

**TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN**

Longitudinale Evolution der stark-wechselwirkenden Materie in ultra-relativistischen Schwerionenkollisionen

Bachelor-Arbeit
zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science
im Bachelor-Studiengang Physik

vorgelegt von

Benjamin Rabe
geboren am 13.01.1993 in Chemnitz

Institut für Theoretische Physik
Fachrichtung Physik
Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften
Technische Universität Dresden
2016

Eingereicht am 20. Januar 2016

1. Gutachter: Prof. Dr. Burkhard Kämpfer
2. Gutachter: Prof. Dr. Dominik Stöckinger

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die longitudinale Evolution der stark-wechselwirkenden Materie untersucht, welche in ultra-relativistischen Schwerionenkollisionen erzeugt wird. Es handelt sich um eine Machbarkeitsstudie, unter anderem zur Untersuchung der Äquilibrationstemperatur des Quark-Gluon-Plasmas (QGP). Einer Idee von Stephanov und Yin folgend wird eine Evolution in inverser Zeitrichtung verwendet, um auf die frühen, heißen Zustände des QGP zurückschließen zu können. Dabei wird der Ausfrierzustand (Freeze-Out) als Anfangsbedingung für die zeitliche Rückentwicklung der Dynamik der stark-wechselwirkenden Materie betrachtet. Der Freeze-Out-Zustand wird hier an die experimentellen Ergebnisse der ALICE-Kollaboration für die Rapiditätsspektren aus den zentralsten Pb-Pb-Kollisionen bei einer Schwerpunktennergie von $\sqrt{s_{NN}} = 2,76$ TeV pro Nukleon angeglichen, indem drei Parametrisierungen einer Ausfrierfläche verwendet werden. Die Voraussetzung für die Evolution des Mediums ist die Anwendbarkeit der idealen Hydrodynamik. Betrachtet wird das vereinfachte Verhalten für eine Zustandsgleichung $\epsilon = 3p$. Es wird zudem die Sensibilität der hydrodynamischen Evolution auf die Wahl der Parametrisierung der Ausfrierfläche diskutiert.

Abstract

This study investigates the longitudinal evolution of strongly-interacting matter produced in ultra-relativistic heavy-ion collisions. It is a feasibility study for, among other things, the analysis of the equilibration temperature of the quark-gluon plasma (QGP). Following an idea of Stephanov and Yin, a time-reversed evolution is used to deduce the early, hot stages of the QGP. In this process the freeze-out state is used as an initial condition for the reverse-evolution of the dynamics of the strongly-interacting matter. This condition is chosen to fit the experimental results of the ALICE collaboration for rapidity spectra from the most central Pb-Pb collisions with a center-of-mass frame energy of $\sqrt{s_{NN}} = 2,76$ TeV per nucleon. Thus three different parameterizations were used to reconstruct the freeze-out surface. As a condition we assume the applicability of ideal hydrodynamics for the evolution of the medium. The simplified behavior for the equation of state $\epsilon = 3p$ is observed. This thesis also discusses the sensitivity of the hydrodynamical evolution to the choice of the freeze-out parameterization.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Vorbetrachtungen	5
2.1	Freeze-Out	5
2.2	Das QGP als ideales Fluid	7
3	Rückentwicklung der Dynamik des QGP	11
3.1	Rekonstruktion von Ausfrierflächen	11
3.2	Freeze-Out mit Gauß-Funktion	12
3.3	Freeze-Out mit Bjorken-Plateau	17
3.4	Freeze-Out mit Woods-Saxon	20
4	Zusammenfassung und Ausblick	23
A	Herleitung der Freeze-Out-Formel	25
B	Ideale Hydrodynamik	29
B.1	Longitudinale ideale Hydrodynamik	30
B.2	Khalatnikov-Gleichung	31
C	Test der Simulation	37
C.1	Wellengleichung	37
C.2	Bjorken-Lösung	38
C.3	Ausfrierbedingungen aus der Maximum-Entropy Method	39
D	Weitere grafische Darstellungen	41
	Literaturverzeichnis	47

1 Einleitung

Materie, bestehend aus Elektronen und Atomkernen, welche sich aus Protonen und Neutronen zusammensetzen, die wiederum gebundene Zustände von Quarks und Gluonen sind, ist nicht die Form, in der Materie zu Beginn unseres Universums auftrat. Heutiger Vorstellung zufolge sind diese Teilchen in der kosmologischen Evolution erst entstanden aus einer anderen, sehr viel dichteren und heißeren Materieform. Durch deren hohen Energiedichte ist es Hadronen¹ zunächst nicht möglich sich zu formen. Stattdessen befanden sich die Quarks, Antiquarks und Gluonen in einem ungebundenen, stark-wechselwirkenden lokalen Gleichgewichtszustand mit dem Namen Quark-Gluon-Plasma² (QGP), welcher in den späten 70er Jahren geprägt wurde. Man geht heute davon aus, dass sich die Materie in unserem Universum einige Mikrosekunden nach dem Urknall in diesem Zustand befand. Während es expandierte und auf eine pseudokritische Temperatur $T_c \approx 150 \text{ MeV}$ ³ abkühlte, verbanden sich Quarks, Antiquarks und Gluonen zu Baryonen und Mesonen. Nach dieser als Hadronisierung bezeichneten Phase, sank die Temperatur unseres Universums innerhalb weniger Minuten unter $\approx 100 \text{ keV}$,³ sodass sich die ersten Kerne bilden konnten. (Dies wird als primordiale Nukleosynthese bezeichnet.) [1] Heute ist es uns möglich, das QGP experimentell unter Laborbedingungen zu erzeugen. Die in ultra-relativistischen Schwerionenkollisionen geschaffenen extremen Bedingungen von hohen Temperaturen und Energiedichten führen zum Deconfinement⁴ der Materie und somit zur Entstehung eines QGP. Dazu wurden unter anderen bedeutenden Versuchen [2, 3, 4] Schwerionenkollisionen am LHC [5] im Jahr 2010 vorgenommen. Dabei wurden jeweils zwei vollständig ionisierte Bleikerne bei einer Schwerpunktenergie von $\sqrt{s_{NN}} = 2,76 \text{ TeV}$ pro Nukleon⁵ zur Kollision gebracht und die resultierenden Hadronenschauer in Detektoren gemessen. Die Ergebnisse dazu veröffentlichte die ALICE⁶-Kollaboration [6] im Jahr 2013 in Form der longitudinalen Verteilungen von geladenen Teilchen als Funktion der Teilchenrapiditäten.

Es ist schwer, genaue Informationen über die Eigenschaften des QGP, wie Temperatur, Zu-

¹Teilchen, die von der starken Wechselwirkung zusammengehalten werden. Je nach Spin werden diese in Mesonen (z. B. π - und K -Mesonen) und Baryonen (z. B. Protonen und Neutronen) unterteilt.

²Die historische Bezeichnung "Plasma" ist im Grunde genommen unpassend, da es sich eher wie ein Fluid mit geringer Viskosität verhält.

³Es werden hier natürliche Einheiten mit $\hbar = c = k_B = 1$ verwendet. Die Temperaturen 150 MeV und 100 keV entsprechen $1,74 \cdot 10^{12} \text{ K}$ bzw. $1,16 \cdot 10^9 \text{ K}$.

⁴Eine Aufhebung der Bindungszustände von Quarks und Gluonen. Aufgrund der starken Wechselwirkung bewegen diese sich als quasi-freie Teilchen wie in einem Fluid.

⁵Das entspricht einer Strahlenergie von $1,38 \text{ TeV}$ pro Nukleon.

⁶A Large Ion Collider Experiment am LHC (Large Hadron Collider) am CERN in Genf, Schweiz.

standsgleichung oder Transportkoeffizienten direkt zu erhalten. Wichtige experimentelle Informationen, die uns heute zur Verfügung stehen, stecken in den gemessenen Teilchenspektren. Um diese mit den obigen Eigenschaften des QGP in Einklang zu bringen, muss auf theoretische Modelle zurückgegriffen werden. Resultate bei niedrigeren Energien von $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV am RHIC⁷ ergaben bereits, dass das bei hochenergetischen Kernreaktionen entstandene QGP quantitativ durch hydrodynamische Modelle beschrieben werden kann. [8]

Eine idealisierte Darstellung der Evolution des QGP ist in Abbildung 1.1 dargestellt. Die im Fall von Pb-Pb-Kollisionen beteiligten Lorentz-kontrahierten Bleikerne treffen im Schwerpunkt ($z = 0$) aufeinander und fliegen aufgrund der hohen Impulse durcheinander hindurch. Die dabei wechselwirkenden Nukleonen in den Bleikernen erzeugen neue Teilchen, welche sich zunächst in einem starken Nichtgleichgewichtszustand befinden (free streaming in Abb. 1.1). Durch Entropieproduktion aufgrund der starken Wechselwirkung gleichen sich Energiedichten, Netto-Baryondichten usw. aus, bis sich ein Zustand mit lokalem Gleichgewicht einstellt, welches sich durch thermodynamische Größen, wie Temperatur und Druck, beschreiben lässt.

Dieses System wird als QGP bezeichnet. Die Evolution eines solchen Systems kann mit Hilfe der relativistischen Hydrodynamik berechnet werden. Werden die mittleren Abstände der Teilchen bei weiterer Expansion und Hadronisierung des Systems zu groß, kann sich kein lokaler Gleichgewichtszustand mehr einstellen. Die Hadronen bewegen sich dann als freie Teilchen weiter. Von da an ist eine hydrodynamische Beschreibung nicht mehr möglich. Man nennt diesen Prozess Freeze-Out.

In dieser Arbeit wird die longitudinale Evolution der stark-wechselwirkenden Materie untersucht, indem die Daten der ALICE-Kollaboration [6] genutzt werden, um geeignete Parametrisierungen zu finden, die den Freeze-Out-Zustand hinreichend gut beschreiben. Dabei wird der Cooper-Frye-Formalismus [7] verwendet, um von der Ausfrierfläche auf die entstehende Teilchenspektren zu schließen. Dieser gefundene Zustand wird als "Anfangsbedingung" für die hydrodynamische Simulation gewählt, welche als ideal⁸ angenähert wird.

Sowohl das transversale Profil von Schwerionenkollisionen als auch deren dreidimensionales Verhalten wurden bereits oft untersucht. Die in dieser Arbeit genutzte Methode der Lösung der Khalatnikov-Gleichung stellt sich als hervorragend für die invertierte Evolution heraus. Da es sich hier um eine Machbarkeitsstudie handelt, wird aus Gründen der Einfachheit ausschließlich die longitudinale Expansion betrachtet.

⁷Relativistic Heavy Ion Collider am Brookhaven National Laboratory in Brookhaven, USA.

⁸Das heißt, dass jegliche Transportkoeffizienten wie Viskositäten [9], sowie Gradienten in den Termen höherer Ordnung im Energie-Impuls-Tensor vernachlässigt werden.

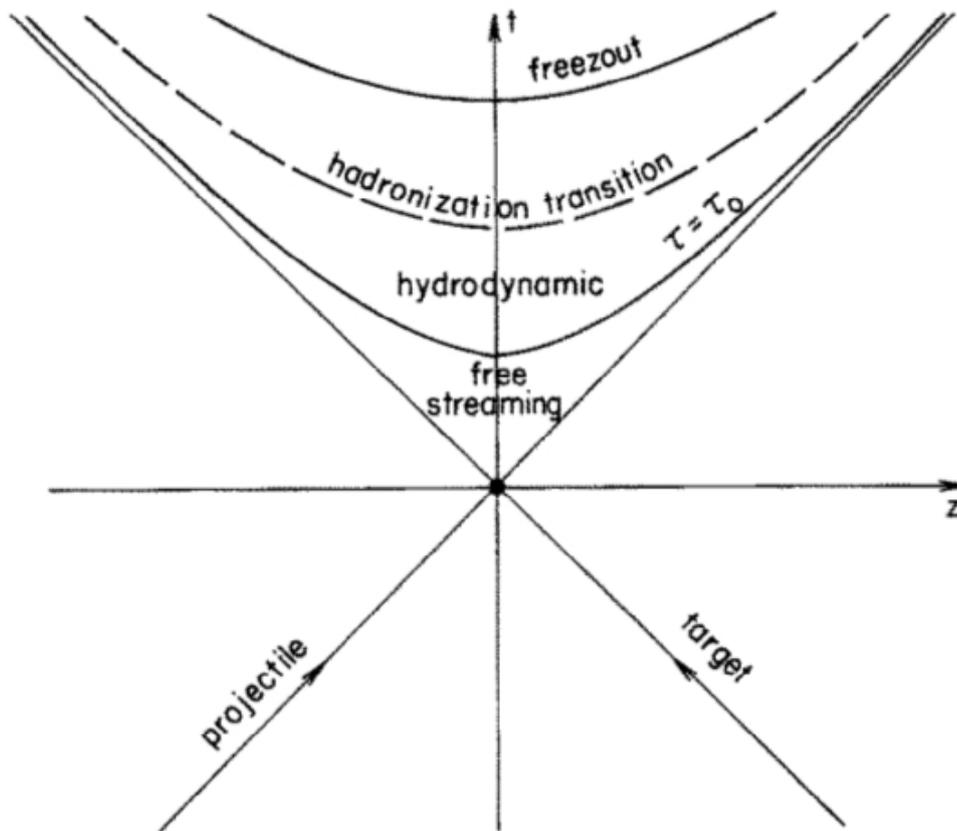


Abbildung 1.1: Schematisches Raum-Zeit-Diagramm einer ultra-relativistischen Schwerionenkollision entlang der z -Achse im Schwerpunktsystem. Die unterste Hyperbel zeigt den Übergang von der Ausdehnung ("free streaming") von partonischen Freiheitsgraden zum hydrodynamischen Verhalten des nachfolgend entstehenden stark-wechselwirkenden Quark-Gluon-Systems. Dies findet bei einer Äquilibriumstemperatur $T_{eq} > T_c$ zur Eigenzeit $\tau = \tau_0$ statt, ab der das System als QGP betrachtet wird. Die oberste Hyperbel verdeutlicht den Übergang von hydrodynamisch beschreibbaren Hadronen zu frei stömenden, nicht mehr wechselwirkenden Hadronen (Freeze-Out). Dazwischen findet die Hadronisierung des QGP statt ("hadronisation transition"). Quelle: [10]

2 Theoretische Vorbetrachtungen

2.1 Freeze-Out

Während das QGP expandiert, wandeln sich ungebundene Quarks, Antiquarks und Gluonen und farbneutrale Hadronen ständig ineinander um. Sinkt die Temperatur unter einen bestimmten Wert, an dem die kinetische Energie der Teilchen nicht mehr ausreicht, weiterhin Teilchenumwandlungen durchzuführen, verbleiben diese in der Form von Hadronen. Dies wird chemischer Freeze-Out genannt.

Durch weiteres Sinken der Temperatur des Hadronengases vergrößert sich der Abstand benachbarter Teilchen so weit, dass die kurzreichweitige starke Wechselwirkung innerhalb eines vergleichsweise kurzen Zeitintervalls zu schwach wird und eine lokale Thermalisierung, und damit eine Beschreibung im Rahmen der Hydrodynamik, nicht mehr möglich ist. Dieser Prozess wird als kinetischer Freeze-Out bezeichnet.[11] Danach strömen die Hadronen ungehindert als freie Teilchen, bis sie in Detektoren als Teilchenspektren gemessen werden. Instabile Hadronen zerfallen auf dem Weg zu den Detektoren und müssen nachträglich vermöge ihrer Zerfallsprodukte rekonstruiert werden.

Cooper-Frye-Formalismus

Der gesamte Prozess des kinetischen Freeze-Out wird durch einen von Fred Cooper und Graham Frye [7] vorgestellten Formalismus idealisiert beschrieben. Dabei werden die komplexen statistischen Vorgänge des Freeze-Out auf ein einfaches Kriterium reduziert. Die hydrodynamische Evolution endet bei Erreichen dieser Bedingung und jedem Fluidelement wird ein Teilchenspektrum einer bestimmten Teilchenspezies zugeordnet. Die Summe über alle geladenen Teilchenspektren entspricht dann dem geladenen Gesamtteilchenspektrum¹. Nach Cooper-Frye berechnet sich das Spektrum einer Teilchensorte aus

$$p^0 \frac{d^3 N}{dp^3} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(p, u(x), T(x)) p^\mu d^3 \sigma_\mu . \quad (2.1)$$

$d^3 \sigma_\mu$ ist der infinitesimale Normalvektor auf der Freeze-Out-Hyperfläche und p^μ der Viererimpuls des entstehenden Teilchens. Im Laborsystem gilt für diesen unter Verwendung kartesischer

¹Die Messung geladener Teilchen ist einfacher. Deshalb werden bevorzugt die geladenen Teilchenspektren betrachtet.

Koordinaten:

$$(p^t, \vec{p}_\perp, p^z) = m(\cosh y, \vec{0}, \sinh y) \quad (2.2)$$

mit der Teilchenmasse m . Die Größe y repräsentiert die Teilchenrapidity. $f(p, u, T)$ ist die Teilchenverteilungsfunktion im lokalem Gleichgewicht, die im Fall einer Boltzmann-Näherung die Form der Boltzmann-Verteilung hat:

$$f(p, u, T) = e^{-\frac{p_\mu u^\mu}{T}} = e^{-\frac{m}{T} \cosh(y-\alpha)} . \quad (2.3)$$

Dabei ist u_μ die Vierergeschwindigkeit des Fluids (Gases) auf der Ausfrierfläche und α die lokale Fluidrapidity. Zum letzten Ausdruck in (2.3) wurde zudem angenommen, dass der Fluss der Materie rein longitudinal ist - die transversale Expansion wird also vernachlässigt ($u_\mu \sim (\gamma, 0, 0, \gamma v)$ unter Verwendung kartesischer Koordinaten). Parametrisiert man die Freeze-Out-Hyperfläche durch $\tau_f(\eta)$ in den Milne-Koordinaten

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2} , \quad \eta = \text{Artanh}\left(\frac{z}{t}\right) \quad \text{bzw.} \quad (2.4)$$

$$t = \tau \cosh \eta , \quad z = \tau \sinh \eta , \quad (2.5)$$

so erhält man mit $p^0 \frac{d^3 N}{dp^3} = \frac{d^3 N}{dy dp_\perp^2}$ für das Teilchenverteilungsspektrum:

$$\frac{d^3 N}{dy dp_\perp^2} = \frac{A_\perp m}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_\alpha \left[\tau_f(\alpha) \sinh(\eta_f(\alpha) - y) \right] e^{-\frac{m}{T_f} \cosh(y-\alpha)} d\alpha . \quad (2.6)$$

Mit der Integration über die transversalen Impulse erhält man schließlich die Rapidityverteilung:

$$\frac{dN}{dy} = \frac{A_\perp}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \partial_\alpha \left[\tau_f(\alpha) \sinh(\eta_f(\alpha) - y) \right] \int_0^\infty dp_\perp p_\perp m e^{-\frac{m}{T_f} \cosh(y-\alpha)} , \quad (2.7)$$

wobei A_\perp der totale transversale Querschnitt der Freeze-Out-Hyperfläche und T_f die Temperatur der Freeze-Out-Bedingung ist. Zudem wurde die Variable α gewählt, wobei angenommen wird, dass die Funktion $\alpha(\eta)$ invertierbar ist. Hierbei gilt $\tau(\eta_f(\alpha)) \equiv \tau_f(\alpha)$. Eine ausführliche Rechnung wird im Anhang A vorgestellt.

