Paarerzeugung in starken bifrequenten Laserpulsen:

Der Multi-Photonen Breit-Wheeler-Prozess

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doctor rerum naturalium

vorgelegt von
Tobias Nousch
geboren am 24.09.1984 in Cottbus

Institut für Theoretische Physik
Fachrichtung Physik
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

Eingereicht am 23. August 2018

1. Gutachter: Prof. Dr. B. Kämpfer
2. Gutachter: Prof. Dr. R. Schützhold

Kurzfassung:

In der vorliegenden Arbeit wird die Elektron-Positron-Paarproduktion (Breit-Wheeler-Prozess), eingebettet in einen starken Laserpuls, analysiert. Aus diesem Grunde wird mittels eines semiklassischen Ansatzes das Streumatrixelement des Paarerzeugungsprozesses für gepulste Laserwellen in der Näherung ebener Wellen mit realistischer Zeitstruktur aufgestellt und numerisch ausgewertet. Es wird die differentielle sowie totale Produktionswahrscheinlichkeit des nicht-linearen Breit-Wheeler-Prozesses berechnet und mit Ergebnissen der unendlich ausgedehnten Welle verglichen. Weiterführend wird der laser-assistierte Breit-Wheeler-Prozess anhand einer Überlagerung eines XFEL-Strahls mit einem optischen hochintensiven Laserstrahl eingeführt und diskutiert. Hierbei zeigt das Transversalimpulsspektrum markante Peaks, die als Kaustiken interpretiert werden, deren Positionen durch die stationären Phasen zugänglich sind. Eine solche Konfiguration von Lasersystemen ist gegenwärtig beim LCLS und in naher Zukunft beim European XFEL verfügbar.

Abstract:

In the present work, the electron-positron-pair production (Breit-Wheeler process) is analyzed for strong laser pulses. For this reason, the S-matrix element of the pairing process for pulsed laser waves in plane-wave approximation but with realistic temporal structure is set up by means of a semiclassical approach and evaluated numerically. The differential and total production probabilities of the non-linear Breit-Wheeler process are calculated and compared with results of an infinite plane wave. Furthermore, the laser-assisted Breit-Wheeler process is introduced and discussed by superimposing an XFEL beam on an optical high-intensity laser beam. Here, the transverse momentum spectrum shows prominent peaks, which are interpreted as caustics whose positions are accessible by the stationary phases. Such a configuration of laser systems is currently available at the LCLS and in the near future at the European XFEL.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **6**

2 Der Breit-Wheeler-Prozess **11**

2.1 Einführung 11

2.2 Nicht-linearer Breit-Wheeler-Prozess in unendlich ausgedehnten Feldern 13

2.3 Nicht-linearer Breit-Wheeler-Prozess in gepulsten Feldern 19

2.3.1 Mathematische Vorbereitung 19

2.3.1.1 Das Hintergrundfeld 20

2.3.1.2 Das Matrixelement 20

2.3.1.3 Lichtkegelkoordinaten 21

2.3.1.4 Auswertung des Matrixelements 21

2.3.1.5 Produktionswahrscheinlichkeit 23

2.3.2 Der Wirkungsquerschnitt 25

3 Laser-assistierter Breit-Wheeler-Prozess **27**

3.1 Prozessbeschreibung 29

3.1.1 Kinematik 30

3.1.2 Das Hintergrundfeld 32

3.1.3 Die Einhüllende $\mathbf{g}(\phi)$ 33

3.2 Das Streumatrixelement 34

3.3 Linearisierung des X-Feldes 36

3.4 Der Wirkungsquerschnitt 39

4 Analyse des laser-assistierten Breit-Wheeler-Prozesses **41**

4.1 Cut-off-Werte 41

4.2 Schnitte durch den Phasenraum des Positrons 45

4.3 Analyse des differentiellen Wirkungsquerschnitts: Darstellung über der $(\mathbf{z}, \ell)$-Ebene 50

4.4 Analyse des differentiellen Wirkungsquerschnitts: Darstellung über der (φ, ℓ)-Ebene 54

5 Spektrale Kaustiken **56**
5.1 Stationäre Phasenbedingung 56
5.2 Numerische Resultate und spektrale Kaustiken 59
5.3 Kaustiken in der $(\mathbf{z}, \ell)$-Ebene 64

6 Zusammenfassung und Ausblick **66**

7 Anhang **69**
7.1 Notation und Konventionen 69
7.2 Der semiklassische Ansatz 70
7.3 Der Volkov-Zustand 72
7.4 Rapidität und modifizierte Rapidität 74
7.5 Normierung 77
7.6 Der Grenzfall eines schwachen Feldes L 79
7.7 Vergleich verschiedener Koordinatensysteme 81
7.8 Weitere Abbildungen 82

1 Einleitung

Dass die Möglichkeit besteht, Materie aus Licht zu erzeugen, ist einer der bemerkenswertesten und faszinierendsten Vorhersagen der Quantenelektrodynamik (QED). Dies steht in strengem Kontrast zur klassischen Elektrodynamik, welche keinen direkten Energie- oder Impulsaustausch zwischen Lichtstrahlen beinhaltet. Einer der noch verbliebenen Prüfsteine der QED ist die von Schwinger vorhergesagte Polarisation des Vakuums [Sch51] in Anwesenheit eines starken, elektromagnetischen Feldes, auch als Schwinger-Effekt bezeichnet. Schwinger zeigte, dass ein elektrisches Feld, welches die von Sauter berechnete kritische Feldstärke [Sau31]

$$E_c \equiv \frac{m^2c^3}{e\hbar} \simeq 1.3{\times}10^{18}\mathrm{V/m} \tag{1.1}$$

erreicht, reelle Elektron-Positron-Paare erzeugen kann. Hierbei ist m die Masse und $-|e|$ die Ladung eines Elektrons, c die Lichtgeschwindigkeit und $\hbar$ das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum. Durch die Anwesenheit eines solchen Feldes werden die durch Vakuumfluktuationen kontinuierlich erzeugten, virtuellen Elektron-Positron-Paare mehr als eine Compton-Wellenlänge voneinander getrennt und gehen in reelle Teilchen über. Das Vakuum wird polarisiert. Die zu E_c^2 proportionale kritische Intensität des Feldes ergibt sich als

$$I_c = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_c^2 \simeq 2.2 \times 10^{29}\mathrm{W/cm^2}. \tag{1.2}$$

Felder mit solch immensen Intensitäten können zur Zeit noch nicht im Labor erzeugt werden.

Der einfachste Prozess, um „reines Licht“ in Materie zu transformieren, ist der Breit-Wheeler-Prozess [Bre34]: $X + X' \to e^-e^+$. Hierbei symbolisieren X und X' zwei einlaufende Photonen und e^-e^+ das erzeugte Elektron-Positron-Paar. Eine physikalisch anschauliche Beschreibung des Prozesses ist die Folgende: durch zwei miteinander wechselwirkende Photonen mit genügend hoher Energie können virtuelle Quantenvakuumfluktuationen auseinander gerissen und das dadurch entstehende Teilchenpaar auf dessen Massenschale gehoben werden.

Der lineare Breit-Wheeler-Prozess lässt sich durch das perturbative Feynman-Diagramm 1.1a beschreiben. Der in der Zeit umgekehrte Prozess, beschrieben durch das Diagramm 1.1b, stellt die bekannte Paarannihilation $e^+ + e^- \to \gamma{+}\gamma'$ dar. Ein Kreuzkanal ist der Compton-

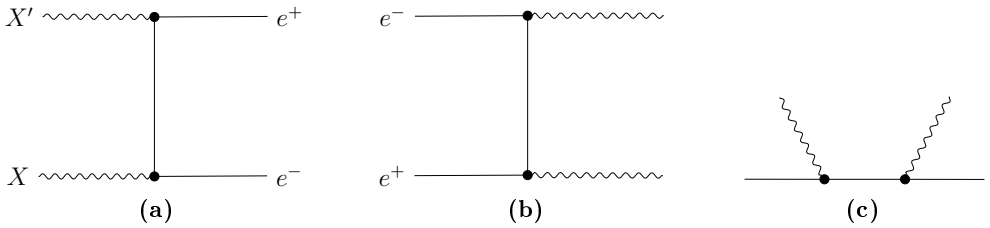


Abbildung 1.1: Feynman-Diagramme einfacher QED-Prozesse: (a) Breit-Wheeler-Prozess, (b) Paarannihilation (c) Compton-Effekt. Gezeigt sind die grundlegenden Topologien ohne evtl. Austauschdiagramme für die Baumgraphen in niedrigster Ordnung.

Prozess, siehe Abbildung 1.1c.[1] Für starke Laserfelder werden die entsprechenden nicht-linearen oder Multi-Photonen-Prozesse wichtig. Als Beispiel sind in Abbildung 1.2 Feynman-Diagramme des nicht-linearen Breit-Wheeler-Prozesses (links), sowie des nichtlinearen Compton-Effektes (rechts) gezeigt. Anstatt viele Diagramme zu summieren ist es günstig in das Furry-

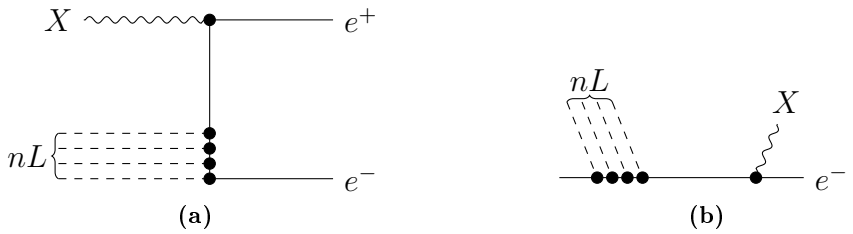


Abbildung 1.2: Beispiele für Feynman-Diagramme von Multi-Photonen-Prozessen: (a) der nicht-lineare Breit-Wheeler-Prozess, (b) der nicht-lineare Compton-Effekt in einem Hintergrundfeld L.

Bild zu wechseln. Die Prozesse, dargestellt in den Diagrammen 1.3a, und 1.3b, entsprechen dann dem nicht-linearen Breit-Wheeler-Effekt bzw. dem nicht-linearen Compton-Effekt.

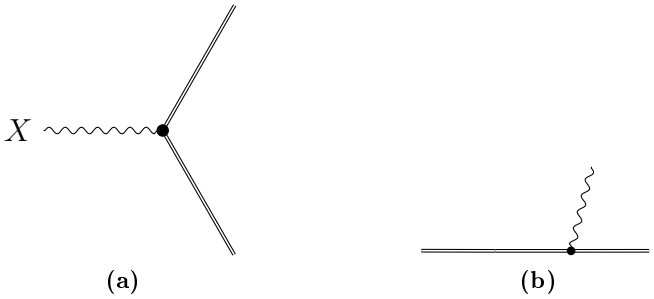


Abbildung 1.3: Feynman-Diagramme im Furry-Bild: (a) der nicht-lineare Breit-Wheeler-Prozess und (b) der nicht-lineare Compton-Effekt. Die Doppellinien symbolisieren das durch das Hintergrundfeld propagierende Elektron bzw. Elektron-Positron-Paar.

[1] Es werden nur die grundlegenden topologisch verschiedenen Diagramme gezeigt und die Austauschdiagramme unterdrückt.

Für den Übergang vom linearen zum Multi-Photonen-Prozess ist die Intensität der wechselwirkenden Felder entscheidend. Diese wird in der Literatur [Nik63,Rei62,Lan82] oft durch den dimensionslosen Parameter

$$\eta_0 \quad = \quad \frac{|e|E}{m\omega} = \frac{|e|\sqrt{\langle A \cdot A \rangle}}{m} \tag{1.3}$$

charakterisiert.[2] Hierbei bezeichnet $\langle A \cdot A \rangle$ das zeitlich gemittelte Quadrat des Vierervektorpotentials A_μ eines elektrischen Feldes E mit der zentralen Kreisfrequenz ω. Für Werte $\eta_0 \ll 1$ sind Multi-Photon-Effekte vernachlässigbar (Schwachfeld-Fall). Die in Abbildung 1.1 gezeigten perturbativen Feynman-Diagramme beschreiben die o.g. Prozesse in niedrigster Ordnung der Störungstheorie durch Baumgraphen in adäquater Weise. Für $\eta_0 = \mathcal{O}(1)$ beginnen die nicht-linearen (Multi-Photonen-) Effekte wichtig zu werden, und es ist von Vorteil in das Furry-Bild zu wechseln. Der Bereich $\eta_0 \gg 1$ wird als Ultrahochintensitätsregime bezeichnet, in dem die nicht-linearen Effekte dominieren.

Während Paarannihilation und Compton-Effekt durch Experimente ausführlich untersucht worden sind und mit der Positronen-Emissions-Tomographie (PET) und den Compton-Teleskopen bereits praktische Anwendungen existieren, konnte die Breit-Wheeler Paarproduktion mit reellen Photonen bisher nur in indirekter Form im Labor nachgewiesen werden. Das erste erfolgreiche Experiment hierzu ist E-144, welches 1997 am Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) durchgeführt wurde [Bam99, Bur97]. Es handelte sich dabei um die Kombination des nicht-linearen Compton-Effekts mit dem nichtlinearen Breit-Wheeler-Prozess. Hierbei wurden in einem ersten Schritt 46.6 GeV Elektronen aus einem Linearbeschleuniger mit einem gegenläufigen Terawatt Laserstrahl zur Kollision gebracht. Dadurch wurden mittels Compton-Effekt rückgestreute Photonen mit einer Energie von 29.2 GeV erzeugt. In einem zweiten Schritt wechselwirken die propagierenden Compton-Photonen mit bis zu fünf Photonen aus dem Laserstrahl und erzeugten Elektron-Positron-Paare. Der gesamte Prozess wird in der Literatur als Trident-Prozess[3] bezeichnet [Hu14, Ild11, Tho98]. Der reine lineare Breit-Wheeler-Prozess mit zwei gegenläufigen reellen Photonen im Anfangszustand konnte jedoch noch nicht experimentell beobachtet werden. Im Gegensatz zur Annihilation und zum Compton-Effekt ist die Paarerzeugung ein Schwellenprozess, bei dem erst die Energie $2m$ aufgebracht werden muss. Dies setzt voraus, dass extrem hochenergetische Photonen erzeugt werden, welche anschließend miteinander wechselwirken können. Ein viel beachteter Ansatz für die experimentelle Untersuchung des einfachen Breit-Wheeler-Prozesses wurde 2014 von Pike et al. [Pik14] vorgeschlagen, jedoch noch nicht im Labor umgesetzt.

[2] Es sind auch die Bezeichnungen a_0 oder ξ üblich, die sich ggf. durch Faktoren von 2 oder $\sqrt{2}$ unterscheiden.
[3] In der älteren Literatur wird der Begriff „Triple Process“ verwendet.

Die simple Vorstellung, mit einem Laserstrahl das Quantenvakuum zu polarisieren, um dann mit einem hochenergetischen Probephoton Elektron-Positron-Paare zu erzeugen, stellt sich in der praktischen Umsetzung als schwer zu bewältigende Aufgabe heraus. Einerseits ist für geringe Intensitäten des Laserfeldes der Prozess sehr stark unterdrückt, anderseits konnte die Kollision eines hochenergetischen Photons mit einem stark fokussierten, hochintensiven, ultrakurzen Laser noch nicht präzise genug ausgeführt werden. Die rasante Entwicklung neuer, innovativer Lasersysteme wie ELI [Ext17] lässt hoffen, in naher Zukunft eine Reihe von Starkfeld-QED Prozessen studieren zu können. Eine Übersicht moderner Lasersystem ist in Tabelle 1.1 zu finden. Hierbei werden ultrakurze Laserpulse genutzt, um hochinten-

	Polaris	SLAC	Draco	ELI	APOLLON	Vulcan
Leistung	200 TW	1 TW	150 TW	200 PW	10 PW	10 PW
I [W/cm^2]	10^{21}	0.5×10^{18}	5×10^{20}	4×10^{24}	10^{21}	10^{21}
η_0	21	0.4	15	5×10^3	ca. 21	250
Status	aktiv	aktiv	aktiv	in Planung	in Planung	in Planung

Tabelle 1.1: Übersicht über einige Lasersysteme (Polaris, IOQ Jena [POL17]; SLAC: Stanford linear Accelerator, Experiment E-144 [Bur97] Draco, Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf [Dra17]; ELI: Extreme Light Infrastructure project [Ext17]; Apollon: Laboratoire pour l'Utilisation des Lasers Intenses [Apo18]; Vulcan: Central Laser Facility, Rutherford-Appleton Lab [Vul18])

sive elektromagnetische Felder zu erzeugen. Die zeitliche Begrenzung der Felder beinhaltet ihre eigene Dynamik, sowie ihre eigenen physikalischen Effekte [Hei10, Tit13, Kra14, Tit16] und hat einen erheblichen Einfluss auf die Produktionsrate der Teilchenpaare. Dies wird vor allem in der Nähe der Produktionsschwelle $2m$ deutlich [Nou12]. Zudem ist die Phasenraumverteilung der Teilchen im Endzustand entscheidend durch die temporale Struktur der Hintergrundfelder bestimmt.

Aufgrund der Schwierigkeiten hinsichtlich einer experimentellen Untersuchung des Breit-Wheeler-Prozesses wurden in den letzten Jahren Modifikationen des experimentellen Aufbaus vorgeschlagen, welche die Produktionswahrscheinlichkeit mit den zur Verfügung stehenden Laseranlagen erhöhen sollen.

Der dieser Arbeit zugrunde liegende Ansatz ist es, einen hochenergetischen Elektronenstrahl, wie z. B. dem European XFEL (X) in Hamburg, mit einem intensiven optischen Laser (L) zu kombinieren, um die Reaktionen $(X + L) + X' \to e^- e^+$ zu studieren. Somit kann die Energie, die ein Probephoton (X') haben muss, um bis zu drei Größenordnung verringert werden. Der einfache Breit-Wheeler-Prozess $X + X' \to e^- e^+$ ist wegen der geringen Intensität des XFEL stark unterdrückt, und es stellt sich die Frage, wie ein zusätzlicher hochintensiver Laser die Produktionswahrscheinlichkeit der Elektron-Proton Paare verändert.

Grundlage dieser Arbeit bilden die folgenden Veröffentlichungen:

[Nou12] T. Nousch, D. Seipt, B. Kämpfer und A. Titov: „Pair production in short laser pulses near threshold“, Phys. Lett. B 715 , 246 (2012)

[Ott16] A. Otto, T. Nousch, D. Seipt, B. Kämpfer, D. B. Blaschke, A. D. Panferov, S. A. Smolyansky und A. I. Titov: „Pair production by Schwinger and Breit-Wheeler processes in bi-frequent fields“, Plasma Phys. 82 (2016).

[Tit16] A. I. Titov, B. Kämpfer, A. Hosaka, T. Nousch und D. Seipt: „Determination of the carrier envelope phase for short, circularly polarized laser pulses“, Phys. Rev. D 93, 045010 (2016).

[Nou16] T. Nousch, D. Seipt, B. Kämpfer und A. I. Titov: „Spectral caustics in laser assisted Breit–Wheeler process“, Phys. Lett. B 755, 162 (2016).

[Nou16] T. Nousch, A. Otto, D. Seipt, B. Kämpfer, A. I. Titov, D. B. Blaschke, A. D. Panferov und S. A. Smolyansky: „Laser assisted Breit-Wheeler and Schwinger processes“, Proceedings of the International Symposium on New Horizons in Fundamental Physics, FIAS Interdisc. Sci. Ser., 253, Springer International Publishing, (2017).

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert. In Kapitel 2 wird die Paarerzeugung in ultrakurzen Laserpulsen behandelt, wobei sich auf die Publikationen [Nou12, Tit16] bezogen wird. Desweiteren wird in den Kapiteln 3, 4 und 5 der laser-assistierte Breit-Wheeler-Prozess basierend auf den in [Nou16, Ott16, Nou17] veröffentlichten Ergebnissen und weitergehenden Analysen betrachtet. Im Einzelnen wird in Kapitel 3 eine detaillierte Prozessbeschreibung gegeben und es werden die physikalischen, sowie mathematischen Grundlagen beschrieben und erläutert. Das Streumatrixelement für den laser-assistierten Breit-Wheeler-Prozess wird definiert und ausgewertet. Das Kapitel 4 befasst sich mit der Darstellung und Auswertung der numerischen Resultate. Es wird der differentielle Wirkungsquerschnitt der Positronerzeugung für unterschiedliche Parameter betrachtet. In Kapitel 5 werden spektralen Kaustiken eingeführt und somit ein Interpretationsansatz gegeben, um die beobachteten Spektren und Effekte physikalisch einzuordnen und zu deuten. Tiefergehende mathematische Zusammenhänge zu ausgewählten Themen befinden sich im Anhang. In den folgenden Kapiteln werden die mathematischen und physikalischen Konventionen, welche im Anhang 7.1 definiert sind, genutzt.

2 Der Breit-Wheeler-Prozess

In diesem Kapitel wird der Breit-Wheeler-Prozess eingeführt. Zunächst wird eine kurze historische Einleitung gegeben, um dann auf den nicht-linearen Breit-Wheeler-Prozess detaillierter einzugehen. Dieser wird in unendlich ausgedehnten Feldern, sowie in gepulsten Laserfeldern betrachtet und analysiert. Dieses Kapitel soll als Vorbereitung für den später betrachteten laser-assistierten Breit-Wheeler-Prozess dienen.

2.1 Einführung

Inspiriert durch Dirac's Theorie der Quantenmechanik und der Vorhersage von Teilchen-Antiteilchen Annihilation veröffentlichten G. Breit und J. A. Wheeler 1934 ihre Berechnungen zur Umkehrung des Annihilationprozesses, die Paarerzeugung von einem Elektron und einem Positron durch Photon-Photon-Wechselwirkung im Vakuum [Bre34]. Dieser Prozess wird seither in der Literatur als Breit-Wheeler Paarerzeugung bezeichnet, blieb aber lange Zeit eine theoretische Annahme, da noch kein experimenteller Zugang existierte.[1] Eine neue Euphorie unter Wissenschaftlern kam mit der Erfindung des Lasers auf. Durch die neu erschlossenen hochintensiven elektromagnetischen Felder rückten die Phänomene der Wechselwirkung zwischen Materie und Licht in scheinbar greifbare Nähe und konfrontierten die damaligen Theoretiker mit neuen Fragestellungen. Erste theoretische Ansätze und Berechnungen der Multi-Photon-Effekte im starken Laserfeld wurden in [Nar69,Nik64,Nik63,Rei62] veröffentlicht. Der permanente technische Fortschritt in der Laserentwicklung ermöglichte immer intensivere elektromagnetische Felder zu realisieren. Diese werden mittels kurzen Laserpulsen[2] erzeugt und die Beschreibung der entsprechenden Phänomene mit Hilfe von in Raum und Zeit unendlich ausgedehnten elektromagnetischen Wellen ist nicht mehr ausreichend, da insbesondere die zeitliche Begrenzung des Feldes auf den Produktionsprozess einen starken Einfluss hat. Der nicht-lineare Breit-Wheeler-Prozess in kurzen Laserpulsen wurde bereits in früheren Arbeiten des Autors [Nou11, Nou12] und durch weitere Gruppen [Jan13, DP12, Kra11, Hei10] hinlänglich analysiert und ist Grundlage für den laser-

[1] Der Bethe-Heitler-Prozess ist ein zum Breit-Wheeler-Prozess analoger Vorgang, in dem durch die Wechselwirkung eines Kernfeldes mit einem hochenergetischen Photon ein Elektron-Positron-Paar erzeugt wird.
[2] Die Chirped Pulse Amplification (CPA) [Str85] Technik stellt hierbei den Schlüssel dar.

assistierten Breit-Wheeler-Prozess, welcher den Kern dieser Arbeit darstellt. Aus diesem Grunde soll in diesem Kapitel kurz das Vorgehen und die Resultate der vorangegangenen Arbeiten zusammengefasst werden. Ziel ist es ein grundlegendes Verständnis für den Prozess in unendlich ausgedehnten sowie in gepulsten Feldern zu erzeugen.

Die Paarerzeugung durch Photon-Photon-Kollision kann aus der Perspektive der Teilchenphysik als $2 \to 2$ Prozess, $\gamma + \gamma' \to e^- + e^+$, beschrieben werden. Es handelt sich im perturbativen Bereich um einen Schwellenprozess mit der im Eingangskanal zur Verfügung stehenden Energie

$$s \quad = \quad (k' + k)^2 = 2\omega'\omega\,(1 - \cos\theta_{\mathbf{k'k}})\,, \tag{2.1}$$

welche die Schwellenbedingung für die Mandelstam-Variable $s > s_{thr} \equiv 4m^2$ erfüllen muss. Hierbei bezeichnen k und $\omega \sim 1\,\mathrm{eV}$ den Viererimpuls und die Energie eines optischen Photons γ sowie k' und $\omega' > 250\,\mathrm{GeV}$ den Viererimpuls und die Energie eines hochenergetischen Photons γ', welches in entgegengesetzter Richtung (d.h. $\theta_{\mathbf{k'k}} = \pi$) zum optischen Photon γ propagiert. Solche hochenergetischen Photonen lassen sich zwar im Prinzip mittels Compton-Rückstreuung von einem hochenergetischen Elektronenstrahl erzeugen oder kommen in kosmischer Umgebung vor, jedoch im Labor sind geeignete Quellen für 250 GeV Photonen noch relativ selten. Dies ist auch einer der Gründe, weshalb die experimentelle Umsetzung des reinen Breit-Wheeler-Prozesses im Labor eine derartige Herausforderung darstellt.

2.2 Nicht-linearer Breit-Wheeler-Prozess in unendlich ausgedehnten Feldern

In genügend starken Laserfeldern gewinnen Multi-Photonen-Prozesse zunehmend an Bedeutung. In der Literatur wird die Multi-Photonen-Paarerzeugung oft als nicht-linearer Breit-Wheeler-Prozess bezeichnet und schematisch dargestellt als $n\gamma + \gamma' \to e^- + e^+$. In zeitlich unendlich ausgedehnten ebenen Wellen kann n als Anzahl von wechselwirkenden Photonen des Laserfeldes gesehen werden, d.h. es gilt $n \in \mathbb{N}$. Im Allgemeinen handelt es sich aber um den Energietransfer des Laserfelds auf das Elektron-Positron-Paar und es gilt $n \equiv \ell \in \mathbb{R}$. Im oben erwähnten SLAC-Experiment E-144 wurde mindestens $n = 5$ benötigt, um ein Paar zu erzeugen. Vergleichsweise müsste in einem experimentellen Aufbau mit rein optischen Lasern[3] $n > 10^{11}$ sein, um die benötigte Schwellenenergie zu erreichen. Diese starken nicht-linearen Multi-Photon-Effekte sind nur mit äußerst intensiven Laserfeldern möglich, welche derzeit noch nicht im Labor zur Verfügung stehen.

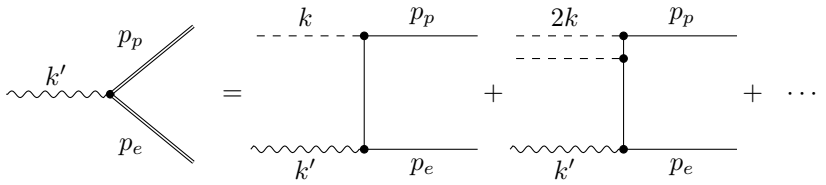


Abbildung 2.1: Der nicht-lineare Breit-Wheeler-Prozess im Furry-Bild (linke Seite der Gleichung) und dessen Zerlegung in einzelne Feynmangraphen in einer perturbativen Beschreibung (rechte Seite der Gleichung).

Der nicht-lineare Breit-Wheeler-Prozess ist in der Abbildung 2.1 diagrammatisch dargestellt. Auf der linken Seite der Gleichung wird das kompakte Furry-Bild verwendet. Dabei symbolisieren die Doppellinien das auslaufende Elektron bzw. Positron, welches im Hintergrundfeld des Lasers propagiert. Auf der rechten Seite ist die Entsprechung zum Furry-Bild durch die einzelnen Feynman-Graphen in einer perturbativen Beschreibung zu sehen. Das Elektron bzw. Positron hat den Vierimpuls p bzw. p' (durchgezogenen Linien), das Probephoton hat den Vierimpuls k' (gewellte Linien) und die Laserphotonen haben die Vierimpulse k (gestrichelte Linien). Die zur Verfügung stehende Schwerpunktenergie im Multi-Photon-Prozess berechnet sich durch

$$s_n = \left(k' + nk\right)^2 \tag{2.2}$$

und ist davon abhängig, wie viele Laserphotonen am Prozess beteiligt sind.

[3] Für $\omega \sim 1\text{eV}$ und $\omega' \sim 1\text{eV}$.

Eine der entscheidenden Größen, um den Prozess zu bewerten, ist auch hier die Produktionswahrscheinlichkeit eines Elektron-Positron-Paares bzw. der daraus folgende Wirkungsquerschnitt. Als erster Schritt muss somit eine der beiden Seiten in Abbildung 2.1 mathematisch ausgewertet werden. Dafür bietet es sich an, die Diagramme in Matrixelemente zu übersetzen und anschließend auszuwerten. In dieser Arbeit wird dieser Formalismus auf das Furry-Bild (linke Seite in Abbildung 2.1) angewendet, da sich damit eine kompakte und elegante Beschreibung des Prozesses verbindet. Ein weiterer Ansatz ist es, die Diagramme mit Hilfe des Pfadintegralformalismuses auszuwerten. Die grundlegende Systematik und praktische Beispiele für diesen Formalismus finden sich unter anderem in [Vai92, Fra81, Chi79].

Beim nicht-linearen Breit-Wheeler-Prozess treten zwei maßgebliche Effekte auf, welche durch das intensive Laserfeld entstehen und beim gewöhnlichen Breit-Wheeler-Prozess nicht vorkommen. Zum einen kann dem erzeugten Elektron bzw. Positron eine effektive Masse $m_\star$ zugeschrieben werden,

$$m_\star = m\sqrt{1+\frac{a_0^2}{2}} \tag{2.3}$$

wobei

$$a_0 = \frac{|e|A_0}{m} \tag{2.4}$$

in unendlich ausgedehnten Feldern proportional zu dem bereits in Kapitel 1 angesprochenen dimensionslose Intensitätsparameter η_0 des Laserfeldes ist: $a_0 = \sqrt{2}\eta_0$. Hierbei bezeichnet A_0 die konstante Amplitude des Vierervektorpotentials A_μ vom elektrischen Feld E mit der zentralen Kreisfrequenz ω. Die gewählte Definition von a_0 hat den Vorteil, dass sie auch im unten betrachteten Fall gepulster Felder zeitunabhängig und Lorentz-invariant bleibt [Hei09].

