachtet werden kann.

## 5.1 Vergleich von Sauter- und Gauß-Konfiguration

Bezüglich der in den Abschnitten 4.1 und 4.2 untersuchten Teilchendichte  $f(\vec{p}, t_\infty)$  der Sauter- und Gauß-Konfigurationen finden sich zunächst viele Gemeinsamkeiten. Für beide Konfigurationen ist der Verstärkungseffekt am größten, wenn die Schwinger-Paarzeugung des starken, niederenergetischen Pulses gegenüber der dynamischen Paarzeugung des schwachen, hochenergetischen Pulses dominiert. Bei starker Dominanz der dynamischen Paarzeugung für  $\tau_2 \leq 1/2m$  strebt der Verstärkungsfaktor  $V \rightarrow 1$ .<sup>1</sup> Im Bild des Dirac-Sees könnte man argumentieren, dass dann die durch den starken Puls  $E_{0,1}$  erzeugte „Verkipfung“ von positivem und negativem Kontinuum bei der Paarzeugung kaum eine Rolle spielt, da die durch Absorption bereitgestellte Energie  $n/\tau_2 \geq n 2m$  ausreicht, eine Vielzahl von Teilchen aus dem negativen Kontinuum über die Energiebarriere  $2m$  zu heben.

Der wesentliche Unterschied beider Konfigurationen findet sich im Verhalten der erzeugten Teilchendichte  $f(\vec{p}, t_\infty)$  im Regime der Multi-Photonen-Absorption bei  $\tau \gtrsim 1/m$ . Hier ist die Zahl der durch den Gauß-Puls erzeugten Paare im Vergleich zur Sauter-Konfiguration stark unterdrückt. Für den assistierten Schwinger-Effekt bedeutet dies für das Gauß-Profil, dass im Gegensatz zur Sauter-Konfiguration die Schwinger-Paarzeugung des starken Pulses auch noch bei sehr hohen Frequenzen  $1/\tau_2 \gtrsim m$  und für den Schwinger-Limes relativ großen Keldysh-Parametern  $\gamma_1 \approx 0.1$  gegenüber der dynamischen Paarzeugung dominiert. In diesem Bereich ist daher mit einem erheblichen Unterschied zwischen Sauter- und Gauß-Konfiguration bezüglich des Verstärkungseffektes in der dynamisch assistierten Schwinger-Paarzeugung zu rechnen. Dieses Verhalten bedarf weiterer numerischer Untersuchungen.

Anhand der Betrachtung der Zeitevolution der Quasiteilchendichte  $f(T)$  für  $p_{\parallel} = p_{\perp} = 0$  in der Sauter-Konfiguration kann gezeigt werden, dass die numerischen Resultate für kleine

---

<sup>1</sup>Vgl. Gl. (4.7).

Feldstärken  $E_0 \ll E_c$  und niedrige Frequenzen  $1/\tau \ll m$  um Größenordnungen von den analytischen abweichen. In diesem Parameterbereich ist die Paarproduktion sehr stark unterdrückt. Dann besteht die Möglichkeit, dass der resultierende globale Fehler  $\Delta_{global}$  der Integrationsroutine um Größenordnungen über dem Wert der analytischen Teilchendichte  $f(T_\infty)$  liegt. An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass generell für große Impulse  $p \gg 1$  die Paarerzeugung stark unterdrückt ist und zur Untersuchung dieser Bereiche eine enorm hohe Genauigkeit der Integrationsroutine zu fordern ist.

## 5.2 Überlagerung des hochfrequenten Sinus-Feldes mit dem starken Sauter-Puls

In Abschnitt 4.3 können auch für die Überlagerung eines starken Sauter-Pulses mit einem hochfrequenten Sinus-Feld Verstärkungseffekte bezüglich der dynamisch assistierten Paarerzeugung festgestellt werden. Im Gegensatz zu Sauter- und Gauß-Konfiguration finden sich Verstärkungseffekte auch im Bereich hoher Frequenzen  $1/\tau_2 \leq 1/2m$  des Sinus-Feldes, also im Bereich der zulässigen Mono-Photonen-Absorption. Für die in dieser Arbeit betrachteten Feldstärken  $E_{0,1} = 0.15E_c$  und  $E_{0,2} = 0.25E_c$  ist der numerisch ermittelte Verstärkungsfaktor  $V$  in diesem Regime nahezu unabhängig von der Feldstärke  $E_{0,1}$ . Die größten Verstärkungseffekte zeigen sich im Bereich  $1/m > \tau_2 \gtrsim 1/2m$ , also genau dann, wenn die Wellenlänge  $\lambda_2$  des Sinus-Feldes unterhalb der Comptonwellenlänge  $\lambda_C$  liegt, die Energie eines absorbierten Photons aber noch nicht ganz ausreicht, um Teilchen aus dem negativen Kontinuum über die Energiebarriere  $2m$  anzuregen. Im Bild des Dirac-Sees ist dann gerade die reduzierte Tunnelstanz zwischen dem aus dem negativen Kontinuum angeregten Teilchen und dem positiven Kontinuum minimal.<sup>2</sup>