Mithilfe von (2.7) können die Teilchenspektren dN/dy für bestimmte Teilchenspezies der Ruhemasse m aus der Parametrisierung der Freeze-Out-Fläche $\tau_f(\alpha)$ und $\eta(\alpha)$ gewonnen werden.

2.2 Das QGP als ideales Fluid

Mit den gegebenen Freeze-Out-Parametrisierungen $\tau_f(\alpha)$ und $\eta_f(\alpha)$ kann die Evolution des QGP untersucht werden. Einer Idee von Stephanov und Yin [12] folgend, wird der Ausfrierzustand als "Anfangsbedingung" für die hydrodynamische Entwicklung gewählt und in der Zeit zurück verfolgt bis zur Äquilibrierungszeit, zu der ein lokaler Gleichgewichtszustand erstmals vorhanden war (siehe Abbildung 1.1) und zu der unsere Simulation endet. Es ist hierbei günstig, einen Koordinatenwechsel vorzunehmen: von kartesischen Koordinaten (t, z) oder Milne-Koordinaten (τ, η) zu den neuen Koordinaten (T, α) mit der Temperatur T und der Fluid-Rapidity α . Dabei spielen T und α die Rolle einer "zeit-" bzw. "raumartigen" Variablen. Somit kann ein Cauchy-Problem formuliert werden mit einer Anfangsbedingung auf einer Hyperfläche zur Freeze-Out-Temperatur $T_f = \text{konst.}$ Diese Hyperfläche entspricht dann der obigen Parametrisierung der Freeze-Out-Fläche $\tau(\alpha)$ und $\eta(\alpha)$.

Es ist möglich, die longitudinalen Hydrodynamikgleichungen in die Form einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung zu überführen, indem die Koordinaten (T, α) verwendet werden. Diese resultierende Gleichung wird als Khalatnikov-Gleichung bezeichnet und lässt sich sogar analytisch lösen, siehe dazu [12]. In dieser Arbeit wird die Khalatnikov-Gleichung jedoch, wie die Cooper-Frye-Formel, numerisch gelöst.

Die Wahl der Koordinaten (T, α) ist durchaus unüblich, da man den Größen zunächst keine zeitliche bzw. räumliche Bedeutung zuordnet. Der Vorteil dieser Herangehensweise liegt in der Betrachtung der Ausfrierfläche konstanter Temperatur, welche einen Endzustand für das betrachtete Medium darstellt. Dadurch rechtfertigt sich die Einführung der Khalatnikov-Gleichung, welche die Fluidrapidity als zweite unabhängige Koordinate einführt. Für eine bessere Anschaulichkeit werden die Ergebnisse zusätzlich in den üblicheren Koordinaten (t, z) und (τ, α) dargestellt. Im Folgenden wird ein Einblick in die relativistische Hydrodynamik gegeben, sowie die Herleitung der Khalatnikov-Gleichung. Die vollständige Rechnung findet sich im Anhang B.

Longitudinale ideale Hydrodynamik

Die fundamentale Gleichung der Hydrodynamik ist durch die Divergenzfreiheit des Energie-Impuls-Tensors gegeben:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 , \tag{2.8}$$

hierbei bedeutet das $;\nu$ die kovariante Ableitung nach der ν -ten Koordinate. Diese Gleichung ist eine Tensorgleichung und damit invariant unter allen Koordinatentransformationen. Die sich ergebenden vier Gleichungen sind nicht ausreichend für die zehn unbekanntten Komponenten des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors. Deshalb müssen Vereinfachungen vorgenommen werden. Falls erhaltene Ströme zu berücksichtigen sind, müssen die vier Gleichun-

gen (2.8) durch weitere ergänzt werden. Für hohe Energien, entsprechend LHC-Bedingungen liegt ein weitgehend Teilchen-Antiteilchen-symmetrisches Medium bei Mid-Rapidity vor, deswegen werden im Folgenden erhaltene Ladungsströme vernachlässigt. Zusätzlich wird das QGP als ideales Fluid betrachtet. Das bedeutet, dass jegliche dissipative Effekte vernachlässigt werden. In diesem Fall schreibt sich der Energie-Impuls-Tensor als [13]

$$T^{\mu\nu} = \epsilon u^\mu u^\nu + p(g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu) \quad (2.9)$$

mit der Energiedichte ϵ , dem Druck p , der Vierergeschwindigkeit u^μ und dem metrischen Tensor $g^{\mu\nu}$. Dieser Tensor enthält nur noch fünf unbekannte Größen: die Energiedichte, den Druck und die drei räumlichen Komponenten der Vierergeschwindigkeit². In kartesischen Koordinaten mit der Metrik $g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1,1,1,1)$ geht die kovariante Ableitung in Gleichung (2.8) in eine partielle Ableitung über und wir erhalten mit (2.9)

$$(u^\mu \partial_\mu) \epsilon + (\epsilon + p)(\partial_\mu u^\mu) = 0 , \quad (2.10)$$

$$(\epsilon + p)(u^\nu \partial_\nu) u^\mu + (g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu) \partial_\nu p = 0 . \quad (2.11)$$

Hierbei wurde das Gleichungssystem zerlegt durch eine Projektion entlang und eine Projektion senkrecht zur Geschwindigkeit u_ν . [14] Mit den thermodynamischen Relationen³ [13, 15]

$$d\epsilon = T ds , \quad dp = s dT , \quad Ts = \epsilon + p , \quad (2.12)$$

kann man diese in

$$\partial_\mu (s u^\mu) = 0 , \quad (2.13)$$

$$u^\mu [\partial_\mu (T u_\nu) - \partial_\nu (T u_\mu)] = 0 \quad (2.14)$$

überführen mit der Entropiedichte s und der Temperatur T . Diese Gleichungen beschreiben die Entropieerhaltung und das relativistische Analogon zur Euler-Gleichung. Des Weiteren nehmen wir eine drastische Vereinfachung [16] vor, indem wir ausschließlich die longitudinale Expansion des QGP untersuchen. In der betrachteten longitudinalen Richtung hat die Vierergeschwindigkeit die Form $u^\mu = \gamma(1,0,0,v)$ und obige Gleichungen lauten

$$\partial_t (s u^t) + \partial_z (s u^z) = 0 , \quad (2.15)$$

$$\partial_t (T u_z) - \partial_z (T u_t) = 0 . \quad (2.16)$$

²Die nullte Komponente der Vierergeschwindigkeit ergibt sich durch Anwenden der Normierungsbedingung $u^2 = -1$ aus den verbleibenden drei.

³Diese Gleichungen gelten für verschwindende Netto-Ladungsdichten, d. h. es liegt ein Teilchen-Antiteilchen-symmetrisches Medium ohne weitere erhaltene Ströme vor.

Die Khalatnikov-Gleichung

Gleichung (2.16) ist die Integrabilitätsbedingung für ein konservatives Kraftfeld $F(\vec{r})$ in zwei Dimensionen, für das $\text{rot}F(\vec{r}) = 0$ gilt und für welches ein Potenzial $\varphi(t, z)$ existiert mit $F = -\partial_{\vec{r}}\varphi$.⁴ Mit der Legendre-Transformierten von $\varphi(t, z)$

$$\chi(T, \alpha) = \varphi(t, z) - Tu_t t - Tu_z z , \quad (2.17)$$

erhält man das Khalatnikov-Potenzial $\chi(T, \alpha)$, für dessen totales Differenzial sich

$$d\chi(T, \alpha) = (t \cosh \alpha - z \sinh \alpha)dT + T(t \sinh \alpha - z \cosh \alpha)d\alpha \quad (2.18)$$

ergibt mit der Fluid-Rapidity α definiert durch

$$(u^t, \vec{u}_\perp, u^z) = (\cosh \alpha, \vec{0}, \sinh \alpha) . \quad (2.19)$$

Wechselt man die Koordinaten in Gleichung (2.15) mit Hilfe der Produktregel und vereinfacht diese mit obigem Khalatnikov-Potenzial, so erhält man die Khalatnikov-Gleichung (siehe Anhang B.2 für Rechnung):

$$[c_s^2 T^2 \partial_T^2 + T \partial_T - \partial_\alpha^2] \chi(T, \alpha) = 0 , \quad (2.20)$$

wobei $c_s^2 = dp/d\epsilon$ die Schallgeschwindigkeit ist. Im Folgenden wird die Zustandgleichung für ein ideales Gas $\epsilon = 3p$ verwendet, woraus sich die Schallgeschwindigkeit $c_s^2 = 1/3 = \text{konst.}$ ergibt. Das durch Lösung dieser Gleichung ermittelte Khalatnikov-Potenzial enthält die gesamte Information der Evolution der betrachteten idealen Flüssigkeit, welches in unserem Fall das QGP ist. Der Lösungsalgorithmus der Khalatnikov-Gleichung findet sich im Anhang B.2.

Aus Gleichung (2.18) für das Khalatnikov-Potenzial können mit der Umrechnungsvorschrift (2.4) von kartesischen Koordinaten (t, z) in Milne-Koordinaten (τ, η) die nützlichen Beziehungen für $\tau(T, \alpha)$ und $\eta(T, \alpha)$ ermittelt werden:

$$\tau(T, \alpha) = \sqrt{(\partial_T \chi)^2 - \frac{(\partial_\alpha \chi)^2}{T^2}} , \quad \eta(T, \alpha) = \alpha - \text{Artanh} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial_\alpha \chi}{\partial_T \chi} \right) . \quad (2.21)$$

Ein spezieller Fall der Hydroevolution ist gegeben für die Wahl von Bjorken-Anfangsbedingungen [17] der Form $\tau_0 = \tau(T_0)$ und $\eta_0 = \alpha$. Hierbei sind (τ, η) die mitbewegten Koordinaten des Fluids. Eine Abbildung der Dynamik findet sich im Anhang C.2.

⁴Zusätzlich muss das Gebiet auf dem F definiert ist noch einfach zusammenhängend sein, damit die Existenz des Potenzials aus $\text{rot}F = 0$ folgt.

3 Rückentwicklung der Dynamik des QGP

Uns interessiert die Evolution des QGP bis zum Freeze-Out. Mit dem aus der Lösung der Khalatnikov-Gleichung gewonnenen Khalatnikov-Potenzial $\chi(T, \alpha)$ kann für Temperaturen größer als die Ausfrieretemperatur T_f die Dynamik ermittelt werden. Dazu müssen Anfangsbedingungen an die Khalatnikov-Gleichung gestellt werden, die dem Ausfrierzustand des QGP entsprechen. Es muss also die Ausfrierfläche bei der Temperatur T_f so parametrisiert werden, dass diese mit den gemessenen Teilchenspektren der ALICE-Kollaboration [6] hinreichend gut übereinstimmen. Mit diesen Ausfrierbedingungen ist es möglich, die gesamte hydrodynamische Phase einer Schwerionenkollision zu rekonstruieren. Da das hier betrachtete Evolutionsszenario allein auf der Hydrodynamik beruht, gibt es keinen Kontrollparameter, der Abweichungen vom lokalen Gleichgewicht und damit Abweichungen vom hydrodynamischen Verhalten signalisiert. Es wird deshalb angenommen, dass für zu kleine Eigenzeiten eine Äquilibration noch nicht stattgefunden haben kann. Dem zur Folge nimmt man ad hoc eine "Anfangszeit" $\tau = \tau_0 \sim 0,1 \dots 1 \text{ fm}/c$ an. [18]

3.1 Rekonstruktion von Ausfrierflächen

Die großen Beschleuniger-Experimente bringen große Mengen an Daten mit sich, die schwer auszuwerten sind. Daher werden oft zuerst die Spektren folgender geladener Teilchen analysiert, da diese leicht zu identifizieren sind, den Großteil der gemessenen Teilchen ausmachen und ausreichend stabil sind während der Dauer der Flugzeit bis zum Detektor: Pionen π^\pm , Kaonen K^\pm , Protonen p und Antiprotonen \bar{p} . [19] Abhängig von der Masse des jeweilig betrachteten Teilchens kann mit der im Abschnitt 2.1 hergeleiteten Cooper-Frye-Formel das Teilchenspektrum ermittelt werden. Dabei wird z. B. im Fall von Kaonen K^\pm das Teilchenspektrum ermittelt, das sowohl von K^+ - als auch von K^- -Teilchen erzeugt wird, da mittels obiger Rechnung nur die Information der Masse eingeht, nicht aber deren Ladung.

Ziel ist es, anhand der Teilchenspektren eine Parametrisierung der Ausfrierfläche $\tau(\alpha)$ und $\eta(\alpha)$ zu finden. Dazu wählen wir im Folgenden exemplarisch drei Parametrisierungen für die Ausfrierzeiten $\tau_f(\alpha)$: eine Gauß-Funktion, ein Bjorken-Plateau mit Gauß-artig abfallenden Rändern und eine Woods-Saxon-Funktion. Die beiden letzteren Parametrisierungen wurden aus [20] entnommen. Durch geeignete Wahl der Parameter ergibt sich eine Ausfrierfläche, die weiter als "Anfangsbedingung" für die hydrodynamische Rückentwicklung genutzt wer-

den kann. Wir wählen im Folgenden eine Ausfrieretemperatur von $T_f = 140$ MeV, welche ebenfalls in [12] genutzt wird, und einen Wert für die totale Ausfrier-Querschnittsfläche von $A_\perp \approx \pi r_{Pb}^2 \approx 167 \text{ fm}^2 \approx 0,0043 \text{ MeV}^{-2}$ mit dem Kernradius von Blei $r_{Pb} \approx 7,3$ fm.

3.2 Freeze-Out mit Gauß-Funktion

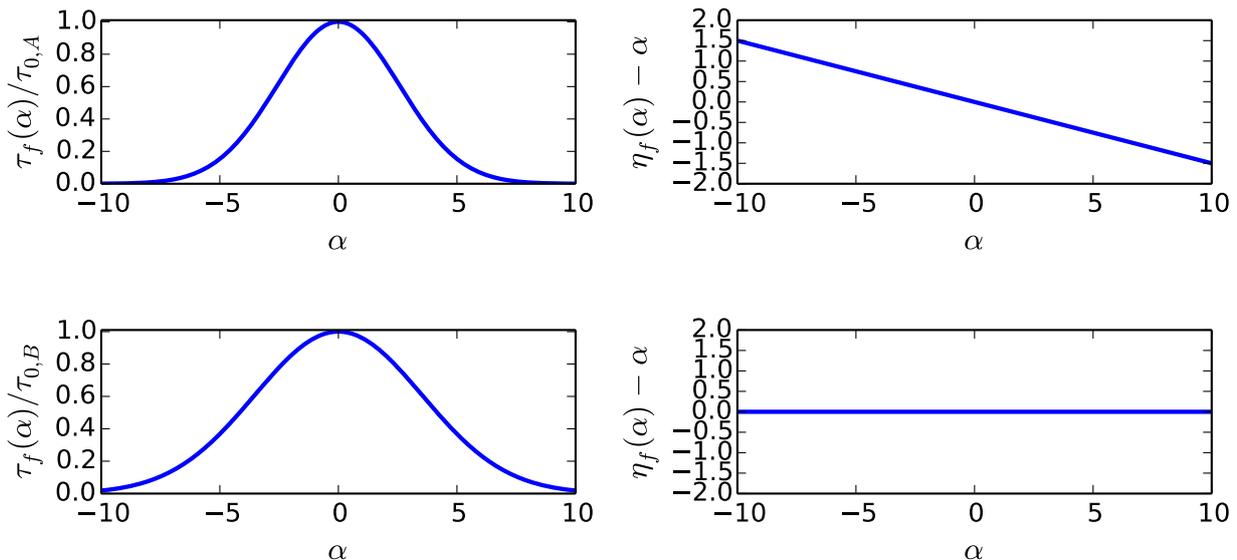


Abbildung 3.1: Parametrisierung der Ausfrierfläche durch (3.1) und (3.2) mit dem Parametersatz A: $\tau_{0,A} = 2,02 \text{ MeV}^{-1}$, $b_A = 0,075$, $c_A = 0,85$ (oben) und dem Parametersatz B: $\tau_{0,B} = 1,63 \text{ MeV}^{-1}$, $b_B = 0,04$, $c_B = 1$ (unten).

Ein sehr simpler Approximierungsversuch der wahren Ausfrierfläche ist möglich durch:

$$\tau_f(\alpha) = \tau_0 \cdot e^{-b\alpha^2}, \quad (3.1)$$

$$\eta_f(\alpha) = c\alpha \quad (3.2)$$

mit den drei anzupassenden Parametern τ_0 , b und c . Dabei gibt τ_0 die Höhe der Gauß-Funktion an, b die Breite der Gauß-Kurve und c die Form des Flussprofils. Die Parameter werden so adjustiert, dass das sich mit Hilfe der Cooper-Frye-Formel (2.6) ergebende Gesamtteilchenspektrum mit dem ALICE-Ergebnis bestmöglich übereinstimmt. Zum Vergleich werden zwei Parametersätze A und B mit den Fußnoten A bzw. B entsprechend der Abbildung 3.1 eingeführt. Die Funktion (3.1) für die Ausfrierzeit τ_f entspricht einer Gauß-Funktion, siehe Abbildung 3.1 links. Im Boost-invarianten Bjorken-Modell ist $\tau_f(\alpha)$ eine Konstante (vgl. durchgezogene Kurve in Abb. C.2 links oben). Im Parametersatz B wird eine Synchronisierung des longitudinalen Flusses α mit der Raum-Zeit-Rapidity-Koordinate η vorausgesetzt, d. h. der Fluss ist als Bjorken-artig angenommen: $\eta = \alpha$ (siehe Abbildung 3.1 rechts unten), während

beim Parametersatz A ein schnellerer Fluss nach außen angenommen wird: $\eta < \alpha$ (siehe Abbildung 3.1 rechts oben). Ein Flussprofil mit einem nach außen langsamer werdenden Fluss wäre unrealistisch, da der Fluss durch Druckgradienten hervorgerufen wird, welche nach außen größer werden. In der Darstellung 3.2 ist der Vergleich der berechneten Gesamteilchenspektren mit den ALICE-Ergebnissen zu entnehmen. Man erkennt eine bessere Übereinstimmung im Fall von Parametersatz A als bei Parametersatz B. Dieser Unterschied folgt aus der verschiedenen Wahl des Parameters c des Flussprofils der Ausfrierfläche (3.2).

Nun kann durch Lösung der Khalatnikov-Gleichung unter Verwendung der Ausfrierbedingungen das Khalatnikov-Potenzial $\chi(T, \alpha)$ für höhere Temperaturen T entsprechend früherer Zeiten ermittelt werden. Mit den Zusammenhängen (2.21) und (2.4) lässt sich die Evolution des QGP in sowohl Milne-Koordinaten (τ, η) als auch in kartesischen Koordinaten (t, z) darstellen, siehe dazu Abbildung 3.4. Zusätzlich finden sich im Anhang unter D.1 und D.2 weitere Abbildungen zu den Funktionen $\tau(T, \alpha)$ und $\eta(T, \alpha)$, sowie zum Khalatnikov-Potenzial $\chi(T, \alpha)$. Der Wert τ_0 gibt die Eigenzeit an, zu der das Zentrum des QGP ausfriert. Die Flussgeschwindigkeiten an den Isothermen sind durch Pfeile veranschaulicht.