Aus der klassischen Sicht reagiert ein geladenes Teilchen auf ein starkes elektromagnetisches Wellenfeld mit schnellen, transversalen Oszillationen entlang des elektrischen Feldes. Das magnetische Feld bewirkt durch die Lorentz-Kraft eine Bewegung in Propagationsrichtung des Pulses, so dass insgesamt eine „figure-8“ Bewegung entsteht. Dadurch verschiebt sich der Impuls des Teilchens, gemittelt über eine Laserperiode, zu einem effektiven Impuls, welcher oft als Quasiimpuls bezeichnet wird [Lan82]. Dem Quasiimplus kann folglich eine effektive Masse zugeordnet werden. Für eine detaillierte Beschreibung des Quasiimpluses und der effektiven Masse soll hier auf weiterführende Literatur [Nou12, Nou11, Heb11, Hei10] verwiesen werden. Als Resultat dieser Massenverschiebung hin zur effektiven Masse verändert sich auch die Bedingung für die zu erreichende Schwellenenergie von $s > s_{thr}$ zu $s > s_{thr}^\star \equiv 4m_\star^2$, was zu einer Verringerung der Paarerzeugungswahrscheinlichkeit in starken

Feldern führt. Dementgegen wirkt die Öffnung von Multi-Photon-Kanälen. Dies bedeutet, dass mit größer werdenden Werten von a_0 immer mehr Laserphotonen (Harmonische) am Erzeugungsprozess beteiligt sein können und ihre Energie zum Erreichen der Schwelle zur Verfügung steht. Der n-te Photon-Kanal unterliegt der Bedingung $s > s_n^\star \equiv 4m_\star^2/n$. Folglich können auch bei Energien unterhalb der perturbativen Breit-Wheeler-Schwelle s_{thr} durch die höheren Harmonischen Paare erzeugt werden. Dies wird im weiteren Verlauf der Arbeit als Subschwellen-Produktion bezeichnet. Die Mindestanzahl n_0 an benötigten Laserphotonen, um bei einer bestimmten Energie s im Eingangskanal Paare zu erzeugen, ist die kleinste natürliche Zahl größer als $4m_\star^2/s$. Dementsprechend sind alle Kanäle mit $n < n_0$ geschlossen. Wie stark die Multi-Photonen-Effekte sind, hängt unter anderem von der Intensität des Hintergrundfeldes ab. Für geringe Intensitäten, $a_0 \ll 1$ (perturbatives Regime) sind die höheren Harmonischen mit einen Faktor von a_0^{2n} unterdrückt, sodass die Produktion von Paaren bei Energien kurz unterhalb der Breit-Wheeler-Schwelle s_{thr} abrupt abbricht.

Der Wirkungsquerschnitt der Paarproduktion durch den nicht-linearen Breit-Wheeler-Prozess mittels einem unpolarisierten Probephoton γ' in einer zirkular polarisierten ebenen Welle [4] kann durch

$$\sigma(s) = \sum_{n \geq n_0}^{\infty} \sigma_n(s) \tag{2.5}$$

mit

$$\begin{aligned} \sigma_n(s) &= \frac{2\pi\alpha^2}{s a_0^2} \int_1^{u_n^\star} \frac{du}{u\sqrt{u(u-1)}} \\ &\times \left\{ 4J_n^2(z) - a_0^2(2u-1)\left(J_{n-1}^2(z) - J_{n+1}^2(z) - 2J_n^2(z)\right)\right\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

ausgedrückt werden [Nik63, Nik64]. Hierbei ist $\alpha = 1/137.035985\,(61)$ die Feinstrukturkonstante, $u_n^\star = n\frac{s}{4m_\star^2}$, $z = a_0\sqrt{2u\,(u_n^\star - u)}/\left(u_1\sqrt{1+a_0^2/2}\right)$ und J_n sind Bessel-Funktionen erster Art. Hier und im Folgendem ist die Schwerpunktsenergie s durch (2.1) definiert.

[4] Für eine Diskussion der linearen Polarisation siehe [Nou12].

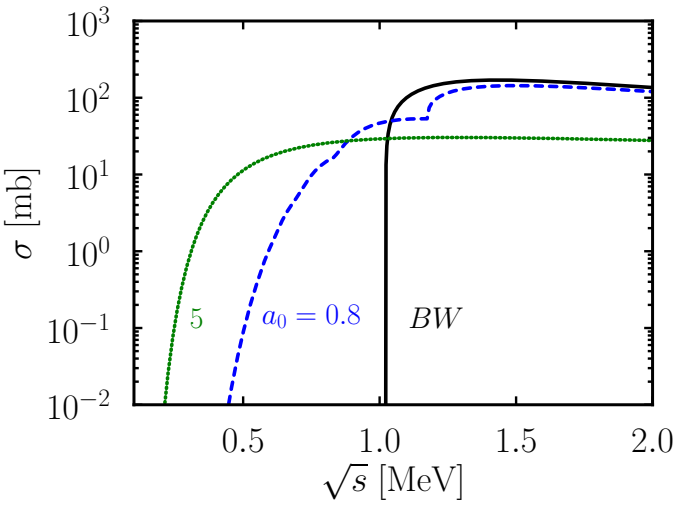


Abbildung 2.2: Totaler Wirkungsquerschnitt σ in Abhängigkeit von der Gesamtenergie $\sqrt{s}$ (definiert in Gl. (2.1)) des nicht-linearen Breit-Wheeler-Prozesses in einem zeitlich und räumlich unendlich ausgedehnten Hintergrundfeld. Die schwarze Kurve entspricht dem perturbativen Breit-Wheeler-Prozess ohne Hintergrundfeld, während die blau-gestrichelte und die grün-gepunktete Kurve dem nicht-linearen Breit-Wheeler-Prozess für Werte von $a_0 = 0.8$ bzw. 5 entsprechen.

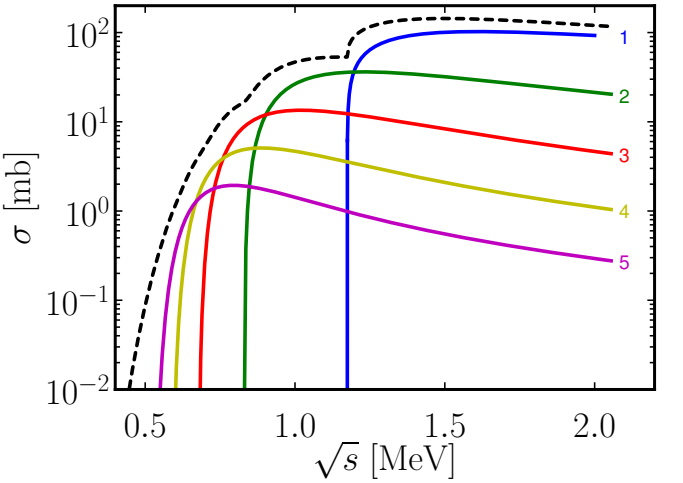


Abbildung 2.3: Wie in Abbildung 2.2, aber mit den Beiträgen der einzelnen Harmonischen (farbige Kurven) zum totalen Wirkungsquerschnitt (schwarz-gestrichelte Kurve, $n = 1, ..., 5$) für $a_0 = 0.8$.

In der Abbildung 2.2 ist der totale Wirkungsquerschnitt σ als Funktion der Energie $\sqrt{s}$ für zwei Werte von a_0 abgebildet. Oberhalb der Breit-Wheeler-Schwelle s_{thr} sinkt der Wirkungsquerschnitt mit steigenden Werten von a_0 etwas ab. Dies ist auf die oben erwähnte effektive Masse und die damit verbundene Verschiebung der Produktionsschwelle zu $s^\star_{thr}$

zurückzuführen. Für Intensitäten $a_0 \gtrsim 1$ ist auch eine nicht vernachlässigbare Subschwellenproduktion erkennbar. Dies lässt sich auf die Öffnung der Multi-Photonen Kanäle zurückführen. Die Abstufungen der blau-gestrichelten Kurve in Abbildung 2.2 weisen bei sinkenden Werten von $\sqrt{s}$ auf die Schließung der einzelnen Kanäle hin. Mit steigendem a_0 sind diese Abstufungen nicht mehr erkennbar (siehe grüne Kurve), da die einzelnen Schwellenenergien $s_n^\star$ der Photonenkanäle zu dicht beieinander liegen.

Eine genauere Aufschlüsselung der Beiträge zum totalen Wirkungsquerschnitt der einzelnen Kanäle ist in Abbildung 2.3 für einen Wert von $a_0 = 0.8$ zu sehen. Hierbei sind die ersten fünf Harmonischen dargestellt. Oberhalb der perturbativen Breit-Wheeler-Schwelle s_{thr} ist die erste Harmonische (blaue Kurve) dominierend. Mit sinkendem $\sqrt{s}$ schließt sich der Kanal der ersten Harmonischen, und die zweite Harmonische (grüne Kurve) dominiert bis zu deren Schwellenenergie $s_2^\star$. Ein Überblick über den Wirkungsquerschnitt der Positronenerzeugung in Abhängigkeit von $\sqrt{s}$ und a_0 ist in Abbildung 2.4 als Contourplot zu sehen.

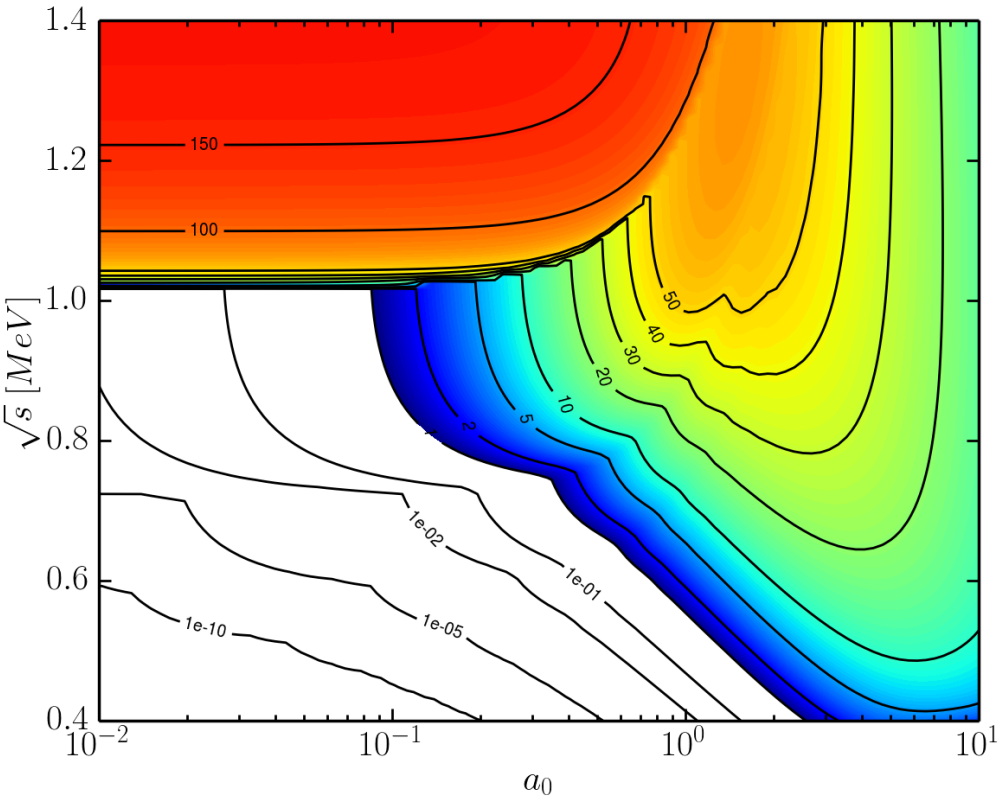


Abbildung 2.4: Contourplot des totalen Wirkungsquerschnittes σ des Multi-Photonen Breit-Wheeler-Prozesses in Einheiten von mb für ein räumlich und zeitlich unendlich ausgedehntes Hintergrundfeld in Abhängigkeit von der Energie $\sqrt{s}$ und dem dimensionslosen Intensitätsparameter a_0. Im farbigen Bereich ist $\sigma \geq 1$mb.

In dem farbigen Bereich ist der Wirkungsquerschnitt größer als 1mb. Im Bereich $a_0 < 1$ fällt der Wirkungsquerschnitt als Funktion von $\sqrt{s}$ unterhalb der Schwelle von $\sqrt{s} = 2m$ abrupt ab, während für $a_0 > 1$ auch unterhalb der Schwelle signifikante Paarproduktion möglich ist. Die Kurven in den Abbildungen 2.2 und 2.3 stellen Schnitte für $a_0 =$ konst. durch diesen Contourplot dar.

Dies soll als kurzer Einblick in den nicht-linearen Breit-Wheeler-Prozess in unendlich ausgedehnten Feldern genügen. Im nächsten Abschnitt werden gepulste Felder betrachtet und die Unterschiede zu dem hier behandelten Fall deutlich gemacht.

2.3 Nicht-linearer Breit-Wheeler-Prozess in gepulsten Feldern

In heutigen Experimenten werden starke Laserfelder, d.h. Felder mit hohen Intensitäten im Fokalpunkt, mittels CPA generiert. In kurzen Pulsen können somit Intensitäten von bis zu 10^{22} W/cm^2 erreicht werden (siehe z.B. das Lasersystem HERCULES [HER17] in Michigan, USA oder Polaris in Jena [POL17]). Dies bedeutet aber auch, dass für die Untersuchung von nicht-linearen Effekten von der Approximation zeitlich unendlich ausgedehnter Felder zu gepulsten Feldern übergegangen werden muss, da die Laserpulse nur einige Femtosekunden[5] lang sind. Folglich wird in diesem Abschnitt die Auswirkung der zeitlich endlichen Pulse auf den Paarerzeugungsprozess betrachtet. Obwohl fokussierte Laserstrahlen keine ebenfrontigen Wellen darstellen soll hier die Approximation durch ebene Wellen beibehalten werden. Dies hat den Vorteil, dass mit der Volkov-Lösung eine relativ einfache und kompakte Darstellung der Elektronen- bzw. Positronen-Wellenfunktionen möglich ist, die den Formalismus ungemein vereinfacht. Die Behandlung räumlich fokussierter Strahlen und der zugeordneten Elektronen- bzw. Positronen-Wellenfunktionen ist deutlich komplizierter und numerisch aufwendiger und wird deshalb hier nicht mit einbezogen. Erste erfolgreiche Ansätze zu stark fokussierten Strahlen sind z.B. in [DP16] publiziert.

Dieser Abschnitt ist ebenfalls eine Zusammenfassung des Themengebietes und soll als Einführung in die kommenden Kapitel dienen. Detaillierte Studien zu diesen Thema sind in [Kra12, Jan15, Ild15, Nou12, Tan13, Tit13, VC13] zu finden.

2.3.1 Mathematische Vorbereitung

Die mathematische Entwicklung der Streumatrix soll in diesem Abschnitt zunächst in groben Schritten umrissen werden. Das Vorgehen in [Nou12] dient dabei als Orientierung. Eine tiefergehende Analyse der Streumatrix des Laser-assistierten Breit-Wheeler-Prozesses ist im Kapitel 3 ausgeführt. Die hier präsentierten Ergebnisse eignen sich aber dennoch gut, um beide Strukturen miteinander zu vergleichen und auf Unterschiede hin zu untersuchen.

Die Breit-Wheeler-Paarerzeugung wird im Furry-Bild als Zerfall eines Probe-Photons γ' mit Viererimpuls k' und Vierervektorpolarisationsvektor ϵ' zu einem Elektron-Positron-Paar $e^+(\gamma) + e^-(\gamma)$ in einem nicht-quantisierten Hintergrundfeld verstanden. Hierbei symbolisieren $e^\pm(\gamma)$ die Volkov-Zustände im Laser, welche die Wechselwirkung mit dem Laserfeld beinhalten.

[5] Typische Pulsdauern sind 15 - 30 fs.

2.3.1.1 Das Hintergrundfeld

Eine zirkular polarisierte, ebene Welle wird durch den reellen Vierervektor

$$A^\mu = \frac{ma_0}{\sqrt{2}e} g(\phi) (\epsilon_1^\mu \cos\phi + \epsilon_2^\mu \sin\phi) \tag{2.7}$$

mit den Polarisationsvektoren ϵ_1 und ϵ_2 beschrieben. Die Polarisationsvektoren stehen senkrecht aufeinander, $\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 = 0$, und haben denselben Betrag, $\epsilon_1^2 = \epsilon_2^2 = \epsilon^2$. Eine komplexe Darstellung des Potentials ist

$$A^\mu = \frac{ma_0}{2\sqrt{2}e} g(\phi) \left(\epsilon_-^\mu \mathrm{e}^{i\phi} + \epsilon_+^\mu \mathrm{e}^{-i\phi}\right) \tag{2.8}$$

mit $\epsilon_\pm^\mu = \epsilon_1^\mu \pm \epsilon_2^\mu$. Das Vektorpotential wird durch die einhüllende Funktion $g(\phi)$ moduliert und hängt ausschließlich durch die invariante Phase $\phi = k \cdot x$ von Raum und Zeit ab, wobei k der Vierer-Wellenvektor des Laserfeldes ist. Das Vektorpotential erfüllt die Lorenz-Konvention $\partial_\mu A^\mu = k_\mu \frac{dA^\mu}{d\phi} = 0$ und erfüllt somit auch die Bedingung $k \cdot A = k \cdot \epsilon = 0$. Für die hier gezeigten Beispiele wird die Funktion

$$g(\phi) = \cos^2\left(\frac{\phi}{2N}\right) \tag{2.9}$$

als Einhüllende gewählt. Die Funktion g ist normiert, $g(0) = 1$, und auf den Bereich $|\phi| \leq \pi N$ beschränkt. Für $|\phi| > \pi N$ gilt $g(\phi) = 0$. Hierbei ist N die Anzahl der Laseroszillationen in einem Puls und somit proportional zur Pulslänge τ. Bei unendlich ausgedehnten Laserfeldern wäre $g = 1$. Somit liegt der gesamte physikalische und mathematische Unterschied zwischen endlichen und unendlichen Feldern in dieser Hüllfunktion.

2.3.1.2 Das Matrixelement

Aufgrund der endlichen Pulsdauer lässt sich die Streumatrix

$$S = -ie \int d^4x \bar{\Psi}_{p_e}(x) \not{\epsilon}' \frac{\mathrm{e}^{-ik'\cdot x}}{\sqrt{2\omega'}} \Psi_{-p_p}(x) \tag{2.10}$$

nicht mehr mit einer Fourier-Zerlegung entwickeln.[6] In (2.10) bezeichnen $\bar{\Psi}_{p_e}$ und Ψ_{p_p} die Volkov-Zustände des auslaufenden Elektrons und Positrons mit den jeweiligen Viererimpulsen p_e und p_p. Die Volkov-Zustände sind im Anhang 7.3 beschrieben und werden im Folgenden mit dem Potential (2.8) verwendet.

[6] In der unendlichen ebenen Welle ist dies noch möglich, wobei die Bessel-Funktionen in (2.6) als Fourier-Koeffizienten entstehen.

2.3.1.3 Lichtkegelkoordinaten

Um zu einer kompakten Darstellung der Streumatrix zu gelangen, werden die Lichtkegelkoordinaten $x = (x_+, x_-, \boldsymbol{x}_\perp)$ mit

$$x_\pm = x^0 \pm x^3, \tag{2.11}$$

$$\mathbf{x}_\perp = \left(x^1, x^2\right) \tag{2.12}$$

eingeführt. Das Skalarprodukt ergibt sich dementsprechend als

$$x^\mu y_\mu = \frac{1}{2}\left(x_+ y_- + x_- y_+\right) - \mathbf{x}_\perp \cdot \mathbf{y}_\perp. \tag{2.13}$$

Die Minkowski-Metrik $g_{\mu\nu}$ in Lichtkegelkoordinaten ist gegeben durch den Ausdruck

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Die Orientierung des Koordinatensystems wird durch $k = (\omega, 0, 0, -\omega)$ festgelegt. In Lichtkegelkoordinaten ausgedrückt ergibt sich für die Darstellung des Wellenvektors

$$k_- = 2\omega, \tag{2.15}$$

$$k_{+,\perp} = 0. \tag{2.16}$$

Die invariante Laserphase ist damit

$$\phi = \frac{1}{2} k_- x_+, \tag{2.17}$$

und für das infinitesimale Raumelement ergibt sich der Zusammenhang

$$\sqrt{-g} d^4x = \frac{1}{k_-} dx_- d^2\mathbf{x}_\perp d\phi. \tag{2.18}$$

2.3.1.4 Auswertung des Matrixelements

Ein großer Vorteil der Lichtkegelkoordinaten ist, dass die einzige nicht-triviale Abhängigkeit der Streumatrix (2.10) die der Laserphase ϕ ist. Folglich kann über die Komponenten x_- und

$\boldsymbol{x}_\perp$ integriert werden und man erhält den Ausdruck

$$S = \frac{-ie}{\sqrt{2k_0' 2p_{p0} 2p_{e0}}} (2\pi)^4 \int \frac{d\ell}{2\pi} \delta^{(4)} \left(p_p + p_e - k' - \ell k\right) \mathcal{M}(\ell), \tag{2.19}$$

$$\mathcal{M}(\ell) = \mathcal{J}_0 B_0^0(\ell) + \mathcal{J}_{+1} B_{+1}^1(\ell) + \mathcal{J}_{-1} B_{-1}^1(\ell) + \mathcal{J}_2 B_0^2(\ell) \tag{2.20}$$

mit den Dirac-Strukturen

$$\mathcal{J}_0 = \bar{u}(p_e) \not{\epsilon}' v(p_p), \tag{2.21}$$

$$\mathcal{J}_{\pm 1} = \frac{m a_0}{2} \bar{u}(p_e) \left(\frac{\not{\epsilon}_\mp \not{k} \not{\epsilon}'}{k \cdot p_e} - \frac{\not{\epsilon}' \not{k} \not{\epsilon}_\mp}{k \cdot p_p} \right) v(p_p), \tag{2.22}$$

$$\mathcal{J}_2 = -\frac{m^2 a_0^2}{4} \frac{k \cdot \epsilon'}{(k \cdot p_p)(k \cdot p_e)} \bar{u}(p_e) \not{k} v(p_p) \tag{2.23}$$

und den vier Phasenintegralen B_0^0, B_{-1}^1, B_1^1 und B_0^2, die mit den Funktionen

$$f_p(\phi) = \frac{1}{2p \cdot k} \int_o^\phi \mathrm{d}\phi' \left[2ep \cdot A\left(\phi'\right) - e^2 A^2\left(\phi'\right) \right] \tag{2.24}$$

kompakt notiert werden können als

$$B_m^j(\ell) = \int d\phi g^j(\phi) \exp\left\{ i \left((\ell + m)\phi - f_{p_e}(\phi) + f_{-p_p}(\phi) \right) \right\}. \tag{2.25}$$

Das Integral $B_0^0(\ell)$ enthält keine Einhüllende $g(\phi)$ vor der Exponentialfunktion. Es ist daher unbestimmt und muss regularisiert werden. Beispiele für eine Regularisierung finden sich in [Nou11]. Die Variable ℓ kann über die Energie-Impuls Erhaltung in (2.19) als

$$\ell \equiv \ell_0 = \frac{1}{k_-} \left(p_{e-} + p_{p-} - k_-' \right) \tag{2.26}$$

fixiert werden. Multipliziert man ℓ mit der Energie des Laserfeldes so erhält man den Energieübertrag $\omega\ell$ vom Feld auf das erzeugte Paar. Während im unendlich ausgedehnten Feld der Parameter n noch diskret war und als Anzahl der wechselwirkenden Laserphotonen interpretiert werden konnte, ist ℓ im gepulsten Feld kontinuierlich.

2.3.1.5 Produktionswahrscheinlichkeit

Über das Quadrat des Betrages der Streumatrix gelangt man mit $\alpha = e^2/(4\pi)$ zur differentiellen Paarerzeugungswahrscheinlichkeit

$$d^3W = \frac{\alpha}{8\pi^2 (k \cdot k') (k \cdot p_e)} |\mathcal{M}|^2 p_\perp dp_\perp dy d\varphi. \tag{2.27}$$

Hierfür wurde die Rapidität

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{p_p^0 + p_p^3}{p_p^0 - p_p^3} = \ln \frac{p_{p+}}{p_{p-}} \tag{2.28}$$

und der transversale Impuls des Positrons (ohne Index p)

$$p_\perp = \sqrt{p_{p1}^2 + p_{p2}^2} \tag{2.29}$$

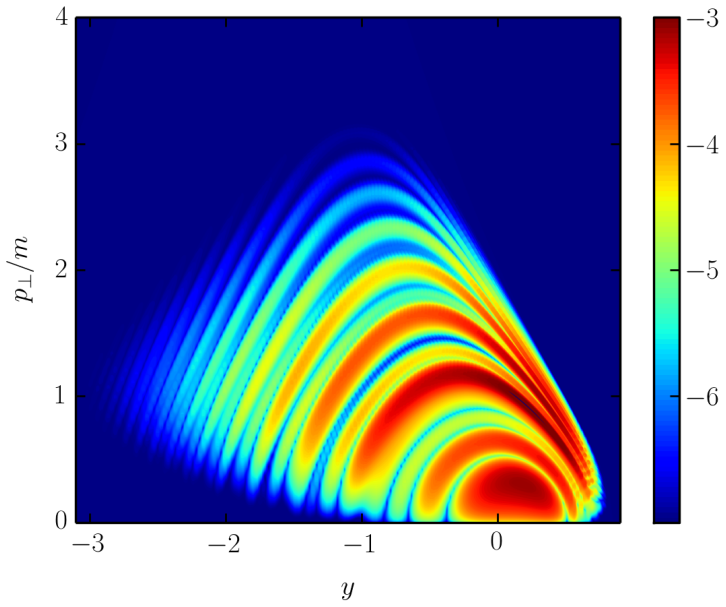
eingeführt, um den Phasenraum des Positrons im Endzustand zu parametrisieren (siehe auch Anhang 7.4 für die Definitionen geeigneter kinematischer Variablen). Aufgrund des endlichen Laserpulses können die beiden Variablen y und $p_\perp$ als unabhängig voneinander betrachtet werden. Mit Hilfe der transversalen Masse $m_\perp = \sqrt{m^2 + p_\perp^2}$ kann der Zusammenhang der drei Variablen y, $p_\perp$ und ℓ durch

$$m_\perp (y, \ell) = \frac{2\ell\omega}{\ell \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}} \tag{2.30}$$

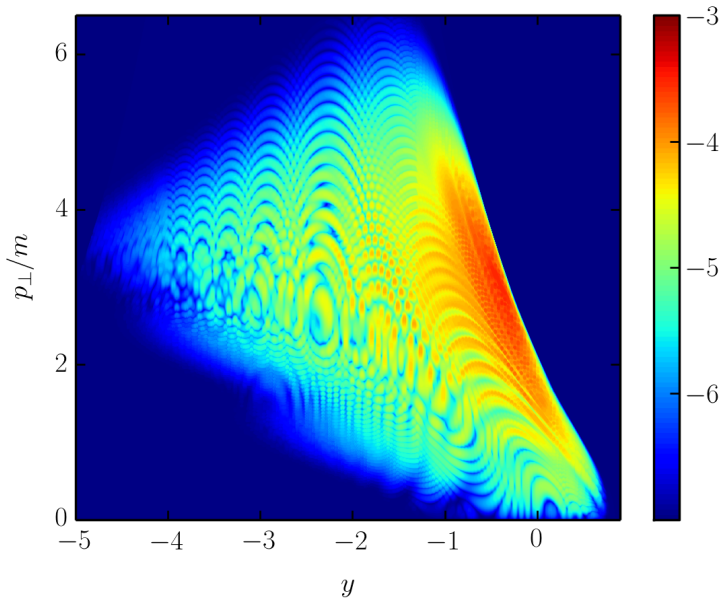
beschrieben werden. Im Fall der zeitlich unendlich ausgedehnten ebenen Welle, d.h. für $g(\phi) \to 1$, kollabieren die Integrale $B_m^j(\ell)$ zu einem „δ-Kamm“ und das Integral $\int \frac{d\ell}{2\pi}$ wandelt sich in eine Summe über die Harmonischen $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\ell \to \ell_n = n - \frac{m^2 a_0^2}{2} \left(\frac{1}{k \cdot p_p} - \frac{1}{k \cdot p_e} \right). \tag{2.31}$$

Setzt man ℓ_n in $m_\perp (y, \ell_n)$ ein und löst dies nach $p_\perp$ auf, so erhält man eine Relation $p_\perp (y)$, welche die n-te Harmonische bestimmt. Da der Laser zirkular polarisiert ist, ergibt bei einem genügend langen Puls die Integration über den Azimutalwinkel φ des Positrons einen Faktor 2π, sodass $d^3W = 2\pi d^2W$ gilt. Bei ultrakurzen Pulsen mit $N < 1$ ist die Symmetrie in φ auch bei zirkularer Polarisation nicht gegeben und eine numerische Integration über φ wird notwendig [Nou11].



(a)



(b)

Abbildung 2.5: Contourplot der Phasenraumverteilung $\log(d\sigma/dp_\perp dy)$ des Positrons in Einheiten von 1/MeV über einer von y (s. Gl. 2.28) und $p_\perp$(s. Gl. 2.29) aufgespannten Ebene. Parameter: $\sqrt{s} = 1.2$ MeV, $N = 8$. Oben: $a_0 = 1$, Unten: $a_L = 5$.

2.3.2 Der Wirkungsquerschnitt

Der differentielle Wirkungsquerschnitt steht mit der differentiellen Produktionswahrscheinlichkeit (2.27) vermöge

$$d^2\sigma = \frac{d^2W}{\rho_\gamma J} \tag{2.32}$$

im Zusammenhang. Dabei symbolisiert $J = k \cdot k' / (k_0 k'_0)$ den Teilchenstrom der einlaufenden Photonen und es gilt $J = 2$ im Fall der hier behandelten „head-on“ Kollisionen, für die $\theta_{kk'} = \pi$ gilt. Die Teilchendichte der Laserphotonen ρ_γ kann für nicht zu kurze Pulse durch

$$\rho_\gamma = \frac{m^2 a_0^2}{2e^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi g^2(\phi) \tag{2.33}$$

approximiert werden. Diese Normierung stellt sicher, dass der Wirkungsquerschnitt sich unabhängig von der Dauer des Laserpulses immer auf dieselbe Energie bezieht.