Weiterhin ist in dieser Arbeit gezeigt, dass durch die Überlagerung des hochfrequenten Sinus-Feldes mit einem starken Sauter-Puls eine „Verschiebung“ der für das einzelne Sinus-Feld charakteristischen Akkumulationspeaks der Teilchendichte  $f(p_{||}/m, t_\infty)$  um den Parameter  $\pm\gamma_1^{-1}$  einsetzt. Für  $p_\perp = 0$  konnte die Resonanzbedingung (4.12) aus den numerischen Resultaten abgeleitet werden. Aus rechentechnischen Gründen beschränkt sich diese Arbeit auf den Fall  $p_\perp = 0$ . Die naheliegende Verallgemeinerung von Gl. (4.12) wäre

$$E_{e,n}^2 = \left( \frac{n}{2\tau_2} \right)^2 = m^2 + p_{\perp,n}^2 + (p_{||,n} \pm eE_{0,1}\tau_1)^2. \quad (5.1)$$

Die Folge wären elliptische Strukturen der Teilchendichte  $f(\vec{p}, t_\infty)$  im Impulsraum. Um diese Hypothese zu überprüfen, sind weiterführende numerische Untersuchungen für den Fall  $p_\perp \neq 0$  notwendig.

---

<sup>2</sup>Vgl. Abb. 1.5.

---

## 5.3 Experimentelle Grenzen der betrachteten Feldkonfigurationen

Zuletzt soll darauf hingewiesen werden, dass der hier betrachtete abrupte Ein- und Ausschaltvorgang experimentell kaum zu realisieren ist. Für das Vektorpotential  $A(t)$  der Sauter- und Gauß-Konfiguration ohne Ein- und Ausschaltfunktion ergibt sich eine Gleichspannungskomponente  $U \propto A(t_\infty) - A(t_{-\infty}) \neq 0$ . Dies ist ein Widerspruch zum ladungsfreien Raum im Laserfeld. Die hier betrachteten Konfigurationen stoßen an die Grenze ihrer experimentellen Überprüfbarkeit.

Dennoch kann ihre Untersuchung zu einem besseren Verständnis des Zusammenspiels zwischen dynamischer, proportional zu  $E_0^2$  verlaufender und der von  $E_0$  exponentiell abhängigen Schwinger-Paarzeugung beitragen.

# A Grenzverhalten der durch den Sauter-Puls erzeugten Teilchendichte

In diesem Abschnitt soll das Verhalten der für die Sauter-Konfiguration gefundenen analytischen Lösung der Teilchendichte  $f(\vec{p}, t_\infty)$  aus Gl. (4.2) für den Grenzfall dominanter Schwinger- bzw. dominanter dynamischer Paarerzeugung untersucht werden. Dazu bringt man Gl. (4.2) in die dimensionslose Darstellung

$$f(\vec{\Pi}, t_\infty) = 2 \frac{\sinh(\pi[\chi/\gamma + \kappa^- - \kappa^+]) \sinh(\pi[\chi/\gamma - \kappa^- + \kappa^+])}{\sinh(2\pi\kappa^-) \sinh(2\pi\kappa^+)} \quad (\text{A.1})$$

mit  $\kappa^\pm = \frac{\chi}{2\gamma} \sqrt{\tilde{\epsilon}^2 \gamma^2 \pm 2\Pi_\parallel \gamma + 1}$  und  $\tilde{\epsilon}^2 = 1 + \Pi^2$ . Die dimensionslosen Parameter  $\Pi = p/m$  und  $\chi = m\tau$  sind analog zu Abschnitt 3.3 definiert.