Man stellt fest, dass sich die unterschiedliche Wahl der Ausfrierbedingung auf die Evolution

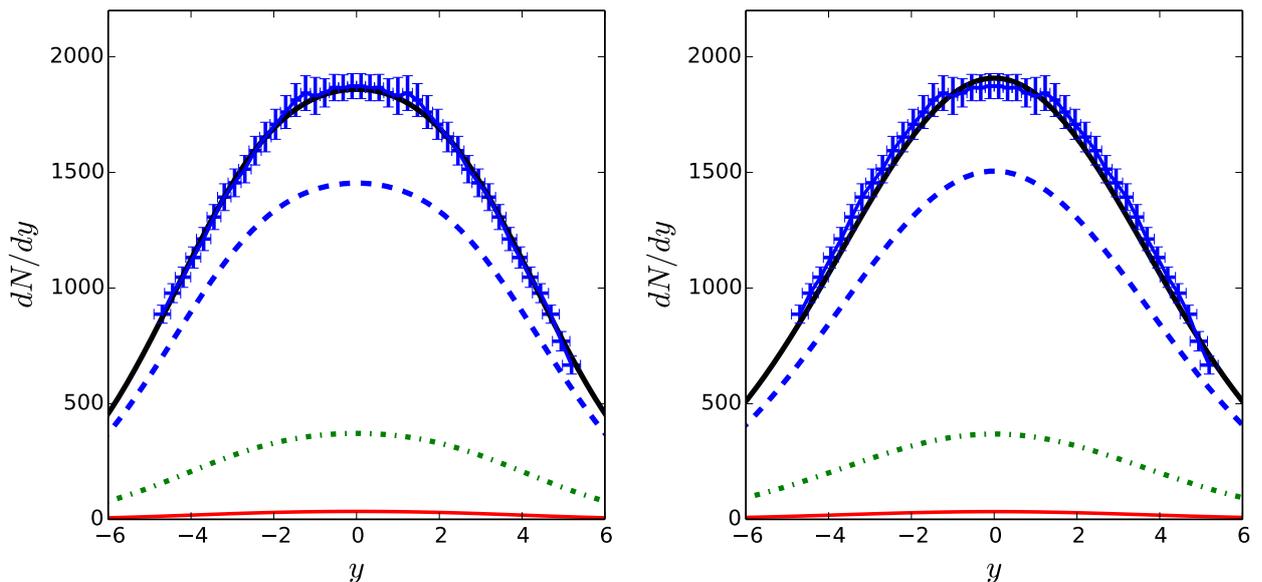


Abbildung 3.2: Darstellungen der longitudinalen Teilchenspektren für die geladenen Teilchen π^\pm (gestrichelt), K^\pm (gestrichelt und gepunktet), $p + \bar{p}$ (durchgezogen) und des Gesamteilchenspektrums (schwarz durchgezogen) zum Freeze-Out mit Parametersatz A links und mit Parametersatz B rechts. Für den Vergleich mit den ALICE-Daten [12] (Fehlerkreuze) bei einer Schwerpunktenenergie von $\sqrt{s_{NN}} = 2,76$ TeV pro Nukleon wurde eine Sättigung durch die Summe der betrachteten Teilchenspezies angenommen.

des Mediums auswirkt. Im Fall des Bjorken-Flusses (Parametersatz B) verbleiben die Isothermen in Gauß-artiger Form und gehen für hohe Raum-Zeit-Rapiditäten $\eta \rightarrow \pm\infty$ gegen $\tau \rightarrow 0$, siehe Abbildung 3.4 links unten. Im Gegensatz dazu weisen die Linien konstanter Temperaturen im Fall von Parametersatz A ein Maximum bezüglich der Raum-Zeit-Rapidität η auf.

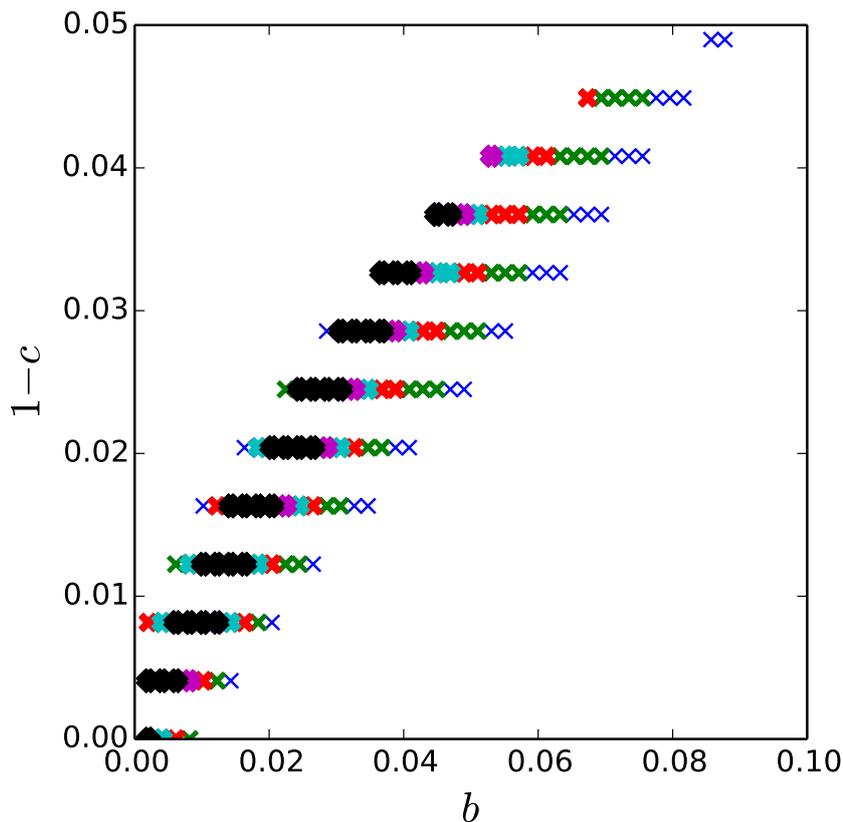


Abbildung 3.3: Die Parameter b und $(1 - c)$ in Abhängigkeit von der Maximaltemperatur, zu der sich das System zurück entwickeln lässt, ohne dass Diskontinuitäten und Abbrüche in den Größen $\tau(T, \alpha)$ und $\eta(T, \alpha)$ (Abb. D.1) auftreten. Die Maximaltemperaturen sind $T_{max} = 500$ (blau), 560 (grün), 620 (rot), 680 (hellblau), 740 (violett) und > 800 MeV (schwarz). Die Strichstärke variiert von dünn ($T = 500$ MeV) zu dick ($T > 1000$ MeV).

Für niedrige Eigenzeiten τ verlaufen die Isothermen wieder in Richtung des Koordinatenursprungs, siehe Abb. 3.4 links oben. Der Verlauf der Schwerionenkollision verdeutlicht sich in den anschaulichen Darstellungen in kartesischen Koordinaten (Abbildung 3.4 rechts): Im Fall von nicht-zentralen Stößen nimmt nur ein Teil der Nukleonen der kollidierenden Kerne an der Reaktion teil und auch im Fall zentraler Stöße werden ab einer gewissen Schwerpunktenergie die Kerne nicht mehr vollständig abgebremst. In beiden Fällen fliegen die "Reste" nahezu mit Lichtgeschwindigkeit in die ursprüngliche Richtung weiter, was einer Bewegung entlang der Bilddiagonalen in beiden Abbildungen 3.4 rechts entspricht. Das entstandene QGP bleibt um den Schwerpunkt ($z = 0$) verteilt und expandiert. Im Fall von Parametersatz A verlaufen in kartesischen Koordinaten die Isothermen bereits bei geringen z -Werten in den Koordinatenursprung. Zu einer fixen Zeit t steigt also die Temperatur nach außen an und sinkt an den Rändern wieder ab. Im Gegensatz dazu steigt bei Parametersatz B für fixe Zeiten die Temperatur scheinbar monoton in Richtung der Ränder an. In der Tat besitzen im Fall von Parametersatz B die Isothermen auch ein Maximum bezüglich der z -Achse. Diese liegen jedoch

bei weitaus höheren Werten (das Maximum der Ausfrierkurve $T_f = 140$ MeV liegt für Parametersatz A bei $z/\tau_{0,A} \approx 5,6$ und für Parametersatz B bei $z/\tau_{0,B} \approx 260$). Zur Zeit $t/\tau_0 = 1$ beginnt das QGP beim Erreichen der Ausfrieretemperatur $T_f = 140$ MeV auf Höhe des Schwerpunkts auszufrieren. Ein weiterer Unterschied ist am besten entlang des Wertes $\eta = 0$ erkennbar: Im Fall von Parametersatz A sind die Temperaturen an bestimmten Werten von τ höher als bei Parametersatz B. Daraus folgt eine höhere Äquilibrierungstemperatur im Schwerpunkt $z = 0$. Anzumerken sind die Abbrüche der Linien konstanter Temperaturen ($T = 230$ MeV und 260 MeV in Abb. 3.4 links oben) bei niedrigen Eigenzeiten unter $\tau/\tau_0 < 0,05$. Dies ist darauf zurückzuführen, dass eine hydrodynamische Rückentwicklung in der Zeit bzw. Temperatur durchaus problematisch sein kann, denn nicht zu jedem Ausfrierzustand lässt sich ein Zustand zur Äquilibrierungszeit finden, aus dem der Ausfrierzustand durch reine gradientengetriebene Evolution hervorgeht. Im Vergleich dazu erweist sich die Parametrisierung B als unproblematischer, da keine Abbrüche der Isothermen bis $T = 290$ MeV erkennbar sind. Die Wahl der Parameter ist also entscheidend dafür, wie weit sich ein System problemlos zurück entwickeln lässt. In Abbildung 3.3 wurden die relevanten Parameter b und c für die Rückentwicklung untersucht und über die Maximaltemperatur aufgetragen, bis zu welcher keine Abbrüche und Diskontinuitäten in den Funktionen $\tau(T, \alpha)$ und $\eta(T, \alpha)$ (Abbildung D.1) auftreten. Dies verdeutlicht die Tauglichkeit eines Parametersatzes für die Rückentwicklung. Man erkennt, dass eine Evolution zu hohen Temperaturen nur mit Ausfrierbedingungen möglich ist, die eine Ähnlichkeit zum Bjorken-Verhalten aufweisen (siehe Anhang C.2). Andererseits müssen die gewählten Parameter ebenso ein Teilchenspektrum ergeben, das mit den Messdaten übereinstimmt. Aus dem Grund liegen beide Parametersätze relativ weit entfernt von den gefärbten Bereichen in Abb. 3.3

Wir wissen, dass das durch die Kollision zustande gekommene Medium sich unmittelbar nach der Kollision noch nicht im lokalen Gleichgewicht befindet, sich also nicht hydrodynamisch beschreiben lässt. Das Gleichgewicht zwischen Quarks, Antiquarks und Gluonen stellt sich zu Zeiten von $\tau_{eq} \approx 0,5$ fm/c ein, [18] dies entspricht in der Darstellung 3.4 links dem untersten Wert $\tau_{eq}/\tau_0 \approx 1,25 \times 10^{-3}$ für Parametersatz A und $\tau_{eq}/\tau_0 \approx 1,55 \times 10^{-3}$ für Parametersatz B. Aus dem Grund ist eine Evolution bis vor die Eigenzeit τ_{eq} nicht sinnvoll. Die berechnete Äquilibrierungstemperatur im Schwerpunkt $z = 0$ des QGP zur Zeit $\tau_{eq} = 0,5$ fm/c beträgt für Parametersatz A: $T_{eq,1,A} \approx 3400$ MeV und für Parametersatz B: $T_{eq,1,B} \approx 650$ MeV. Die Zeit zu der das System mit Parametersatz A im Schwerpunkt auf $T = 600$ MeV abkühlt beträgt $\tau \approx 65 \times 10^{-3}$ MeV und liegt weit über $\tau_{eq,max} = 1$ fm $\approx 5,1 \times 10^{-3}$ MeV. Sofort wird erkennbar, dass die Evolution im Fall von Parametersatz A und somit der Verlauf der Konturen in Abbildung 3.4 links unrealistisch ist.¹ Dies ist auf den großen Unterschied des Flussprofils der Ausfrierfläche zum Bjorken-Fluss zurückzuführen. Der Bjorken-artige Fluss im Parametersatz B ist bringt ein realistischeres Ergebnis mit sich.

¹In der Literatur [21] geht man von einer Äquilibrierungstemperatur von $T_{eq} \approx 600$ MeV aus.

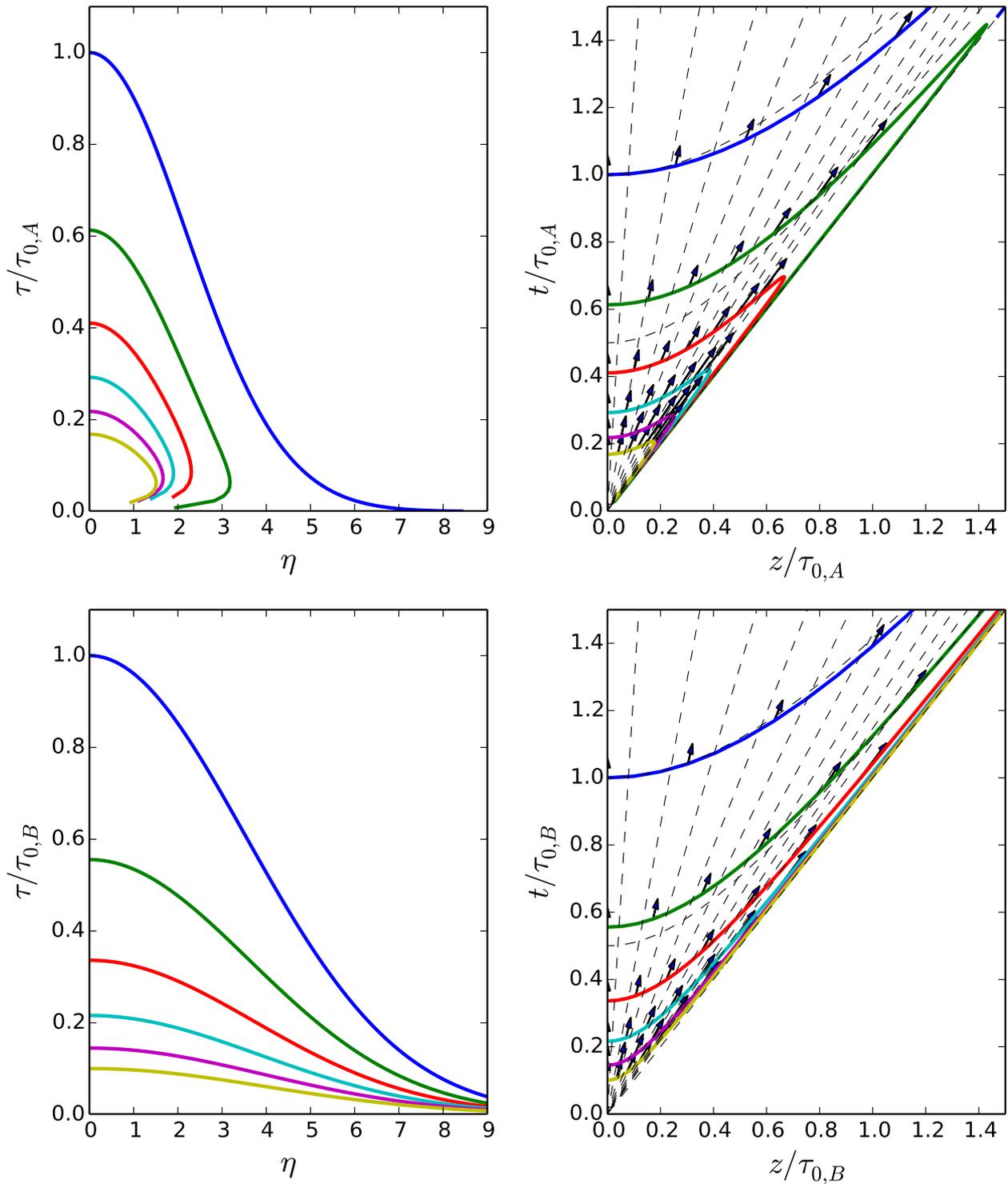


Abbildung 3.4: Evolution des QGP mit Freeze-Out nach (3.1), (3.2). Die Kurven stellen Konturlinien des Feldes $T(\tau, \eta)$ für die Temperaturen $T = 140, 170, 200, 230, 260$ und 290 MeV dar. In den oberen Darstellungen wurde der Parametersatz A aus Abbildung 3.1 oben verwendet, in den unteren der Parametersatz B aus 3.1 unten. Der unterste Wert von τ in den linken Abbildungen entspricht der Äquilibrationszeit $\tau_{eq} = 0,5$ fm/c. Die Werte τ , t und z wurden durch τ_0 skaliert. Die Pfeile repräsentieren die Flussrichtungen an den Kurven konstanter Temperatur. Gestrichelte Linien rechts entsprechen den Koordinatenlinien $\tau = \text{konst.}$ und $\eta = \text{konst.}$ Aus Gründen der Anschaulichkeit werden Temperaturen von 300 MeV nicht überschritten.

3.3 Freeze-Out mit Bjorken-Plateau

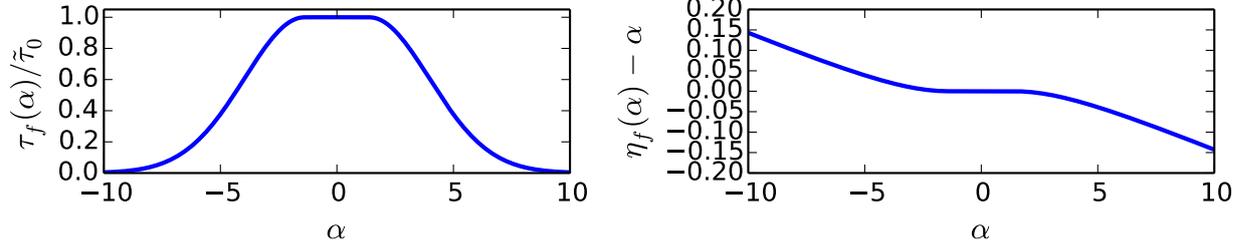


Abbildung 3.5: Parametrisierung der Ausfrierfläche durch (3.3) und (3.4) mit den Parametern $\tilde{\tau}_0 = 1,53 \text{ MeV}^{-1}$, $\tilde{a} = 1,4$, $\tilde{b} = 0,077$ und $\tilde{c} = 0,1$.