In den Abbildungen 2.5a und 2.5b sind beispielhaft für zwei verschiedene Werte von a_0 differentielle Wirkungsquerschnitte (2.32) als Contourplot über der $(y, p_\perp)$-Ebene zu sehen. Die gepulste Welle ist nicht mehr monochromatisch, wie es bei der zeitlich unendlich ausgedehnten Welle der Fall ist. Die Photonen im Laserfeld unterliegen in Abhängigkeit von der Hüllfunktion $g(\phi)$ einer Frequenzverteilung endlicher Breite. Selbiges gilt für den Impuls der Photonen. Daraus folgt, dass bei einer monochromatischen Welle die Verteilung zu einer Delta-Distribution kollabiert, das Resultat für einen gepulsten Laserstrahl hingegen ein ausgedehntes Spektrum ist, welches durch die Verteilung der Energie der Laserphotonen verursacht wird. Für kleine Werte von a_0 sind aufgrund der geringen Laserintensität die Multi-Photonen-Effekte stark unterdrückt. Effekte höherer Harmonischer sind, wie bei der monochromatischen Welle, proportional zu $a_0^{2\ell}$. Mit steigenden Werten von a_0, nehmen auch die Multi-Photonen-Effekte zu. In Abbildung 2.5a ($a_0 = 1$) deuten die voneinander getrennten, roten Bereiche die Harmonischen aus dem monochromatischen Fall an. Diese Bereiche überlappen für positive Werte von y und sind dort schon nicht mehr voneinander zu unterscheiden. Außerdem entstehen kleinere Zwischenmaxima deren Form und Position stark von der Einhüllenden $g(\phi)$ abhängen. Geht man zu noch größeren Werten von a_0, wie z.B. in Abbildung 2.5b, wird ein immer größerer Energie- und Impulsaustausch zwischen Laserpuls und erzeugtem Elektron-Positron-Paar ermöglicht und führt somit zu relevanten Wirkungsquerschnitten bei größeren Werten von $p_\perp$. Die Analogie zu den monochromatischen Harmonischen ist kaum noch zu erkennen. Überlappeffekte und der Einfluss der Einhüllenden sind für die ausgeprägten Strukturen und Substrukturen verantwortlich. Dies soll an dieser Stelle als Beispiel für die differentiellen Wirkungsquerschnitte genügen. Für eine

weitergehenden Studie siehe u.a. [Nou11].

Zum Abschluss des Kapitels soll der totale Wirkungsquerschnitt σ betrachtet werden. Dieser kann durch Integration von (2.32) berechnet werden. In Abbildung 2.6 ist ein Contourplot von σ in Abhängigkeit von den Parametern $\sqrt{s}$ und a_0 abgebildet. Ein interessanter Aspekt hierbei ist, dass auch für kleine Werte von a_0 ein Wirkungsquerschnitt von $\sigma > 1\text{mb}$ (farbige Fläche in Abbildung 2.6) im Subschwellenbereich ($\sqrt{s} \lesssim 1.022$ MeV) existiert. Gerade für kleine Werte von a_0 ist dieser Effekt sehr signifikant. Eine ausführliche Analyse zu diesem Effekt findet sich in [Tit12]. Zum Vergleich mit der monochromatischen Welle kann die Abbildung 2.4 nochmals betrachtet werden. Hierbei fällt die Paarproduktion im Subschwellenbereich am deutlichsten auf. Die stark gezackten Konturlinien, sowie die inselartigen Strukturen der Kontur, welche für große Werte von a_0 in Abbildung 2.6 auftreten, sind auf numerische Ungenauigkeiten zurück zu führen, welche sich nur mit enormen zeitlichen Aufwand korrigieren ließen. Im Unterschied zum monochromatischen Fall ist der Beitrag der n Harmonischen nicht mehr strikt durch $s \geq s_n$ begrenzt, sondern es existieren auch Beiträge der jeweiligen Harmonischen für $s < s_n$.

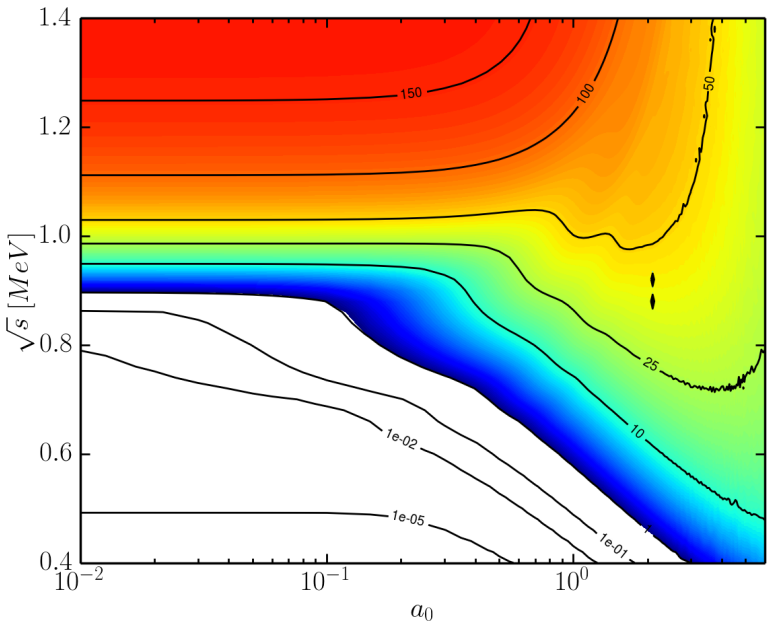


Abbildung 2.6: Contourplot des totalen Wirkungsquerschnittes σ in Einheiten von mb des nicht-linearen Breit-Wheeler-Prozesses in einem zirkular polarisierten, gepulsten Hintergrundfeld wie in (3.14) definiert mit $N = 4$ in Abhängigkeit von der Energie $\sqrt{s}$ und dem dimensionslosen Intensitätsparameter a_0.

3 Laser-assistierter Breit-Wheeler-Prozess

Nachdem im Kapitel 2 der perturbative sowie der nicht-lineare Breit-Wheeler-Prozess betrachtet wurde, soll in den folgenden Kapiteln der laser-assistierte Breit-Wheeler-Prozess analysiert werden. Mit diesem Begriff wird in dieser Arbeit der bereits im Kapitel 1 angesprochene Prozess $X' + (L + X) \to e^+e^-$ verknüpft. Ziel ist es, das Verständnis für derartige bichromatische Prozesse zu erweitern und Anregungen für mögliche experimentelle Implementationen in Hinblick auf moderne Lasersysteme, wie z.B. am European XFEL in Hamburg, zu geben. Eine wichtige Fragestellung ist dabei, wie ein assistierender Laser den Paarerzeugungsprozess beeinflusst und ob eventuell eine erhöhte Produktionsrate in gewissen Bereichen des Phasenraums des asymptotischen Positrons zu erwarten ist. Eine hervorgehobene Rolle kommt dabei den charakteristischen Parametern des Prozesses zuteil. Der bereits im Kapitel 2 eingeführte klassische, zeitunabhängige Intensitätsparameter a_0 (2.4) gibt an, in welchem Regime sich das Laserfeld befindet [DP12]. Mit der in dieser Arbeit verwendeten Definition ist a_0 eich- und Lorentz-invariant und entspricht dem Reziproken des in der Festkörperphysik verwendeten Keldysh-Parameters [Hei09]. Ist der Wert $a_0 > 1$ wird die transversale Bewegung eines Elektrons im Feld relativistisch und man spricht vom relativistischen Regime. Demzufolge ist das nicht-relativistische Regime durch $a_0 < 1$ gegeben.

Ein weiterer wichtiger Parameter, welcher die Paarproduktion klassifiziert, ist der nicht-lineare Quantenparameter [Nik67, Nik63, DP12, Meu15]

$$\chi_\gamma = \frac{1}{2} a_0 \frac{s_1}{s_{thr}}. \tag{3.1}$$

Dieser kombiniert a_0 mit der Kinematik des Prozesses. Die Produktionswahrscheinlichkeit ist für $\chi_\gamma \ll 1$ exponentiell unterdrückt: $W \sim e^{-8/3\chi_\gamma}$ [Rei62]. Dies ist dieselbe funktionale Abhängigkeit vom elektrischen Feld wie bei der Schwinger Paarproduktion. Für $a_0 \lesssim 1$ und $\chi_\gamma \lesssim 1$ tragen nur wenige Photonenkanäle zur Produktionswahrscheinlichkeit bei und der Beitrag des n-ten offenen Kanals kann mit $W_n \sim a_0^{2n}$ approximiert werden. Für $a_0 \gg 1$ und $\chi_\gamma \lesssim 1$, beispielsweise wenn der $2 \to 2$ Prozess weit unterhalb der Schwelle liegt und viele Laserphotonen am Prozess beteiligt sind, verhält sich die Wahrscheinlichkeit semi-klassisch. Wegen der relativ kleinen Frequenz eines optischen Lasers $\omega_L = \mathcal{O}(1\,\mathrm{eV})$ muss die Frequenz des kollidierenden Probephotons sehr groß gewählt werden, um ein χ_γ von ausreichender

Größe zu erhalten. Dieser Fall wurde im Kapitel 2 besprochen. Ein Problem eines solchen Aufbaus liegt in der Erzeugung und Bereitstellung der hochenergetischen Photonen. Diese kommen in kosmischer Umgebung zwar häufig vor, stehen im Labor aber nur sehr selten zur Verfügung. Um dieses Problem zu umgehen, könnte ein rein optischer Laser-Laser Aufbau verwendet werden. Hierbei kann eine relevante Breit-Wheeler-Paarproduktionsrate aber nur mit ultrahohen Intensitäten in der Größenordnung des Sauter-Schwinger-Limes ($4 \times 10^{29}\mathrm{W/cm^2}$) erreicht werden. Dies ist mit den derzeit zur Verfügung stehenden Lasersystemen nicht möglich und es stellt sich die Frage, ob solche hohen Laserintensitäten überhaupt erreichbar sind, da aufgrund von QED-Kaskaden das Laserfeld substanziell abgeschwächt werden könnte [Elk11, Fed10, Sok10]. Es ist naheliegend, vom rein optischen Laser-Laser-Aufbau abzusehen und Quellen für höher energetische Photonen zu betrachten. Mit der Entwicklung des X-ray freien Elektronenlasers (XFEL), welcher Photonen mit Frequenzen von $\omega_X = \mathcal{O}(10\,\mathrm{keV})$ emittiert, eröffnen sich solche Möglichkeiten für einen experimentellen Aufbau. Ein Nachteil des XFELs ist, dass große Werte von a_0 durch die kleine Wellenlänge des Lasers wesentlich unterdrückt werden. Die Idee des laser-assistierten Breit-Wheeler-Prozesses ist, die hochenergetischen Photonen eines XFELs durch einen hochintensiven optischen Laser zu unterstützen. So könnten die Vorteile beider Lasertypen kombiniert werden. Es stellte sich folglich die Frage, wie ein assistierender, hochintensiver Laserpuls den Breit-Wheeler-Prozess modifiziert. Dieser Ansatz wurde durch die Arbeit in [Sei14] inspiriert, und erste Ergebnisse sind in [Nou16, Ott16, Nou17] veröffentlicht.

3.1 Prozessbeschreibung

Um den laser-assistierte Breit-Wheeler-Prozess zu beschreiben, soll in diesen Abschnitt die Reaktion $X' + (X + L) \to e^+ + e^-$ betrachtet werden. Hierbei sei X ein schwaches Feld, sodass $a_X \ll 1$, wobei a_X dem in (2.4) definierten Parameter a_0 entspricht, welcher auf die unterschiedlich beitragenden Felder transferiert wird. Das Probephoton X' und das X-Feld wechselwirken miteinander im Sinne des linearen Breit-Wheeler-Prozesses, sodass $s_{X'X} > s_{thr}$ gilt. Der Grundgedanke ist, den hochfrequenten XFEL-Laserpuls mit einem starken, niederfrequenten und synchronisierten, co-propagierenden Laserstrahl L zu kombinieren. In dieser Arbeit liegt der angenommene Wert des Intensitätsparameters des XFELs bei $a_X = \mathcal{O}\left(10^{-5}\right)$ und für den assistierenden Strahl L wird $a_L = \mathcal{O}\left(1\right)$ angenommen. Die hier vorgestellten Überlegungen beziehen sich auf eine Region der räumlichen Homogenität, bei welcher die Approximation ebenfrontiger Wellen ihre Gültigkeit behält.

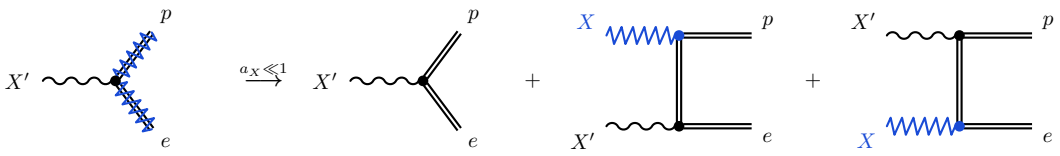


Abbildung 3.1: Diagrammatische Darstellung der Paarproduktion im Laser-assistierten Breit-Wheeler-Prozess. Linkes Diagramm: die Wellenlinie symbolisiert das einlaufende Probephoton X' und die Doppellinie mit der überlagerten blauen Zickzack-Linie das durch das (XFEL + Laser)-Feld propagierende, auslaufende Elektron (e) und Positron (p). Rechte Seite: Entwicklung bis zur ersten Ordnung für ein schwaches XFEL Feld X, wobei die Doppellinien die Wellenfunktionen im Laserfeld L symbolisieren, und die blauen Zickzack-Linien stehen für das schwache XFEL-Feld X. Die nullte Ordnung (im X-Feld) ist der in Kapitel 2 diskutierte nicht-lineare Breit-Wheeler-Prozess und ist für die in den folgenden Rechnungen angenommenen Parameter stark unterdrückt.

Der Laser-assistierte Breit-Wheeler-Prozess wird im Furry-Bild durch ein Diagramm mit einem Vertex beschrieben: $X' \to e^+_{X+L} + e^-_{X+L}$ (siehe Abbildung 3.1, links). Hierbei symbolisiert $e^\pm_{X+L}$ die Volkov-Lösung des auslaufenden Elektrons bzw. Positrons in den sich zeitlich ändernden Feldern $X + L$. Die Polarisation beider Felder wird als linear und senkrecht zueinander angenommen. Die Felder X und L propagieren parallel zueinander und anti-parallel (head-on) zum Probephoton X'. Da von einem schwachen X-Feld ausgegangen wird, kann dieses linearisiert werden. Dies korrespondiert im Furry-Bild mit einem t-Kanal-Diagramm mit zwei Vertices (s. Abbildung 3.1, rechts). Die resultierende schematische Abbildung $X' + X \to e^+_L + e^-_L$ ähnelt der des perturbativen Breit-Wheeler-Prozesses, nur sind hier das ausgehende Elektron-Positron-Paar sowie der Propagator vom Laserfeld L umgeben.

3.1.1 Kinematik

Die Energie- und Impulsbilanz für den Laser-assistierten Breit-Wheeler-Prozess kann durch

$$k_{X'} + k_X + \ell k_L = p_p + p_e \tag{3.2}$$

ausgedrückt werden. Hierbei repräsentiert ℓ den Impulsübertrag zwischen dem Laser L und dem erzeugten Paar. Die Bilanzgleichung (3.2) setzt die vier Energie-Impulskomponenten der fünf Viererimpulse k_X, $k_{X'}$, k_L, p_e, p_p in Beziehung, wobei ℓ (eine skalare Größe) noch nicht spezifiziert wird. Es ist günstig, für eine weitere Analyse von Gl. (3.2) und für die Auswertung der Streumatrix des Prozesses, wie bereits im Kapitel 2 (siehe Abschnitt 2.3.1.3) näher beschrieben, zu einer Darstellung in Lichtkegelkoordinaten überzugehen. Die vier Komponenten von Gl. (3.2) ergeben sich dann als

$$k^{\pm}_{X'} + k^{\pm}_X + \ell k^{\pm}_L = p^{\pm}_e + p^{\pm}_p, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{k}^{\perp}_{X'} + \mathbf{k}^{\perp}_X + \ell \mathbf{k}^{\perp}_L = \mathbf{p}^{\perp}_p + \mathbf{p}^{\perp}_e. \tag{3.4}$$

Weiterhin soll das Koordinatensystem entlang der dritten räumlichen Achse (z-Achse) ausgerichtet werden. In dieser speziellen Kinematik sind in dem oben definierten Bezugssystem $\mathbf{k}^{\perp}_{X'} = \mathbf{k}^{\perp}_X = \mathbf{k}^{\perp}_L = 0$. Da für die lichtartigen Vierervektoren $k^+_{X,L} = k^-_{X'} = 0$ sowie $k^+_{X'} = 2\omega_{X'}$, $k^-_{X,L} = 2\omega_{X,L}$ gilt, folgen aus (3.3) und (3.4) die Bilanzen

$$2\omega_{X'} = p^+_e + p^+_p, \tag{3.5}$$

$$2\left(\omega_X + \ell\omega_L\right) = p^-_e + p^-_p, \tag{3.6}$$

$$\mathbf{p}^{\perp}_p = -\mathbf{p}^{\perp}_e. \tag{3.7}$$

Die überlagerten $(L+X)$-Felder werden als bifrequentes Feld betrachtet und es wird das Frequenzverhältnis $\eta = \omega_L/\omega_X$ definiert.[1] Für die im Folgenden zu analysierenden Verhältnisse $\omega_X \gg \omega_L$ entsteht ein Kleinheitsparameter $\eta \ll 1$, auf den noch Bezug genommen wird. Auf Grund der Normierung $p^2_{e,p} = m^2$ sind die Lichtkegelkomponenten $p^+_{e,p}$ und $p^-_{e,p}$ gekoppelt, $p^+_{e,p} - p^-_{e,p} - 2\left(\mathbf{p}^{\perp}_{e,p}\right)^2 = m^2$. Es können damit z.B. die Plus-Komponenten eliminiert werden:

$$p^+_{e,p} = \frac{m^2 + 2\left(\mathbf{p}^{\perp}_{e,p}\right)^2}{p^-_{e,p}}. \tag{3.8}$$

[1] In [Sei14] wurde $\hat{\eta} = \omega_X/\omega_L$ verwendet.

Mit Hilfe von (3.7) verbleiben zwei unabhängige Gleichungen:

$$p_e^+ = 2\omega_{X'} - p_p^+ \quad \Rightarrow \quad p_e^+ = 2\omega_{X'} - \frac{m^2 + 2\mathbf{p}_\perp^2}{p_p^-}, \tag{3.9}$$

$$2\,(1+\eta\ell)\,\omega_X \quad = \quad p_p^- + p_e^-(m^2, \mathbf{p}_\perp^2, p_p^-, \omega_{X'}), \tag{3.10}$$

wobei mittels (3.10) bei vorgegebenen p_p^- und $\mathbf{p}_\perp^2 = \left(\mathbf{p}_e^\perp\right)^2 = \left(\mathbf{p}_p^\perp\right)^2$ die Größe ℓ bestimmt werden kann. Damit sind die Elektronvariablen eliminiert und der Wirkungsquerschnitt hängt nur noch von kinematischen Größen des Positrons p_p^- und $p_\perp = \sqrt{\mathbf{p}_\perp^2}$ ab. Für zeitlich endliche und linear polarisierte Pulse liegt keine Azimuthal-Symmetrie vor, d.h. der Winkel φ zwischen dem Transversalimpuls $\mathbf{p}_p^\perp$ des Positrons und der Laserpolarisationsebene fungiert als weitere unabhängige Variable.

Für die folgenden numerischen Auswertungen werden die unabhängigen Variablen (z, ℓ, φ) des Positrons genutzt. Diese stehen mit den Variablen-Tripel $(p^0, \mathbf{p}_\perp, p^z)$ und $(p^-, p_\perp, \varphi)$ durch die Umrechnungen

$$p^- \quad = \quad \frac{(1+\eta\ell)\,\omega_X \mathrm{e}^{-z}}{\cosh z}, \tag{3.11}$$

$$p_\perp \quad = \quad \sqrt{\frac{(1+\eta\ell)\,\omega_X \omega_{X'}}{\cosh^2 z} - m^2}, \tag{3.12}$$

$$\mathbf{p}_\perp \quad = \quad p_\perp\,(\cos\varphi, \sin\varphi)\,. \tag{3.13}$$

im Zusammenhang. Die in Kapitel 2 verwendete Rapidität y wurde hier durch die modifizierte Rapidität z ersetzt (siehe Anhang 7.4).

3.1.2 Das Hintergrundfeld

In diesem Abschnitt soll das gemeinsame Feld der Pulse X (XFEL) und L (optischer Laser) betrachtet werden. Beide Pulse sind linear polarisiert und propagieren in gleicher Richtung. Sie hängen nur durch die invariante Phase $\phi = k_X \cdot x$ von Raum und Zeit ab. Der resultierende Puls kann mit Hilfe des Vierer-Vektorpotentials

$$A^\mu = \frac{ma_L}{e} g_L(\eta\phi)\, \epsilon_L^\mu \cos(\eta\phi + \phi_L) + \frac{ma_X}{e} g_X(\phi)\, \epsilon_X^\mu \cos(\phi + \phi_X) \tag{3.14}$$

beschrieben werden. Nach Voraussetzung stehen die Polarisationsvektoren $\epsilon_{X,L}^\mu$ senkrecht aufeinander, $\epsilon_L \cdot \epsilon_X = 0$, und sind senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Laser, $k_{X,L} \cdot \epsilon_{X,L} = 0$. Diese Wahl vereinfacht die folgenden Rechnungen beträchtlich. Die Pulsformen werden durch die Einhüllenden $g_L(\phi)$ und $g_X(\phi)$

$$g_L(\phi) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi\phi}{2\tau_L}\right) & , \quad -\tau_L \leq \phi \leq \tau_L, \\ 0 & , \quad \text{sonst}, \end{cases} \tag{3.15}$$

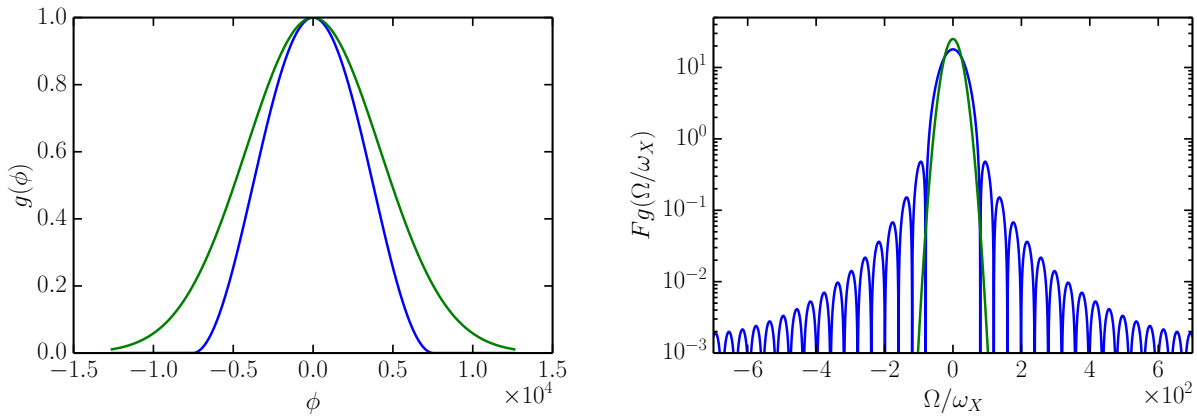
$$g_X(\phi) = \exp\left(\frac{-\phi^2}{2\tau_X}\right) \tag{3.16}$$

beschrieben. Die Pulsformen vom optischen Laser und vom XFEL können durchaus verschieden sein, da es sich um separate Geräte handelt. Ebenso können beide Pulse verschiedene „carrier envelope"-Phasen ϕ_L und ϕ_X besitzen, die vor allen für ultrakurze Pulse wichtig sein können [Tit16]. Für die hier betrachteten kurzen, aber nicht ultrakurzen, Pulse werden diese Effekte außer Acht gelassen und $\phi_L = \phi_X = 0$ gesetzt. Dies hat unter anderem auch den Vorteil, dass der abzutastende Parameterraum nicht zu hochdimensional wird.

Der Grenzfall $g_{X,L} \to 1$ führt auf stationäre, ebenfrontige und bifrequent oszillierende Felder, die z.B. in [Jan15, Kra11] behandelt wurden. Der Fokus dieser Arbeit liegt auf dem Einfluss der endlichen Pulse, welcher außerordentlich wichtig ist, um die Auswirkungen der kurzen Laserpulse auf die Produktionswahrscheinlichkeit zu untersuchen.

Das Potential (3.14) erfüllt die Lorenz-Konvention $\partial_\mu A^\mu = k_\mu dA^\mu/dx = 0$. Durch die Beschränkung auf eine Abhängigkeit des Potentials A^μ von der invarianten Phase ϕ beschreibt (3.14) ebenfrontige, temporär gepulste, bifrequente Felder. Die Behandlung fokussierter, d.h. nicht-ebenfrontiger, Strahlen stellt eine große Herausforderung dar, zu der weltweit intensiv geforscht wird. Wir beschränken uns damit auf die Symmetrieachse und einer genügend kleinen Umgebung, in der die ebenfrontigen, gepulsten Wellen ein adäquates Modell darstellen.

3.1.3 Die Einhüllende g (ϕ)



(a) **(b)**

Abbildung 3.2: Links: Einhüllende $g_L(\eta\phi)$ ((3.15), blaue Kurve) mit $\tau_L = 4\pi$ und $g_X(\phi)$ ((3.16), grüne Kurve) für $\tau_X = 7/\eta$ und $\eta = 1/600$. Rechts: Fourier-Transformierte der Einhüllenden aus der rechten Abbildung $Fg_L(\Omega/\omega_X)$ (blaue Kurve) und $Fg_X(\Omega/\omega_X)$ (grüne Kurve) in Abhängigkeit von der dimensionslosen Frequenz Ω/ω_X.

Die spezielle Wahl der Hüllfunktionen (3.15) und (3.16) ist zum einen durch den numerischen Aufwand und zum anderen durch den Wunsch, störende Nebeneffekte zu unterdrücken, begründet. So besitzt beispielsweise eine Einhüllende in Form einer $\cos^2$-Funktion einen kompakten Träger. Das bedeutet, dass der Puls für $|\phi| > \tau$ identisch verschwindet (siehe Abbildung (3.2), blaue Kurve). Ein Nachteil hingegen ist, dass die Fourier-Transformierte der Funktion relativ hohe Nebenmaxima aufweist (siehe Abbildung 3.2b, blaue Kurve). Diese ergeben zusätzliche Beiträge zum Frequenzspektrum und haben Einfluss auf Strukturen und Substrukturen der Produktionswahrscheinlichkeit im Phasenraum. Die Gauß-Funktion als Einhüllende weist diese Nebenmaxima im Frequenzspektrum nicht auf (siehe Abbildung 3.2b, grüne Kurve). Da die Gauß-Funktion erst im Unendlichen den Wert Null erreicht, muss folglich ein größerer Definitionsbereich in Betracht gezogen werden, um den Laserpuls mit ausreichender Genauigkeit beschreiben zu können. Hier muss also eine Abwägung zwischen numerischen Aufwand und einer einfachen, mathematischen Handhabbarkeit getroffen werden. Die Pulsbreite τ_X des Laserpulses X sollte so gewählt sein, dass er die vollständige Ausdehnung des Laserpulses L überlagert. Der Puls X trägt in der oben beschriebenen Konstellation den größten energetischen Anteil bei. Somit hat nur der Anteil des Pulses L einen Effekt auf die Paarproduktionsrate, welcher sich mit dem Puls X überlagert.

3.2 Das Streumatrixelement

Von zentraler Bedeutung für die Analyse des laser-assistierten Breit-Wheeler-Prozesses ist das invariante Streumatrixelement

$$\mathcal{S} = -ie \int dx \bar{\Psi}_{X+L} \frac{\not{\epsilon}_{X'}}{\sqrt{2k^0_{X'}}} \mathrm{e}^{-ik_{X'}\cdot x} \Psi_{X+L} \ , \tag{3.17}$$

welches den Prozess der Paarerzeugung in niedrigster Ordnung bezüglich der perturbativen Ankopplung des Probephotons X' an Elektronen und Positronen in Baumgraphen-Näherung darstellt. Im Furry-Bild entspricht das dem Diagramm auf der linken Seite von Abbildung 3.1. Physikalisch beschreibt das Diagramm den Zerfall des Probephotons, das sich durch das Hintergrundfeld bewegt, in ein Elektron-Positron-Paar. Hierbei stellen die mit einer Zickzack-Linie überlagerten Doppellinien die Volkov-Zustände des auslaufenden Elektrons $\bar{\Psi}_{X+L}$ bzw. des auslaufenden Positrons Ψ_{X+L} mit dem speziellen Vierer-Vektorpotential A^μ (3.14) dar. Für kleine Feldstärken des XFEL-Feldes entstehen in führender Ordnung bezüglich einer Entwicklung nach den Kleinheitsparameter a_X die drei Diagramme auf der rechten Seite in Abbildung 3.1. Hier bezeichnen die Doppellinien die durch das Laserfeld L propagierenden Elektronen und Positronen. Das erste Diagramm stellt den nicht-linearen Breit-Wheeler-Prozess $X' + L \to e^+ + e^-$ dar, welcher diagrammatisch für schwache Laserfelder steht und in Kapitel 2 beschrieben wurde. Die beiden rechten Diagramme repräsentieren den hier interessierenden Laser-assistierten Breit-Wheeler-Prozess $X' + (X + L) \to e^+ + e^-$. Es wird von einer expliziten Zerlegung in diese beiden Diagramme ausgegangen und dazu das Matrixelement (3.17) ausgewertet.