## A.1 Schwinger-Limes

Wie in Unterabschnitt 3.3.1 beschrieben wird, befindet sich die Sauter-Konfiguration für Parameter  $\gamma \ll 1$  und  $\chi \gg 1$  im Schwinger-Limes. Eine äquivalente Darstellung von Gl. (A.1) ist durch

$$f(\vec{\Pi}, t_\infty) = 2 \frac{\cosh\left(2\pi\frac{\chi}{\gamma}\right) - \cosh(2\pi[\kappa^+ - \kappa^-])}{\cosh(2\pi[\kappa^+ + \kappa^-]) - \cosh(2\pi[\kappa^+ - \kappa^-])} \quad (\text{A.2})$$

gegeben. Da  $\gamma \ll 1$  und  $\chi \gg 1$  sind, ist insbesondere  $\chi/\gamma \gg \chi \gg 1$ . Für  $\gamma \ll 1$  können wir  $\kappa^\pm$ , in dem wir die Wurzel um  $\gamma = 0$  in eine Taylorreihe entwickeln, mit

$$\kappa^\pm = \frac{\chi}{2\gamma} \left( 1 \pm \Pi_\parallel \gamma + \frac{1}{2} \tilde{\epsilon}_\perp^2 \gamma^2 \pm \mathcal{O}(\gamma^3) \right) \quad (\text{A.3})$$

abschätzen. Dann gilt näherungsweise

$$\begin{aligned}\kappa^+ + \kappa^- &\approx \frac{\chi}{\gamma} \left( 1 + \frac{1}{2} \tilde{\epsilon}_\perp^2 \gamma^2 \right) > \frac{\chi}{\gamma} \gg 1, \\ \kappa^+ - \kappa^- &\approx \Pi_\parallel \chi.\end{aligned}\tag{A.4}$$

Für große Argumente  $x \gg 1$  gilt  $\cosh(x) \approx \exp(x)/2$  und damit

$$\frac{\cosh\left(2\pi \frac{\chi}{\gamma}\right)}{\cosh\left(2\pi [\kappa^+ + \kappa^-]\right)} \approx \exp\left(2\pi \left[\frac{\chi}{\gamma} - \kappa^+ - \kappa^-\right]\right).\tag{A.5}$$

Außerdem gelte

$$\begin{aligned}\frac{\cosh\left(2\pi [\kappa^+ - \kappa^-]\right)}{\cosh\left(2\pi \frac{\chi}{\gamma}\right)} &\rightarrow 0, \\ \frac{\cosh\left(2\pi [\kappa^+ - \kappa^-]\right)}{\cosh\left(2\pi [\kappa^+ + \kappa^-]\right)} &\rightarrow 0.\end{aligned}\tag{A.6}$$

Dann ergibt sich nach elementarer Umformung von Gl. A.2 für die Quasiteilchendichte

$$f(\vec{\Pi}, t_\infty) \approx 2 \exp\left(2\pi \left[\frac{\chi}{\gamma} - \kappa^+ - \kappa^-\right]\right)\tag{A.7}$$

Verwendet man außerdem für  $\kappa^+ + \kappa^-$  die Näherung aus Gl. (A.4), folgt schließlich

$$f(\vec{\Pi}, t_\infty) \approx 2 \exp\left(-\pi [\chi \gamma \tilde{\epsilon}_\perp^2]\right) = 2 \exp\left(-\pi \left[\frac{E_c \tilde{\epsilon}_\perp^2}{E_0}\right]\right) = f_{const}(\vec{\Pi}, t_\infty).\tag{A.8}$$

## A.2 Grenzfall dynamischer Paarerzeugung

In Unterabschnitt 3.3.1 wird diskutiert, dass für Parameter  $\gamma \gg 1$  und  $\chi \approx 1$  die dynamische Paarerzeugung dominiert. Dann können wir  $\kappa^\pm$  aus Gl. (A.1) um  $1/\gamma = 0$  in eine Taylorreihe entwickeln. Es folgt

$$\kappa^\pm = \frac{\chi}{2} \left( \tilde{\epsilon} \pm \frac{\Pi_\parallel}{\tilde{\epsilon} \gamma} + \mathcal{O}(\gamma^2) \right)\tag{A.9}$$

und man erhält

$$\kappa^+ - \kappa^- \approx \frac{\Pi_\parallel \chi}{\tilde{\epsilon} \gamma}.\tag{A.10}$$

Diese Näherung setzt man nun in Gl. (A.1) ein und erhält

$$f(\vec{\Pi}, t_\infty) \approx 2 \frac{\sinh\left(\frac{\pi\chi}{\gamma} \left[1 - \frac{\Pi_\parallel}{\tilde{\epsilon}}\right]\right) \sinh\left(\frac{\pi\chi}{\gamma} \left[1 + \frac{\Pi_\parallel}{\tilde{\epsilon}}\right]\right)}{\sinh(2\pi\kappa^-) \sinh(2\pi\kappa^+)}. \quad (\text{A.11})$$

Da  $\chi/\gamma \ll 1$  ist, lässt sich im Zähler  $\sinh(x) \approx x$  nähern und man erhält schließlich

$$f(\vec{\Pi}, t_\infty) \approx \left( \frac{\tilde{\epsilon}_\perp^2}{\tilde{\epsilon}_\perp^2 + \Pi_\parallel^2} \right) \frac{2\pi^2\chi^2}{\sinh(2\pi\kappa^-) \sinh(2\pi\kappa^+)} \frac{1}{\gamma^2}. \quad (\text{A.12})$$

Für  $\Pi_\perp = \Pi_\parallel = 0$  folgt mit  $\kappa^+ = \kappa^- = \chi/2$  Gl. (4.3).