Wir parametrisieren hier die Freeze-Out-Fläche durch ein Plateau im zentralen Rapiditätsbereich mit Gauß-artig abfallenden Flanken und ein Flussprofil, das im zentralen Rapiditätsbereich einen Bjorken-artigen und nach außen einen kontinuierlich schneller werdenden Fluss aufweist:

$$\tau_f(\eta) = \begin{cases} \tilde{\tau}_0 & \text{für } |\eta| < \tilde{a} , \\ \tilde{\tau}_0 \cdot e^{-\tilde{b}(\eta - \tilde{a} \text{ sign}(\eta))^2} & \text{für } |\eta| \geq \tilde{a} , \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\alpha_f(\eta) = \begin{cases} \eta & \text{für } |\eta| < \tilde{a} , \\ \eta + \tilde{b} \text{ sign}(\eta) \left(\sqrt{\tilde{c}(|\eta| - \tilde{a})^2 + 1} - 1 \right) & \text{für } |\eta| \geq \tilde{a} . \end{cases} \quad (3.4)$$

Hierbei gibt $\tilde{\tau}_0$ die Höhe des Plateaus an, \tilde{a} die Breite des Plateaus bzw. des Bjorken-Flusses, \tilde{b} die Breite der Gauß-Flanken bzw. \tilde{b} und \tilde{c} die Intensität der Abweichung vom Bjorken-Fluss. Durch numerische Invertierung werden die Funktionen (3.3) und (3.4) in die Form $\tau_f(\alpha)$, $\eta_f(\alpha)$ gebracht. Analog zum Verfahren im vorherigen Abschnitt wird eine geeignete Wahl der Parameter vorgenommen, siehe die Abbildungen 3.5 und 3.6. Die resultierende Evolution der Dynamik des QGP ist sowohl in den Abbildungen 3.7, als auch im Anhang unter D.3 zu sehen.

Die Darstellungsweise in Abbildung 3.7 entspricht der von 3.4, das heißt, dass die selben Temperaturen im Bereich $140 \text{ MeV} \leq T < 300 \text{ MeV}$ betrachtet werden und Flussrichtungen in Pfeilform an die Linien konstanter Temperaturen angebracht wurden. Das mittlere Bjorken-Plateau ist auch für höhere Temperaturen vor dem Freeze-Out deutlich erkennbar. Das einfach beschreibbare Bjorken-Verhalten trägt dazu bei, dass auch bei hohen Temperaturen eine hydrodynamische Beschreibung möglich ist. Das Verhalten der Isothermen ist ähnlich zu denen der Parametrisierung B im vorherigem Abschnitt. Das Maximum der Ausfrierkurve T_f bezüglich der z -Koordinate liegt bei $z/\tilde{\tau}_0 \approx 50$.

Diese Form der Parametrisierung lässt sich besser zurück entwickeln als die des Parameter-

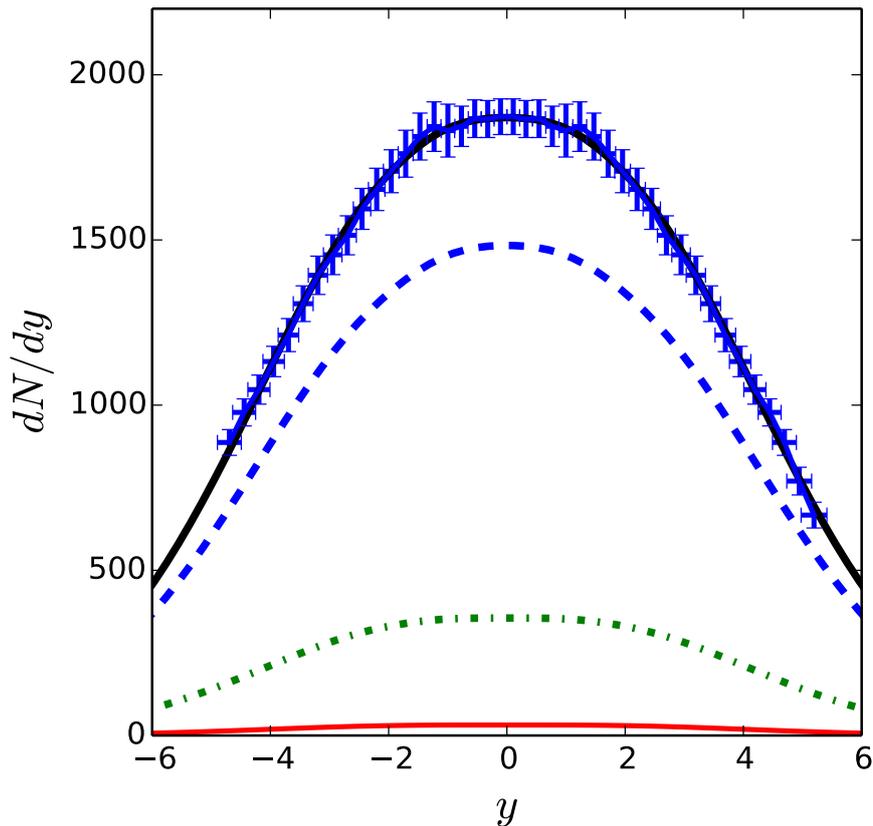


Abbildung 3.6: Darstellung der Teilchenspektren analog zur Abbildung 3.2 zur Freeze-Out-Parametrisierung nach Abbildung .

satzes A im vorherigen Abschnitt. Es sind keine Abbrüche der Isothermen zu erkennen. Die Maximaltemperatur, zu der sich das System zurück entwickeln lässt in Abhängigkeit der relevanten Parameter \tilde{a} und \tilde{b} ist in Abbildung 3.8 dargestellt.² Hier ist wieder ersichtlich, dass für Parameter, die eine Bjorken-artige Ausfrierfläche erzeugen, die Rückevolution zu höheren Temperaturen möglich ist. Evolviert man bis zur Äquilibrationseigenzeit $\tau_{eq} = 0,5 \text{ fm}/c$ bzw. $\tau_{eq}/\tilde{\tau}_0 \approx 1,66 \times 10^{-3}$, so ergibt sich die Maximaltemperatur des QGP von $T_{eq,2} \approx 760 \text{ MeV}$, was über dem realistischeren Ergebnis von $T_{eq,1,B} = 640$ aus dem vorherigen Abschnitt liegt.

²Der Parameter \tilde{c} hat ähnliche Auswirkungen auf die Parametrisierung wie \tilde{b} und wird daher nicht genauer betrachtet.

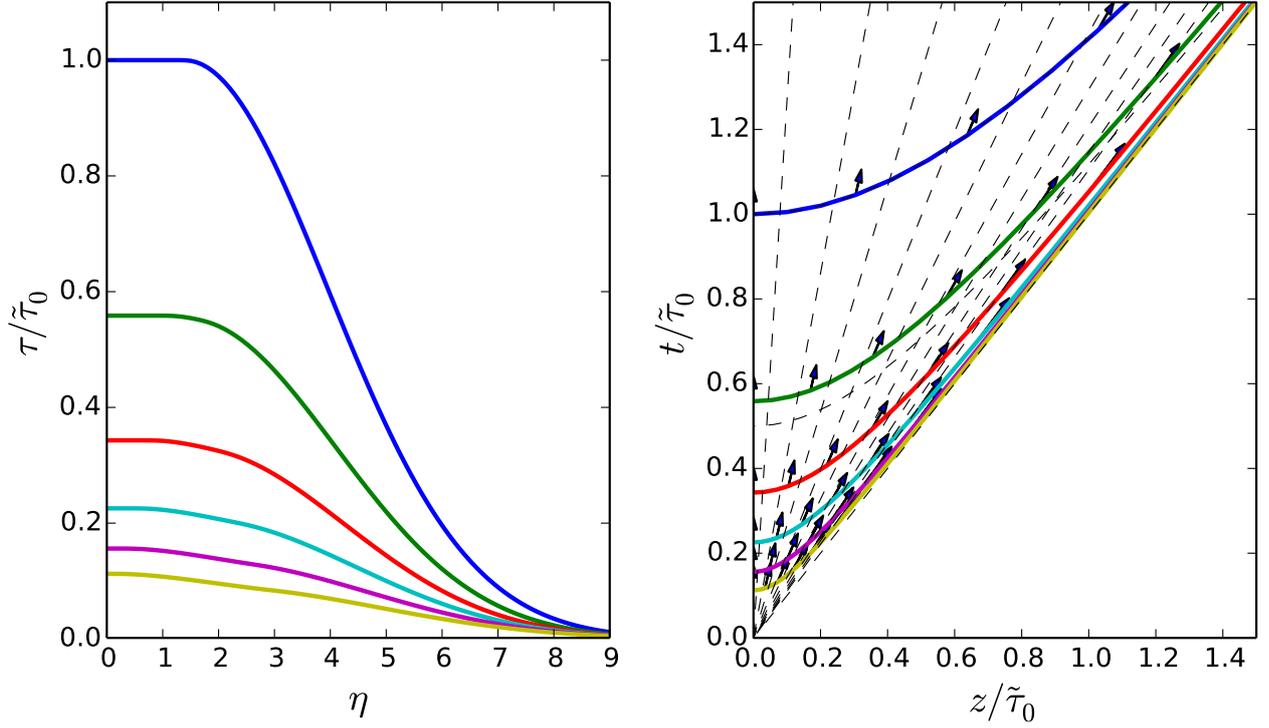


Abbildung 3.7: Evolution des QGP analog zur Abbildung 3.4 zum Freeze-Out nach Abbildung 3.5 für die Temperaturen $T = 140, 170, 200, 230, 260$ und 290 MeV.

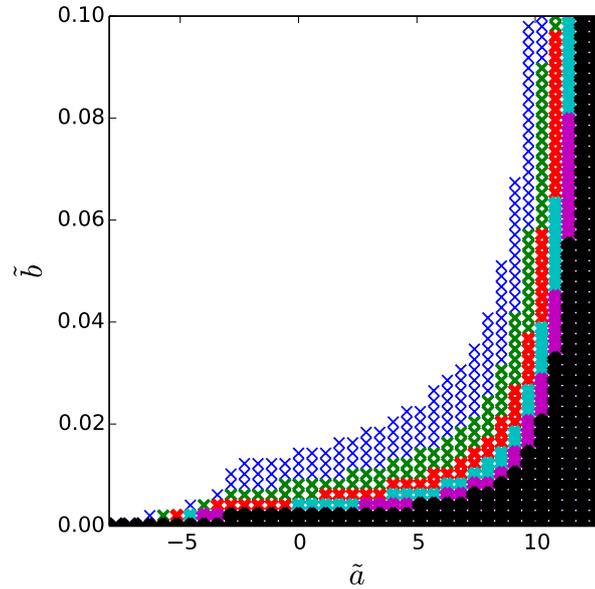


Abbildung 3.8: Die Parameter \tilde{a} und \tilde{b} in Abhängigkeit von der Maximaltemperatur, zu der sich das System zurück entwickeln lässt, ohne dass Diskontinuitäten und Abbrüche in den Größen $\tau(T, \alpha)$ und $\eta(T, \alpha)$ (Abb. D.3) auftreten. Die Maximaltemperaturen sind $T_{max} = 500$ (blau), 600 (grün), 700 (rot), 800 (hellblau), 900 (violett) und > 1000 MeV (schwarz). Die Strichstärke variiert von dünn ($T = 500$ MeV) zu dick ($T > 1000$ MeV).

3.4 Freeze-Out mit Woods-Saxon

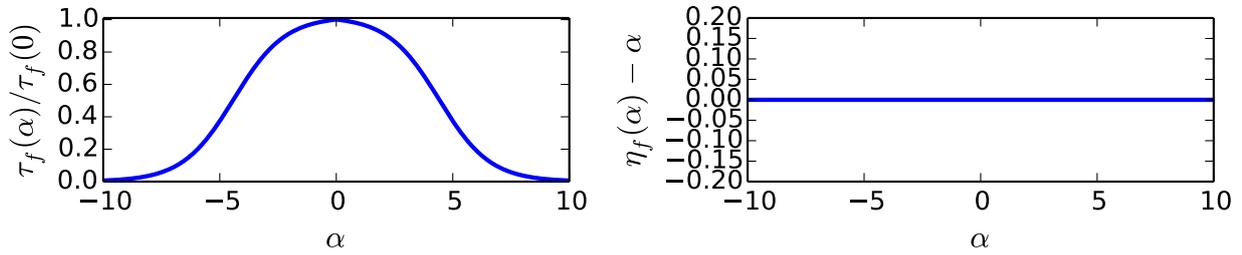


Abbildung 3.9: Parametrisierung der Ausfrierfläche durch (3.5) und (3.6) mit den Parametern $\hat{\tau}_0 = 1,6 \text{ MeV}^{-1}$, $\hat{a} = 4,4$ und $\hat{b} = 1,1$.

Wir parametrisieren alternativ die Ausfrierfläche durch eine Woods-Saxon-Verteilung bezüglich der Ausfrierzeit und einen Bjorken-Fluss:

$$\tau_f(\eta) = \frac{\hat{\tau}_0}{1 + \exp\left(\frac{|\eta| - \hat{a}}{\hat{b}}\right)}, \quad (3.5)$$

$$\alpha(\eta) = \eta. \quad (3.6)$$

Der Wert $\hat{\tau}_0$ ist ein Maß für die Höhe der Woods-Saxon-Funktion, \hat{a} repräsentiert die Breite und \hat{b} zusätzlich die Steilheit der Flanken. Durch numerische Invertierung werden wieder die Funktionen (3.5) und (3.6) in die Form $\tau_f(\alpha)$, $\eta_f(\alpha)$ gebracht. Analog zu den beiden vorherigen Abschnitten werden die Parameter $\hat{\tau}_0$, \hat{a} und \hat{b} angepasst (Abb. 3.9) und mit den Messdaten verglichen (Abb. 3.10). Die Evolution des Systems ist zu finden in den Abbildungen 3.11 und D.4. Sie ist ähnlich zu den Evolutionen aus dem vorherigen Abschnitt und dem ersten Abschnitt mit dem Parametersatz B. Die Interpretation ergibt sich analog. Ebenfalls ähnlich ist die Tauglichkeit dieser Parametrisierung für die Rückevolution zu hohen Temperaturen. Die relevanten Parameter \hat{a} und \hat{b} sind bezüglich ihrer Maximaltemperatur, zu der sich das System zurück entwickeln lässt, in Abbildung 3.12 dargestellt. Ein Wert für \hat{a} im negativen Bereich ist wahrscheinlich nicht sinnvoll für eine Ausfrierfläche, da in der Hydrodynamik "Knicke" in den Kurven "verwaschen" werden.

Anders als bei den vorherigen Parametrisierungen besitzt die Ausfrierkurve kein Maximum bezüglich der z -Koordinate. Das bedeutet, dass das betrachtete QGP im Laborsystem bildhaft an den Resten der Kollisionspartner haften bleibt und auseinander gezogen wird. Zur Äquilibriumierungszeit $\tau_{eq}/\tau_f(0) \approx 1,61 \times 10^{-3}$ ergibt sich eine Maximaltemperatur von $T_{eq,3} \approx 730 \text{ MeV}$, welche zwischen den Maximaltemperaturen der beiden anderen Parametrisierungen liegt (mit Ausnahme des Parametersatzes A aus dem ersten Abschnitt).

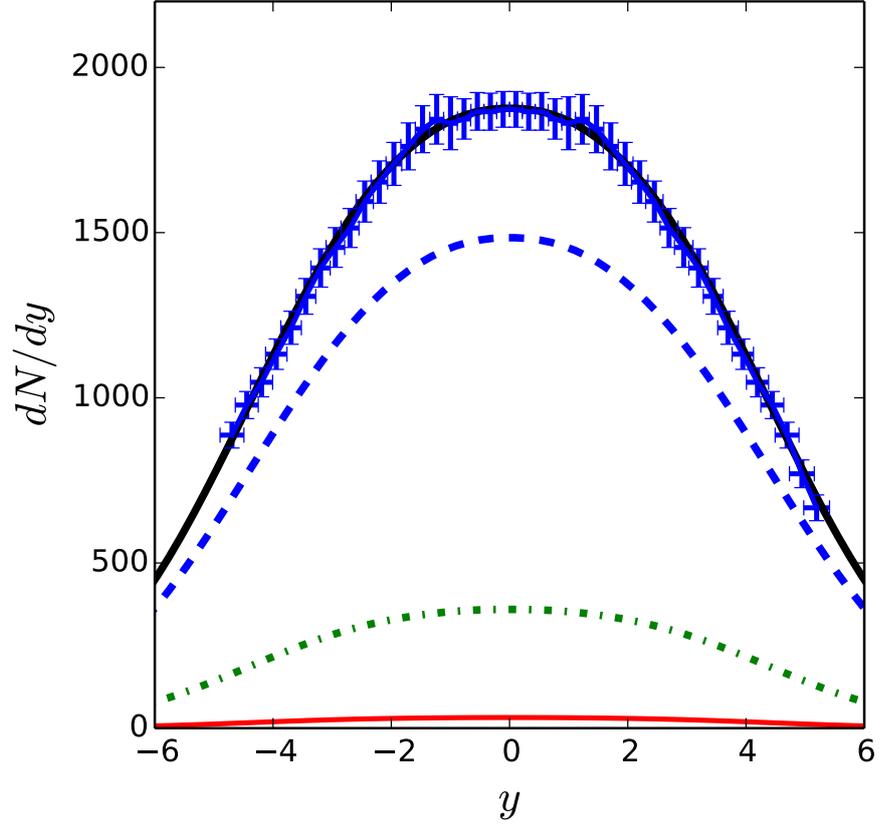


Abbildung 3.10: Darstellung der Teilchenspektren analog zur Abbildung 3.2 zur Freeze-Out-Parametrisierung nach Abbildung 3.9.

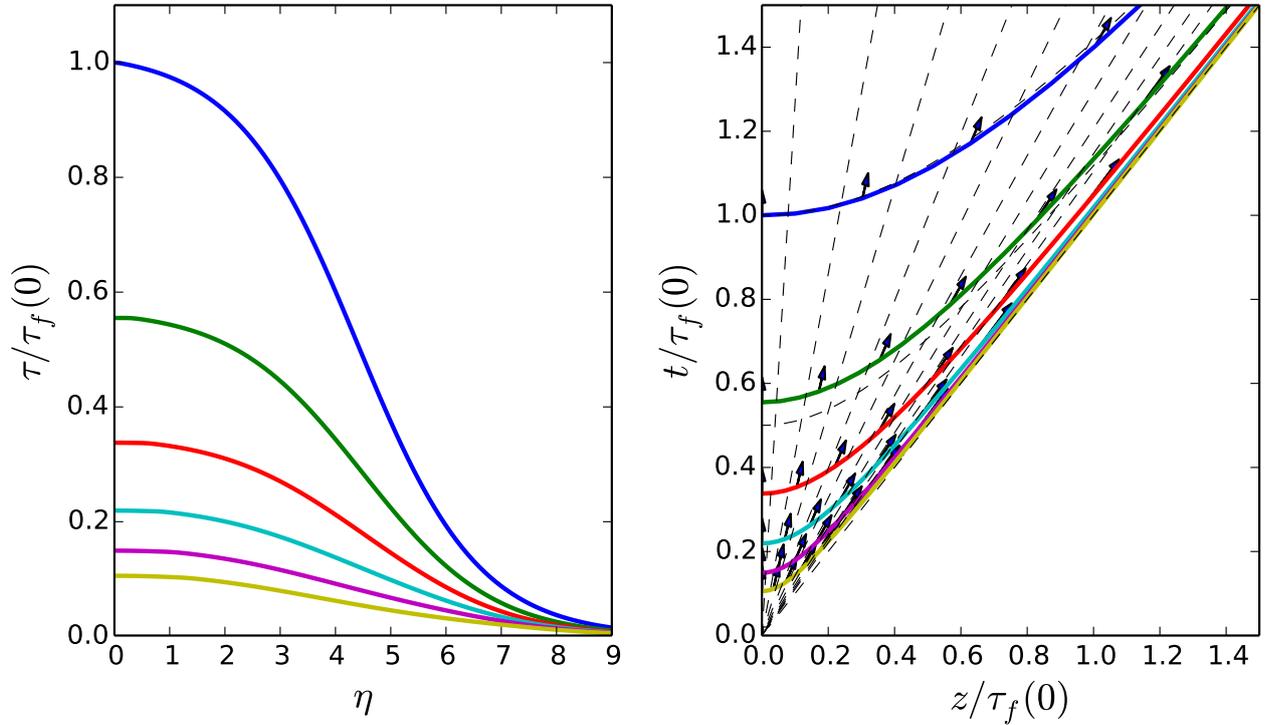


Abbildung 3.11: Evolution des QGP analog zur Abbildung 3.4 zum Freeze-Out nach Abbildung 3.9 für die Temperaturen $T = 140, 170, 200, 230, 260$ und 290 MeV.