Das Probephoton wird durch den Vierer-Wellenvektor $k_{X'}$ und den Vierer-Polarisationsvektor $\epsilon_{X'}$ beschrieben. Diese erfüllen die Relation $\epsilon_{X'} \cdot k_{X'} = 0$. Unter Verwendung von (7.9) und (7.15) kann das Matrixelement mit dem Vorfaktor $N_0 = -ie/\left(2k^0_X \sqrt{2k^0_{X'} 2p^0_e 2p^0_p}\right)$ in die Form

$$\mathcal{S} = N_0 \int d\phi dx_- d^2\mathbf{x}_\perp \Gamma(\phi) \, \mathrm{e}^{i\left(S_{-p_p} - S_{p_e} - k_{X'}\cdot x\right)}, \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\phi) &= \mathcal{J}_0 + g_L(\eta\phi)\cos(\eta\phi)\,\mathcal{J}^1_L + g_X(\phi)\cos\phi\mathcal{J}^1_X \\ &\quad + g^2_L(\eta\phi)\cos^2(\eta\phi)\,\mathcal{J}^2_L + g^2_X(\phi)\cos^2\phi\mathcal{J}^2_X \end{aligned} \tag{3.19}$$

gebracht werden. Die Abhängigkeiten von Spin und Polarisation der Leptonen sind in den

Dirac-Strukturen

$$\mathcal{J}_0 = \bar{u}(p_e) \not{\epsilon}_{X'} v(p_p), \tag{3.20}$$

$$\mathcal{J}^1_{L,X} = \frac{m a_{L,X}}{2} \bar{u}(p_e) \left(\frac{\not{\epsilon}_{L/X} \not{k}_X \not{\epsilon}_{X'}}{k_X \cdot p_e} - \frac{\not{\epsilon}_{X'} \not{k}_X \not{\epsilon}_{L/X}}{k_X \cdot p_p} \right) v(p_p), \tag{3.21}$$

$$\mathcal{J}^2_{L,X} = \frac{m^2 a^2_{L,X}}{2} \frac{k_X \cdot \epsilon_{X'}}{(k_X \cdot p_p)(k_X \cdot p_e)} \bar{u}(p_e) \not{k}_X v(p_p) \tag{3.22}$$

codiert. Hierbei ist zu beachten, dass die in den Gln. (3.20)–(3.22) definierten Größen $\mathcal{J}_j$ reine komplexe Zahlen sind, welche von kinematischen Größen, sowie Spin- und Polarisationsvariablen abhängen. Mögliche Mischterme des X- und des L-Feldes proportional zu $\not{\epsilon}_{X,L} \not{k}_X \not{\epsilon}_{L,X}$ verschwinden aufgrund der Lorenz-Eichung (Polarisation senkrecht zur Ausbreitungsrichtung).

Als nächstes soll die Phase $S_{-p_p} - S_{p_e} - k_{X'} \cdot x$ in (3.18) analysiert werden. Werden die Volkov-Phasen (7.10) und (7.16) in (3.18) eingesetzt, so gilt

$$S_{-p_p}(\phi) - S_{p_e}(\phi) - k_{X'} \cdot x = (p_p + p_e - k_{X'}) x + f_L(\phi) + f_X(\phi) \tag{3.23}$$

mit den Funktionen

$$f_L(\phi) = \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi' \alpha_L g_L(\kappa\phi') \cos(\kappa\phi') + \beta_L g_L^2(\kappa\phi') \cos^2(\kappa\phi'), \tag{3.24}$$

$$f_X(\phi) = \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi' \alpha_X g_X \ell(\phi') \cos(\phi') + \beta_X g_X^2(\phi') \cos^2(\phi') \tag{3.25}$$

und den Koeffizienten

$$\alpha_{L,X} = m a_{L,X} \left(\frac{p_e \cdot \epsilon_{L,X}}{k_X \cdot p_e} - \frac{p_p \cdot \epsilon_{L,X}}{k_X \cdot p_p} \right), \tag{3.26}$$

$$\beta_{L,X} = \frac{(m a_{L,X})^2}{2} \left(\frac{1}{k_X \cdot p_e} + \frac{1}{k_X \cdot p_p} \right). \tag{3.27}$$

Wird die Integration über dx_- und $d\mathbf{x}_\perp$ in (3.18) ausgeführt, so ergibt sich für das S-Matrixelement

$$\mathcal{S} = N_0 (2\pi)^3 \delta^2(\mathbf{p}_{e\perp} + \mathbf{p}_{p\perp} + \mathbf{k}_{X'\perp}) \delta(p_{e+} + p_{p+} + k_{X'+}) \times \int d\phi \Gamma(\phi) \, \mathrm{e}^{i((1+\eta\ell)\phi + f_L(\phi) + f_X(\phi))}. \tag{3.28}$$

3.3 Linearisierung des X-Feldes

Da hier ausschließlich im Bezug zum optischen Laser L ein schwaches XFEL-Feld X ($a_X \ll 1$) betrachtet werden soll, ist es zweckmäßig, das S-Matrixelement (3.18) bezüglich a_X zu linearisieren. Folglich kann der Term proportional zu β_X in (3.25) vernachlässigt werden und es verbleibt

$$f_X(\phi) \approx \int_0^\phi d\phi' \alpha_X g_X(\phi') \cos(\phi'). \tag{3.29}$$

Dieser Ausdruck kann unter der Annahme einer sich langsam verändernden Einhüllenden $g_X(\phi)$ des X-Pulses ($\tau_X \gg 1$) weiter vereinfacht werden. Partielle Integration von (3.29) führt zu dem Ausdruck

$$f_X(\phi) \approx \alpha_X g_X(\phi) \sin\phi - \alpha_X \int_0^\phi \frac{dg_X(\phi')}{d\phi'} \sin\phi' d\phi'. \tag{3.30}$$

Die Ableitung $dg_X(\phi)/d\phi$ ist um den Faktor $\mathcal{O}(1/\tau_X)$ kleiner als die Einhüllende selbst. Daher kann der zweite Term in (3.30) vernachlässigt werden und es ergibt sich

$$f_X(\phi) \approx \mathcal{F}_X(\phi) = \alpha_X g_X(\phi) \sin\phi = \frac{1}{2i}\alpha_X g_X(\phi)\left(\mathrm{e}^{-i\phi} - \mathrm{e}^{i\phi}\right). \tag{3.31}$$

Es wird der X-Feld-Anteil von der Phase in (3.28) separiert und nach ϕ entwickelt:

$$\mathrm{e}^{i\mathcal{F}_X(\phi)} \approx 1 + i\mathcal{F}_X(\phi). \tag{3.32}$$

Die zwei exponentiellen Funktionen in $\mathcal{F}_X(\phi)$, (3.31), symbolisieren zwei verschiedene Prozesse. Der erste Term, proportional zu $\mathrm{e}^{-i\phi}$, kann als Absorption eines X-Photons im Eingangskanal gedeutet werden und der zweite Term, proportional zu $\mathrm{e}^{i\phi}$, als Emission eines X-Photons im Ausgangskanal. Letzterer ist wegen dem schwachen X-Feld stark unterdrückt und wird hier nicht betrachtet.

Aufgrund der Übersichtlichkeit wird die vollständige Abhängigkeit der invarianten Phase ϕ in den separaten Ausdrücken

$$\mathcal{A}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \left[1 + i\mathcal{F}_X(\phi)\right] \mathrm{e}^{i((1+\eta\ell)\phi + f_L(\phi))}, \tag{3.33}$$

$$\mathcal{A}_X^j = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \cos^j(\phi)\, g_X^j(\phi) \left[1 + i\mathcal{F}_X(\phi)\right] \mathrm{e}^{i((1+\eta\ell)\phi + f_L(\phi))}, \tag{3.34}$$

$$\mathcal{A}_L^j = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \cos^j(\eta\phi)\, g_L^j(\eta\phi) \left[1 + i\mathcal{F}_X(\phi)\right] \mathrm{e}^{i((1+\eta\ell)\phi + f_L(\phi))} \tag{3.35}$$

geschrieben. Hierbei ist $j = 1, 2$ auf der linken Seite als Index und auf der rechten Seite als

Potenz zu verstehen. Das Matrixelement nimmt somit die Form

$$S = N_0 (2\pi)^3 \delta^2 (\mathbf{p}_{e\perp} + \mathbf{p}_{p\perp} + \mathbf{k}_{X'\perp}) \delta (p_{e+} + p_{p+} + k_{X'+}) \Lambda \tag{3.36}$$

mit

$$\Lambda = \mathcal{J}_0 \mathcal{A}_0 + \mathcal{J}_L^1 \mathcal{A}_L^1 + \mathcal{J}_X^1 \mathcal{A}_X^1 + \mathcal{J}_L^2 \mathcal{A}_L^2 \tag{3.37}$$

an. Da ein potenzieller Term $\mathcal{J}_X^2 \mathcal{A}_X^2$ proportional zu a_X^2 ist, kann er im Rahmen der Linearisierung ignoriert werden. Aus dem selben Grund kann der Anteil unter dem Integral $\mathcal{A}_X^1$ proportional zu $\mathcal{F}_X(\phi)$ vernachlässigt werden, da $\mathcal{J}_X^1$ sowie $\mathcal{F}_X(\phi)$ proportional zu a_X sind. Des Weiteren sind die Terme in den Ausdrücken (3.33) und (3.35) proportional zur $\mathcal{O}(1)$ (innerhalb der eckigen Klammern in (3.33)-(3.35)) stark unterdrückt. Es handelt sich um den schon in Kapitel 2.2 berechneten Multi-Photon-Breit-Wheeler-Prozess ohne zusätzliches X-Photon, welcher sich in der gegebenen Konfiguration weit unterhalb der Schwelle von $2m$ befindet und hier nicht betrachtet wird.

Unter diesen Annahmen und den daraus folgenden Vereinfachungen kann der Zusammenhang

$$\mathcal{A}_X^1 = -\mathcal{A}_0 / \alpha_X \tag{3.38}$$

abgeleitet werden. Der Teil (3.37) vom Matrixelement (3.36) nimmt die kompakte Form

$$\Lambda = \mathcal{J}_X \mathcal{A}_0 - \alpha_X \sum_{j=0,1,2} \mathcal{J}_j \mathcal{A}_j \tag{3.39}$$

an. Hierbei wurde die vereinfachte Schreibweise $\mathcal{J}_L^j, \mathcal{A}_L^j \to \mathcal{J}_j, \mathcal{A}_j$ und $\mathcal{J}_X^1 \to \mathcal{J}_X$ verwendet, da alle anderen Größen für die weitere Auswertung nicht relevant sind. Die gesamte Dynamik des Prozesses wird somit durch die Integrale

$$\mathcal{A}_j = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \left[\cos(\eta\phi) g_L(\eta\phi)\right]^j g_X(\phi) \, \mathrm{e}^{iH(\phi)}, \tag{3.40}$$

mit der Phase

$$H(\phi) = \int_{\eta\phi_0}^{\eta\phi} d\phi' \left(\ell + \frac{\alpha_L}{\eta} g_L(\phi') \cos(\phi') + \frac{\beta_L}{\eta} g_L^2(\phi') \cos^2(\phi') \right) \tag{3.41}$$

bestimmt. In den weiteren Ausführungen wird ein besonderes Augenmerk auf die Phase $H(\phi)$ gelegt. In dieser ist die gesamte Wechselwirkung zwischen dem erzeugten Positron und dem Laserpuls L codiert. Wird der Puls L abgeschaltet, dass heißt $a_L \to 0$, so kann aus (3.36) das Streumatrixelement des einfachen, linearen Breit-Wheeler-Prozesses abgeleitet werden,

da (3.36) bezüglich des schwachen X Feldes linearisiert wurde. Eine ausführliche Rechnung dazu befindet sich im Anhang 7.6. Abschließend sei erwähnt, dass im Gegensatz zum in Kapitel 2.3 definierten Integral B_0^0, (2.25), das korrespondierende Integral $\mathcal{A}_0$ im Laser-assistierter Breit-Wheeler-Prozess aufgrund der Linearisierung nicht regularisiert werden muss.

Als nächster Schritt wird der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma$ betrachtet.

3.4 Der Wirkungsquerschnitt

Mit Hilfe der im vorhergehenden Abschnitt 3.3 beschriebenen linearisierten Streumatrix (3.36) kann der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma$ berechnet werden. Hierzu soll zunächst die sechsfach differentielle Produktionswahrscheinlichkeit

$$d^6W = |\overline{S}|^2 d^6\Xi \tag{3.42}$$

eingeführt werden. Hierbei ist

$$d^6\Xi = \frac{d^3\mathbf{p}_e}{(2\pi)^3\, 2p_e^0} \frac{d^3\mathbf{p}_p}{(2\pi)^3\, 2p_p^0} \tag{3.43}$$

das invariante Phasenraumelement. Im speziellen System der Lichtkegelkoordinaten lautet das Phasenraumelement für das Elektron $d^3\mathbf{p}_e/2p_e^0 = dp_e^+ d\mathbf{p}_e^\perp/2p_e^+$. Durch Ausnutzung der Delta-Distribution im Matrixelement (3.36) kann die Integration über den Phasenraum des Elektrons einfach ausgeführt werden und man erhält die dreifach differentielle Wahrscheinlichkeit als

$$d^3W = \frac{e^2}{4\,(2\pi)^3\, p_e^+ k_{X'}^0} |\overline{\Lambda}|^2 \frac{d^3\mathbf{p}_p}{2p_p^0}. \tag{3.44}$$

Wie schon in Kapitel 3 erwähnt, ist es zweckmäßig, den Phasenraum mit den unabhängigen Variablen ℓ, φ und z zu parametrisieren. Hierbei ist ℓ der Impulsübertrag vom Laserfeld L auf das erzeugte Paar, φ ist der Azimutalwinkel des erzeugten Positrons und z die modifizierte Rapidität. Für eine detaillierte Beschreibung dieser Parametrisierung sei auf Anhang 7.4 verwiesen. Die sich damit ergebene differentielle Produktionswahrscheinlichkeit lautet

$$\frac{d^3W}{dz d\ell d\varphi} = \frac{\eta e^2 k_X^0}{16\,(2\pi)^3\, p_e^+} \frac{1 - \tanh z}{\cosh^2 z} |\overline{\Lambda}|^2. \tag{3.45}$$

Mit dieser differentiellen Wahrscheinlichkeit kann im Folgenden der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma$ ermittelt werden. Hierfür muss (3.45) mit einem Normierungsfaktor multipliziert werden. Die Normierung, die in dieser Arbeit gewählt wurde, bezieht sich auf die Teilchendichte des Feldes X,

$$\rho_X = m^2 \frac{a_X^2}{2e^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi g_X^2(\phi) \tag{3.46}$$

und auf den einlaufenden Teilchenstrom

$$j_{XX'} = \frac{k_X \cdot k_{X'}}{k_X^0 k_{X'}^0} = 2. \tag{3.47}$$

Sie ist so gewählt, dass sie der Normierung des Prozesses mit verschwindendem Laserfeld L entspricht. Weitere Details zur Normierung sind in Anhang 7.5 zu finden. Zusätzlich soll im weiteren Verlauf über die unbeobachteten Freiheitsgrade der Spins des produzierten Paares, sowie über die Polarisation des einlaufenden Probephotons X' summiert, bzw. gemittelt werden. In den Gln. (3.42, 3.44, 3.45) sind diese Summationen und Mittlungen durch den Oberstrich über $|S|^2$ und $|\Lambda|^2$ symbolisiert.

Unter Benutzung des klassischen Elektronenradius $r_0 = \alpha_{QED}/m$ (mit der Feinstrukturkonstante α_{QED}) nimmt der differentielle Wirkungsquerschnitt somit die Form

$$\frac{d^3\sigma}{dz d\ell d\varphi} = \frac{\eta r_0^2 k_X^0}{4\pi a_X^2 p_e^+ \int_{-\infty}^{\infty} d\phi g_X^2(\phi)} \frac{1-\tanh z}{\cosh^2 z} \frac{1}{2} \sum_{\text{Spin, Pol.}} |\Lambda|^2 \tag{3.48}$$

an.

4 Analyse des laser-assistierten Breit-Wheeler-Prozesses

Im folgenden Kapitel wird der differentielle Wirkungsquerschnitt (3.48) für den laser-assistierten Breit-Wheeler-Prozess, welcher im vorhergehenden Kapitel hergeleitet wurde (siehe Abschnitt 3.4), numerisch ausgewertet und für verschiedene Eingangsparameter dargestellt. Hierfür werden Grenzen des für den Prozess relevanten Phasenraums des erzeugten Positrons (Cut-off-Werte) berechnet, um anschließend verschiedene Schnitte durch diesen zu analysieren. Des Weiteren wurden ausgewählte Ebenen im Phasenraum berechnet und die Resultate in Form von Contourplots präsentiert.

4.1 Cut-off-Werte

Um den numerischen Aufwand zu beschränken, ist es wichtig, den für den Paarerzeugungsprozess relevanten Teil des Phasenraumes zu bestimmen. Mittels einer stationären Phasenanalyse kann eine Abschätzung gefunden werden, bis zu welchem Wert von ℓ eine relevante Produktionsrate und somit ein endlicher Wirkungsquerschnitt existiert. Folglich kann ein cut-off-Wert $\ell_{CO} = \ell_{CO}(z, \varphi)$ bestimmt werden, der von den beiden unabhängigen Variablen z und φ abhängt. Für $\ell > \ell_{CO}$ fällt der differentielle Wirkungsquerschnitt exponentiell ab und kann somit bei der Berechnung vernachlässigt werden. Dadurch wird die numerische Auswertung der Paarerzeugung auf einen speziellen Teil des Phasenraumes begrenzt.

Um den cut-off-Wert ℓ_{CO} zu bestimmen, muss die Phase H in Gl. (3.41) betrachtet werden. Da die Phase H stark oszilliert, wird der Wert des Integrals im Wesentlichen durch die stationären Phasenpunkte bestimmt. Der cut-off ℓ_{CO} entspricht demzufolge genau dem Wert von ℓ bei den für größere Werte von ℓ keine reellen stationären Phasenpunkte existieren. In den folgenden Rechnungen werden zwei Arten von cut-off-Werten unterschieden. Zum cut-off erster Art existieren zudem zwei Lösungen, welche aus der quadratischen Form der zu analysierenden Gleichung resultieren. Dieser Umstand wird im folgenden Kapitel 5 weitergehend untersucht.

Die stationären Punkte der Phase H lassen sich mittels deren Ableitung

$$\nu(\phi) = \frac{dH(\phi)}{d\phi} = \ell + \frac{\alpha_L(\ell)}{\eta} g_L(\phi)\cos(\phi) + \frac{\beta_L}{\eta} g_L^2(\phi)\cos^2(\phi) \tag{4.1}$$

bestimmen. Es wird gefordert, dass keine stationären Punkte ϕ_{st} auf der reellen Achse existieren. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn sich keine reellen Lösungen für $\nu(\phi_{st}) = 0$ finden lassen. Weitergehend wird die Abkürzung $\vartheta(\phi) = g_L(\phi)\cos(\phi)$ eingeführt, wobei die Einhüllende zeitweise auf $g_L(\phi) = 1$ gesetzt wird, um die Rechnung so übersichtlich wie möglich zu halten. Folglich kann der Ausdruck

$$\vartheta(\phi_{st}) = -\frac{\alpha_L(\ell)}{2\beta_L} \pm \sqrt{\frac{\alpha_L(\ell)^2}{4\beta_L^2} - \frac{\eta\ell}{\beta_L}} \tag{4.2}$$

abgeleitet werden. Es sei darauf hingewiesen, dass der Koeffizient β_L nicht von ℓ abhängt:

$$\beta_L = \frac{m^2 a_L^2}{2}\left(\frac{1}{k_X p_p} + \frac{1}{k_X p_e}\right) = a_L^2 X_s, \tag{4.3}$$

$$X_s = \frac{m^2}{\omega_X \omega_{X'}}\cosh^2 z. \tag{4.4}$$

Der maximale Wert von ℓ kann über zwei Ansätze bestimmt werden. Zum einen muss $|\vartheta(\phi_{st})| \leq 1$ gelten, da eine inverse Funktion zu $\vartheta(\phi_{st})$ existieren muss. Demzufolge muss die Bedingung

$$1 \geq \left| -\frac{\alpha_L(\ell)}{2\beta_L} \pm \sqrt{\frac{\alpha_L(\ell)^2}{4\beta_L^2} - \frac{\eta\ell}{\beta_L}} \right|, \tag{4.5}$$

$$1 \geq \frac{1}{\sqrt{\beta_L}} \left| -\sqrt{(1+\eta\ell - X_s)}\cos\varphi \pm \sqrt{(1-X_s)\cos^2\varphi - \eta\ell\sin^2\varphi} \right| \tag{4.6}$$

erfüllt werden. Aus der Ungleichung (4.6) lassen sich zwei verschiedene Arten von cut-off-Werten bestimmen. Gleichsetzen beider Seiten in (4.6):

$$1 + \frac{1}{\sqrt{\beta_L}}\sqrt{(n - X_s)}\cos\varphi = \pm\frac{1}{\sqrt{\beta}}\sqrt{(1-X_s)\cos^2\varphi - \eta\ell\sin^2\varphi} \tag{4.7}$$

führt zu einer quadratischen Gleichung für ℓ:

$$0 = \ell^2 + 2\left(1 - 2\cos^2\varphi\right)\frac{\beta_L}{\eta}\ell + \frac{\beta_L^2}{\eta^2} - 4\frac{\beta_L}{\eta^2}(1 - X_s)\cos^2\varphi \tag{4.8}$$

mit den Lösungen

$$\ell_{CO}^{\pm} = \frac{\beta_L}{\eta}\left[\left(2\cos^2\varphi - 1\right) \pm 2\cos\varphi\sqrt{\frac{1}{\beta_L} - a_L^{-2} - \sin^2\varphi}\right], \tag{4.9}$$

welche als cut-off-Werte erster Art interpretiert werden können. Wird in (4.6) nur der zweite Wurzelausdruck betrachtet, kann ein cut-off-Wert zweiter Art ermittelt werden, da dieser für bestimmte Werte von ℓ negativ werden kann. Es ergibt sich die Bedingung

$$0 \leq (1 - X_s)\cos^2\varphi - \eta\ell\sin^2\varphi, \tag{4.10}$$

mit den Lösungen

$$\ell_{CO}^{(2)} = \frac{1}{\eta}(1 - X_s)\cot^2\varphi. \tag{4.11}$$

Zur Überprüfung der oben genannten Resultate soll hier noch der zweite Ansatz erörtert werden. Die stationären Punkte können auch durch Nullsetzen der Ableitung von (4.1) nach ϕ, d.h. $\partial\nu(\phi)/\partial\phi = 0$, ermittelt werden. Daraus folgt die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = {} & 2g_L(\phi)\cos^2(\phi)\frac{\partial g_L}{\partial\phi} - 2g_L^2(\phi)\cos(\phi)\sin(\phi) \\ & + \frac{\alpha_L}{\beta_L}\cos(\phi)\frac{\partial g_L}{\partial\phi} - \frac{\alpha_L}{\beta_L}g_L(\phi)\sin(\phi). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Wie im ersten Ansatz soll auch hier momentan $g_L(\phi) = 1$ gelten und es ergibt sich

$$0 = \left(2\cos(\phi) + \frac{\alpha_L}{\beta_L}\right)\sin(\phi). \tag{4.13}$$

Diese Gleichung hat die Lösungen $\phi_{st,\rho} = \rho\pi$, mit $\rho \in \mathbb{N}$ und $\phi_{st,0} = \arccos\frac{-\alpha_L}{2\beta_L}$. Wird $\phi_{st,\rho}$ in (4.13) eingesetzt, entsteht die Bedingung für die Existenz der cut-off-Werte erster Art

$$\frac{\eta\ell}{\beta_L} = -1 - 2\sqrt{\frac{1}{\beta_L}(n - X_s)}\cos\varphi, \tag{4.14}$$

was wieder zu der quadratischen Gleichung (4.8) und deren Lösungen (4.9) für die cut-off-Werte erster Art führt. Aus der Lösung $\phi_{st,0}$ kann auch der cut-off-Wert zweiter Art

abgeleitet werden:

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{\alpha_L^2}{4\beta_L^2} + \frac{\eta\ell}{\beta_L} && (4.15)\\
&= -\frac{1}{\beta_L}\left(n - X_s\right)\cos^2\varphi + \frac{\eta\ell}{\beta_L} && (4.16)\\
&= -\left(1 - X_s\right)\cos^2\varphi + \eta\ell\sin^2\varphi && (4.17)
\end{aligned}
$$

und somit

$$
\ell_{CO}^{(2)} = \frac{1}{\eta}\left(1 - X_s\right)\cot^2\varphi. \qquad (4.18)
$$

Die hier ermittelten cut-off-Werte sollen im Folgenden die Analyse des Phasenraums der erzeugten Positronen vereinfachen. Beispiele von cut-off-Werten werden in den nächsten Abschnitten erörtert.

4.2 Schnitte durch den Phasenraum des Positrons

Um den Einfluss des Laserfeldes L auf den Erzeugungsprozess genau auswerten zu können, muss mit einer hohen Auflösung des Impulsübertrages des Feldes L auf das erzeugte Positron gerechnet werden.

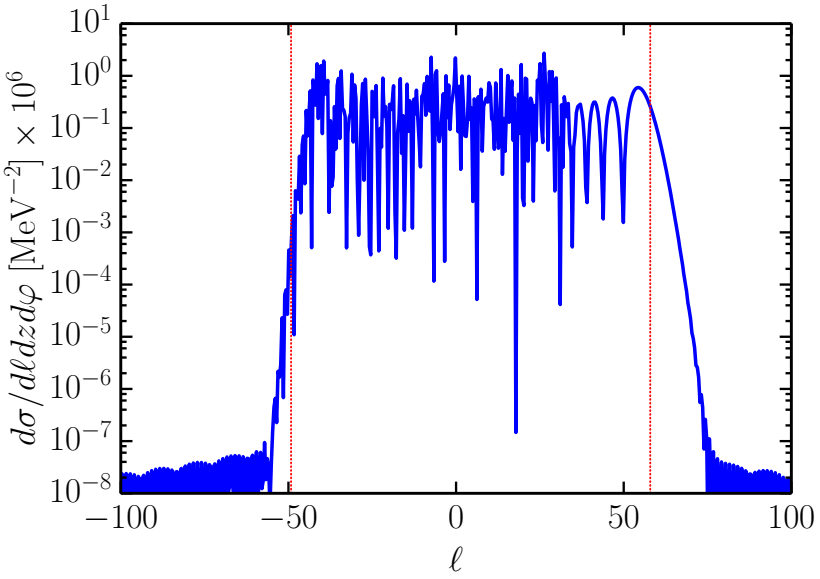


Abbildung 4.1: Differentielles Spektrum $d\sigma/d\ell dz d\varphi$ als Funktion von ℓ des laser-assistierten Breit-Wheeler-Prozesses bei konstanten Werten von $z = 0$ und $\varphi = \pi$. Parameter: $a_L = 0.1$, $\sqrt{s_{XX'}} = 1.2$ MeV,$\eta = 1/600$,$\tau_L = 4\pi$ und $\tau_X = 7/\eta$. Die roten Linien symbolisieren die cut-off-Werte erster Art.

Als erste und einfachste Darstellung sollen in diesem Abschnitt die Schnitte durch den Phasenraum des Positrons bei konstanten Werten von $z = 0$ und $\varphi = \pi$ betrachtet werden. In Abbildung 4.1 ist der differentielle Wirkungsquerschnitt als Funktion des Impulsaustausch-parameters ℓ abgebildet. Es wurden die Parameter $\sqrt{s_{XX'}} = 1.2$ MeV, $a_L = 0.1$, $\tau_L = 4\pi$ und $\tau_X = \frac{1.75}{\pi\eta}\tau_L$ verwendet, wobei in ℓ-Richtung mehr als 20.000 Datenpunkte berechnet wurden. Auffällig ist die Ausbildung eines endlichen Plateaus. Das Ausmaß des Plateaus in Abbildung 4.1 kann durch die im Abschnitt 4.1, Gleichung (4.9) berechneten cut-off-Werte (rot-gepunktete Linien) approximiert werden. In der hier betrachteten speziellen Ebene des Phasenraumes nehmen die cut-off-Werte erster Art eine besonders einfache Form an:

$$\ell_{CO}^{\pm} = \frac{s_{thr}}{s_{XX'}}\frac{a_L}{\eta}\left(a_L \mp 2\sqrt{\frac{s_{XX'}}{s_{thr}} - 1}\right). \tag{4.19}$$

Aus (4.19) lässt sich ablesen, dass für Energien unterhalb der Schwelle, $s_{XX'}/s_{thr} < 1$, keine reellen Lösungen $\ell_{CO}^{\pm}$ existieren. Die cut-off-Werte zweiter Art existieren für den Wert $\varphi = \pi$ nicht.

Eine weitere Einschränkung des Phasenraums ergibt sich aus der Bedingung $p_\perp \geq 0$. Dies bedeutet, dass das Positron mindestens seine Ruheenergie behalten muss und nicht darüber hinaus Energie an das Feld abgeben kann. Der Zusammenhang von ℓ und $p_\perp$ ist durch (3.12) gegeben. Daraus lässt sich der minimale Wert von ℓ durch

$$\ell|_{p_\perp=0} \quad = \quad \frac{1}{\eta}\left(\frac{s_{thr}}{s_{XX'}}\cosh^2 z - 1\right) \tag{4.20}$$

bestimmen. Für eine genügend große Laserintensität weitet sich das Plateau im Phasenraum bis zum kinematischen Minimalwert $\ell|_{p_\perp=0}$ aus und wirkt an dieser Stelle wie abgeschnitten. Durch Gleichsetzten von (4.19) und (4.20) kann der Wert von a_L bestimmt werden, ab dem das Plateau die kinematische Grenze erreicht und der untere cut-off-Wert durch (4.20) ersetzt werden muss. Somit folgt, dass in der hier gewählten Ebene die untere Grenze der Variable ℓ durch

$$\ell_{min} \quad = \quad \begin{cases} \ell_{CO}^{+} & \text{für } a_L \leq \sqrt{\frac{s_{XX'}}{s_{thr}} - 1}, \\ \ell|_{p_\perp=0} & \text{für } a_L > \sqrt{\frac{s_{XX'}}{s_{thr}} - 1} \end{cases} \tag{4.21}$$

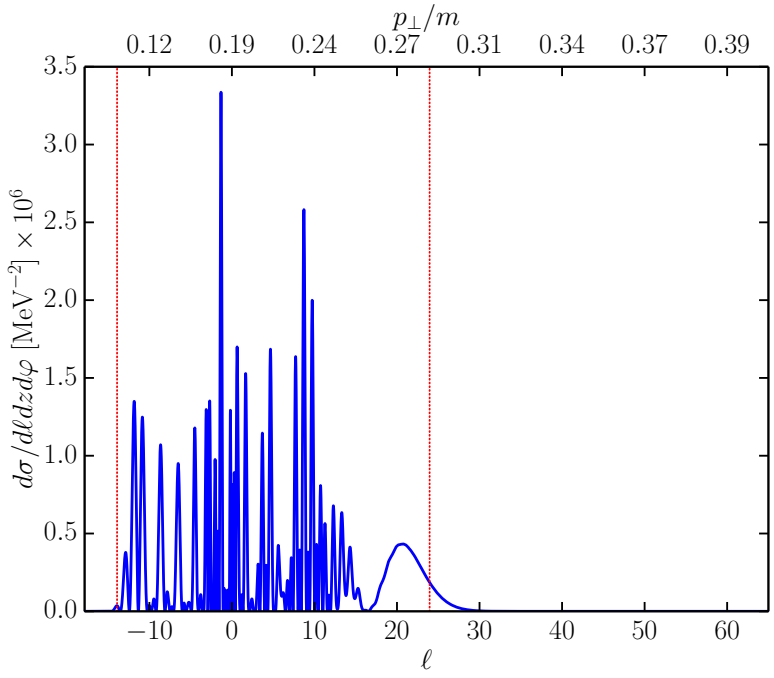
und die obere Grenze durch $\ell_{max} = \ell_{CO}^{-}$ abgeschätzt werden kann. Es sei angemerkt, dass bei Betrachtung anderer Ebenen, zum Beispiel für $z = 0$ und $\varphi = 0$, die untere Grenze des Plateaus durch ℓ_{CO}^{-} und die obere Grenze ℓ_{CO}^{+} angegeben wird, da dann $\ell_{CO}^{-} < \ell_{CO}^{+}$ gilt.