## B Literaturverzeichnis

- [1] E. Brezin and C. Itzykson. *Pair Production in Vacuum by an Alternating Field*. Phys. Rev. D **2**, 1191(1970).
- [2] P. A. M. Dirac. *The Quantum Theory of the Electron*. Proc. R. Soc. A **52**, 117 610 (1928).
- [3] F. Hebenstreit, R. Alkofer, and H. Gies. *Schwinger pair production in space- and time-dependent electric fields: Relating the Wigner formalism to quantum kinetic theory*. Phys. Rev. D **82**, 105026 (2010) [arXiv:1007.1099v2].
- [4] O. Klein. *Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac*. Z. Phys. **52**, 157 (1929).
- [5] C. Kohlfürst. *Electron-Positron Pair Production in Structured Pulses of Electric Fields*. Masterarbeit, Karl-Franzens-Universität Graz (2012).
- [6] M. Orthaber. *Electron-Positron Pair Production in Multiple Time Scale Electric Fields*. Diplomarbeit, Karl-Franzens-Universität Graz (2010).
- [7] M. Orthaber, F. Hebenstreit, and R. Alkofer. *Momentum Spectra for Dynamically Assisted Schwinger Pair Production*. Phys. Lett. B **698**, 80 (2011) [arXiv:1102.2182v1].
- [8] A. Otto. *Paarerzeugung: Teilchendynamik in elektromagnetischen Feldern*. Diplomarbeit, TU Dresden (2013).
- [9] M. Peskin and D. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, (1995).
- [10] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, and B. Flannery. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, (2007).
- [11] F. Sauter. *Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs*. Z. Phys. **69**, 742 (1931).
- [12] S. Schmidt, D. Blaschke, G. Ropke, S. Smolyansky, and A. Prozorkevich *et al.* *A Quantum kinetic equation for particle production in the Schwinger mechanism*. Int. J. Mod. Phys. E **7**, 709 (1998).

- [13] J. Schwinger. *On Gauge Invariance and Vacuum Polarization*. Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [14] J. Sicking. *Pulsformabhängigkeit im dynamisch verstärkten Sauter-Schwinger-Effekt*. Bachelorarbeit, Universität Duisburg-Essen (2012).
- [15] N. Straumann. *Relativistische Quantentheorie*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2005).

## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich recht herzlich für die Betreuung der Bachelor-Arbeit durch Prof. Dr. Burkhard Kämpfer bedanken, der mir damit einen über das Bachelor-Studium hinausgehenden vertiefenden Einblick in die Quantenfeldtheorie ermöglichte. Ein ganz besonderes Dankeschön möchte ich dabei Andreas Otto aussprechen, der mir in allen diesen arbeitsintensiven Wochen stets mit Rat und Tat zur Seite stand, insbesondere auch in Angelegenheiten organisatorischer Natur. Dabei sei neben den exzellenten Literaturhinweisen, der Unterstützung bei der Einarbeitung in  $\text{\LaTeX}$  und vielem anderen mehr insbesondere das mehrfache Korrekturlesen erwähnt, welches mir neue Blickwinkel auf das wissenschaftliche Schreiben eröffnete.

Der Fachrichtung Physik an der TU Dresden möchte ich recht herzlich dafür danken, dass für ihre Studenten stets ein umfangreiches Maß an Rechentechnik zur Verfügung steht. Ohne diese wäre die Gewinnung numerischer Resultate um Größenordnungen schwieriger gewesen.

Ein ganz besonderer Dank gilt PD Dr. Günther Plunien, der sich trotz verspäteter Nachfrage meinerseits dazu bereit erklärte das Zweitgutachten für diese Arbeit anzufertigen.

An dieser Stelle sei noch die von Prof. Dr. Roland Ketzmerick gestaltete Vorlesung „Computational Physics“ lobend erwähnt, die mir einen sehr guten Einstieg in die Programmiersprache „python“ ermöglichte und sich bezüglich dieser Arbeit für mein Verständnis der Integrationsroutine „odeint“ als äußerst nützlich erwies.

## **Erklärung**

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit im Rahmen der Betreuung am Institut für Theoretische Physik ohne unzulässige Hilfe Dritter verfasst und alle Quellen als solche gekennzeichnet habe.

Hans Oppitz

Dresden, Dezember 2013