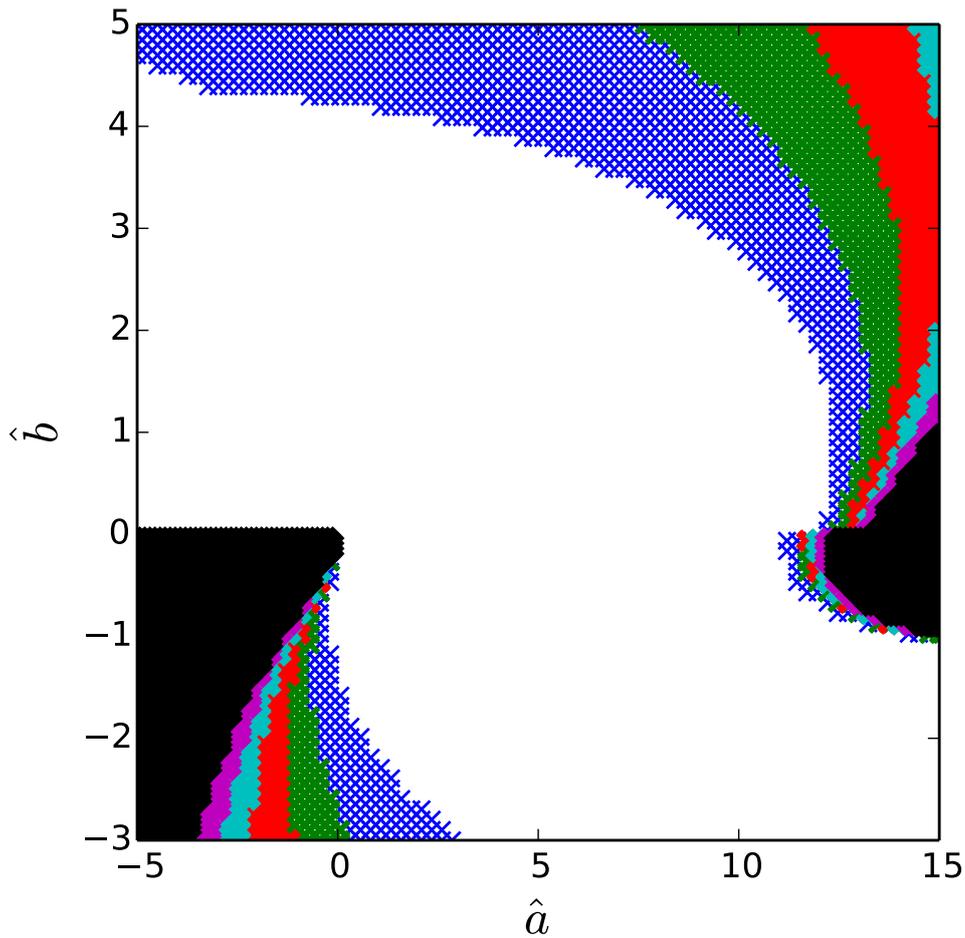


Abbildung 3.12: Die Parameter \hat{a} und \hat{b} in Abhängigkeit von der Maximaltemperatur, zu der sich das System zurück entwickeln lässt, ohne dass Diskontinuitäten und Abbrüche in den Größen $\tau(T, \alpha)$ und $\eta(T, \alpha)$ (Abb. D.4) auftreten. Die Maximaltemperaturen sind $T_{max} = 500$ (blau), 600 (grün), 700 (rot), 800 (hellblau), 900 (violett) und > 1000 MeV (schwarz). Die Strichstärke variiert von dünn ($T = 500$ MeV) zu dick ($T > 1000$ MeV).

4 Zusammenfassung und Ausblick

Einer Idee von Stephanov und Yin [12] folgend, wurden in dieser Arbeit ausgehend von den gemessenen Teilchenspektren für geladene Teilchen der ALICE-Kollaboration [6] für die zentralsten Pb-Pb-Kollisionen bei einer Schwerpunktennergie von $\sqrt{s_{NN}} = 2,76$ TeV pro Nukleon Parametrisierungen der Ausfrierfläche gefunden, welche die Messdaten hinreichend gut beschreiben. Der Zusammenhang zwischen Freeze-Out und Teilchenspektrum wurde durch den Cooper-Frye-Formalismus [7] hergestellt. Ausgehend von der Ausfrierfläche wurde mittels einer hydrodynamischen Evolution numerisch auf höhere Temperaturen evolviert. Dabei wurde die Khalatnikov-Gleichung (2.20) genutzt, welche die ideale longitudinale Hydrodynamik in den Koordinaten der Temperatur und der Fluid-Rapidity beschreibt. Als Ergebnis wurden die Evolutionen in kartesischen Koordinaten, Milne-Koordinaten sowie in den Koordinaten Temperatur und Fluidrapidity dargestellt. Zusätzlich wurde die Entwicklung des Khalatnikov-Potenzials abgebildet.

Es stellt sich heraus, dass sich die Wahl der Parametrisierung der Ausfrierfläche auf die Evolution des Mediums auswirkt. Dabei kann trotz einer guten Approximation der Teilchenspektren die daraus folgende Evolution qualitative Unterschiede aufweisen und bei bestimmter Parameterwahl bereits bei vergleichsweise niedrigen Temperaturen problematisch werden, da sich die Evolution nicht weiter zurückverfolgen lässt. Es wurde die Abhängigkeit der Maximaltemperatur, bis zu der man die Evolution zurückverfolgen kann, von einigen Parametern der drei untersuchten Parametrisierungen dargestellt. Betrachtet wurde eine Äquilibrationszeit von $\tau_{eq} = 0,5$ fm/c [18], zu der die Maximaltemperaturen im Bereich um $T_{eq} \approx 700$ MeV liegen.

Im Allgemeinen können nur wenige quantitative Erkenntnisse über die Dynamik der betrachteten stark-wechselwirkenden Materie in ultra-relativistischen Schwerionenkollisionen durch eine solche Machbarkeitsstudie gewonnen werden, da mehrere Idealisierungen vorgenommen wurden. Diese sind: der Cooper-Frye-Formalismus, bei dem der Freeze-Out bei einer festen Temperatur stattfindet, die ausschließlich longitudinale Betrachtung der Expansion und die ideale Hydrodynamik ohne erhaltene Ladungsströme. In einer realistischeren Studie müsste jede dieser Näherungen auf ihre Anwendbarkeit überprüft werden. Insbesondere müssten die dreidimensionale, nicht-idealisierte Hydrodynamik genutzt und eventuell vorhandene Ladungsströme beachtet werden.

Eine weitere interessante Information, welche hier jedoch nicht ausführlich untersucht wurde, wäre die Untersuchung der Abhängigkeit der Ausfrierparameter von der Übereinstimmung mit

den messbaren Teilchenspektren. Somit könnte die Wahl Parameter für eine gegebene Parametrisierung optimiert werden. Unter Hinzunahme realistischerer Modellierungen kann so der Äquilibriumszustand des Quark-Gluonen-Systems genau bestimmt werden.

A Herleitung der Freeze-Out-Formel

Wir beginnen mit der allgemeinen Cooper-Frye-Formel (2.1):

$$p^0 \frac{d^3 N}{d^3 p} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int p_\mu d^3 \sigma^\mu f(p, u, T) \quad (\text{A.1})$$

mit dem infinitesimalen Normalenvierervektor $d^3 \sigma^\mu$ auf der Ausfrier-Hyperfläche. Unter Boltzmann-Näherung und bei reiner Betrachtung der longitudinalen Expansion unter Vernachlässigung von Effekten der transversalen Expansion ergibt sich für die Verteilungsfunktion $f(p, u, T)$ (2.3):

$$f(p, u, T) = e^{-\frac{p_\mu u^\mu}{T}} = e^{-\frac{m_\perp}{T_f} \cosh(y-\alpha)} \quad (\text{A.2})$$

mit der transversalen Teilchenmasse $m_\perp = \sqrt{p_\perp^2 + m^2}$, der Teilchenrapidity y , der Fluidrapidity α und der Geschwindigkeit und dem Impuls (angegeben in kartesischen und in Milne-Koordinaten, siehe (2.4), (2.5)):

$$(p^t, \vec{p}_\perp, p^z) = m_\perp (\cosh y, \vec{0}, \sinh y) , \quad (\text{kartesisch}) \quad (\text{A.3})$$

$$(p^\tau, \vec{p}_\perp, p^\eta) = m_\perp \left(\cosh(\eta - y), \vec{0}, -\frac{1}{\tau} \sinh(\eta - y) \right) , \quad (\text{Milne}) \quad (\text{A.4})$$

$$(u^t, \vec{u}_\perp, u^z) = (\cosh \alpha, \vec{0}, \sinh \alpha) , \quad (\text{kartesisch}) \quad (\text{A.5})$$

$$(u^\tau, \vec{u}_\perp, u^\eta) = \left(\cosh(\eta - \alpha), \vec{0}, -\frac{1}{\tau} \sinh(\eta - \alpha) \right) . \quad (\text{Milne}) \quad (\text{A.6})$$

Parametrisiert man die Freeze-out-Hyperfläche durch $\tau_f(\eta)$, so ergibt sich für die Ausfrierfläche in Milne-Koordinaten:

$$\sigma^\mu = (\tau_f(\eta), x, y, \eta) , \quad (\text{A.7})$$

und für das Hyperflächenelement $d^3 \sigma^\mu = n^\mu dV$ kann der Normalenvektor

$$n^\mu = \frac{1}{\tau_f \sqrt{-\tau_f^2 + (\partial_\eta \tau_f)^2}} (\tau_f^2, 0, 0, \partial_\eta \tau_f) \quad (\text{A.8})$$

und dessen Betrag

$$dV = \sqrt{-\det g} \, dx \, dy \, d\eta = \sqrt{\tau_f^2 - (\partial_\eta \tau_f)^2} \, dx \, dy \, d\eta \quad (\text{A.9})$$

einzelnen bestimmt werden, wobei gilt:

$$g = \begin{pmatrix} \partial_x \sigma^\mu \partial_x \sigma_\mu & \partial_x \sigma_\mu \partial_y \sigma^\mu & \partial_x \sigma_\mu \partial_\eta \sigma^\mu \\ \partial_y \sigma^\mu \partial_x \sigma_\mu & \partial_y \sigma_\mu \partial_y \sigma^\mu & \partial_y \sigma_\mu \partial_\eta \sigma^\mu \\ \partial_\eta \sigma^\mu \partial_x \sigma_\mu & \partial_\eta \sigma_\mu \partial_y \sigma^\mu & \partial_\eta \sigma_\mu \partial_\eta \sigma^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_f^2 - (\partial_\eta \tau_f)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Für das Hyperflächenelement ergibt sich

$$(d^3 \sigma^\tau, d^3 \sigma^\eta) = -dx \, dy \, d\eta \, \tau_f \left(1, \frac{\partial_\eta \tau_f(\eta)}{\tau_f^2}\right). \quad (\text{A.11})$$

Man erhält für den Impulsfluss durch das Hyperflächenelement

$$p^\mu d^3 \sigma_\mu = m_\perp \partial_\eta [\tau_f(\eta) \sinh(\eta - y)] d\eta \, d^2 x_\perp, \quad (\text{A.12})$$

wobei $dx_\perp^2 = dx \, dy$ die transversalen Differenziale beschreiben. Mit der Kettenregel der Differentialrechnung kann die linke Seite von Gleichung (A.1) umgeschrieben werden in

$$p^0 \frac{d^3 N}{dp^3} = m_\perp \cosh(y) \frac{d^3 N}{dp_\perp^2 d(p^3)} = \frac{m_\perp \cosh(y)}{\frac{dp^3}{dy}} \frac{d^3 N}{dy dp_\perp^2} = \frac{d^3 N}{dy dp_\perp^2}. \quad (\text{A.13})$$

Nimmt man an, dass die Fluid-Rapidity $\alpha_f(\eta)$ an der Freeze-out-Hyperfläche invertierbar ist zu $\eta_f(\alpha)$, so kann man die Integrationsvariable wechseln und erhält aus Gleichung (A.1)

$$\frac{d^3 N}{dy dp_\perp^2} = \frac{A_\perp m_\perp}{(2\pi)^3} \int \partial_\alpha [\tau_f(\alpha) \sinh(\eta_f(\alpha) - y)] e^{-\frac{m_\perp}{T_f} \cosh(y-\alpha)} d\alpha, \quad (\text{A.14})$$

wobei A_\perp die totale transversale Querschnittsfläche der Ausfrierhyperfläche ist und $\tau_f(\alpha)$ die Kurzform für $\tau_f(\eta_f(\alpha))$. Die Integration über die transversalen Impulse ergibt

$$\frac{dN}{dy} = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 p_\perp \frac{d^3 N}{dy d^2 p_\perp} = 2\pi \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \frac{d^3 N}{dy d^2 p_\perp} \quad (\text{A.15})$$

$$= \frac{A_\perp}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \partial_\alpha [\tau_f(\alpha) \sinh(\eta_f(\alpha) - y)] \int_0^\infty dp_\perp p_\perp m_\perp e^{-\frac{m_\perp}{T_f} \cosh(y-\alpha)}. \quad (\text{A.16})$$

Mit der Relation $p_{\perp} = \sqrt{m_{\perp}^2 - m^2}$ kann letzteres Integral bestimmt werden:

$$\int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp} m_{\perp} e^{-m_{\perp} f} = \int_m^{\infty} dm_{\perp} m_{\perp}^2 e^{-m_{\perp} f} \quad (\text{A.17})$$

$$= \partial_f^2 \int_m^{\infty} dm_{\perp} e^{-m_{\perp} f} \quad (\text{A.18})$$

$$= \partial_f^2 \frac{1}{f} e^{-mf} \quad (\text{A.19})$$

$$= e^{-mf} \left[\frac{2}{f^3} + \frac{2m}{f^2} + \frac{m^2}{f} \right], \quad (\text{A.20})$$

wobei $f(\alpha, y) = \frac{1}{T_f} \cosh(y - \alpha)$ ist. Es ergibt sich

$$\frac{dN}{dy} = \frac{A_{\perp}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \partial_{\alpha} [\tau_f(\alpha) \sinh(\eta_f(\alpha) - y)] e^{-mf} \left[\frac{2}{f^3} + \frac{2m}{f^2} + \frac{m^2}{f} \right]. \quad (\text{A.21})$$

Dieses Integral kann partiell integriert werden:

$$\frac{dN}{dy} = -\frac{A_{\perp}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \tau_f(\alpha) \sinh(\eta_f(\alpha) - y) e^{-\frac{m}{T_f} \cosh(y-\alpha)} \tanh(y - \alpha) \quad (\text{A.22})$$

$$\times \left[\frac{6T_f^3}{\cosh^3(y - \alpha)} + \frac{6mT_f^2}{\cosh^2(y - \alpha)} + \frac{3m^2T_f}{\cosh(y - \alpha)} + m^3 \right]. \quad (\text{A.23})$$

Dies ist die Formel für den Cooper-Frye-Freeze-out, mit der die Ausfrierbedingung für die Khalatnikov-Gleichung, $\tau_f(\alpha)$ und $\eta_f(\alpha)$, in die dN/dy -Verteilung über die Teilchenrapidity y umgerechnet werden kann. Dies wird quantitativ mit den experimentellen Daten der ALICE-Kollaboration verglichen.

B Ideale Hydrodynamik

Der Energie-Impuls-Tensor der idealen Hydrodynamik ist gegeben durch (2.9)

$$T^{\mu\nu} = \epsilon u^\mu u^\nu + p(g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu) \quad \text{mit } \mu, \nu = 0, \dots, 3 \quad (\text{B.1})$$

wobei ϵ die Energiedichte, p den Druck, u^μ die Komponenten der Vierergeschwindigkeit und $g^{\mu\nu}$ die Komponenten des metrischen Tensors

$$(g^{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (\text{B.2})$$

darstellen. Dieser Tensor erfüllt die Bewegungsgleichung der relativistischen Hydrodynamik (2.8):

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 . \quad (\text{B.3})$$

In kartesischen Koordinaten ergibt sich

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} = u^\nu \partial_\mu [(\epsilon + p) u^\mu] + (\epsilon + p) u^\mu \partial_\mu u^\nu + \partial^\nu p = 0 . \quad (\text{B.4})$$

Multipliziert man mit u_ν , so projiziert man in Richtung der 4er-Geschwindigkeit. Da $u_\nu u^\nu = -1$ und $u_\nu \partial_\mu u^\nu = 0$ gilt, ergibt sich

$$(u^\mu \partial_\mu) \epsilon + (\epsilon + p) (\partial_\mu u^\mu) = 0 . \quad (\text{B.5})$$

Nun projiziert man Gleichung (B.4) in die Richtung senkrecht zu u_ν . Eine solche Projektion des Vektors $\partial_\mu T^{\mu\nu}$ ist $\partial_\mu T^{\mu\nu} + u^\nu u_\mu \partial_\sigma T^{\mu\sigma}$. (Man überzeugt sich, indem man diese mit u_ν skalar multipliziert und dies Null ergibt.) Man erhält

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} + u^\nu u_\mu \partial_\sigma T^{\mu\sigma} = (\epsilon + p) (u^\nu \partial_\nu) u^\mu + (g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu) \partial_\nu p = 0 . \quad (\text{B.6})$$

Mithilfe der thermodynamischen Relationen (2.12) und der Wahl der Metrik (B.2) können Gln. (B.5) und (B.6) umgeschrieben werden in

$$\partial_\mu(su^\mu) = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$u^\mu[\partial_\mu(Tu_\nu) - \partial_\nu(Tu_\mu)] = 0 . \quad (\text{B.8})$$

Diese Gleichungen beschreiben die Entropieerhaltung und das relativistische Analogon zur Euler-Gleichung.