Das Plateau selbst besteht aus stark oszillierenden Strukturen und Substrukturen, die sich in der Plateauregion ausbilden. In den Unterabbildungen der Abbildungen 4.2 und 4.3 wird daher statt der logarithmischen y-Skala eine lineare Darstellung genutzt. Hier sind für zwei Werte von a_L der jeweilige Schnitt durch den Phasenraum des Positrons bei Energien in der Nähe der Schwelle $\sqrt{s_{XX'}} = 2m$ und etwas oberhalb der Schwelle $\sqrt{s_{XX'}} = 1.2$ MeV abgebildet. Der Breit-Wheeler-Peak bei $\ell = 0$ sticht deutlich heraus. Daraus folgt, dass ein Großteil der produzierten Positronen nicht mit dem Laser L wechselwirkt. Während die Interpretation der verschiedenen Oszillationen beim nichtlinearen Breit-Wheeler-Prozess (s. Abschnitt 2.3) hauptsächlich durch vielfache Harmonische und deren Überlagerungen erfolgte, ist diese Deutung hier nicht mehr zutreffend. Die einzelnen Harmonischen, welche an jedem ganzzahligen Wert von ℓ auftreten müssten, sind hier nicht identifizierbar und scheinen keinen erkennbaren Einfluss auf das Spektrum des Wirkungsquerschnittes zu haben. Die auftretenden Peak-Strukturen müssen folglich durch andere Prozesse erzeugt werden. Eine

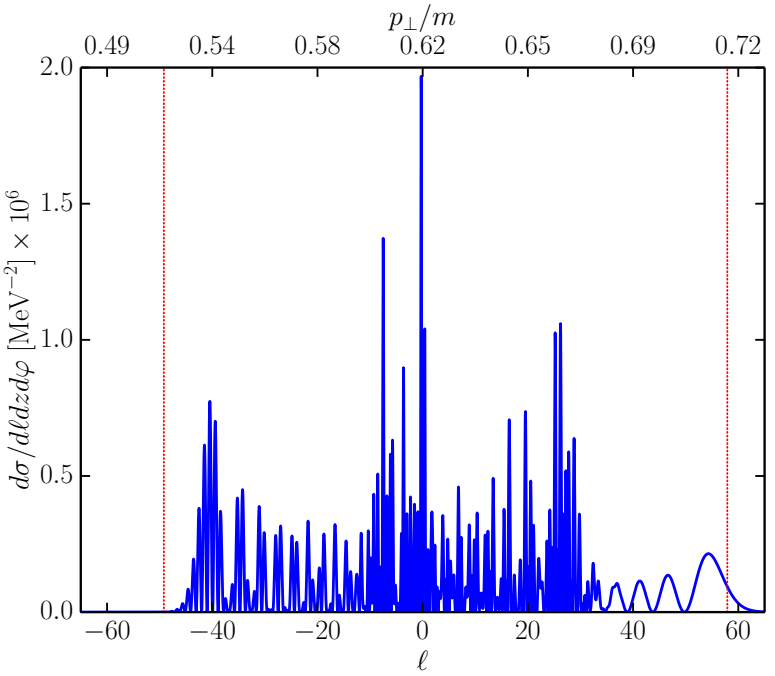
mögliche Interpretation kann über den semi-klassischen Ansatz hergeleitet werden. Hierfür wird im nächsten Kapitel der Begriff der Kaustik eingeführt, um so das Spektrum physikalisch anschaulich zu deuten. Als generelles Verhalten kann aus den Abbildungen 4.2a bis 4.3b abgeleitet werden, dass mit steigender Intensität a_L des Hintergrundfeldes L ein stärkerer Impulsaustausch zwischen Positron und dem Feld L einhergeht und sich somit die Plateauregion zu immer größeren Werten von ℓ ausdehnt (vgl. Abb. 4.2a mit 4.3a oder 4.2b mit 4.3b). Dieses Verhalten ist auch bei steigender Energie $\sqrt{s_{XX'}}$ zu erkennen (vgl. Abb. 4.2a mit 4.2b oder 4.3a mit 4.3b), wobei im Spektrum negative Werte von ℓ als Energieabgabe des erzeugten Positrons ans Feld L gedeutet werden können und dementsprechend bei positiven Werten das Positron Energie vom Feld aufnimmt. Folglich ist das Spektrum durch die Ruheenergie des erzeugten Elektron-Positron-Paares in Richtung negativer Werte von ℓ begrenzt, da diese nicht mehr für eine Wechselwirkung mit dem Feld zur Verfügung steht. Für Werte von $\sqrt{s_{XX'}}$ nahe der Erzeugungsschwelle kann dementsprechend das Positron nicht viel Energie an das Hintergrundfeld abgeben und das Plateau scheint sehr abrupt in negativer Richtung ohne eine auslaufende Flanke zu enden. Dies ist in den Abbildungen 4.3a und 4.3b erkennbar. Bei Erhöhung der Laserintensität a_L oder der Gesamtenergie $\sqrt{s_{XX'}}$ breitet sich das Spektrums zwar zu immer größeren, positiven Werten von ℓ im Phasenraum aus, aber die einzelnen Peaks verlieren an Höhe.

Schon an den hier gezeigten Abbildungen lässt sich die in dieser Arbeit verwendete Plausibilitätserklärung der Entstehung der Substrukturen und deren Interpretation darlegen. In Anlehnung an [Sei16] kann davon ausgegangen werden, dass das Elektron-Positron-Paar bei $\ell = 0$, also ausschließlich durch die Wechselwirkung zwischen X Photon und Probephoton X', erzeugt wird. Das heißt, der Beitrag des Hintergrundfeldes L zur Erzeugung eines Paares ist auf Grund der geringen Energie marginal. Das Positron bzw. Elektron propagiert nach der Erzeugung durch das Hintergrundfeld L und wird durch die Interaktion mit diesem zu unterschiedlichen Punkten im Phasenraum verschoben. Diese Interpretation wird im folgenden Kapitel 5 weiter vertieft.

Unterhalb der Schwelle, $\sqrt{s_{XX'}} < \sqrt{s_{thr}}$, fällt der Wirkungsquerschnitt um mehrere Größenordnungen ab und wird vernachlässigbar klein. Um relevante Ergebnisse im Subschwellenbereich zu erhalten, müssen wesentlich höhere Intensitäten a_L voraussetzen werden, da eine große Anzahl von Photonen aus dem Hintergrundfeld benötigt wird, um die benötigte Schwellenenergie bereitzustellen. Folglich nimmt auch der numerische Aufwand enorm zu und ist weiteren separaten Arbeiten vorbehalten.

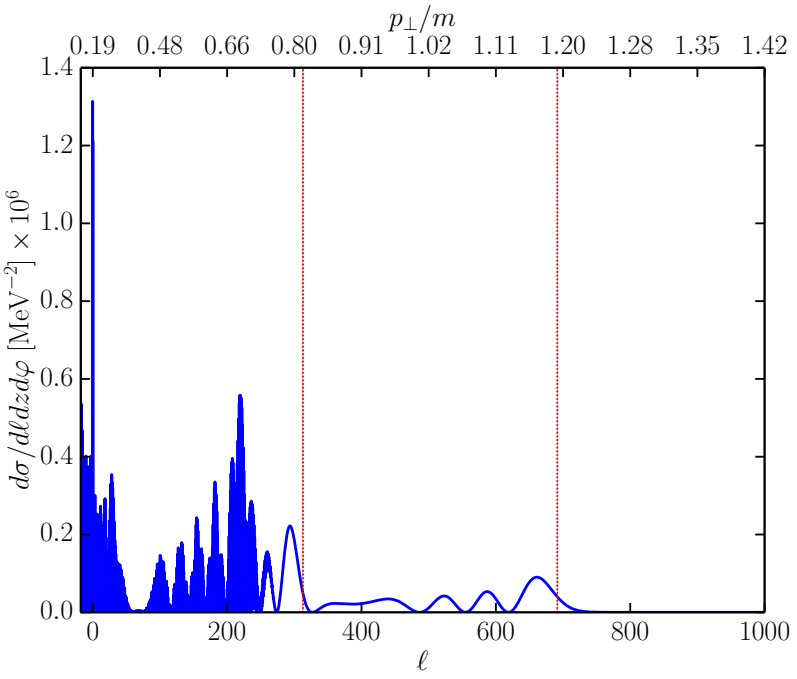


(a)

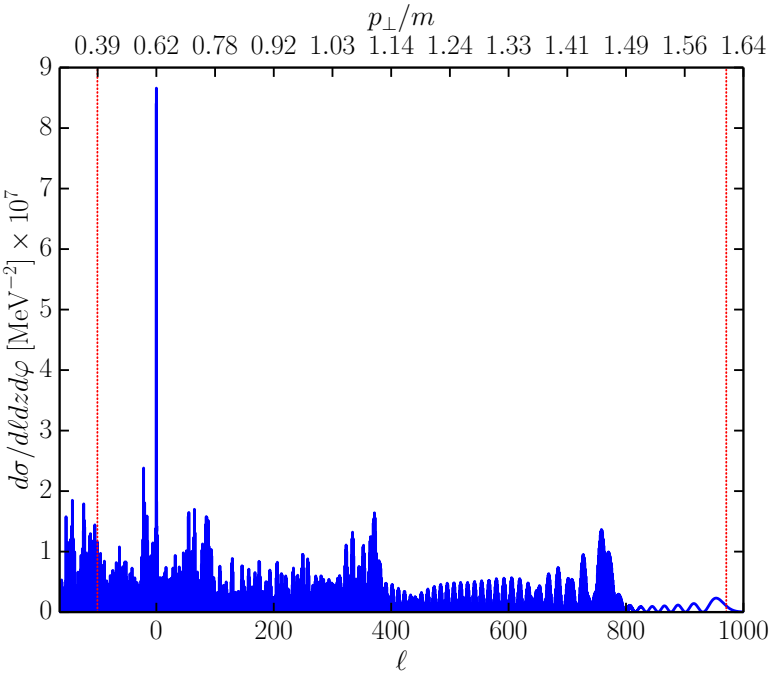


(b)

Abbildung 4.2: Differentielles Spektrum wie in Abbildung 4.1, aber mit unterschiedlichen Werten von $\sqrt{s_{XX'}}$ (oben: $\sqrt{s_{XX'}} = 1.04$ MeV, unten: $\sqrt{s_{XX'}} = 1.2$ MeV) und $a_L = 0.1$. Zu beachten ist die linearen Skala der Ordinate. Die rot-gestrichelten, vertikalen Linien entsprechen den mit (4.19) berechneten cut-off-Werten.



(a)



(b)

Abbildung 4.3: Wie in Abbildung 4.2 für einen Wert von $a_L = 1.0$. Oben: $\sqrt{s_{XX'}} = 1.04$ MeV, unten: $\sqrt{s_{XX'}} = 1.2$ MeV.

4.3 Analyse des differentiellen Wirkungsquerschnitts: Darstellung über der (z, ℓ)-Ebene

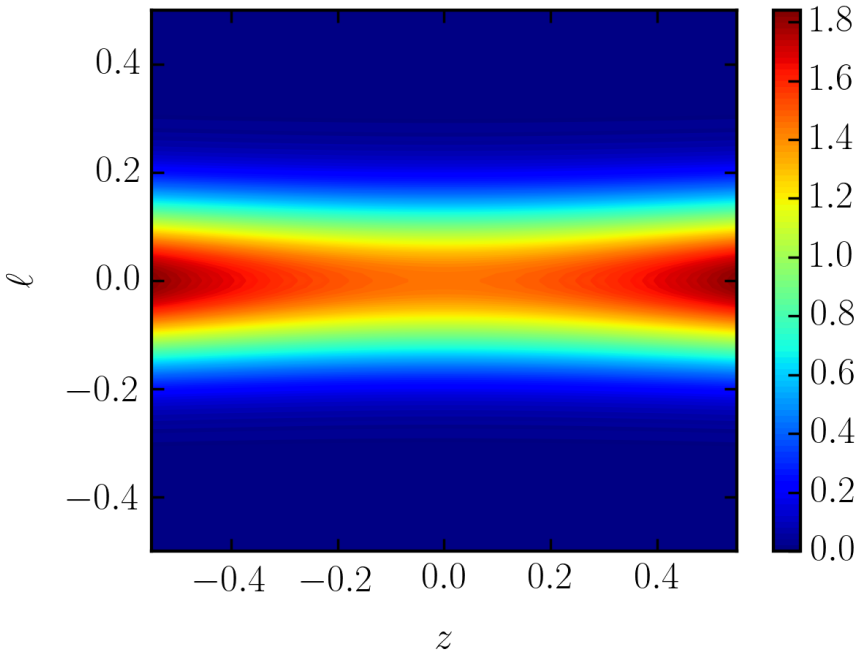
Als nächster Schritt soll der betrachtete Phasenraum um eine Dimension in z-Richtung erweitert werden. Die Ausdehnung in der z-Richtung kann durch die Schwellenbedingung des reinen Breit-Wheeler-Prozesses $\sqrt{s_{XX'}} \geq \sqrt{s_{thr}}$ abgeschätzt werden. Die Bedingung lautet

$$|z| \quad \geq \quad \operatorname{arcosh} \sqrt{\frac{s_{XX'}}{s_{thr}}} \tag{4.22}$$

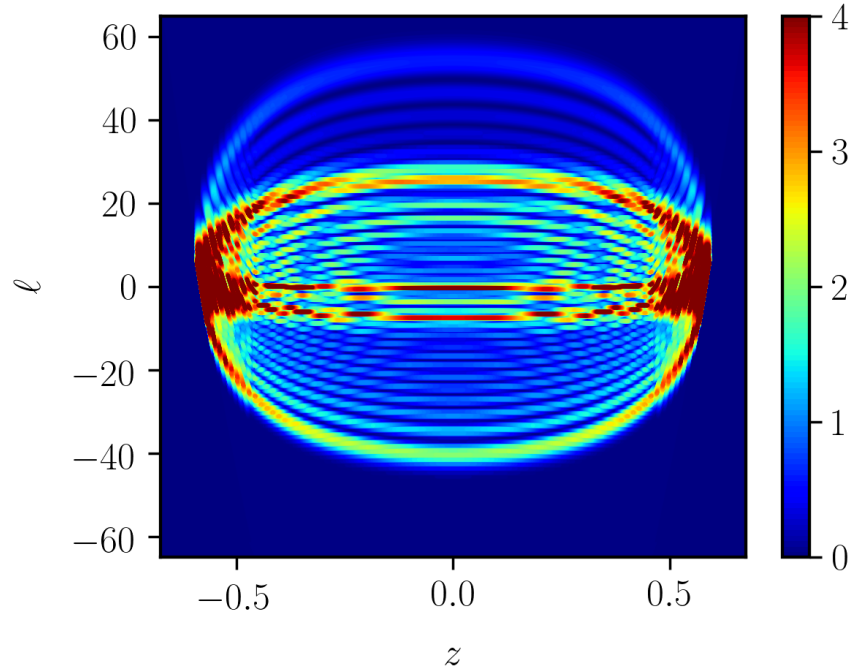
und kann über den Zusammenhang (3.12) an der Stelle $p_\perp = \ell = 0$ hergeleitet werden. In den Abbildungen 4.4a - 4.5b werden Beispiele für die Phasenraumverteilung der erzeugten Positronen in der (z, ℓ)-Ebene bei einem konstanten Azimutalwinkel $\varphi = \pi$ für verschiedene Werte von a_L dargestellt. Schaltet man das Hintergrundfeld L aus oder reduziert die Intensität auf sehr kleine Werte $a_L = \mathcal{O}\left(10^{-10}\right)$, sind Beiträge zum Wirkungsquerschnitt mit einer sehr geringen endlichen Ausdehnung im Phasenraum nur bei $\ell = 0$ zu erwarten (siehe Abbildung 4.4a). Mit zunehmender Intensität werden dementsprechend auch höhere Energien bzw. Impulse zwischen Hintergrundfeld L und Positron ausgetauscht, was zu relevanten Werten des differentiellen Wirkungsquerschnittes für immer größere Werte von ℓ führt. Zudem nimmt auch die Strukturierung des Spektrums zu. Wie schon bei den Schnitten bei $z = 0$, siehe Abschnitt 4.2, ist hier bei allen Werten von z und Intensitäten a_L die Breit-Wheeler-Linie bei $\ell = 0$ deutlich ausgeprägt. Bemerkenswert hierbei ist, dass sich auch in z-Richtung bei konstanten Werten von ℓ ein Plateau ausbildet, wie dies schon in ℓ-Richtung beobachtet wurde, siehe Abschnitt 4.2. Selbst wenn die kinematische Grenze für Werte $\ell > 0$ sich zu

$$|z| \quad \geq \quad \operatorname{arcosh} \sqrt{(1 + \eta\ell)\, s_{XX'}/s_{thr}} \tag{4.23}$$

verschiebt, wird insbesondere bei größeren Werten von a_L das abrupte Ende des Plateaus in z-Richtung bei $z \simeq \pm 0.58$ selbst bei Werten von $\ell \neq 0$ deutlich, siehe Abbildungen 4.5a und 4.5b. Dies hängt zum einen mit der Definition der modifizierten Rapidität z zusammen (siehe 7.4), welche so gewählt wurde, dass etwaige Auszeichnungen des Systems durch die Strahlrichtung des Laserfeldes L ausgeglichen werden und somit eine symmetrische Verteilung um $z = 0$ entsteht. Des Weiteren wird das Positron hauptsächlich durch die Wechselwirkung des Probephotons X' und dem hochfrequenten, linearisierten Feld X, also bei $\ell = 0$, erzeugt. Bei diesem Erzeugungsprozess ist der Wert von z durch (4.22) begrenzt. Durch Wechselwirkung mit dem Hintergrundfeld L erreicht es dann seinen asymptotischen Endzustand.

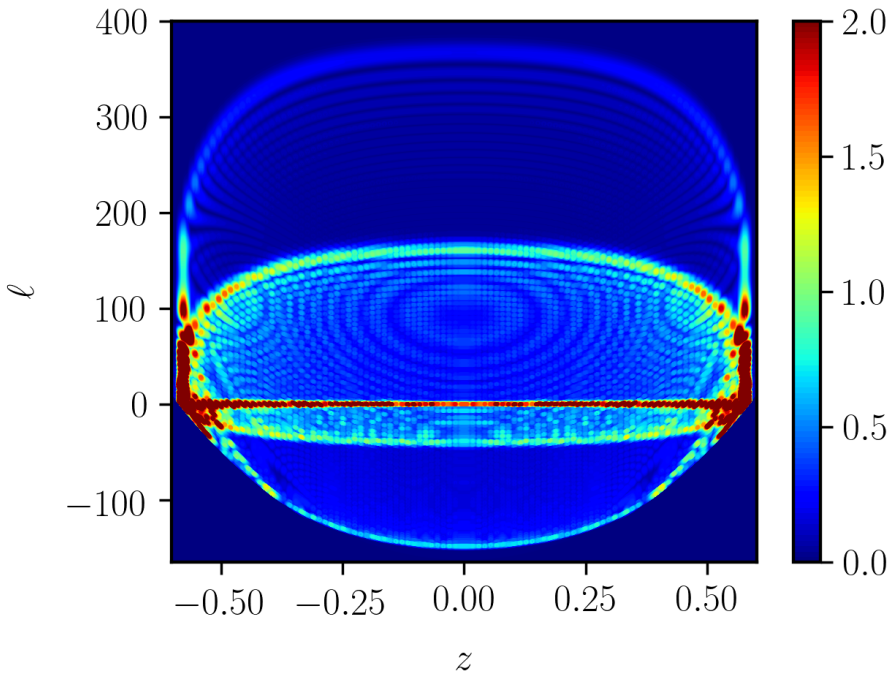


(a)

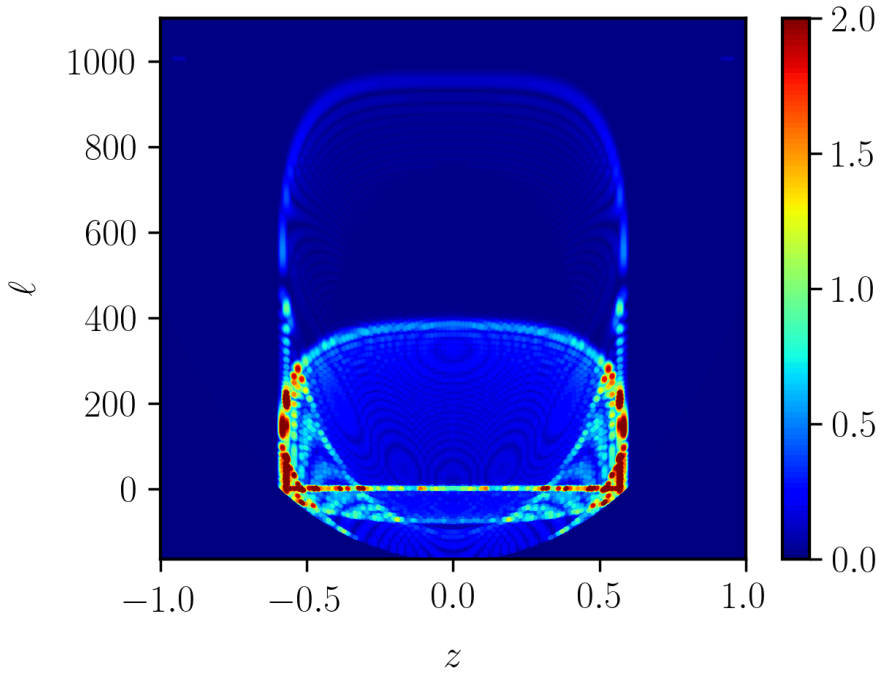


(b)

Abbildung 4.4: Contourplot der Phasenraumverteilung $d\sigma/d\ell dz d\varphi$ des Positrons in Einheiten von MeV^{-2} über einer von z und ℓ aufgespannten Ebene bei konstantem $\varphi = \pi$. Parameter: $\sqrt{s_{XX'}} = 1.2$ MeV, $\eta = 1/600$,$\tau_L = 4\pi$ und $\tau_X = 7/\eta$. Oben: $a_L = 10^{-10}$, Einheiten von $10^{-4} \times \mathrm{MeV}^{-2}$; unten: $a_L = 0.1$, Einheiten von $10^{-6} \times \mathrm{MeV}^{-2}$.



(a)



(b)

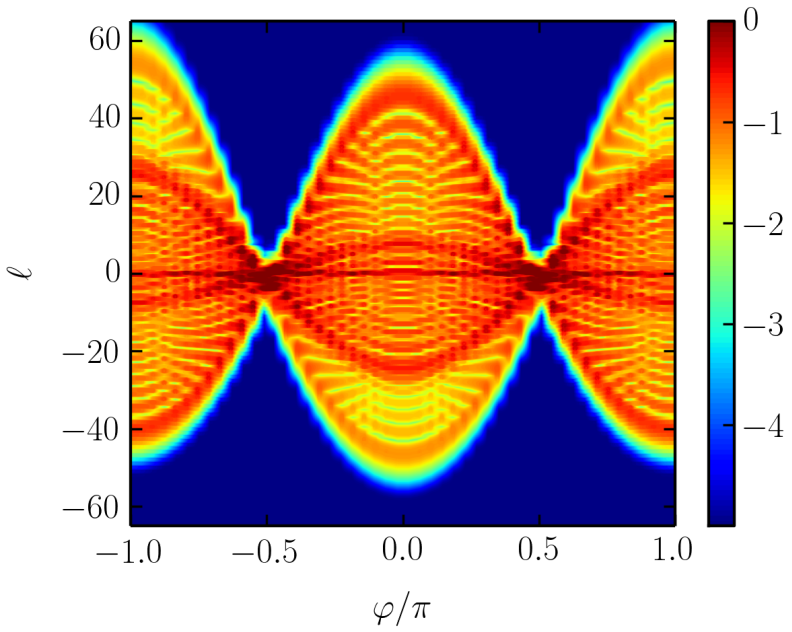
Abbildung 4.5: Wie in Abbildung 4.4 aber für unterschiedliche Werte von a_L. Oben: $a_L = 0.5$, Einheiten von $10^{-6} \times \text{MeV}^{-2}$; unten: $a_L = 1$, Einheiten von $10^{-6} \times \text{MeV}^{-2}$.

Aufgrund der linearen Polarisation des Feldes L, welche senkrecht auf der Strahlachse steht, wird nach der Entstehung eines Positrons, welches hauptsächlich in Strahlrichtung propagiert, die modifizierte Rapidität z nicht mehr wesentlich verschoben. Das heißt, das Positron kann durch Wechselwirkung mit dem Hintergrundfeld hin zum asymptotischen Endzustand zwar noch Impulse senkrecht, nicht aber parallel zur Strahlrichtung aufnehmen.

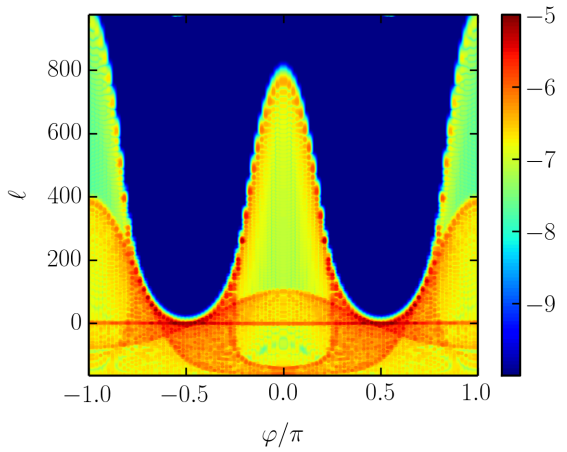
Am Rand der Plateauregion in z-Richtung kann ein weiterer interessanter Effekt beobachtet werden. Bei kleinen Werten von ℓ kommt es zu Überlagerungen der einzelnen Strukturen des Spektrums. Dies führt in diesen Bereichen zur Bildung von „Hot-Spots“, an denen der Wirkungsquerschnitt um bis zu zwei Größenordnungen höher ist als im Vergleich zu Werten von $z \simeq 0$. Eine Interpretation und weitere Analysen dieser „Hot-Spots“ werden im nächsten Kapitel dargelegt.

4.4 Analyse des differentiellen Wirkungsquerschnitts: Darstellung über der (φ, ℓ)-Ebene

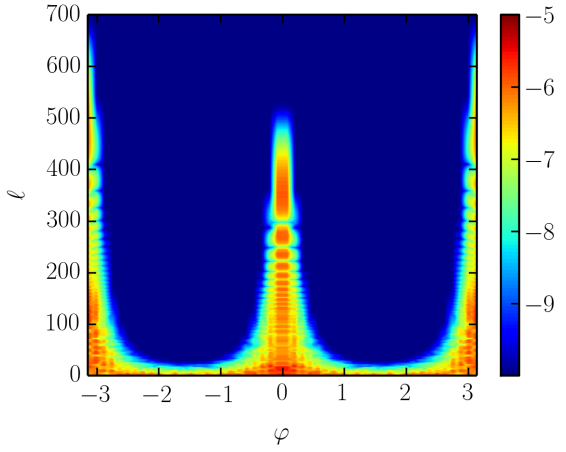
Da die hier betrachteten Felder linear polarisiert sind, soll im Folgenden die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes von der dritten unabhängigen Variable, dem Azimutalwinkel des Positrons φ, untersucht werden. In den Abbildungen 4.6a - 4.6c ist der differentielle Wirkungsquerschnitt in der (φ, ℓ)-Ebene für verschiedene Werte von a_L und $\sqrt{s_{XX'}}$ abgebildet. In allen Abbildungen ist die maximale Ausdehnung des Spektrums in ℓ-Richtung bei $\varphi = \pm\pi$ sichtbar. Das entspricht der entgegengesetzten Polarisationsrichtung des Feldes L. Senkrecht zur Polarisationsrichtung bei $\varphi = \pm\pi/2$ ist ein verringerter Impulsaustausch zwischen Feld und Positron erkennbar. Zwischen diesen markanten Punkten, $\varphi = +\pi/2$ und $\varphi = -\pi/2$, bilden sich die im Folgenden als Austauschzonen bezeichneten Bereiche aus, in denen die Wechselwirkung zwischen erzeugten Positron und Hintergrundfeld L stark ausgeprägt ist. Das Spektrum in den Austauschzonen ist wiederum von markanten Strukturen durchzogen. Dies wird besonders durch die logarithmische Skala des Wirkungsquerschnittes hervorgehoben. In den Abbildungen 4.6a und 4.6b ist die Breit-Wheeler-Linie deutlich wahrnehmbar, wobei sie in Abbildung 4.6c aufgrund der geringen Prozessenergie $\sqrt{s_{XX'}}$ nicht mehr sichtbar ist. Bei solchen Energien nahe der Schwelle werden die Austauschzonen deutlich schmaler (siehe Abbildung 4.6c) und das erzeugte Fermionenpaar kann nur Energie vom Feld aufnehmen und keine an dieses abgeben. Daher existiert an der Schwelle kein relevanter Wirkungsquerschnitt für negative Werte von ℓ. Die feinen Strukturen des Spektrums bleiben jedoch bestehen.



(a)



(b)



(c)

Abbildung 4.6: Contourplot der Phasenraumverteilung $d\sigma/d\ell dz d\varphi$ des Positrons in Einheiten von $10^{-5} \times \mathrm{MeV}^{-2}$ in einer von φ und ℓ aufgespannten Ebene bei konstantem $z = 0$. Parameter: $\eta = 1/600$,$\tau_L = 4\pi$ und $\tau_X = 7/\eta$. Oben: $a_L = 0.1$, $\sqrt{s_{XX'}} = 1.2$ MeV; (b) unten links: $a_L = 1.0$, $\sqrt{s_{XX'}} = 1.2$; (c) unten rechts: $a_L = 1.0$ und $\sqrt{s_{XX'}} = 1.022$ MeV

5 Spektrale Kaustiken

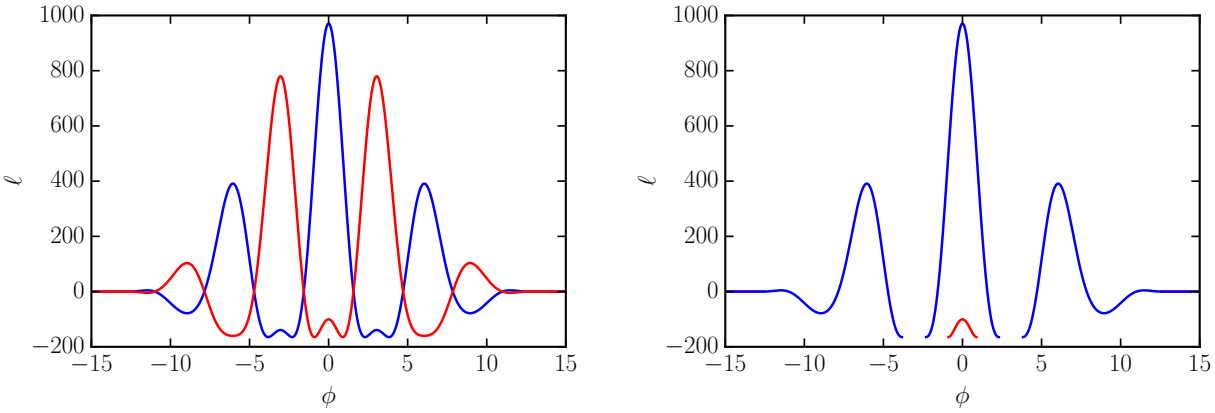
Als nächster Schritt wird ein Interpretationsansatz für die oben erhaltenen Resultate gegeben. Hierfür wird die Methode der stationären Phasenbedingung verwendet, um so das Prinzip der spektralen Kaustiken einzuführen. Anhand verschiedener Schnitte durch den Phasenraum des Positrons werden anschließend die Übereinstimmung mit den numerischen Resultaten, sowie die Grenzen dieser semi-klassischen Interpretation des laser-asisstierten Prozesses dargestellt.

5.1 Stationäre Phasenbedingung

Die Grundlage der hier präsentierten Interpretation ist, dass bei Energien oberhalb der Schwelle $2m$ der relevante Teil der Elektron-Positron-Paare an dem Phasenraumpunkt $\ell = 0$ durch den einfachen Breit-Wheeler-Prozess $X' + X \to e^+ + e^-$ erzeugt wird. Das assistierende Hintergrundfeld L im Gesamtprozess $X' + (X + L) \to e^+ + e^-$ wechselwirkt nach der Erzeugung des Paares mit dem selbigen, wodurch eine Umverteilung im Phasenraum bewirkt wird. Durch den Energieaustausch wird der asymptotische Impuls p_p des Positrons, welcher am Detektor gemessen wird, beeinflusst und damit die finale Position des Positrons und somit auch des Elektrons im Phasenraum festgelegt. Der asymptotische Impuls des Positrons bzw. Elektrons hängt folglich davon ab, für welche momentane Phase ϕ des Hintergrundfeldes das Paar erzeugt wurde. Dementsprechend kann die Beziehung zwischen ϕ und dem asymptotischen Impuls p_p bzw. Energieaustausch ℓ für die Deutung der Substrukturen genutzt werden. Speziell werden die stationären Phasenpunkte betrachtet, da diese, wie schon in Kapitel 4 erwähnt, hauptsächlich zur Produktionswahrscheinlichkeit beitragen. Ausgangspunkt ist folglich Gl. (4.1), welche Null gesetzt werden muss, um die stationären Punkte zu bestimmen:

$$0 \quad = \quad \eta\ell + \alpha_L(\ell, z, \varphi)\,\Omega(\phi) + \beta_L(z)\,\Omega^2(\phi) \tag{5.1}$$

mit $\Omega(\phi) = g_L(\phi)\cos(\phi)$. Wird (5.1) nach ℓ aufgelöst erhält man eine quadratische Gleichung mit den Lösungen



(a) **(b)**

Abbildung 5.1: Abhängigkeit des Energietransfers ℓ von der invarianten Laserphase ϕ für die Parameter $a_L = 1$, $a_X = 10^{-5}$, $\sqrt{s_{XX'}} = 1.2$ MeV, $\eta = 1/600$, $\tau_L = 4\pi$ und $\tau_X = 7/\eta$ und konstanten Azimutalwinkel $\varphi = \pi$. Die rote Kurve beschreibt die Lösungen $\ell_- (\phi)$ und die blaue Kurve die Lösungen $\ell_+ (\phi)$. Links: Mit „Scheinlösungen“, rechts: ohne „Scheinlösungen“.

$$\begin{aligned} \ell_\pm (\phi) &\equiv \ell_\pm (\phi; z, \varphi) \\ &= \frac{\beta_L (z)\, \Omega (\phi)}{\eta} \left[\left(2\cos^2\varphi - 1 \right) \Omega (\phi) \pm 2\cos\varphi \sqrt{\frac{1}{\beta_L (z)} - \frac{1}{a_L^2} - \Omega^2 (\phi) \sin^2\varphi} \right]. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Ein Beispiel für die Funktionen $\ell_\pm (\phi)$ ist in Abbildung 5.1a dargestellt. Es sei hier angemerkt, dass nicht alle Funktionswerte $\ell_\pm$ der Funktionen (5.2) zu Lösungen von (5.1) führen. Die quadratische Natur der Gleichung erzeugt bei der Auflösung auch „Scheinlösungen“, für die kein Wert von ϕ existiert, sodass (5.1) erfüllt wird. Um alle realen Lösungen von den „Scheinlösungen“ zu trennen wird die Gleichung (5.1) nach Ω umgestellt und die ℓ-Abhängigkeit untersucht. Es ergeben sich die Funktionen

$$\Omega_\pm (\ell) = \sqrt{\frac{\eta\ell}{\beta_L} + \frac{1}{\beta_L} - \frac{1}{a_L^2}} \pm \sqrt{\frac{1}{\beta_L} - \frac{1}{a_L^2}}. \tag{5.3}$$

Werden folglich die Lösungen $\ell_\pm (\phi)$ in die Funktionen (5.3) eingesetzt und die Resultate mit $\Omega (\phi)$ verglichen, können die „Scheinlösungen“ von den realen Lösungen separiert werden.

In Abbildung 5.1b sind alle Werte von (5.2) abgebildet, die ausschließlich zu realen stationären Punkten führen. Dabei steht die blaue Kurve für die Lösungen $\ell_+ (\phi)$ und die rote Kurve für die Lösungen $\ell_- (\phi)$.

Im Kreuzkanal, dem Laser-assistierten Compton-Effekt, treten solche „Scheinlösungen“

nicht auf [Sei16]. Man erhält für diesen Prozess eine lineare Gleichung mit der Lösung

$$\ell_{CE}(\phi) = \frac{1}{\eta}\left(\frac{k' \cdot p_0}{k' \cdot \pi_e(\phi)} - 1\right) \tag{5.4}$$

mit dem Viererimpuls k' des gestreuten Photons, dem kinetischen Viererimpuls $\pi_e(\phi)$ eines Elektrons in einem Laserpuls, und dem Viererimpuls p_0 des Elektrons, bevor es mit dem Laserpuls wechselwirkt. Dieser Unterschied folgt aus der relativistischen Kinematik eines massiven Teilchens im Endzustand für den Breit-Wheeler-Prozess, anstatt eines masselosen Photons bei der Compton-Streuung.

Schließlich kann der Zusammenhang der spektralen Kaustiken mit den cut-off-Werten abgeleitet werden. Die globalen Maxima der blauen bzw. roten Kurve in Abbildung 5.1b stimmen mit den in Abschnitt 4.1 berechneten cut-off-Werten erster Art überein, was die Frage nach der Bedeutung der Nebenmaxima aufwirft. Dies soll im folgenden Abschnitt erörtert werden.

5.2 Numerische Resultate und spektrale Kaustiken

Der Begriff der Kaustik findet seine Anwendung vorwiegend in der Optik. Dort bezeichnet er eine Brennlinie oder Brennfläche, die durch Bündelung von Lichtstrahlen in einem bestimmten Bereich erzeugt werden. Bekannte Beispiele aus dem Alltag sind der Regenbogen oder auch die Lichtbrechungen durch ein Wasserglas, wie in Abbildung 5.2 dargestellt.

Abbildung 5.2: Optische Kaustiken als Regionen deutlich erhöhter Intensität im Ortsraum erzeugt durch Lichtbrechung an einem Wasserglas.

Mathematisch analysiert und generalisiert wird das Phänomen der Kaustik in der Katastrophentheorie [Kra93, Ber80]. Optische Kaustiken können durch unebene, ungleichmäßig gekrümmte Wellenfronten, welche beispielsweise durch Brechung oder Reflexion an unebenen Flächen erzeugt werden, entstehen. Charakteristisch für Kaustiken ist, dass die Konzentration (Intensität) von Lichtstrahlen von einer Seite, senkrecht zum Verlauf der Kaustik, bis zu einer scharfen Begrenzung steil ansteigt, während sie zur anderen Seite sanft ausläuft. In Anlehnung an diese Definition soll in diesem Kapitel der Begriff der Kaustik genutzt werden, um die Interpretation der Substrukturen, welche im vorhergehenden Kapitel eingeführt wurde, weiter zu entwickeln.

In den Abbildungen 5.3 bis 5.5 werden im jeweiligen oberen Diagramm (blaues Spektrum) numerische Beispiele für den dreifach-differentiellen Wirkungsquerschnitt $d^3\sigma/d\ell dz d\varphi$ der Positronproduktion gezeigt. Wie schon in Abschnitt 4.2 werden Schnitte durch den Pha-

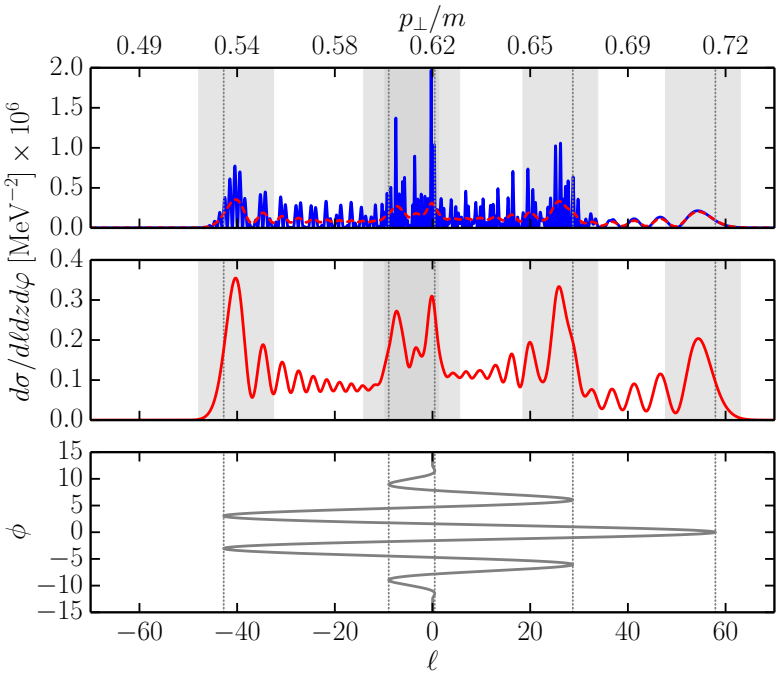


Abbildung 5.3: Spektrum des laser-assistierten Breit-Wheeler-Prozesses bei konstanten $z = 0$ und $\varphi = \pi$ mit den Parametern $a_L = 0.1$, $a_X = 10^{-5}$, $\sqrt{s_{XX'}} = 1.2$ MeV, $\eta = 1/600$, $\tau_L = 4\pi$ und $\tau_X = 7/\eta$. Oberes Diagramm: $d\sigma/d\ell dz d\phi$ als Funktion von ℓ (untere Achse; die korrespondierenden Werte von $p_\perp$ sind an der oberen Achse gegeben). Das dargestellte Spektrum (blaue Kurve) ist wie in Kapitel 4 berechnet worden und ist hier mit einer Gaußschen-Glättungskurve mit einer Breite von $\delta\ell = 0.8$ (rote Kurve) gefaltet worden. Mittleres Diagramm: Die Glättungskurve einzeln dargestellt. Unteres Diagramm: Die Phase ϕ als Funktion von ℓ wie in (5.2) berechnet. Die vertikal gepunkteten Linien zeigen die Positionen der Ableitung $d\phi/d\ell$ an der Stelle, wo zwei Zweige von $\phi(\ell)$ auseinander laufen. Die grauen Flächen kennzeichnen die geschätzte Breite der kaustischen Regionen.

senraum des Positrons bei konstanten $z = 0$ und $\varphi = \pi$ betrachtet. Es handelt sich dabei um die vollen QED Ergebnisse, basierend auf den in Kapitel 4 hergeleiteten Formeln. Im mittleren Diagramm (rote Kurve) wird das QED Spektrum mit einer Glättungsfunktion gefaltet. Für die Glättung wurde eine Gaußfunktion mit der Breite $\delta\ell = 0.8$ verwendet. Die Glättung des Spektrums kann zum Einen als endliche Detektorauflösung betrachtet werden und zum Anderen hilft sie, den Aufbau der Strukturen hervorzuheben und diese zu deuten. Auch das geglättete Spektrum ist durch eine nicht-triviale Struktur geprägt und beinhaltet ausgeprägte Peaks. Im unteren Diagramm ist die Umkehrung von (5.2) $\phi_\pm(\ell)$ dargestellt. Sie ist nicht eindeutig. Folglich können Positronen, die mit einem bestimmten Energieübertrag ℓ am Detektor ankommen zu verschiedenen „Zeitpunkten“ ϕ erzeugt worden sein.

Während die Entstehung des Plateaus in Abschnitt 4.2 betrachtet wurde, sollen im Folgenden die stark ausgeprägten Substrukturen des QED Spektrums im Rahmen des semi-

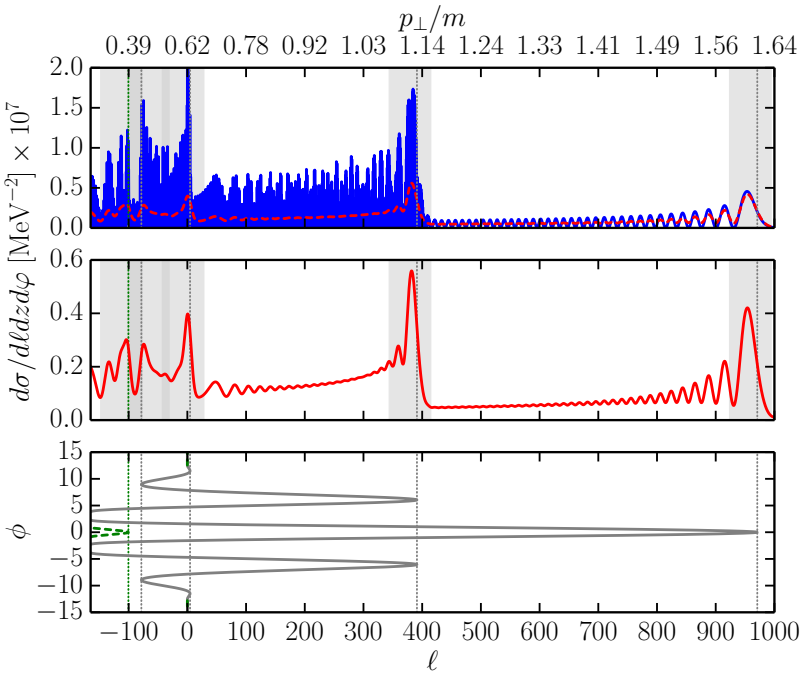


Abbildung 5.4: Wie Abbildung 5.3, aber mit $a_L = 1.0$ und $\delta\ell = 5$. Im unteren Diagramm ist neben der „−“-Lösung (graue Linie) auch die „+“-Lösung (grün-gestrichelte Linie) zu sehen. Das abrupte Abbrechen der Kurven am linken Rand in den Diagrammen wird durch die Bedingung $p_\perp = 0$ bestimmt.

klassischen Bildes interpretiert werden. Wird in den Abbildungen 5.3 bis 5.5 die oberen Diagramme, d.h. das QED Spektrum, mit dem unteren Diagrammen, d.h. die Relation $\phi_\pm(\ell)$ verglichen, kann festgestellt werden, dass für verschiedene Werte von ℓ unterschiedlich viele Phasenpunkte ϕ zum Wert des Integrals und damit zum Wirkungsquerschnitt beitragen. Die Beiträge der unterschiedlichen Phasenpunkte zur Streumatrix interferieren miteinander und somit entsteht das stark oszillierende Verhalten des QED Spektrums. Tragen beispielsweise nur zwei Phasenpunkte an einer bestimmten Stelle ℓ zum Integral in der Streumatrix bei (z. B. Abbildung 5.4 um $\ell \approx 400$ bis $\ell \approx 1000$), wird eine einfache, dem Kosinus ähnliche Oszillation erzeugt. Mit steigender Anzahl an beteiligten Phasenpunkten steigt dementsprechend die Komplexität des Spektrums, da sich mehrere Oszillationsperioden überlagern. Als Beispiel dafür werden in den einzelnen Diagrammen von Abbildung 5.6 vergrößerte Ausschnitte aus dem QED-Spektrum von Abbildung 5.5 gezeigt. Es ist deutlich zu erkennen, wie die Komplexität der überlagerten Oszillationsperioden mit steigender Anzahl interferierender Phasenpunkte zunimmt. Während im unteren Diagramm der Abbildung 5.6 die kosinus-ähnliche Schwingung erkennbar ist, sind im mittleren Diagramm die Überlagerungen mehrerer Schwingungen deutlich sichtbar. Im oberen Diagramm sind die Überlagerungen so vielfältig, dass die einzelnen Schwingungen kaum noch zu erkennen sind.

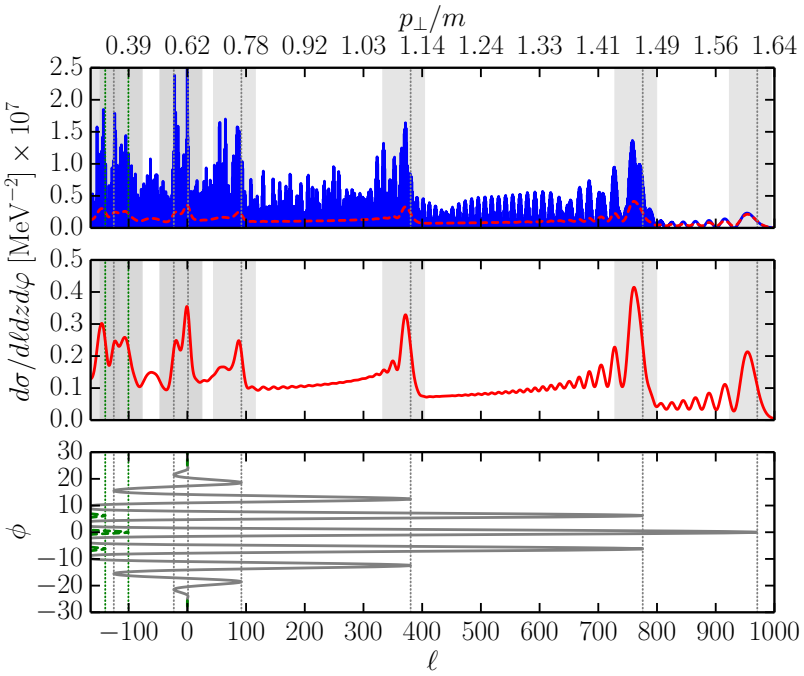


Abbildung 5.5: Wie in Abbildung 5.4 aber mit einer längeren Pulsdauer von $\tau_L = 8\pi$ und $\tau_X = 14/\eta$, was zu einer Erhöhung der Anzahl von Kaustiken führt.

Als nächstes sollen die großen, hervorstechenden Peaks betrachtet werden. Diese werden im Folgenden als spektrale Kaustiken bezeichnet. Die spektralen Kaustiken entstehen, wenn zwei stationäre Punkte verschiedener Zweige der Relationen $\phi_\pm(\ell)$ auf einen Punkt zusammenfallen und somit die Tangente an dieser Stelle senkrecht verläuft. An diesen Verzweigungspunkten ähnelt der Verlauf des Spektrums dem der aus der Optik bekannten Kaustiken des sogenannten „Fold"- Typs (A_2) [Kra83]. Diese verhalten sich wie Airy-Funktionen, welche die Intensitätsverteilung in der Umgebung optischer Kaustiken beschreiben [Kra83]. Besonders gut ist diese Übereinstimmung an den äußersten cut-off-Werten zu erkennen, da dort nur die Kaustik zum Spektrum beiträgt. Bei allen anderen Peaks überlagern sich kaustische sowie nicht-kaustische Beiträge. Hierbei werden die nicht-kaustischen Beiträge von den anderen stationären Punkten erzeugt, welche auf den parallel verlaufenden Zweigen der Relationen $\phi_\pm(\ell)$ zu erkennen sind. Durch Glättung des QED-Spektrums, siehe mittlere Diagramme in den Abbildungen 5.3 bis 5.5, können die kaustischen Eigenschaften des Spektrums hervorgehoben werden. Bei ausreichend großem Abstand zwischen den einzelnen Kaustiken ist der charakteristische Verlauf deutlich sichtbar, während bei eng nebeneinander liegenden Kaustiken die einzelnen kaustischen Peaks kaum noch voneinander zu unterscheiden sind. Eine Abschätzung für die Breite der Kaustik, die kaustische Zone, kann durch die Universalität der kaustischen Eigenschaften mittels $\Delta\ell = (a_L/\eta)^{2/3}$ angegeben werden. In

den Abbildungen 5.3 bis 5.5 sind diese kaustischen Zonen durch graue Flächen gekennzeichnet. Je mehr die kaustischen Zonen überlappen, desto weniger sind die einzelnen Kaustiken unterscheidbar. Besonders deutlich wird dies in der Abbildung 5.5 am linken Rand.

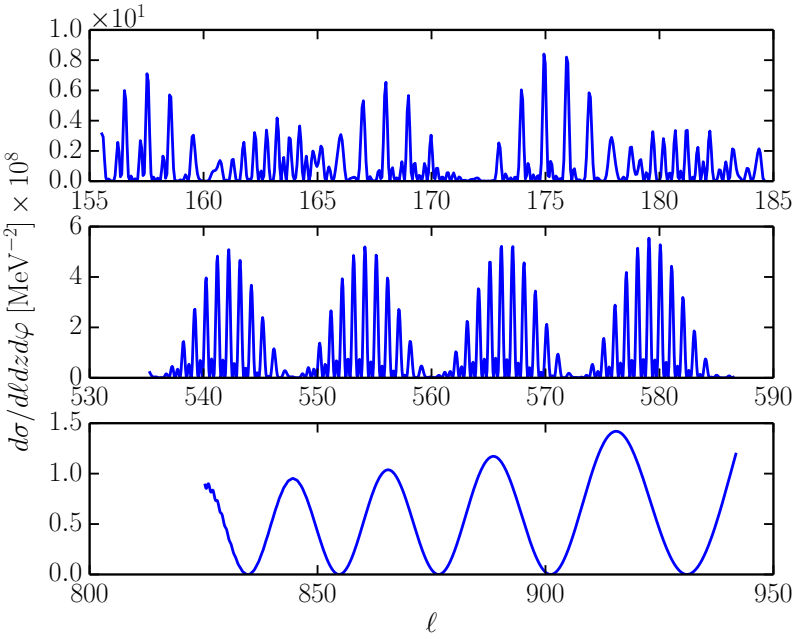
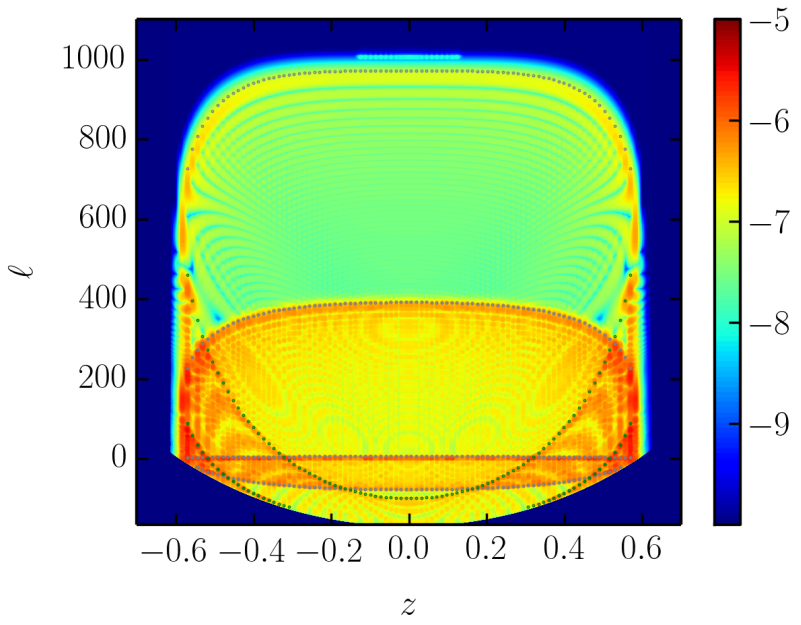


Abbildung 5.6: Vergrößerte Ausschnitte des Spektrums von Abbildung 5.5 für unterschiedliche Bereiche von ℓ.

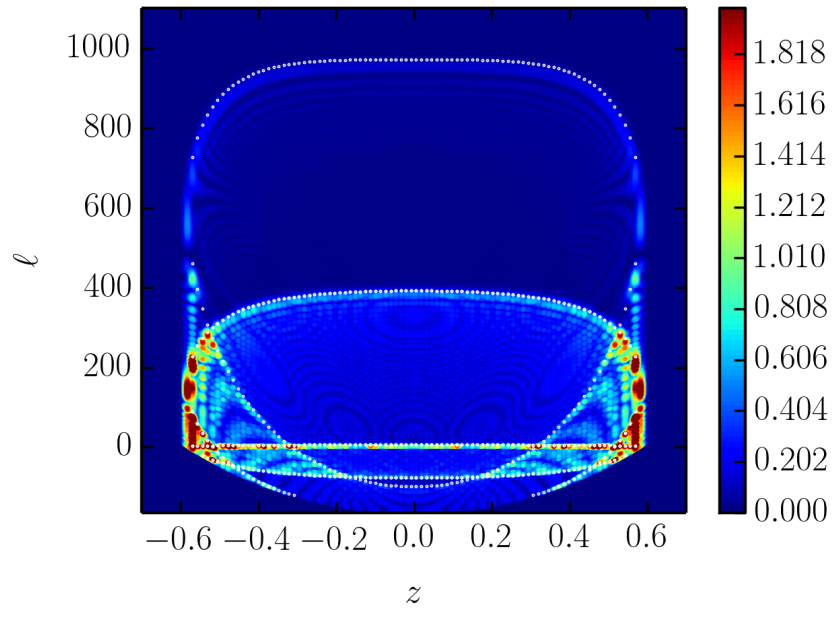
Der Einfluss der Pulslänge τ_L wird ersichtlich, wenn man die unteren Diagramme der Abbildungen 5.4 und 5.5 miteinander vergleicht. Der kürzere Puls hat weniger Kaustiken, welche relativ deutlich voneinander unterscheidbar sind. Somit sind die Kaustiken auch im QED-Spektrum gut zu erkennen. Bei einem längeren Puls, treten mehr Zweige in der Funktion $\phi_\pm(\ell)$ auf und somit auch mehr Kaustiken. Im unteren Wertebereich von ℓ liegen die Kaustiken dicht nebeneinander und sind somit kaum voneinander zu unterscheiden. Mit steigender Pulslänge nimmt dieser Trend zu, und der kaustische Interpretationsansatz verliert zunehmend an Aussagekraft.

5.3 Kaustiken in der (z, ℓ)-Ebene

Abschließend soll in diesem Abschnitt der betrachtete Phasenraum um die z-Ebene erweitert werden und aus der Sicht des oben entwickelten Interpretationsansatzes der spektralen Kaustiken untersucht werden. In Abbildung 5.7 sind für einen speziellen Parametersatz ein Contourplot der Phasenraumverteilung $d\sigma/d\ell dz d\varphi$ des Positrons über einer von z und ℓ aufgespannten Ebene bei konstantem $\varphi = \pi$ zu sehen. Außerdem wurden für alle Werte des betrachteten Ausschnitts die Kaustiken berechnet und als gepunktete Kurve dargestellt. Um den Verlauf der einzelnen Kaustiken hervorzuheben, ist in Abbildung 5.7a eine logarithmische Darstellung des Wirkungsquerschnittes gewählt worden. In dieser Abbildung ist zu erkennen, wie sich über die gesamte Ausdehnung in z-Richtung die einzelnen, oszillierenden Strukturen bis zur finalen Kaustik aufschwingen, um dann rapide abzufallen. Am Rand des relevanten Phasenraums überlagern sich die einzelnen Kaustiken konstruktiv und bilden die hier als „Super"-Kaustiken bezeichneten Peak-Strukturen bei Werten von $z \simeq \pm 0.58$ und $0 < \ell < 200$. Um die Relevanz dieser „Super"-Kaustiken zu unterstreichen, ist in Abbildung 5.7b eine lineare Darstellung des Wirkungsquerschnittes mit denselben Parametern wie in Abbildung 5.7a gezeigt. Hier wird vor allem deutlich, dass sich an den Schnittpunkten der einzelnen Kaustiken besonders hohe Peaks des Wirkungsquerschnittes bilden, was für ein experimentellen Versuchsaufbau sehr relevant sein kann, da hier die Produktionswahrscheinlichkeit für ein Elektron-Positron-Paar um bis zu $\mathcal{O}(2)$ erhöht ist. Dies bedeutet aber auch, dass die Wahrscheinlichkeit ein Positron zu detektieren, parallel und anti-parallel zur Strahlrichtung am größten ist. Dies ist aus experimenteller Sicht von Nachteil, da die Fermionenpaare über ausreichend starke Magnete von der Laserstrahlrichtung hin zum Detektor abgelenkt werden müssen. Dennoch sollten diese Effekte in künftigen experimentellen Untersuchungen beachtet werden, um möglichst effiziente Versuchsaufbauten realisieren zu können.