B.1 Longitudinale ideale Hydrodynamik

Longitudinale ideale Hydrodynamik in Milne-Koordinaten

Betrachtet wird die longitudinale Entwicklung einer idealen Flüssigkeit, wobei die Fluidgeschwindigkeit v_\perp senkrecht zur longitudinalen Ausbreitungsrichtung verschwindet. Damit ergibt sich für die Fluid-Geschwindigkeit in kartesischen Koordinaten

$$u^\mu = \gamma(1, 0, 0, v) .$$

Für die longitudinale Betrachtung in den Koordinaten (t, z) ergeben sich aus (B.7) und (B.8):

$$\partial_t(su^t) + \partial_z(su^z) = 0 , \quad (\text{B.9})$$

$$\partial_t(Tu_z) - \partial_z(Tu_t) = 0 . \quad (\text{B.10})$$

Wechselt man die Koordinaten von (t, z) zu (τ, η) mit Hilfe der Produktregel für eine Funktion $F(\tau, \eta)$ und (2.4), (2.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\tau, \eta)}{\partial t(\tau, \eta)} &= \frac{\partial F}{\partial \tau} \Big|_\eta \frac{d\tau}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \Big|_\tau \frac{d\eta}{dt} = \cosh \eta \frac{\partial F}{\partial \tau} \Big|_\eta - \frac{\sinh \eta}{\tau} \frac{\partial F}{\partial \eta} \Big|_\tau , \\ \frac{\partial F(\tau, \eta)}{\partial z(\tau, \eta)} &= \frac{\partial F}{\partial \tau} \Big|_\eta \frac{d\tau}{dz} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \Big|_\tau \frac{d\eta}{dz} = -\sinh \eta \frac{\partial F}{\partial \tau} \Big|_\eta + \frac{\cosh \eta}{\tau} \frac{\partial F}{\partial \eta} \Big|_\tau , \end{aligned}$$

ergeben sich aus (B.9) und (B.10) die longitudinalen Hydrodynamik-Gleichungen in Milne-Koordinaten (τ, η) [22]:

$$\left[\tau \partial_\tau + \tanh(\alpha - \eta) \partial_\eta \right] s + s \left[\tanh(\alpha - \eta) \tau \partial_\tau + \partial_\eta \right] \alpha = 0 , \quad (\text{B.11})$$

$$\left[\tanh(\alpha - \eta) \tau \partial_\tau + \partial_\eta \right] T + T \left[\tau \partial_\tau + \tanh(\alpha - \eta) \partial_\eta \right] \alpha = 0 . \quad (\text{B.12})$$

Longitudinale ideale Hydrodynamik für T und α

Es ist nun nützlich die longitudinalen Hydrodynamik-Gleichungen für die neuen Koordinaten (T, α) mit der Temperatur T und der Fluid-Rapidity α auszudrücken. Aus Gleichungen (B.11) und (B.12) werden

$$\begin{aligned} \left[\tau \partial_\tau T \partial_T + \tanh(\alpha - \eta) \partial_\eta T \partial_T \right] s + s \left[\tanh(\alpha - \eta) \tau \partial_\tau + \partial_\eta \right] \alpha &= 0 , \\ \left[\tanh(\alpha - \eta) \tau \partial_\tau + \partial_\eta \right] T + T \left[\tau \partial_\tau + \tanh(\alpha - \eta) \partial_\eta \right] \alpha &= 0 . \end{aligned}$$

Analog werden aus (B.9) und (B.10)

$$s \left[\partial_z + \tanh \alpha \partial_t \right] \alpha + \partial_T s \left[\partial_t + \tanh \alpha \partial_z \right] T = 0 , \quad (\text{B.13})$$

$$T \left[\partial_t + \tanh \alpha \partial_z \right] \alpha + \left[\partial_z + \tanh \alpha \partial_t \right] T = 0 . \quad (\text{B.14})$$

B.2 Khalatnikov-Gleichung

Die longitudinalen Hydrogleichungen können in eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung überführt werden, welche als Khalatnikov-Gleichung bezeichnet wird.

Herleitung

Betrachtet man die Gleichungen (B.9) und (B.10), so kann man nach (B.10) ein Potenzial $\varphi(t, z)$ einführen (siehe Abschnitt 2.2), sodass

$$d\varphi(t, z) = Tu_t dt + Tu_z dz = T(-\cosh \alpha dt + \sinh \alpha dz) \quad (\text{B.15})$$

gilt. Um die Koordinaten von (t, z) zu (T, α) zu wechseln, führt man die Legendre-Transformation $\chi(T, \alpha)$ des Potentials $\varphi(t, z)$ ein:

$$\chi(T, \alpha) = \varphi(t, z) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} t - \frac{\partial \varphi}{\partial z} z = \varphi(t, z) - Tu_t t - Tu_z z , \quad (\text{B.16})$$

sodass

$$d\chi(T, \alpha) = -t d(Tu_t) - z d(Tu_z) \quad (\text{B.17})$$

$$= (t \cosh \alpha - z \sinh \alpha) dT + T(t \sinh \alpha - z \cosh \alpha) d\alpha . \quad (\text{B.18})$$

Das neu gewonnene Potenzial $\chi(T, \alpha)$ wird als Khalatnikov-Potenzial bezeichnet und ist eine Funktion der Temperatur T und der Fluid-Rapidity α . Nun wechselt man die Variablen in

Gleichung (B.9) mittels der Produktregel von (t, z) zu (T, α) und erhält

$$\frac{ds}{dT} \left[-\frac{\partial t}{\partial \alpha} \sinh \alpha + \frac{\partial z}{\partial T} \sinh \alpha \right] + s \left[\frac{\partial t}{\partial T} \cosh \alpha - \frac{\partial z}{\partial T} \sinh \alpha \right] = 0 . \quad (\text{B.19})$$

Vereinfacht man Gleichung (B.19) mit Gl. (B.18), so erhält man die Khalatnikov-Gleichung

$$[c_s^2 T^2 \partial_T^2 + T \partial_T - \partial_\alpha^2] \chi(T, \alpha) = 0 , \quad (\text{B.20})$$

wobei

$$c_s^2 = \frac{dp}{d\epsilon} = \frac{s}{T} \frac{dT}{ds} \quad (\text{B.21})$$

das Quadrat der Schallgeschwindigkeit ist. Im Fall der Zustandsgleichung eines idealen Gases $\epsilon = 3p$ ist $c_s^2 = 1/3 = \text{const.}$ Es handelt sich bei der Khalatnikov-Gleichung um eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Linearität stellt gegenüber der Nichtlinearität der Gleichungen (B.4) und (B.5) einen riesigen Vorteil für die Lösung dar. Dadurch kann die Khalatnikov-Gleichung sogar analytisch gelöst werden, siehe [12]. Die Nichtlinearität ist jedoch nicht verschwunden, sondern steckt in dem Khalatnikov-Potenzial. Aus dem gefundenen Khalatnikov-Potenzial $\chi(T, \alpha)$ können die Funktionen $\tau(T, \alpha)$ und $\eta(T, \alpha)$ mit (B.18) abgeleitet werden:

$$\partial_T \chi(T, \alpha) = \tau \cosh(\alpha - \eta) , \quad (\text{B.22})$$

$$\partial_\alpha \chi(T, \alpha) = T \tau \sinh(\alpha - \eta) . \quad (\text{B.23})$$

Es ergeben sich (2.21)

$$\tau(T, \alpha) = \sqrt{(\partial_T \chi)^2 - \frac{(\partial_\alpha \chi)^2}{T^2}} , \quad \eta(T, \alpha) = \alpha - \text{Artanh} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial_\alpha \chi}{\partial_T \chi} \right) . \quad (\text{B.24})$$

Numerische Lösung der Khalatnikov-Gleichung

Man nehme die Khalatnikov-Gleichung (B.20), welche man mit der Substitution

$$\vartheta = \log \left(\frac{T}{T_0} \right) \quad (\text{B.25})$$

in die Form

$$\left[c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + (1 - c_s^2) \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] \chi(\vartheta, \alpha) = 0 \quad (\text{B.26})$$

mit der Referenztemperatur T_0 (in unserem Fall ist das die Ausfrieretemperatur) überführen kann, welche (für $c_s = \text{konst.}$) eine PDE mit konstanten Koeffizienten ist. Mit der Definition einer Funktion $\psi = \partial_{\vartheta}\chi$ kann die Gleichung (B.26) in zwei Differenzialgleichungen erster Ordnung in ∂_{ϑ} gebracht werden:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ \frac{c_s^2-1}{c_s^2}\psi + \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha^2} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.27})$$

Mit den Darstellungen der zweiten Ableitung nach α :

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \chi(\alpha) \approx \frac{(\chi(\alpha + \Delta\alpha) - \chi(\alpha)) - (\chi(\alpha) - \chi(\alpha - \Delta\alpha))}{(\Delta\alpha)^2} \quad (\text{B.28})$$

(abgesehen von den Rändern, wobei zweifache Vorwärts- bzw. Rückwärtsdifferenziation genutzt wird) und den Darstellungen $\chi(\alpha) \rightarrow \chi(\alpha_i) = \psi_i$, $\psi(\alpha) \rightarrow \psi(\alpha_i) = \psi_i$ und $\chi(\alpha \pm \Delta\alpha) = \chi_{i\pm 1}$ durch die Diskretisierung von α , kann Gleichung (B.27) in die diskretisierte Form gebracht werden:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \begin{pmatrix} \chi_i \\ \psi_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_i \\ \frac{c_s^2-1}{c_s^2}\psi_i + \frac{1}{c_s^2}\frac{\chi_{i-1}-2\chi_i+\chi_{i+1}}{(\Delta\alpha)^2} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.29})$$

Diese zwei gekoppelten PDE werden durch die Diskretisierung von α in N Diskretisierungsschritte in ein System von $2N$ gewöhnlichen Differenzialgleichungen überführt. Dieses System von diskretisierten Differenzialgleichungen kann mithilfe numerischer Iteration gelöst werden. Es wurde hierbei speziell das Programm ODEINT¹ gewählt. Die für die Lösung der Khalatnikov-Gleichung benötigten Anfangsbedingungen $\chi(\vartheta_0 = 0, \alpha)$ und $\partial_{\vartheta}\chi(\vartheta_0 = 0, \alpha)$ auf einer durch $\tau_f(\alpha)$ und $\eta_f(\alpha)$ parametrisierten Freeze-out-Hyperfläche sind aus Gleichungen (B.22) und (B.23) zu bestimmen. Integration von (B.23) auf der Freeze-out-Fläche ergibt für hinreichend schnell abfallende $\chi(T_0, \alpha)$ für $|\alpha| \rightarrow \infty$

$$\chi(T_0, \alpha) = \chi(\vartheta = 0, \alpha) = \int T_0 \tau_f(\alpha) \sinh(\alpha - \eta_f(\alpha)) d\alpha. \quad (\text{B.30})$$

Aus Gleichung (B.22) wird

$$T_0 \partial_T \chi(T, \alpha) = \partial_{\vartheta} \chi(\vartheta = 0, \alpha) = T_0 \tau_f(\alpha) \cosh(\alpha - \eta_f(\alpha)). \quad (\text{B.31})$$

Weitere Lösungsversuche zur Khalatnikov-Gleichung

Neben der numerischen Lösung der Khalatnikov-Gleichung durch Überführung auf ein System von gekoppelten gewöhnlichen Differenzialgleichungen durch Diskretisierung einer Varia-

¹Ordinary Differential Equation INTe gration aus dem Modul "scipy", welches Anfangswertprobleme durch verschiedene Methoden wie das Runge-Kutta-Verfahren löst.

blen, werden im Folgenden alternative Lösungsversuche diskutiert. Dabei stößt man jedoch auf Komplikationen, weswegen das oben angegebene Lösungsverfahren im Rahmen dieser Arbeit genutzt wurde. Wir betrachten Gleichung (B.26). Mit dem Lösungsansatz

$$\varphi_a = e^{\lambda\vartheta+a\alpha} \quad (\text{B.32})$$

erhält man durch Einsetzen folgende Bedingung:

$$c_s^2\lambda^2 + (1 - c_s^2)\lambda - a^2 = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda^\pm(a) = -\frac{1 - c_s^2}{2c_s^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1 - c_s^2}{2c_s^2}\right)^2 + \frac{a^2}{c_s^2}}. \quad (\text{B.33})$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung (B.26) erhält man nun durch Superposition der partikulären Lösungen (B.32) mit (B.33) zu

$$\varphi(\vartheta, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} [F(a)\varphi^+(a, \vartheta, \alpha) + G(a)\varphi^-(a, \vartheta, \alpha)] da \quad (\text{B.34})$$

mit den Koeffizientenfunktionen $F(a)$ und $G(a)$, wobei

$$\varphi_a^\pm(\vartheta, \alpha) = e^{\lambda^\pm\vartheta+a\alpha}.$$

Man stellt Anfangsbedingungen in der Form

$$\varphi(\vartheta_0, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} [F(a)\varphi^+(a, \vartheta_0, \alpha) + G(a)\varphi^-(a, \vartheta_0, \alpha)] da \quad (\text{B.35})$$

$$= \int [F(a) + G(a)]e^{a\alpha} da, \quad (\text{B.36})$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}(\vartheta_0, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} [F(a)\lambda^+\varphi^+(a, \vartheta_0, \alpha) + G(a)\lambda^-\varphi^-(a, \vartheta_0, \alpha)] da \quad (\text{B.37})$$

$$= \int [F(a)\lambda^+(a) + G(a)\lambda^-(a)]e^{a\alpha} da, \quad (\text{B.38})$$

wobei $\vartheta_0 = 0$. Gleichungen (B.36) und (B.38) erinnern an die Laplace-Transformation, definiert durch

$$\mathcal{L}\{f\}(\alpha) = F(\alpha) = \int_0^{+\infty} f(a)e^{-a\alpha} da, \quad (\text{B.39})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\}(a) = f(a) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{a\alpha} F(\alpha) d\alpha. \quad (\text{B.40})$$

Gleichungen (B.36) und (B.38) können umgeschrieben werden, wobei $F(a) + G(a) =: f(a)$ und $F(a)\lambda^+(a) + G(a)\lambda^-(a) =: g(a)$ gilt:

$$\varphi(\vartheta_0, \alpha) = \int_0^{+\infty} f(-b)e^{-b\alpha} db + \int_0^{+\infty} f(a)e^{-a\alpha} da \Big|_{-\alpha} \quad (\text{B.41})$$

$$= \mathcal{L}\{f(-b)\}(\alpha) + \mathcal{L}\{f(a)\}(\alpha) \Big|_{-\alpha}, \quad (\text{B.42})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}(\vartheta_0, \alpha) = \int_0^{+\infty} g(-b)e^{-b\alpha} db + \int_0^{+\infty} g(a)e^{-a\alpha} da \Big|_{-\alpha} \quad (\text{B.43})$$

$$= \mathcal{L}\{g(-b)\}(\alpha) + \mathcal{L}\{g(a)\}(\alpha) \Big|_{-\alpha} \quad (\text{B.44})$$

mit der Substitution $a = -b$. Die Anwendung der inversen Laplace-Transformation ergibt:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\varphi(\vartheta_0, \alpha)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(-b)\}(\alpha)\} + \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(a)\}(-\alpha)\} \quad (\text{B.45})$$

$$= f(-b) + f_-(a), \quad (\text{B.46})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}(\vartheta_0, \alpha)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{g(-b)\}(\alpha)\} + \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{g(a)\}(-\alpha)\} \quad (\text{B.47})$$

$$= g(-b) + g_-(a). \quad (\text{B.48})$$

Hier fällt auf, dass durch obige Substitution $a = -b$ die scheinbare Rücktransformation an der Stelle $\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(a)\}(-\alpha)\}$ nicht mit der gegebenen Rücktransformation (B.40) übereinstimmt. Auch schränkt analytisch eine Anwendung dieser Transformation die Wahl der Anfangsbedingungen $\varphi(\vartheta_0, \alpha)$ und $\partial_{\vartheta}\varphi(\vartheta_0, \alpha)$ ein. Diese Probleme erfordern zur Lösung erheblichen Mehraufwand, weswegen auf alternative Lösungsversuche ausgewichen wurde.

Eine alternative Vorgehensweise zur Bestimmung der Koeffizientenfunktionen $F(a)$ und $G(a)$ ist eine Diskretisierung der Integrale (B.36) und (B.38). Mit der Notation $\varphi(\vartheta_0, \alpha_i) \equiv \varphi_i$, $F(a_j) \equiv F_j$, $G(a_j) \equiv G_j$, $\varphi^{\pm}(a_j, \alpha_i) \equiv \varphi_{ij}^{\pm}$ und dem Diskretisierungsschritt $\Delta\alpha$ ergibt sich

$$\varphi(\vartheta_0, \alpha) \rightarrow \varphi_i = \sum_j [F_j \varphi_{ij}^+ + G_j \varphi_{ij}^-] \Delta a. \quad (\text{B.49})$$

Dies ist äquivalent zu folgender Matrixgleichung:

$$\begin{pmatrix} \varphi_i \\ \chi_i \end{pmatrix} = \sum_j \begin{pmatrix} \varphi_{ij}^+ & \varphi_{ij}^- \\ \lambda_j^+ \varphi_{ij}^+ & \lambda_j^- \varphi_{ij}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_j \\ G_j \end{pmatrix} \Delta a, \quad (\text{B.50})$$

wobei $\partial_{\vartheta}\varphi(\vartheta_0, \alpha_i) \equiv \chi_i$ und $\lambda_j^{\pm} \equiv \text{diag}(\lambda_j^{\pm})$ gilt. Um nun die gesuchten Funktionen $F(a)$ und $G(a)$ zu erhalten, multipliziert man die inverse Koeffizientenmatrix von links und erhält

$$\frac{1}{\Delta a} \sum_i \begin{pmatrix} \varphi_{ij}^+ & \varphi_{ij}^- \\ \lambda_j^+ \varphi_{ij}^+ & \lambda_j^- \varphi_{ij}^- \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \chi_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_j \\ G_j \end{pmatrix}. \quad (\text{B.51})$$

Die gesuchten Funktionen F_j und G_j können bei bekannter Inversen der Matrix in die diskretisierte Form der allgemeinen Lösung (B.34) eingesetzt werden:

$$\varphi(\vartheta, \alpha_k) = \varphi_k(\vartheta) = \sum_j [F_j \varphi_{kj}^+(\vartheta) + G_j \varphi_{kj}^-(\vartheta)] \Delta a \quad (\text{B.52})$$

mit den Anfangsbedingungen $\varphi_i = \varphi(\vartheta_0, \alpha_i)$ und $\chi_i = \partial_{\vartheta} \varphi(\vartheta_0, \alpha_i)$, wobei gilt:

$$\varphi_{kj}^{\pm}(\vartheta) = e^{\lambda_j^{\pm} \vartheta + a_j \alpha_k} . \quad (\text{B.53})$$

Diese Vorgehensweise ist jedoch ebenfalls ungünstig, da sich die Matrix in Gleichung (B.50) nicht ohne große Fehler numerisch invertieren lässt, das bedeutet dass die Nicht-Diagonaleinträge weit verschieden von null sind. Das kann daran liegen, dass deren Einträge von sehr kleinen im Bereich $\sim 10^{-10}$ bis zu sehr großen $\sim 10^{10}$ reichen.

C Test der Simulation

C.1 Wellengleichung

Um sicher zu stellen, dass unsere Lösung der Khalatnikov-Gleichung numerisch korrekte Resultate liefert, wurde diese auf verschiedene Weisen getestet. Der schnellste Test erfolgt durch die Wahl der Schallgeschwindigkeit $c_s^2 = 1$, wodurch sich die bekannte Wellengleichung ergibt. Dazu wurde für die Anfangsbedingungen

$$u(0, x) = \sin(x) , \quad \partial_t u(0, x) = \cos(x) \quad (\text{C.1})$$

die Lösung numerisch ermittelt für den Zeitschritt von $\Delta t = \pi$, zu sehen in Abbildung C.1. Dies stimmt mit der analytischen Lösung zu den obigen Anfangsbedingungen von $u(t, x) = \sin(t+x)$ überein.

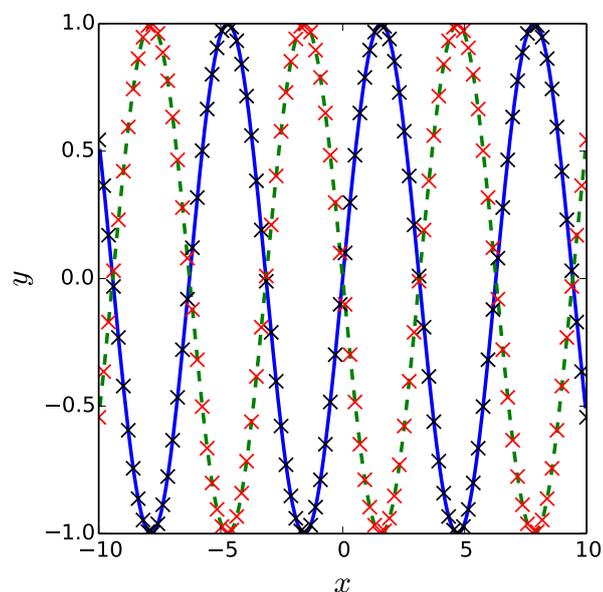


Abbildung C.1: Test der Lösung der Wellengleichung für die Anfangsbedingungen (C.1) für die Zeiten $t = 2\pi, 3\pi$ und 100 Iterationsschritten. Die durchgezogene Linie stellt den Anfangszustand dar, die gestrichelte Linie den Endzustand. Beide stimmen mit der analytischen Lösung von $\sin(2\pi + x)$ (schwarze Kreuze) bzw. $\sin(3\pi + x)$ (rote Kreuze) überein.

C.2 Bjorken-Lösung

Ein trivialer Test der eigentlich untersuchten Khalatnikov-Gleichung ergibt sich durch die Wahl von Bjorken-Ausfrierbedingungen der Form

$$\tau_f = \tau(T_0) = \tau_0 , \quad \eta_f = \eta(\alpha) = \alpha . \quad (\text{C.2})$$

Man erwartet das bekannte Bjorken-Verhalten [17], wobei Eigenzeit τ und Raum-Zeit-Rapidity η nur Funktionen von Temperatur T bzw. von Fluid-Rapidity α sind: $\tau(T)$, $\eta(\alpha)$. Das Ergebnis ist zu sehen in Abbildung C.2, wobei das erwartete Verhalten zu erkennen ist. Zum einen sieht man einen sinkenden Wert für $\tau(T)$ bei steigenden Temperaturen T , in den restlichen drei Grafiken liegen alle Kurven übereinander, was die Unabhängigkeit von den jeweiligen Größen verdeutlicht.

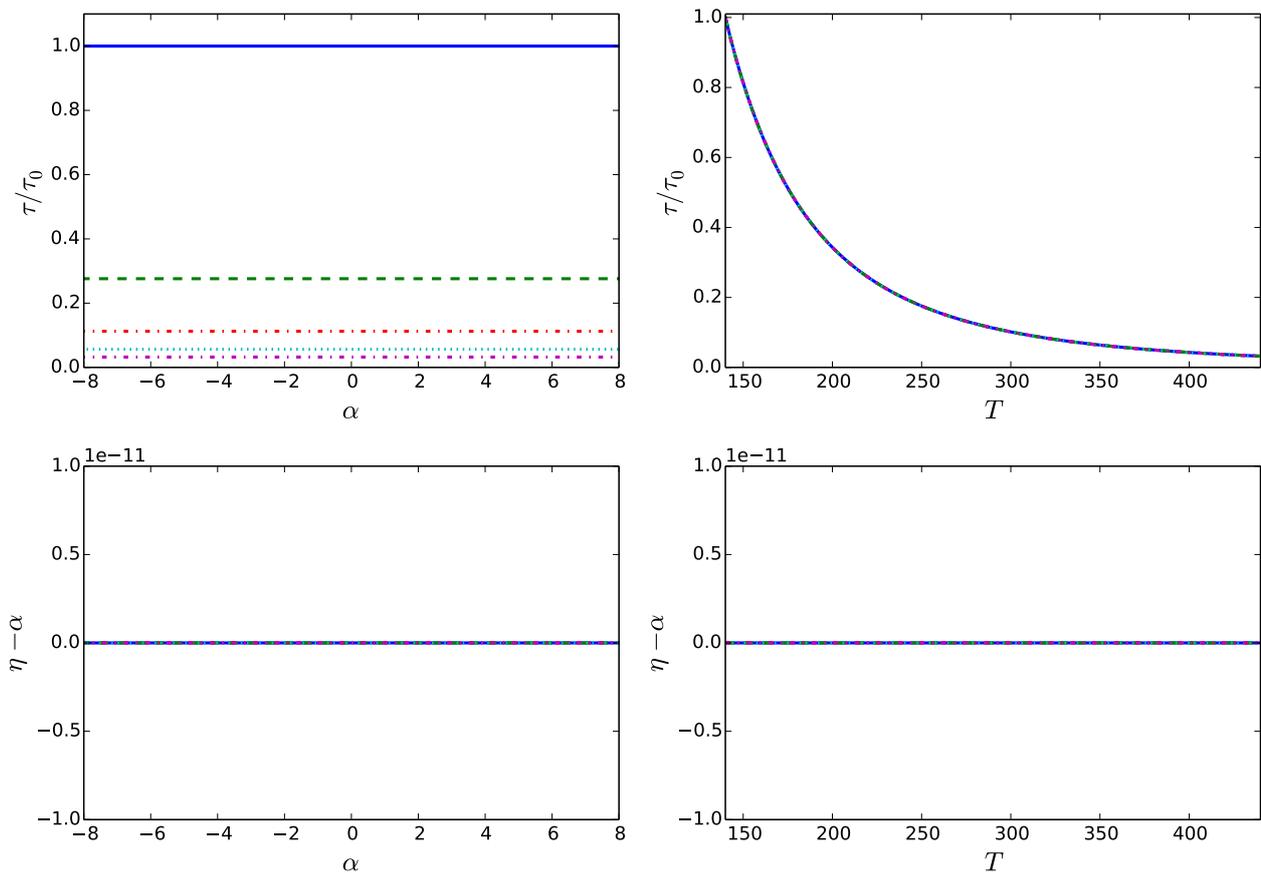


Abbildung C.2: Test der Bjorken-Lösung: Die Funktionen τ und η über die Fluidrapidity α bei den Temperaturen $T = 140, 215, 290, 365$ und 440 MeV (in der Reihenfolge: durchgezogen, gestrichelt, gestrich-punktet, gepunktet, gestrich-punktet) (links) und über T bei verschiedenen α im Bereich $-10 < \alpha < 10$ (rechts).

C.3 Ausfrierbedingungen aus der Maximum-Entropy Method

Mikhail Stephanov und Yi Yin nutzten im Jahr 2014 [12] ein Verfahren um den Cooper-Frye-Formalismus zu invertieren, d. h. es konnte vom Teilchenspektrum direkt auf die zu Grunde liegende Ausfrierfläche geschlossen werden. Dieses Verfahren nutzt die Maximum-Entropy-Method (MEM), um die wahrscheinlichste Ausfrierhyperfläche zu bestimmen. Diese fand erstmals Anwendung im Gebiet der Physik der Schwerionenkollisionen. [12] Es wurden dazu die Daten aus der BRAHMS¹-Kollaboration aus den Au-Au-Kollision am RHIC² bei Schwerpunktenenergien von $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV pro Nukleon verwendet. Diese entsprechend der MEM rekonstruierte Ausfrierfläche wird als "Anfangsbedingung" genommen und mit den Ergebnissen aus [12] verglichen, siehe Abbildung C.3. Zu sehen sind die erhaltenen Freeze-Out-Parametrisierungen mit Hilfe der MEM (C.3 oben), wobei als Vergleich der Bjorken-Freeze-Out mit abgebildet ist. Unter C.3 unten findet sich der Vergleich unserer Lösung der Hydrogleichungen zum Ergebnis von [12], welches als Hintergrund in die Grafik eingebracht wurde. Die darüber gelegten schwarzen Isothermen stimmen dabei mit den weißen aus [12] überein bis auf geringe Abweichungen, die durch die grafische Entnahme der Freeze-Out-Parametrisierungen aus C.3 oben zustande kamen.

¹Broad Range Hadron Magnetic Spectrometers Experiment am RHIC

²Relativistic Heavy Ion Collider am Brookhaven National Laboratory in Brookhaven (USA)

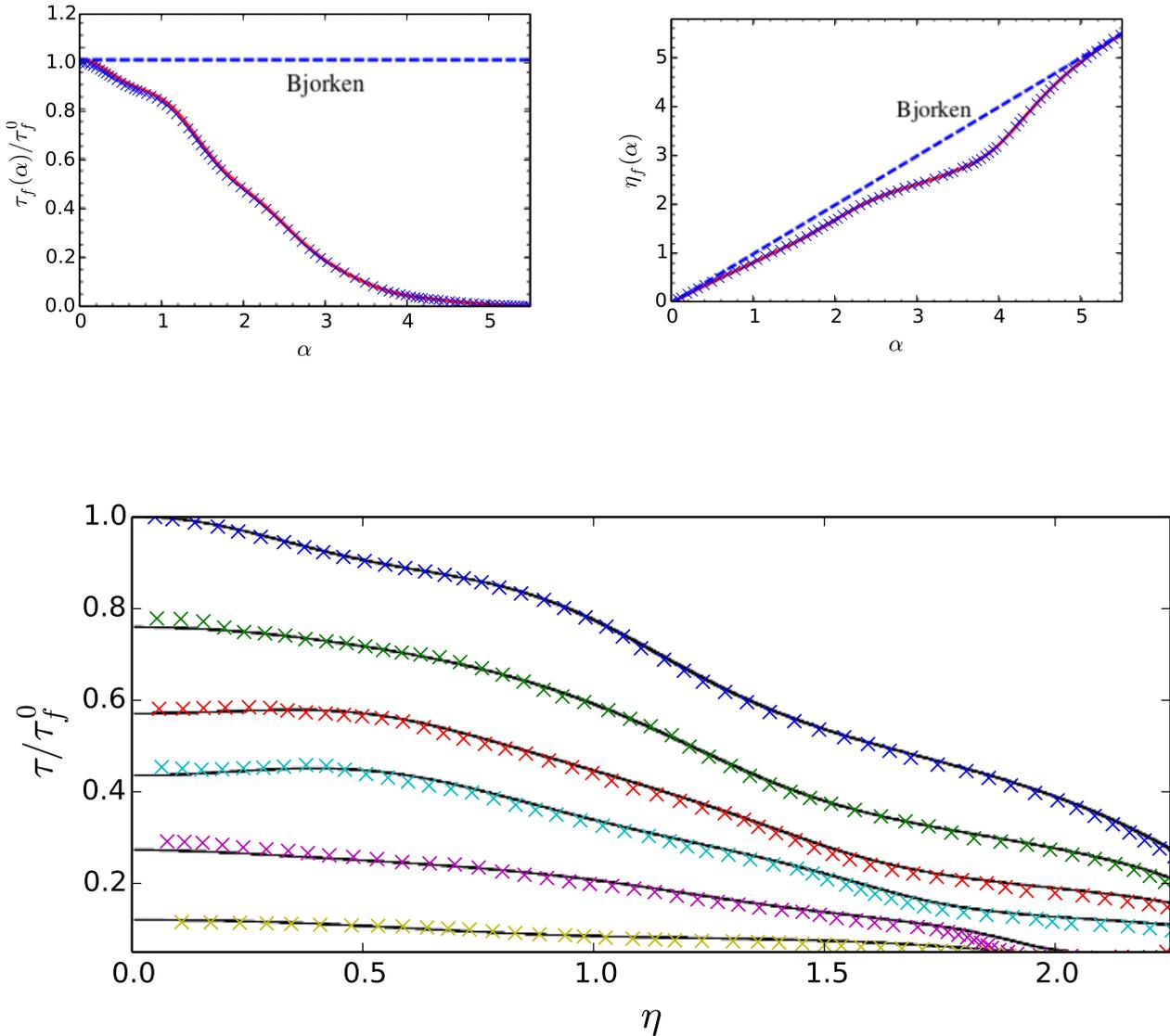


Abbildung C.3: Oben finden sich die Rekonstruktionen von $\tau_f(\alpha)$ und $\eta_f(\alpha)$ aus der MEM. Die für diese Arbeit aus Fig. 3 in [12] grafisch entnommenen Datenpunkte sind als blaue Kreuze markiert. Unten ist die longitudinale Expansion bei $c_s^2 = 1/3$ aus [12] als schwarze Linien konstanter Temperatur dargestellt. Kreuze entsprechen Isothermen bei $T = 140$ (blau), 154 (grün), 171 (rot), 189 (hellblau), 231 (violett) und 321 MeV (gelb) unserer Hydroevolution. Hierbei ist $\tau_f^0 = \tau_f(0)$ die Eigenzeit der Ausfrierfläche bei $\alpha = 0$.

D Weitere grafische Darstellungen

In diesem Abschnitt werden weitere Detailergebnisse zur Hydroevolution des Systems zu den vier verschiedenen Ausfrierparametrisierungen vorgestellt. Die Gleichungen der Hydrodynamik wurden in der Form des Khalatnikov-Potenzials (2.18), (B.18) gelöst, welches in den folgenden Abbildungen jeweils in der ersten Reihe in den Koordinaten Temperatur und Fluidrapidität dargestellt ist. Der Zusammenhang zwischen dem Khalatnikov-Potenzial und den Funktionen der Eigenzeit und der Raum-Zeit-Rapidität ist durch (2.21), (B.24) gegeben. Beide Funktionen sind in den folgenden Abbildungen in den beiden unteren Reihen abgebildet.

Betrachtet man die Khalatnikov-Potenziale, so erkennt man in den Konturen konstanter Temperatur (erste Reihe links) die Form der parametrisierten Ausfriereigenzeiten, vgl. Gleichungen (B.30), (B.31). Die Wahl des Flussprofils zum Freeze-Out wirkt sich auf die Lage der Linien konstanter Temperatur aus: Eine Abweichung vom Bjorken-Fluss ($\eta < \alpha$) ergibt ein negatives Khalatnikov-Potenzial zur Ausfrierzeit $T_f = 140$ MeV, dessen Wert sich für höhere Temperaturen vergrößert. Im Fall eines Bjorken-artigen Flusses verläuft die Ausfrierkurve entlang $\chi = 0$. Das Khalatnikov-Potenzial kann zu weit höheren Temperaturen als $T = 440$ MeV (wie in den Abbildungen dargestellt) entwickelt werden. Andererseits weisen die Funktionen $\tau(T, \alpha)$ und $\eta(T, \alpha)$ bereits bei niedrigeren Temperaturen Abbrüche und Singularitäten auf. Dies ist darauf zurückzuführen, dass im Fall von τ der Term in der Wurzel in Gl. (2.21) links negativ wird für $T\partial_t\chi < \partial_\alpha\chi$, bzw. im Fall von η für das Argument im Areatangens Hyperbolicus in Gl. (2.21) rechts $|T\partial_T\chi| = |\partial_\alpha\chi|$ gilt, wofür dieser Singularitäten ausweist.

Die Unterbrechungen in den Funktionen τ und η bedeuten, dass sich das hydrodynamische System für die gegebenen Anfangsbedingungen nicht weiter zurück entwickeln lässt. Verdeutlicht wird dies in den Linien konstanter Temperatur der Eigenzeit (zweite Reihe links in den Abb.), die für Werte ab $\tau \approx 0,01$ (in den Abbildungen nicht mehr erkennbar) nicht mehr existieren da für kleine Eigenzeiten keine Ergebnisse mehr ermittelt werden können. Dem zu Folge brechen auch die Kurven für die Raum-Zeit-Rapidität (links unten in den Abb.) ab, da diese die selben Isothermen repräsentieren. Die Erklärung für die fehlenden Datenpunkte gilt analog für die Abbildungen rechts in der Mitte und unten.

Vergleicht man die Evolutionen der verschiedenen Parametrisierungen, so erkennt man, dass die Temperaturen, zu der Unterbrechungen der Konturen erstmals auftreten, variieren. Man kann also Parametrisierungen mit Parametersätzen wählen, die sich besser in der Zeit zurück entwickeln lassen als andere. Es wird hier nochmal auf die Abbildungen 3.3, 3.8 und 3.12

verwiesen, welche quantitative Aussagen über die Tauglichkeiten der Parameter treffen.

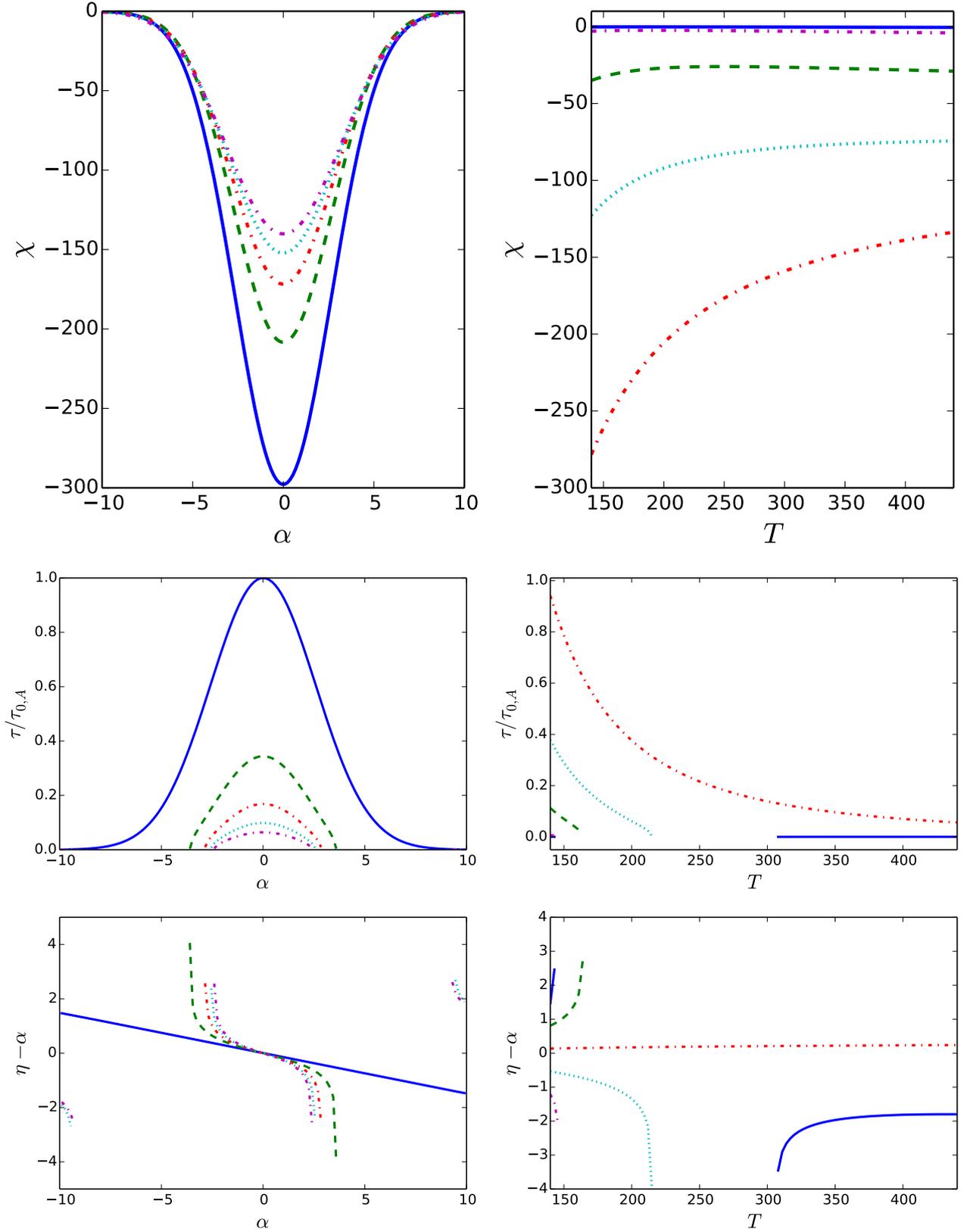


Abbildung D.1: Gezeigt ist die Evolution des Systems zum Freeze-Out nach Parameter-satz A in Abb. 3.1. In der ersten Reihe ist links die Evolution des Khalatnikov-Potenzials χ über die Fluidrapidität α für die Temperaturen $T = 140, 215, 290, 365$ und 440 MeV und rechts über T bei Rapiditäten von $\alpha = -10, 0; -5, 5; -1, 0; 3, 5$ und $8, 0$ abgebildet. Darunter sind die Evolution der Eigenzeit τ und der Raum-Zeit-Rapidität η links über die Fluidrapidität α für die selben Temperaturen und rechts über T für $\alpha = -9, 9; -5, 4; -0, 9; 3, 6$ und $8, 1$ abgebildet. Der Reihenfolge nach wurden folgende Linienstile genutzt: durchgezogen, gestrichelt, gestrich-punktet, gepunktet, gestrich-punktet.