(a)



(b)

Abbildung 5.7: Contourplot der Phasenraumverteilung des Positrons über einer von z und ℓ aufgespannten Ebene bei konstantem $\varphi = \pi$. Parameter: $a_L = 1$, $\sqrt{s_{XX'}} = 1.2$ MeV, $\eta = 1/600$, $\tau_L = 4\pi$ und $\tau_X = 7/\eta$. Oben: $\log(d\sigma/d\ell dz d\varphi)$ in Einheiten von MeV^{-2}, unten: $d\sigma/d\ell dz d\varphi$ in Einheiten von $10^{-6} \times \mathrm{MeV}^{-2}$. Die grau und grün punktierten Kurven kennzeichnen den Verlauf der kaustischen Peaks.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden der laser-assistierte Breit-Wheeler-Prozess eingeführt und differentielle Spektren unter verschieden physikalischen Randbedingungen analysiert. Einleitend wurde die nicht-lineare Breit-Wheeler-Paarerzeugung zwischen einem hochenergetischen Photon und einer intensiven, gepulsten ebenen Laserwelle untersucht. Hierbei wurden, im Gegensatz zu früheren Veröffentlichungen, vor allem zirkular polarisierte Laserfelder betrachtet und das mathematische Vorgehen zur Auswertung des Streumatrixelementes dargelegt. Es wurden differentielle sowie totale Produktionswahrscheinlichkeiten berechnet und mit dem bekannten Grenzfall der unendlich ausgedehnten Laserwelle verglichen, welcher ebenso in der Arbeit dargestellt wurde. Darauf folgend wurde der laser-assistierte Breit-Wheeler-Prozess definiert und untersucht. Es ist eine einhüllende Funktion definiert worden, mit welcher das Vektorpotential des elektromagnetischen Feldes des optischen Lasers L sowie des assistierenden hochfrequenten Lasers X modelliert wurde. Für die Auswertung des Streumatrixelementes $\mathcal{S}$ wurde ein semiklassischer Ansatz gewählt, indem das resultierende Laserfeld $L + X$ als „klassisches" Hintergrundfeld exakt beschrieben werden konnte. Das Streumatrixelement wurde bezüglich der Intensität des X-Feldes linearisiert. Der differentielle Wirkungsquerschnitt wurde hergeleitet und es wurde ein spezielles Bezugssystem gewählt, in welchem der Impulsübertrag ℓ, der Azimutalwinkel φ, sowie die neu eingeführte modifizierte Rapidität z als unabhängige Variablen genutzt wurden.

Es wird gezeigt, dass die differentiellen Spektren des Wirkungsquerschnitts durch Details der Pulsform des Lasers markant modifiziert werden. Dies wird am deutlichsten erkennbar in der transversalen Impulsverteilung bei konstanter Geschwindigkeit, genauer gesagt, bei den speziellen Werten der modifizierten Rapidität, $z = 0$, und konstanten Azimutalwinkel φ des Positrons. Dem folgend wurde der betrachtete Phasenraum bei konstanten φ in z-Richtung, sowie bei konstanten z in φ-Richtung erweitert, um die strukturellen Eigenschaften des Spektrums in Abhängigkeit der Rapidität zu erörtern. Hierbei wurden starke Überlagerungen am Rand der physikalischen Ausdehnung in z-Richtung beobachtet. Diese Phänomene können einer Wechselwirkung der erzeugten geladenen Teilchen mit dem Laserfeld zugeschrieben werden. Anders formuliert, die quasi-klassische Bewegung unter Berücksichtigung von Interferenzeffekten bietet einen Schlüssel für die prägnanten Merkmale der Spektren. Auf der einen Seite ist die Manifestation der Trajektorien nicht so überraschend, da die Phase der

verwendeten Volkow-Lösungen für die $e^{\pm}$ Wellenfunktionen die klassische Hamilton-Jacobi-Wirkung codiert. Auf der anderen Seite ist die Faltung mit anderen kinematischen Größen des quadratischen Matrixelements nicht so stark, um diese Trajektorieninformation zu zerstören. Die Interpretation der Reihe verschiedener Peaks als spektrale Kaustik, analog zur laser-assistierten Compton-Streuung von Röntgenstrahlen, ist semiquantitativ, da offensichtlich starke Interferenzeffekte der quantenmechanischen Ausbreitung von bestimmten Phasenpunkten im Allgemeinen für die hochgradig nicht-triviale finale Impulsverteilung verantwortlich sind. Dazu gehören die in den Contourplots beobachteten Überlagerungen der einzelnen spektralen Kaustiken, welche folglich als „Super"-Kaustik interpretiert wurden.

In dem in dieser Arbeit verwendeten Formalismus zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes des laser-assistierten Breit-Wheeler-Prozesses wurden für die ebenfrontigen, klassischen Hintergrundfelder L und X, sowie für das Probephoton-Feld spezielle Annahmen getroffen. Diese reduzieren maßgeblich den komplexen analytischen, sowie numerischen Aufwand. Im Einzelnen handelt es sich um folgende Punkte:

1. es wurden ausschließlich gegenläufigen Strahlen betrachtet,
2. das Laserfeld L propagiert parallel zum XFEL-Feld X, und
3. die Polarisationen von L und X sind zueinander orthogonal.

Die Frequenzen der Felder L und X stehen im Verhältnis $1:600$ zueinander. Somit konnte ein realistischer Parameterbereich analysiert werden. Zusätzlich wurden die verschiedenen Pulsformen der Felder L und X so gewählt, dass deren Eigenschaften eine möglichst einfache numerische Handhabung erlauben und nur geringfügige Nebeneffekte auftreten. Die hier genannten Annahmen und Vereinfachungen können in dem zur Berechnung der Paarerzeugungswahrscheinlichkeit bzw. des Wirkungsquerschnittes entwickelten Programmcode und der damit verbundene Software-Bibliothek leicht modifiziert werden. Demzufolge können weitergehende Verallgemeinerungen einfach implementiert und analysiert werden. Davon ausgenommen ist die Linearisierung des XFEL-Feldes X. Diese wurde analytisch vorgenommen und ist im Programmcode fest verankert. Für eine derartige Verallgemeinerung müssten große Teile der entwickelten Software-Bibliothek maßgeblich modifiziert bzw. neu erstellt und implementiert werden.

Trotz der oben genannten Vereinfachungen und Spezialisierungen sind die gezeigten Unterschiede zwischen dem laser-assistierte Breit-Wheeler Prozess für gepulste, starke Laserfelder und dem perturbativen Breit-Wheeler-Prozess, der mittels der perturbativen QED berechnet wird, eminent. Zu entsprechenden Resultaten kamen auch Untersuchungen des laser-assistierten Compton-Prozesses, wobei der Compton-Prozess durch Crossing-Symmetrien mit dem Breit-Wheeler-Prozess verbunden ist.

Eine Kombination von Compton- und Breit-Wheeler-Prozessen führt zum Trident-Prozess, symbolisch als Reaktion $L + e^- \rightarrow e^- + e^- + e^+$ bzw. $L + X + e^- \rightarrow e^- + e^- + e^+$ darstellbar. In zukünftigen Arbeiten sollte deshalb der Trident-Prozess mit analogen Methoden tiefergehend analysiert werden. Damit müsste auch die Erzeugung des hochenergetischen Probephotons durch nicht-lineare Compton-Streuung in die Forschung mit einbezogen werden. Dabei könnten ähnliche Impulssignaturen entstehen wie die hier beobachteten, die ebenfalls als spektrale Kaustiken interpretiert werden könnten. Entsprechende Experimente sind mit den von der HIBEF-Kollaboration geplanten Einrichtungen möglich.

Die in dieser Arbeit genutzten Volkov-Lösungen für die Wellenfunktion des Elektrons bzw. Positrons beschränken den genutzten Formalismus auf ebenfrontige, klassische Hintergrundfelder mit einen Vierer potential $A_\mu(\phi)$, welches nur von der invarianten Phase $\phi = k \cdot x$ abhängt. Eine Verallgemeinerung auf fokussierte Laserstrahlen, d.h. nicht-ebenfrontige Wellen, sollte in zukünftigen Untersuchungen in Betracht gezogen werden. Dabei ist eine signifikante Zunahme der Komplexität und des numerischen Aufwands zu erwarten. Die vorliegende Arbeit kann für eine solche Untersuchung als zuverlässige Referenz dienen.

Die Analysen der hier beobachteten nicht-linearen Phänomene der QED haben außerdem eine grundlegende Bedeutung bei der Bildung von QED-Kaskaden [Bel08], welche in hochintensiven Laserfeldern in der Nähe der Sauter-Schwinger-Schwelle vermutet werden. Folglich wären Untersuchungen des Überganges vom hier betrachteten Breit-Wheeler-Regime zu Prozessen wie dem reinen Schwinger-Effekt, bzw. dem dynamisch assistierten Schwinger-Effekt [Ott15] von großer Relevanz.

7 Anhang

7.1 Notation und Konventionen

Hier werden einige Notationen und Konventionen deklariert, welche in der vorliegenden Arbeit benutzt werden. Alle Berechnungen wurden in natürlichen Einheiten mit $c = \hbar = 1$ vollzogen. Die Feinstrukturkonstante ist durch $\alpha = e^2/4\pi$ gegeben. Für einen beliebigen Punkt in der Raumzeit wird die kontravariante Vierervektorkonvention

$$x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (t, \mathbf{x}) = (t, x, y, z)\,, \tag{7.1}$$

mit den räumlichen Komponenten $\mathbf{x}$ verwendet. Das Skalarprodukt wird durch einen Punkt

$$x \cdot p = x^\mu p_\mu = x^0 p^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} \tag{7.2}$$

gekennzeichnet. Der Metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ ist in kartesischen Koordinaten gegeben durch

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7.3}$$

Es wird die Konvention

$$\not{p} = \gamma_\mu p^\mu \tag{7.4}$$

verwendet mit den Dirac-Matrizen γ^μ. Es ergibt sich der Antikommutator $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu}$.

7.2 Der semiklassische Ansatz

Die Bewegung eines Elektrons mit der Ladung $q = -e$, der Vierergeschwindigkeit u^μ und der Masse m, welches sich in einem starken, elektromagnetischen Feld (z. B. erzeugt von einem Laser) befindet, wird nach klassischer Theorie durch die Lorentz-Gleichung

$$m\frac{du^\mu}{ds} = -eF^{\mu\nu}u_\nu \tag{7.5}$$

beschrieben. Hierbei ist $F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$ der Feldstärketensor, der sich aus dem Vierpotentialen A^μ bestimmen lässt, und $ds = dt/\gamma$ die Eigenzeit mit γ als Lorentz-Faktor. Insbesondere in einer ebenen, elektromagnetischen Welle vollführt das Elektron schnelle, oszillierende Bewegungen transversal zur Ausbreitungsrichtung der Welle.

Aus der Sicht der Quantenmechanik besteht Laserlicht aus vielen Photonen. Das heißt, es handelt sich nicht, wie im Klassischen, um eine reine Welle, sondern vielmehr um einzelne Quanten. Diese wechselwirken mit dem Elektron und verursachen somit dessen transversale Bewegung im Feld. Um diese Wechselwirkungen vollständig in einer Störungstheorie beschreiben zu können, müssen die einzelnen Feynman-Diagramme ausgewertet und aufsummiert werden. Hierzu gab es bereits in den 60er Jahren Ansätze [Fri64]. Die perturbative Beschreibung des Prozesses bringt tief liegende Probleme mit sich. So stellt sich die Frage, wie viele Laserphotonen mit dem Probephoton wechselwirken und wie der Ausgangszustand des Prozesses aussieht.

Eine andere Herangehensweise beschreibt das Laserfeld exakt und benutzt dafür einen semiklassischen Ansatz [Rei62, Nik64]. Aufgrund der hohen Anzahl aus dem Laser emittierter Photonen mit Viererimpuls $k = (\omega, \mathbf{k})$ kann die Gesamtheit aller Photonen im Laserfeld als ein kohärenter Zustand [Gla63b, Gla63a],

$$|C\rangle = \exp\left[\sqrt{N}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} C^\mu(\mathbf{k})\, a_\mu^\dagger(\mathbf{k})\right]|0\rangle\,, \tag{7.6}$$

beschrieben werden. Hierbei ist $a_\mu^\dagger(\mathbf{k})$ der Erzeugungsoperator eines Photons mit dem Wellenzahlvektor $\mathbf{k}$ und N die gemittelte Photonenanzahl im Laserstrahl. Der Zustand ist durch die Polarisations- und Impulsverteilungsfunktion $C_\mu(\mathbf{k})$ charakterisiert. Er ist ein Eigenzustand des Vernichtungsoperators. Das heißt, auch wenn ein Photon des Feldes mit dem Elektron wechselwirkt und seine Eigenschaften sich somit ändern, verändert sich der Gesamtzustand des Laserfeldes, welches nun ein Photon weniger besitzt, nicht. Das hat zur Folge, dass bei einer kleinen, vernachlässigbaren Anzahl wechselwirkender Photonen (im Vergleich zu der Gesamtanzahl der Photonen im Laserfeld) der Zustand des Laserfeldes

konstant bleibt. Somit kann das Laserfeld als „klassisches" Hintergrundfeld gesehen werden, welches das Elektron zu jeder Zeit in gleicher Weise umgibt. Der Zusammenhang zwischen $|C_\mu\rangle$ und dem Hintergrundfeld ist durch das Viererpotential [Har09]

$$A_\mu(x) = \sqrt{N}\int d^3k \frac{\mathrm{e}^{-ik\cdot x}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2|\mathbf{k}|}} C_\mu(\mathbf{k}) + c.c.\Big|_{k^2=0} \tag{7.7}$$

des Hintergrundfeldes, welches im nächsten Abschnitt genauer beschrieben wird, gegeben. $A_\mu(x)$ ist im Wesentlichen die Fourier-Transformierte der Verteilungsfunktion $C_\mu(\mathbf{k})$ [Sei11].

Der Zustand eines Elektrons kann im Furry-Bild [Fur51] dargestellt werden. In diesem Bild wird die Wechselwirkung eines Elektrons mit einem Hintergrundfeld nicht-perturbativ behandelt, was der Intention des semiklassischen Ansatzes entspricht. Der Zustand eines Elektrons im Furry-Bild ist der in Abschnitt 7.3 behandelte Volkov-Zustand.

Die Grenzen der Anwendbarkeit des semiklassischen Ansatzes werden erreicht, wenn sehr viele Photonen des Laserfeldes absorbiert werden. Um eine ungefähre Vorstellung von der Größenordnung der Anzahl der Photonen im Laserfeld zu bekommen, soll hier eine Abschätzung angegeben werden. Für ein Volumen von $1\,\mu\mathrm{m}^3$ und $\eta = 1$ kann die Photonendichte durch

$$\rho_L = \frac{\omega\eta^2 m^2}{4\pi\alpha} \approx 10^{26}\,\mathrm{cm}^{-3} = 10^{14}\,\mu\mathrm{m}^{-3} \tag{7.8}$$

abgeschätzt werden. Das heißt, das Laserfeld kann nicht mehr als kohärenter Zustand betrachtet werden, wenn die Anzahl absorbierter Photonen in der Größenordnung von $\mathcal{O}\left(10^{14}\right)$ ist. Dies ist beispielsweise im quasistatischen Regime der Fall. Folglich muss die Abschwächung (Depletion) des Laserfeldes berücksichtigt werden.

7.3 Der Volkov-Zustand

In diesem Abschnitt soll der in dieser Arbeit verwendetet Volkov-Zustand definiert und näher beschrieben werden. Der Einfachheit halber wird deshalb die Nomenklatur und die Bedeutung von Variablen und Symbolen aus Kapitel 2 übernommen.

Der Zustand eines geladenen Fermions mit dem Spin 1/2, welches durch ein elektromagnetisches Kreuzfeld, d.h. das elektrische Feld $\boldsymbol{E}$ und das magnetische Feld $\boldsymbol{B}$ stehen senkrecht aufeinander propagiert, wurde 1935 von Volkov [Vol35] berechnet und wird als Volkov-Lösung der Dirac-Gleichung oder Volkov-Zustand bezeichnet.

Für ein Elektron mit einem Viererimpuls $p_e = \left(p_e^0, \mathbf{p}_e\right)$, welches durch ein Hintergrundfeld mit einem Vierervektorpotential A_μ (siehe beispielsweise (2.7)) propagiert, ergibt sich demnach der Ausdruck

$$\psi_- (p_e, \mathfrak{s}) = \left(1 + \frac{e \not{k} \not{A}}{2k \cdot p_e}\right) \mathrm{e}^{iS_{p_e}} \frac{u (p_e, \mathfrak{s})}{\sqrt{2p_e^0}}, \tag{7.9}$$

$$S_{p_e} = -p_e \cdot x - \int_0^\phi \left(e \frac{A \cdot p_e}{k \cdot p_e} - \frac{e^2 A^2}{2k \cdot p_e}\right) d\phi'. \tag{7.10}$$

Hierbei ist $u (p_e, \mathfrak{s})$ ein Bispinor mit dem Spin $\mathfrak{s}$, der die Bedingung $\left(\not{p}_e - m\right) u (p_e, \mathfrak{s}) = 0$ erfüllen muss und auf $\bar{u} (p_e, \mathfrak{s}) u (p_e \mathfrak{s}) = 2m$ normiert ist. Der Dirac-konjugierte Zustand lautet dementsprechend

$$\bar{\psi}_- (p_e, \mathfrak{s}) = \frac{\bar{u} (p_e, \mathfrak{s})}{\sqrt{2p_e^0}} \left(1 + \frac{e \not{A} \not{k}}{2k \cdot p_e}\right) \mathrm{e}^{-iS_{p_e}}, \tag{7.11}$$

wobei $\bar{\psi}_- = \gamma^0 \psi_-^*$ mit dem komplex konjugierten Zustand ψ_-^* darstellt. Die klassische Hamilton-Jacobi-Wirkung findet sich im Phasenfaktor S_{p_e} wieder. Der Volkov-Zustand ist eine exakte Lösung der Dirac-Gleichung

$$\left(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m\right) \psi_- = 0 \tag{7.12}$$

mit der eichkovarianten Ableitung $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ und ist im Diagramm 7.1 schematisch

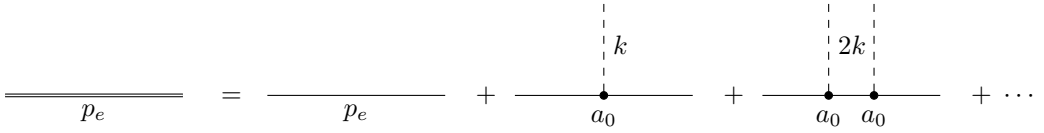


Abbildung 7.1: Schematische Darstellung des Volkov-Zustandes. Hier symbolisiert eine Doppellinie (links) das Elektron im Furry-Bild und die einzelnen Diagramme (rechts) dessen perturbative Entwicklung in Feynman-Diagrammen.

dargestellt. Auf der linken Seite der Gleichung wird das kompakte Furry-Bild verwendet. Dabei symbolisieren die Doppellinien das auslaufende Elektron bzw. Positron, welches im Hintergrundfeld des Lasers propagiert. Auf der rechten Seite ist die Entsprechung zum Furry-Bild durch die einzelnen Feynman-Graphen in einer perturbativen Beschreibung zu sehen.

Die Normierung des Zustandes stimmt mit der einer ebenen Welle überein und erfüllt die Vorschrift

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \quad \int \bar{\psi}_- \left(\tilde{p}, \mathfrak{s}\right) \gamma^0 \psi_- \left(p, \mathfrak{s}\right) d^3x = \quad \delta\left(\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{p}\right). \tag{7.13}$$

Die Dirac-Stromdichte ergibt sich durch [Lan82]

$$j^\mu \quad = \quad \bar{\psi}_- \gamma^\mu \psi_- = \frac{1}{p_0} \left[p^\mu - eA^\mu + k^\mu \left(e \frac{p \cdot A}{k \cdot p} - \frac{e^2 A^2}{2 k \cdot p} \right) \right]. \tag{7.14}$$

Der Volkov-Zustand des Positrons mit dem Viererimpuls $p_p = \left(p_p^0, \mathbf{p}_p\right)$ ergibt sich aus (7.9), indem alle Komponenten p_e durch $-p_p$ und $u\left(p_e, \mathfrak{s}\right)$ durch $v\left(p_p, \mathfrak{s}\right)$ ersetzt werden [Mü09]:

$$\psi_+ \left(p_p, \mathfrak{s}\right) \quad = \quad \left(1 - \frac{e \not{k} \not{A}}{2 k \cdot p_p}\right) \mathrm{e}^{i S_{-p_p}} \frac{v\left(p', s\right)}{\sqrt{2 p_p^0}}, \tag{7.15}$$

$$S_{-p_p} \quad = \quad p_p \cdot x - \int_0^\phi \left(e \frac{A \cdot p_p}{k \cdot p_p} + \frac{e^2 A^2}{2 k p_p} \right) d\phi', \tag{7.16}$$

wobei $\left(\not{p}' + m\right) v\left(p', \mathfrak{s}\right) = 0$ gelten soll.

7.4 Rapidität und modifizierte Rapidität

Die Rapidität y ist ein dimensionsloses Maß der Geschwindigkeit und wird hier in Richtung der Strahlachse der Laser X und L definiert. Mit Hilfe der Lichtkegelkoordinaten nimmt sie die Form

$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_p^+}{p_p^-}\right) \tag{7.17}$$

an. Damit können die Komponenten des asymptotischen Viererimpulses des Positrons p_p ausgedrückt werden durch

$$\begin{aligned} p_p^- &= m_\perp \mathrm{e}^{-y}, & (7.18)\\ p_p^+ &= m_\perp \mathrm{e}^{y}, & (7.19)\\ \mathbf{p}_{p\perp} &= p_{p\perp}\left(\cos\varphi, \sin\varphi\right). & (7.20) \end{aligned}$$

Hierbei sei $m_\perp = \sqrt{m^2 + p_{p\perp}^2}$. Durch quadrieren von (3.2) kann der Betrag des Transversalimpulses

$$p_{p\perp}\left(\ell, y\right) = \sqrt{\left(\frac{2n\left(\ell\right)\omega_X\omega_{X'}}{\omega_{X'}\mathrm{e}^{-y} + n\omega_X\mathrm{e}^{y}}\right)^2 - m^2} \tag{7.21}$$

bestimmt werden. Eine naheliegende Wahl für die Parametrisierung des Phasenraums des Positrons ist somit das Variablentripel $(p_{p\perp}, y, \varphi)$, welches unter Anderem in Kapitel 2 genutzt wurde.

Mit der Gleichung (3.6) kann eine Darstellung der Größe ℓ formuliert werden

$$\ell = \frac{p_e^- + p_p^-}{\eta k_X^-} - \frac{1}{\eta}. \tag{7.22}$$

Ein Wert von $\ell = 0$ korrespondiert mit dem linearen Breit-Wheeler-Prozess, da kein Energietransfer vom Hintergrundfeld auf das Fermionenpaar erfolgt. Um den Einfluss des assistierenden Lasers L auf den Produktionsprozess deutlich zu machen, ist es zweckmäßig den Phasenraum mittels der Variable ℓ zu parametrisieren. Des Weiteren werden der Azimutalwinkel φ des Positrons im Bezug zur Polarisationsrichtung von L, sowie die modifizierte Rapidität

$$z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_p^+}{p_p^-}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n\omega_X}{\omega_{X'}}\right) \tag{7.23}$$

mit $n \equiv n(\ell) = (1 + \ell\eta)$, für die Parametrisierung genutzt. Wird das Tripel (ℓ, φ, z) als unabhängige Variablen verwendet, so ist der asymptotische Viererimpuls p_p des Positrons vollständig gegeben. Unter bestimmten Voraussetzungen kann der ganzzahlige Anteil von ℓ

mit der Nettoanzahl der Photonen aus dem Laserfeld, welche an der Wechselwirkung teilnehmen, identifiziert werden. Eine präzisere Beschreibung von ℓ ist aber, dass ℓ den Energie-Impulsanteil des Laserfeldes zur Erzeugung eines bestimmten Endzustandes parametrisiert (siehe [Sei14, Tit13] für weitere Diskussionen).

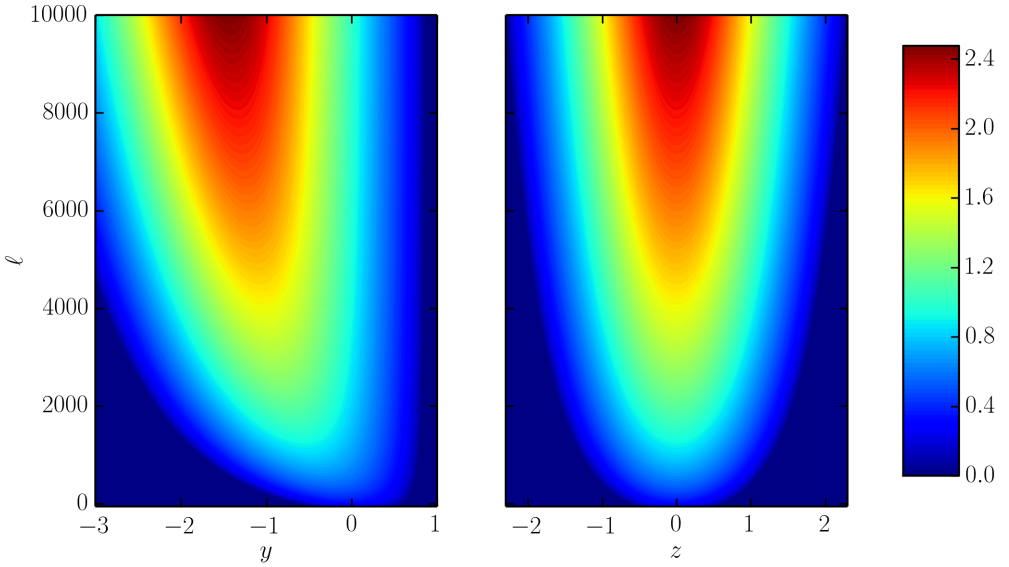


Abbildung 7.2: Vergleich des Transversalimpulses $p_{p\perp}$ über der Ebene (ℓ, y) (links) und über der Ebene (ℓ, z) (rechts) in MeV. Parameter $\omega_X = \omega_{X'} = 0.6$ MeV und $\omega_L = 1$ keV.

Die modifizierte Rapidität z ist eine um das Frequenzverhältnis $\ln\sqrt{n(\ell)\omega_X/\omega_{X'}}$ verschobene Rapidität; es gilt der Zusammenhang

$$z = y + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n\omega_X}{\omega_{X'}}\right). \tag{7.24}$$

Daraus folgt für den Transversalimpuls

$$p_{p\perp}(\ell, z) = \sqrt{\frac{n\omega_X\omega_{X'}}{\cosh^2 z} - m^2} \tag{7.25}$$

und somit $m_\perp = \sqrt{n\omega_X\omega_{X'}}/\cosh z$. In Abbildung 7.2 wird die Abhängigkeit des Transversalimpulses des Positrons von dem Energietransferparameter ℓ und der Rapidität y (links), sowie der modifizierten Rapidität z (rechts) dargestellt. Dieser Vergleich verdeutlicht die Bedeutung der modifizierten Rapidität. Der Phasenraum wird um den Wert $z = 0$ symmetrisiert, dies bedeutet das im Impulsschwerpunktsystem die plus-Komponente des Positronimpulses p_p^+ für einen festen Wert von z konstant ist. Wird in (7.19) die Rapidität y durch die modifizierte Rapidität z mittels (7.24) ersetzt, kann gezeigt werden, dass die Komponente

p_p^+ nicht mehr von ℓ abhängig ist. Es ergibt sich

$$p_p^+(z) = \frac{\sqrt{n\omega_X\omega_{X'}}}{\cosh z} \mathrm{e}^{z-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{n\omega_X}{\omega_{X'}}\right)} \tag{7.26}$$

$$= \omega_{X'}(1+\tanh z). \tag{7.27}$$

Die Komponente p_p^- kann durch

$$p_p^-(\ell, z) = n\omega_X(1-\tanh z) \tag{7.28}$$

ausgedrückt werden und hängt somit von z und ℓ ab.