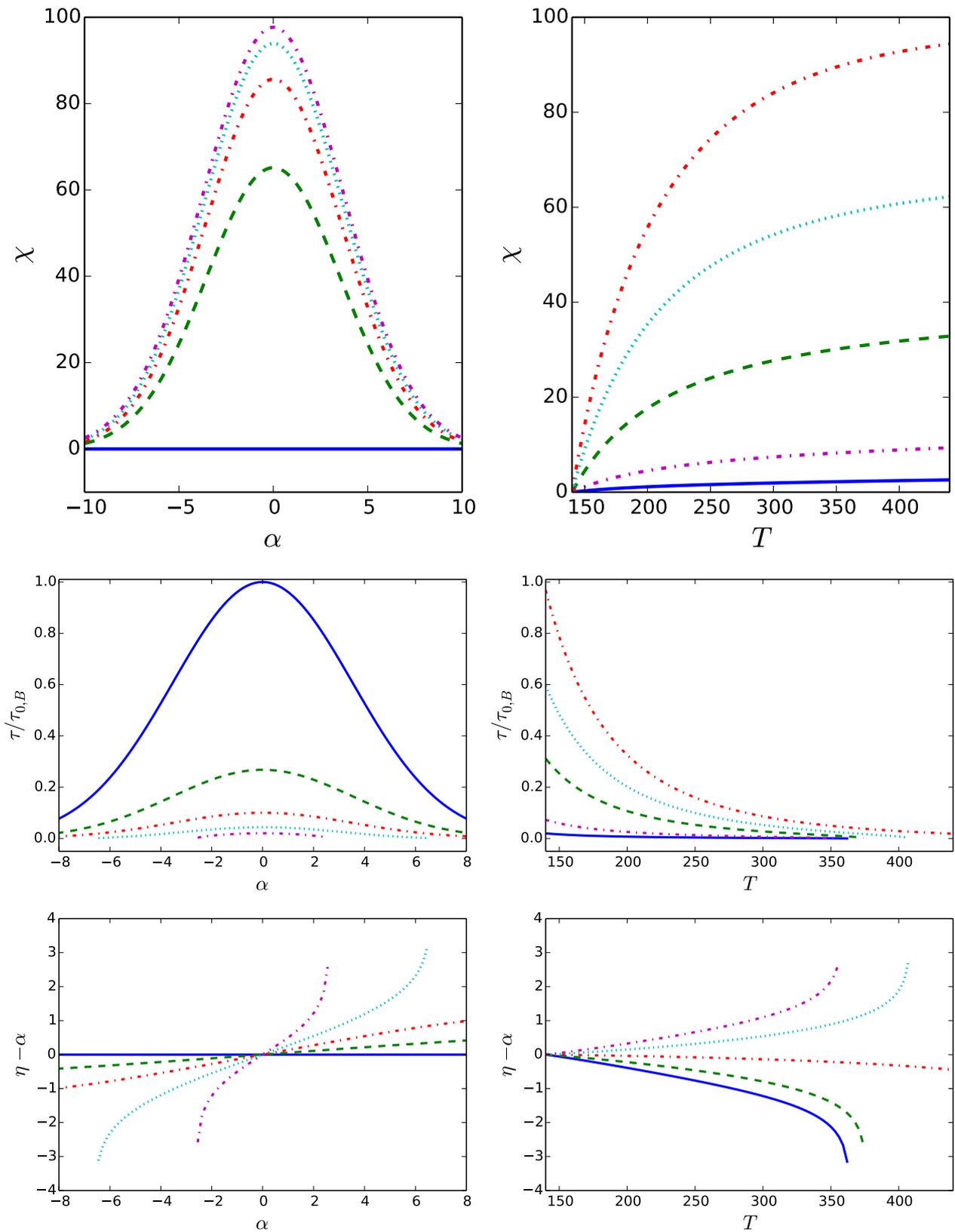


Abbildung D.2: Gezeigt ist die Evolution des Systems analog zur Abb. D.1 mit gleichen Werten für T und α zum Freeze-Out nach Parametersatz B in Abb. 3.1.

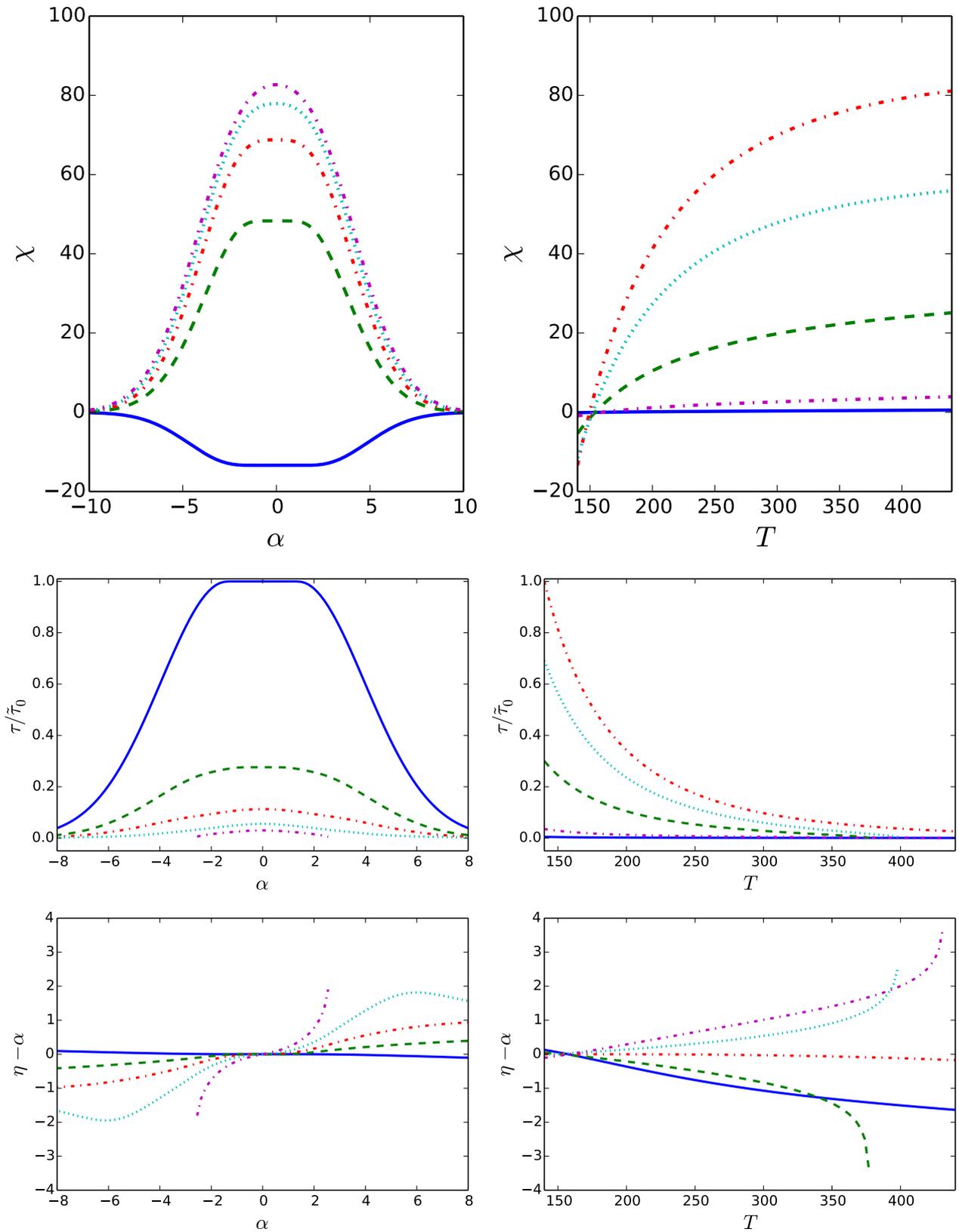


Abbildung D.3: Gezeigt ist die Evolution des Systems analog zur Abb. D.1 mit gleichen Werten für T und α zum Freeze-Out nach Abb. 3.5.

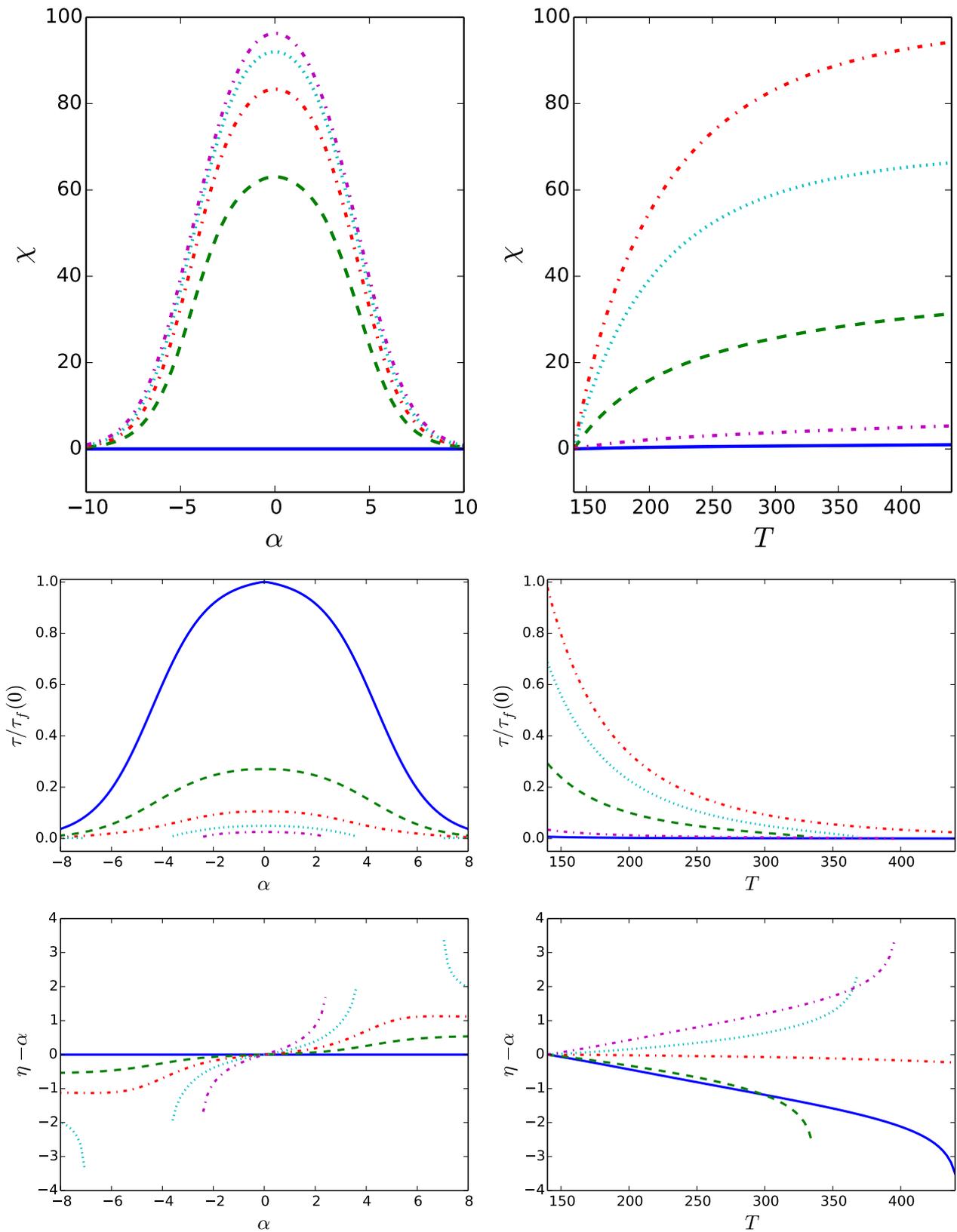


Abbildung D.4: Gezeigt ist die Evolution des Systems analog zur Abb. D.1 mit gleichen Werten für T und α zum Freeze-Out nach Abb. 3.9.

Literaturverzeichnis

- [1] U. W. Heinz, 0407360 [hep-ph]
- [2] I. G. Bearden *et al.* [BRAHMS Collaboration], Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 162301
- [3] D. Miśkowiec [ALICE Collaboration], Acta Phys. Polon. B **44** (2013) 7, 1553
- [4] J. Adam *et al.* [ALICE Collaboration], arXiv:1512.06104 [nucl-ex]
- [5] E. Vercellin [ALICE Collaboration], Nucl. Phys. A **805** (2008) 511
- [6] E. Abbas *et al.* [ALICE Collaboration], Phys. Lett. B **726** (2013) 610
- [7] F. Cooper and G. Frye, Phys. Rev. D **10** (1974) 186
- [8] D. Teaney, J. Lauret and E. V. Shuryak, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 4783
- [9] P. Romatschke and U. Romatschke, Phys. Rev. Lett. **99** (2007) 172301
- [10] G. Baym, B. L. Friman, J. P. Blaizot, M. Soyeur and W. Czyz, Nucl. Phys. A **407** (1983) 541
- [11] E. Iancu, arXiv:1205.0579 [hep-ph]
- [12] M. Stephanov and Y. Yin, arXiv:1404.5910 [nucl-th]
- [13] J. Cleymans, H. B. Geyer and F. G. Scholtz, *Hadrons in dense matter and hadrosynthesis. Proceedings, 11th Chris Engelbrecht Summer School, Cape Town, South Africa, February 4-13, 1998*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1999, Lecture notes in physics, Vol. 516, p. 22 ff.
- [14] L. D. Landau and E. D. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press (1959)
- [15] F. Wunderlich, "Hydrodynamische Beschreibung der Expansionsdynamik von relativistischen Schwerionenstößen mit Mitteln der AdS/CFT-Korrespondenz", Diplomarbeit, TU Dresden (2011)
- [16] A. Peshier, "Das Quark-Gluon-Plasma mit thermischen Partonenmassen und Konsequenzen des Modells für die thermische Dileptonenemission", Diplomarbeit, TU Dresden (1995)

- [17] J. D. Bjorken, Phys. Rev. D **27** (1983) 140
- [18] V. Vovchenko, M. I. Gorenstein, L. M. Satarov, I. N. Mishustin, L. P. Csernai, I. Kisel and H. Stoecker, arXiv:1510.01235 [hep-ph]
- [19] B. Abelev *et al.* [ALICE Collaboration], Phys. Rev. Lett. **109** (2012) 252301
- [20] G. Schlisio, "Untersuchung der longitudinalen Dynamik und des Freeze-Out in ultrarelativistischen Schwerionenkollisionen", Diplomarbeit, TU Dresden (2015)
- [21] S. Jeon and U. Heinz, Int. J. Mod. Phys. E **24** (2015) 10, 1530010
- [22] L. M. Satarov, A. V. Merdeev, I. N. Mishustin and H. Stoecker, Phys. Rev. C **75** (2007) 024903

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit im Rahmen der Betreuung am Institut für Theoretische Physik ohne unzulässige Hilfe Dritter verfasst und alle Quellen als solche gekennzeichnet habe.

Benjamin Rabe

Dresden, 21. Januar 2016

Danksagung

Abschließend möchte ich mich bei den Personen bedanken, die es mir ermöglicht haben diese Arbeit zu schreiben.

Zuallererst gilt mein besonderer Dank Herrn Prof. Dr. Burkhard Kämpfer für die Chance, an diesem interessanten Thema zu arbeiten und erstmals einen Einblick in ein Forschungsgebiet der Theoretischen Physik erhalten zu dürfen. Die vielen Denkanstöße und Hinweise haben mir sehr geholfen, meine Arbeit besser zu verstehen und ein umfangreicheres Verständnis für die Physik zu erhalten.

Ich bedanke mich ganz herzlich bei Herrn Prof. Dr. Dominik Stöckinger für die freundliche Übernahme des Zweitgutachtens.

Besten Dank an Georg Schlisio für die hervorragend geleistete Vorarbeit, ohne die mir nichts in der gegebenen Arbeitszeit gelungen wäre. Es war mir eine große Hilfe, einen Kollegen zu haben, der mir mit Rat und Tat zur Seite stand bzw. saß.

Ich bedanke mich des Weiteren bei dem Korrekturleser-Pärchen Catherine Estrada und Konstantin Nestmann für das aufmerksame Lesen und die vielen Verbesserungsvorschläge in beiden Sprachen.

Vielen Dank an Frau Andrea Spiller für das Entgegenkommen bei der Anmeldung meiner Bachelorarbeit.

Der mit Abstand größte Dank geht an meinem überaus kompetenten Betreuer Falk Wunderlich. Ich bedanke mich für die etlichen Stunden, die in meine Arbeit investiert wurden, und für die selbstlose Vorarbeit und Recherche, die mir einen Großteil meiner Aufgaben abgenommen haben. Ohne seine Hingabe und sein physikalisches und pädagogisches Geschick wären sämtliche Vorgehensweisen und Ergebnisse vor mir verschlossen geblieben. Ich danke für die gefühlten 10^{23} Korrekturlesungen und die immer wieder erläuterten Grundlagen, die ich ohne seine Geduld nicht verinnerlicht hätte. Ich weiß die vielen Mühen sehr zu schätzen und hätte mir keine bessere Unterstützung wünschen können.