7.5 Normierung

Während beim linearen Breit-Wheeler-Prozess das Streumatrixelement üblicherweise auf zwei einlaufende Photonen normiert wird, wird das Streumatrixelement des nicht-linearen Breit-Wheeler-Prozesses in der Regel auf ein einlaufendes Photon und das klassische Hintergrundfeld normiert. Bei dem in dieser Arbeit eingeführten laser-assistierten Breit-Wheeler-Prozess wird das Hintergrundfeld aus zwei Laserwellen mit unterschiedlichen Intensitäten zusammengesetzt und es muss entschieden werden, ob auf das hochintensive optische Laserfeld oder auf das schwächere XFEL-Feld normiert werden soll. Es ist naheliegend, die Normierung so zu wählen, dass beim Grenzfall für ein verschwindendes optisches Laserfeld L das in dieser Arbeit verwendete linearisierte Streumatrixelement in das Streumatrixelement des linearen Breit-Wheeler-Prozesses übergeht. Um die Normierung des Wirkungsquerschnittes zu bestimmen, muss die Teilchendichte der Laserphotonen $\rho_X = I/k_{X0}$ mit der Energieflussdichte I ermittelt werden. Die Energieflussdichte I einer elektromagnetischen Welle ist proportional zum Betrag des Poyntingvektor $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Das hier verwendete Vektorpotential A_μ (siehe 3.14) besitzt die elektrische Feldstärke

$$\mathbf{E} = \omega_X \begin{pmatrix} A_L \left(\eta g_L (\eta\phi) \sin(\eta\phi) - \cos(\eta\phi) \frac{\partial}{\partial\phi} g_L (\eta\phi) \right) \\ A_X \left(g_X (\phi) \sin(\phi) - \cos(\phi) \frac{\partial}{\partial\phi} g_X (\phi) \right) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.29}$$

und die magnetische Flussdichte

$$\mathbf{B} = \omega_X \begin{pmatrix} A_X \left(g_X (\phi) \sin(\phi) - \cos(\phi) \frac{\partial}{\partial\phi} g_X (\phi) \right) \\ -A_L \left(\eta g_L (\eta\phi) \sin(\eta\phi) - \cos(\eta\phi) \frac{\partial}{\partial\phi} g_L (\eta\phi) \right) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.30}$$

wobei $A_{X/L} = m a_{X/L}/e$ gilt. Aus diesen beiden Größen berechnet sich der Poyntingvektor zu

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = \omega_X^2 \Bigg[& - A_L^2 \left(\eta g_L (\eta\phi) \sin(\eta\phi) - \cos(\eta\phi) \frac{\partial}{\partial\phi} g_L (\eta\phi) \right)^2 \\ & - A_X^2 \left(g_X (\phi) \sin(\phi) - \cos(\phi) \frac{\partial}{\partial\phi} g_X (\phi) \right)^2 \Bigg] \mathbf{e}_z \end{aligned} \tag{7.31}$$

mit dem Einheitsvektor $\mathbf{e}_z = (0,0,1)^\intercal$. An dieser Stelle wird die Problematik der unterschiedlichen Skalen der Intensitäten der Felder X und L deutlich. Für ein hochintensives Feld L ist der Term in (7.31) $\propto A_L^2$ dominierend, indessen der Term $\propto A_X^2$ für ein schwa-

ches Feld L dominiert. Um ein gewisses Maß an Vergleichbarkeit zu erhalten, erscheint es daher sinnvoll, das Streumatrixelement ausschließlich auf die Teilchendichte des X-Feldes zu normieren. Somit kann der erste Term in (7.31) $\propto A_L^2$ vernachlässigt werden. Zusätzlich ist die Ableitungen der Einhüllenden $\frac{\partial}{\partial\phi} g_X(\phi)$ um den Faktor $1/\tau_X^2$ unterdrückt und kann ignoriert werden. Wird über den verbleibenden $|\mathbf{S}_X|$ gemittelt ergibt sich

$$\langle |\mathbf{S}_X| \rangle = k_X^2 \frac{m^2 a_X^2}{2e^2} g_X^2(\phi). \tag{7.32}$$

Dabei wurde die Einhüllende $g_X(\phi)$ nicht gemittelt und wird weiter explizit behandelt. Durch Integration über die zeitliche Komponente x_0 und Dividieren durch k_X erhält man schließlich die gesuchte Teilchendichte

$$\begin{aligned} \rho_X &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle |\mathbf{S}_X| \rangle}{k_0} dx_0 \\ &= \frac{m^2 a_X^2}{2e^2} \int_{-\infty}^{\infty} g_X^2(\phi)\, d\phi. \end{aligned} \tag{7.33}$$

7.6 Der Grenzfall eines schwachen Feldes L

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass das Streumatrixelement des linearen Breit-Wheeler-Prozesses,

$$S^{BW} = \frac{-ie^2}{\sqrt{2p_e^0 2p_p^0 2k_{X'}^0 2k_X^0}} (2\pi)^4 \delta^4 (p_e + p_p - k_{X'} - k_X) M, \tag{7.34}$$

$$M = \bar{u}(p_e) \left\{ \not\epsilon_X \frac{\left(\not p_p - \not k_{X'}\right) + m}{(p_p - k_{X'})^2 - m^2} \not\epsilon_{X'} + \not\epsilon_{X'} \frac{\left(\not p_p - \not k_X\right) + m}{(p_p - k_X)^2 - m^2} \not\epsilon_X \right\} v(p_p) \tag{7.35}$$

als Grenzfall, $a_L \to 0$, aus der in dieser Arbeit verwendeten, linearisierten Streumatrix (3.36) hervorgeht. Ausgangspunkt für die folgende Rechnung ist das invariante Matrixelement (3.39), welches im betrachteten Grenzfall die Form

$$\Lambda|_{a_L \to 0} = (\mathcal{J}_X - \alpha_X \mathcal{J}_0) \mathcal{A}_0(\phi)|_{a_L \to 0} \tag{7.36}$$

annimmt, wobei sich die Funktion $\mathcal{A}_0(\phi)$ nach (3.33) zu

$$\mathcal{A}_0(\phi)|_{a_L \to 0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi}{\omega_X} g_X(\phi) \, \mathrm{e}^{i\eta\ell\phi} \tag{7.37}$$

vereinfacht. Da das Streumatrixelement des linearen, monochromatischen Grenzfalles berechnet werden soll, kann an dieser Stelle der Grenzwert $g_X(\phi) \to 1$ gebildet werden. Damit kollabiert das Integral in (7.37) zur Deltadistribution $\delta(\eta l)$. Die Energie-Impuls Beziehung nimmt somit die einfache Form

$$k_X + k_{X'} = p_e + p_p \tag{7.38}$$

an. Durch Einsetzten der Ausdrücke (3.20) und (3.21) in (7.36) und der Definition (3.26), ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Lambda|_{a_L \to 0} &= \bar{u}(p_e) \left[\left(-\alpha_X \not\epsilon_{X'} + \frac{m a_X}{2k_X \cdot p_e} \not\epsilon_X \not k_X \not\epsilon_{X'} - \frac{m a_X}{2k_X \cdot p_p} \not\epsilon_{X'} \not k_X \not\epsilon_X \right) \frac{\pi\delta(\eta l)}{\omega_X} \right] v(p_p) \\
&= \bar{u}(p_e) \left\{ \frac{m a_X}{2} \left[\left(\not\epsilon_X \not k_X - 2p_e \cdot \epsilon_X \right) \frac{\not\epsilon_{X'}}{k_X \cdot p_e} \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - \frac{\not\epsilon_{X'}}{k_X \cdot p_p} \left(\not k_X \not\epsilon_X - 2p_p \cdot \epsilon_X \right) \right] \frac{\pi\delta(\eta l)}{\omega_X} \right\} v(p_p) \,.
\end{aligned} \tag{7.39}$$

Durch gezieltes Vertauschen der γ-Matrizen unter Nutzung der Vertauschungsrelation

$$\left[\not{p}_p, \not{\epsilon}_X\right]_+ = 2p_p \cdot \epsilon_X \tag{7.40}$$

und der Energie-Impulsbeziehung $k_X + k_{X'} = p_e + p_p$ kann die formale Struktur des linearen Matrixelements (7.35) hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}\Lambda|_{a_L \to 0} &= \bar{u}(p_e) \left\{ \frac{m a_X}{2} \left[\left(\not{\epsilon}_X \left(\not{p}_p - \not{k}_{X'} \right) - \not{p}_e \not{\epsilon}_X \right) \frac{\not{\epsilon}_{X'}}{k_X \cdot p_e} \right.\right. \\ &\quad \left.\left. - \frac{\not{\epsilon}_{X'}}{k_X \cdot p_p} \left(\left(\not{p}_e - \not{k}_{X'} \right) \not{\epsilon}_X - \not{\epsilon}_X \not{p}_p \right) \right] \frac{\pi \delta(\eta l)}{\omega_X} \right\} v(p_p) . \end{aligned} \tag{7.41}$$

Die Dirac-Gleichungen $\bar{u}(p_e)\left(\not{p}_e - m\right) = 0$ und $\left(\not{p}_p + m\right) v(p_p) = 0$ können für die nächste Umformung verwendet werden und es ergibt sich

$$\begin{aligned}\Lambda|_{a_L \to 0} &= \bar{u}(p_e) \left\{ \frac{m a_X}{2} \left[\left(\not{\epsilon}_X \left(\not{p}_p - \not{k}_{X'} - m \right) \right) \frac{\not{\epsilon}_{X'}}{k_X \cdot p_e} \right.\right. \\ &\quad \left.\left. - \frac{\not{\epsilon}_{X'}}{k_X \cdot p_p} \left(\left(\not{p}_e - \not{k}_{X'} + m \right) \not{\epsilon}_X \right) \right] \frac{\pi \delta(\eta l)}{\omega_X} \right\} v(p_p) . \end{aligned} \tag{7.42}$$

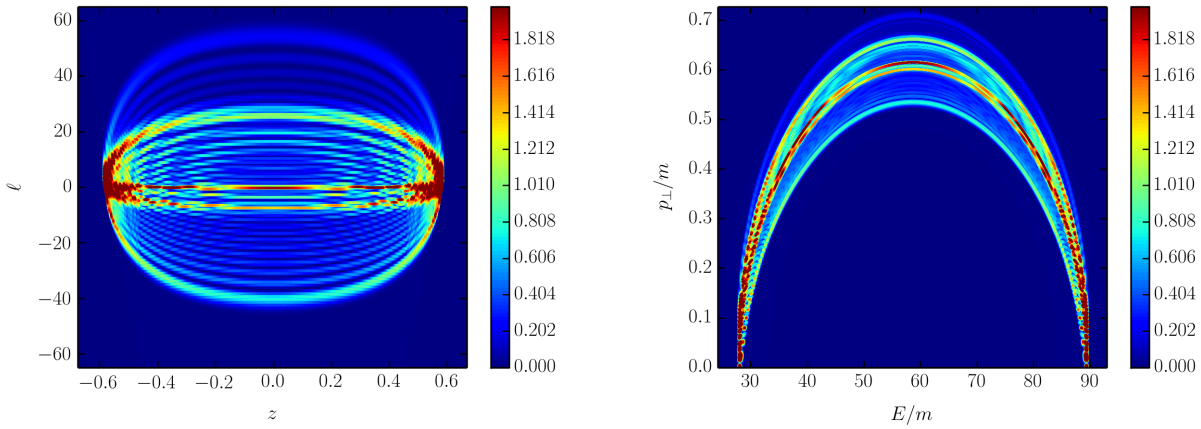
Wird abschließend die kinematische Relation $k \cdot p = (p-k)^2 - m^2$ genutzt, so nimmt die Gleichung die gewünschte Form

$$\Lambda|_{a_L \to 0} = \frac{m \pi a_X}{2 \omega_X} \delta(\eta l)\, \bar{u}(p_e) \left\{ \not{\epsilon}_X \frac{\not{p}_p - \not{k}_{X'} - m}{(p_e - k_X)^2 - m^2} \not{\epsilon}_{X'} - \not{\epsilon}_{X'} \frac{\not{p}_e - \not{k}_{X'} + m}{(p_p - k_X)^2 - m^2} \not{\epsilon}_X \right\} v(p_p) . \tag{7.43}$$

an. Der Unterschied im Vorfaktor ist auf die Normierung des Streumatrixelementes zurückzuführen, welche von der Normierung im linearen Fall abweicht (siehe dazu (7.5)).

7.7 Vergleich verschiedener Koordinatensysteme

Um das Verständnis für die gewählten unabhängigen Koordinaten zu ermögliche, ist in Abbildung 7.3 der Vergleich des differentiellen Wirkungsquerschnittes für zwei unterschiedliche Sätze von den unabhängigen Koordinaten (z, ℓ, φ) und $(p_\perp, E, \varphi)$ dargestellt. An diesen Abbildungen ist deutlich zu erkennen, wie vor allem die Mitte des Spektrums in der Darstellung mittels (z, ℓ, φ) weiter auseinander gezogen wird und die Strukturen somit deutlicher zu erkennen sind. In beiden Darstellungen sind die Überlagerungen am Rand gut zu erkennen. Ein weiterer Vorteil der Darstellung in den Koordinaten (z, ℓ, φ) gegenüber der in den Koordinaten $(p_\perp, E, \varphi)$ ist es, dass der Multi-Photonen-Effekt des L-Feldes explizit hervorgehoben wird und sich somit für eine genauere Analyse eignet.

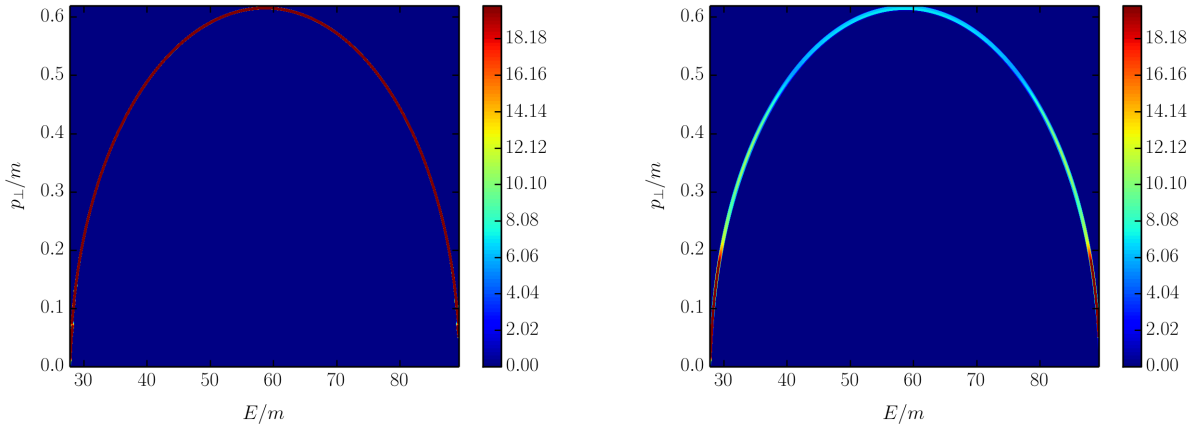


(a) **(b)**

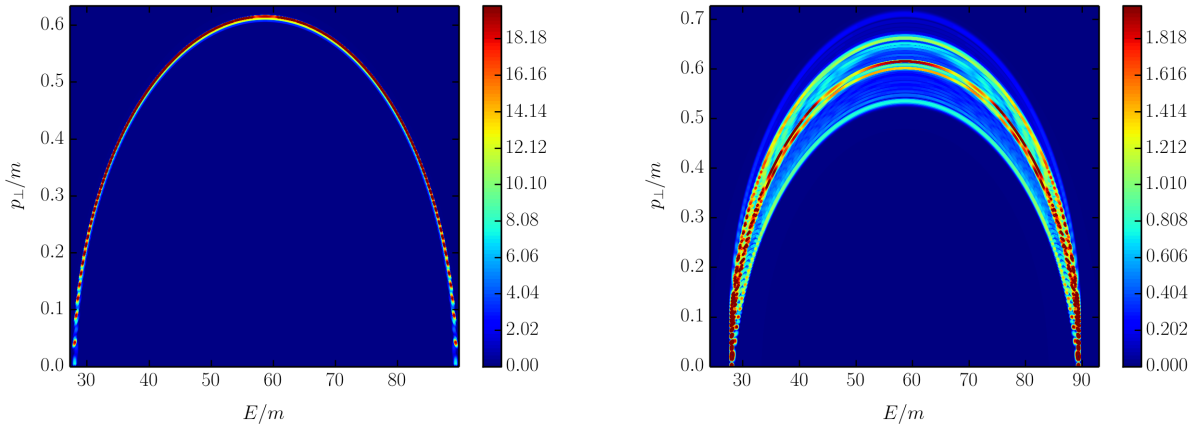
Abbildung 7.3: Vergleichende Abbildungen des differentiellen Wirkungsquerschnittes in unterschiedlichen Koordinatensystemen a) $d\sigma/dzd\ell d\varphi$ in Einheiten von $10^{-6} \times \mathrm{MeV}^{-2}$ und b) $d\sigma/dp_\perp dEd\varphi$ in Einheiten von $10^{-6} \times \mathrm{MeV}^{-4}$ bei konstantem $\varphi = \pi$. Parameter: $a_L = 0.5$, $a_X = 10^{-5}$, $\sqrt{s_{XX'}} = 1.2$ MeV, $\eta = 1/600$,$\tau_L = 4\pi$ und $\tau_X = 7/\eta$.

7.8 Weitere Abbildungen

Als Ergänzung zu den in Abschnitt 4.3 dargestellten Resultaten werden hier in den Abbildungen 7.4 und 7.5 die differentiellen Wirkungsquerschnitte in den Koordinaten $(p_\perp, E, \varphi)$ für verschiedene Laserintensitäten a_L gezeigt. In dieser Serie von Abbildungen werden zwei verschiedene Streuebenen $\varphi = \pi/2$ (linke Seite) und $\varphi = \pi$ (rechte Seite) einander gegenüber gestellt. Zusätzlich wird in den Abbildungen 7.6 und 7.7 die Entwicklung des Wirkungsquerschnittes in Abhängigkeit von der Energie $\sqrt{s}$ von der Schwelle, $\sqrt{s} = 1.022\text{MeV}$, bis weit oberhalb der Schwelle, $\sqrt{s} = 1.14$ MeV, für die Laserintensität $a_L = 0.1$ in Abbildungen 7.6 und $a_L = 1$ in Abbildungen 7.7 dargestellt. Hierbei wurden für die Darstellungen die Koordinaten (ℓ, z, φ) verwendet.

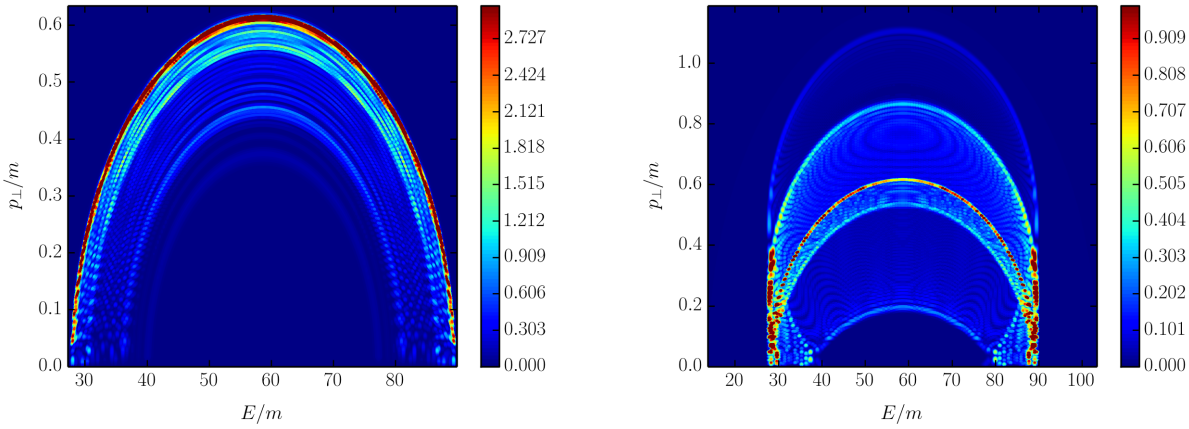


(a) **(b)**



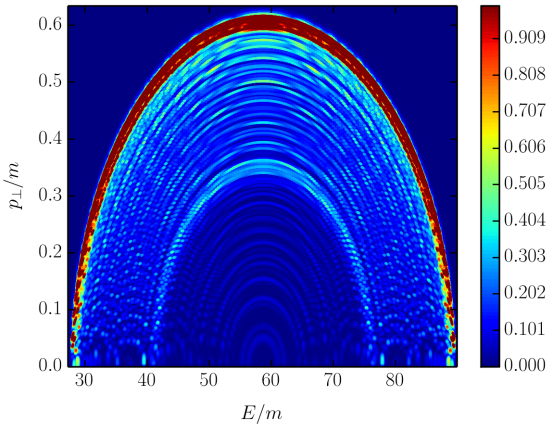
(c) **(d)**

Abbildung 7.4: Abbildungen des differentiellen Wirkungsquerschnittes in $d\sigma/dp_\perp dEd\varphi$ in Einheiten von $10^{-6} \times \text{MeV}^{-4}$: a) $a_L = 0.01$, $\varphi = \pi/2$; b) $a_L = 0.01$, $\varphi = \pi$; c) $a_L = 0.1$, $\varphi = \pi/2$; d) $a_L = 0.1$, $\varphi = \pi$. Parameter: $a_X = 10^{-5}$, $\sqrt{s_{XX'}} = 1.2$ MeV, $\eta = 1/600$, $\tau_L = 4\pi$ und $\tau_X = 7/\eta$.

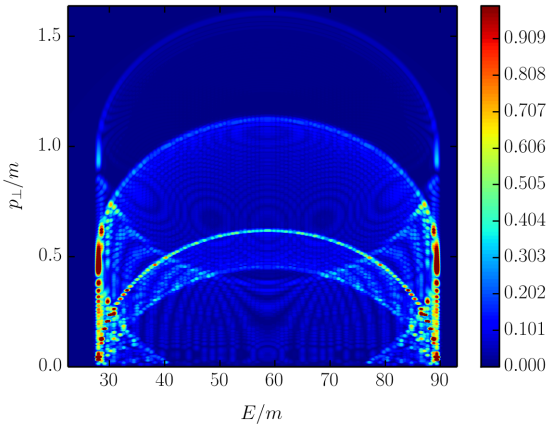


(a)

(b)



(c)



(d)

Abbildung 7.5: Wie in Abbildung 7.4, aber mit den Laserintensitätsparameter a) $a_L = 0.5$, $\varphi = \pi/2$; b) $a_L = 0.5$, $\varphi = \pi$; c) $a_L = 1$, $\varphi = \pi/2$; d) $a_L = 1$, $\varphi = \pi$.

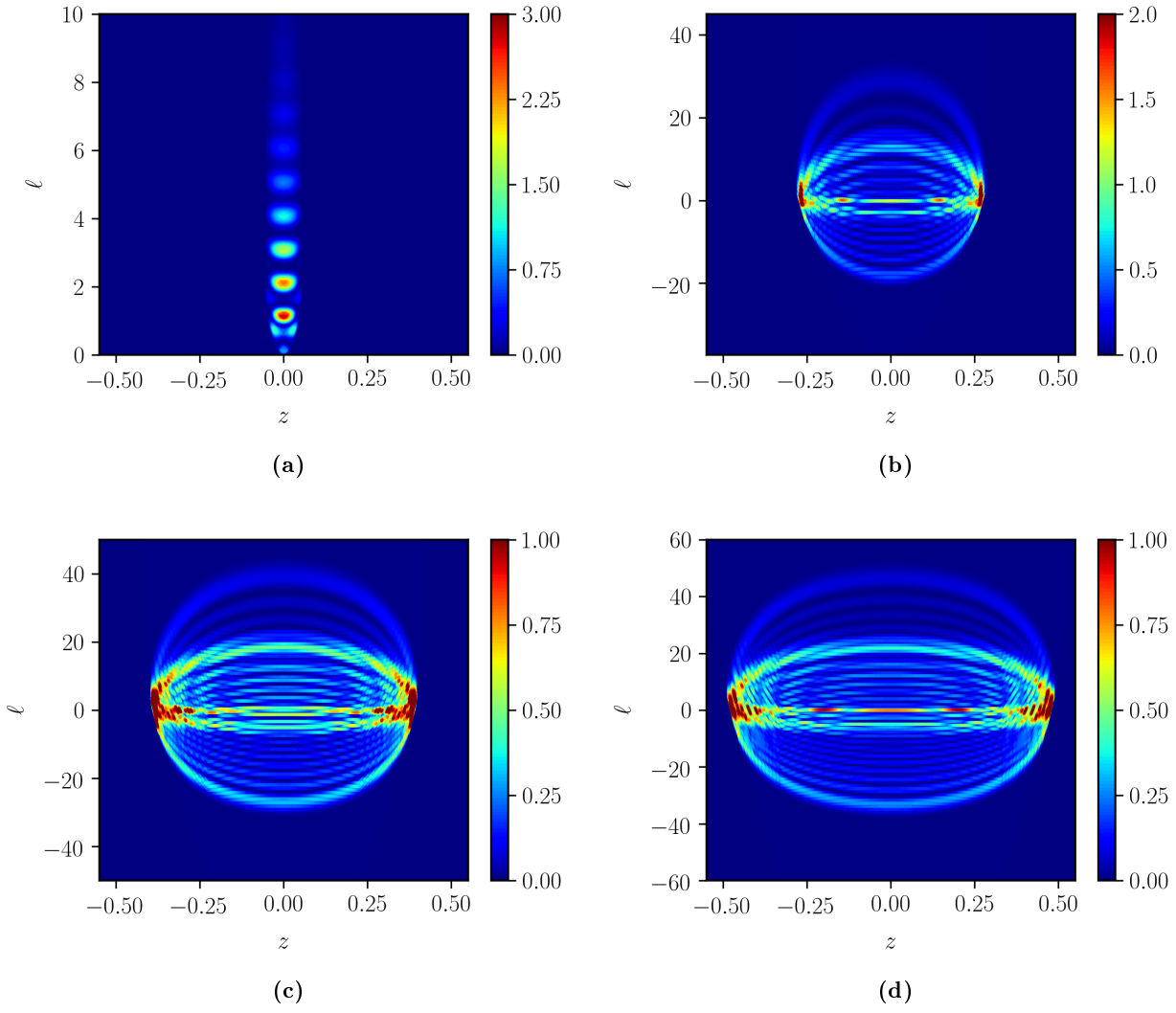
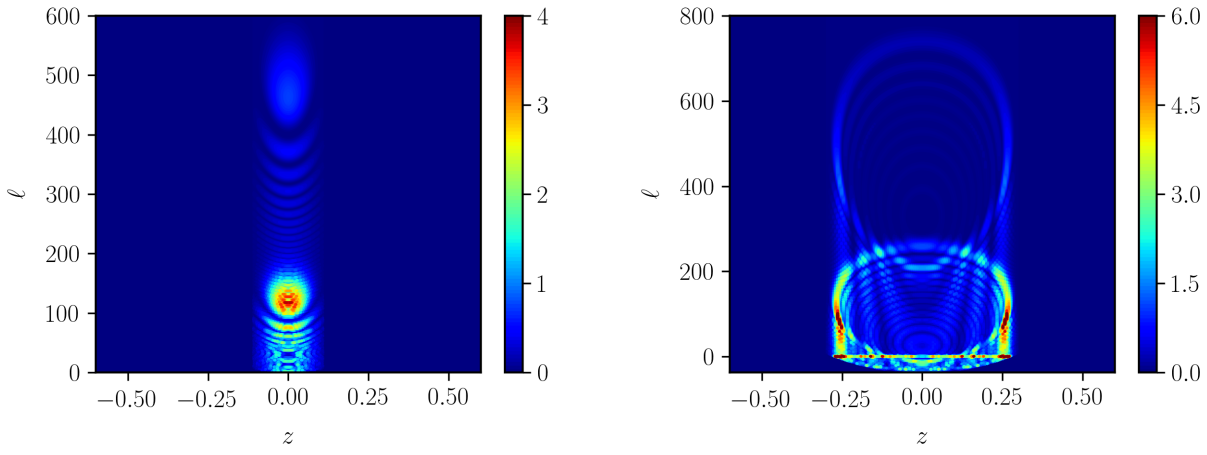
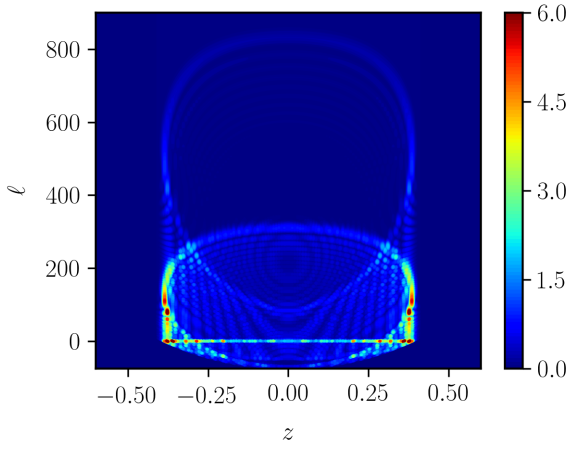


Abbildung 7.6: Abbildungen des differentiellen Wirkungsquerschnittes in $d\sigma/dp_\perp dz d\varphi$ und konstanten $\varphi = \pi$: a) $\sqrt{s_{XX'}} = 1.022$ MeV, in Einheiten von $10^{-5} \times \text{MeV}^{-2}$; b) $\sqrt{s_{XX'}} = 1.06$ MeV, in Einheiten von $10^{-5} \times \text{MeV}^{-2}$; c) $\sqrt{s_{XX'}} = 1.1$ MeV, in Einheiten von $10^{-6} \times \text{MeV}^{-2}$; d) $\sqrt{s_{XX'}} = 1.4$ MeV, in Einheiten von $10^{-6} \times \text{MeV}^{-2}$. Parameter: $a_L = 0.1$, $a_X = 10^{-5}$, $\eta = 1/600$,$\tau_L = 4\pi$ und $\tau_X = 7/\eta$.

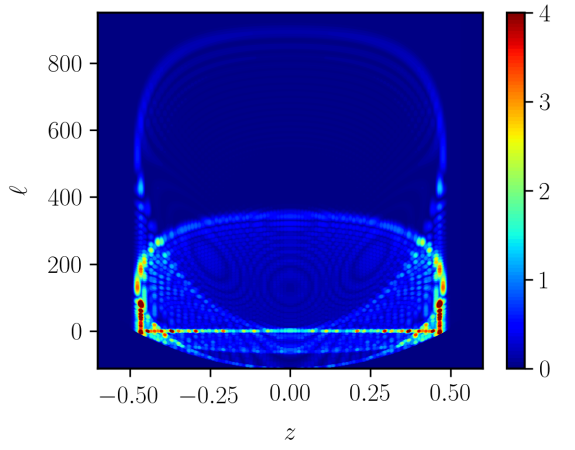


(a)

(b)



(c)



(d)

Abbildung 7.7: Wie die Abbildungen 7.6 nur mit $a_L = 1$: a) $\sqrt{s_{XX'}} = 1.022$ MeV, in Einheiten von $10^{-5} \times \text{MeV}^{-2}$; b)$\sqrt{s_{XX'}} = 1.06$ MeV, in Einheiten von $10^{-5} \times \text{MeV}^{-2}$; c) $\sqrt{s_{XX'}} = 1.1$ MeV, in Einheiten von $10^{-6} \times \text{MeV}^{-2}$; d) $\sqrt{s_{XX'}} = 1.4$ MeV, in Einheiten von $10^{-6} \times \text{MeV}^{-2}$.

Abbildungsverzeichnis

1.1 Feynman-Diagramme einfacher QED-Prozesse: (a) Breit-Wheeler-Prozess, (b) Paarannihilation (c) Compton-Effekt. Gezeigt sind die grundlegenden Topologien ohne evtl. Austauschdiagramme für die Baumgraphen in niedrigster Ordnung. 7

1.2 Beispiele für Feynman-Diagramme von Multi-Photonen-Prozessen: (a) der nicht-lineare Breit-Wheeler-Prozess, (b) der nicht-lineare Compton-Effekt in einem Hintergrundfeld L. 7

1.3 Feynman-Diagramme im Furry-Bild: (a) der nicht-lineare Breit-Wheeler-Prozess und (b) der nicht-lineare Compton-Effekt. Die Doppellinien symbolisieren das durch das Hintergrundfeld propagierende Elektron bzw. Elektron-Positron-Paar. 7

2.1 Der nicht-lineare Breit-Wheeler-Prozess im Furry-Bild (linke Seite der Gleichung) und dessen Zerlegung in einzelne Feynmangraphen in einer perturbativen Beschreibung (rechte Seite der Gleichung). 13

2.2 Totaler Wirkungsquerschnitt σ in Abhängigkeit von der Gesamtenergie $\sqrt{s}$ (definiert in Gl. (2.1)) des nicht-linearen Breit-Wheeler-Prozesses in einem zeitlich und räumlich unendlich ausgedehnten Hintergrundfeld. Die schwarze Kurve entspricht dem perturbativen Breit-Wheeler-Prozess ohne Hintergrundfeld, während die blau-gestrichelte und die grün-gepunktete Kurve dem nicht-linearen Breit-Wheeler-Prozess für Werte von $a_0 = 0.8$ bzw. 5 entsprechen. 16

2.3 Wie in Abbildung 2.2, aber mit den Beiträgen der einzelnen Harmonischen (farbige Kurven) zum totalen Wirkungsquerschnitt (schwarz-gestrichelte Kurve, $n = 1, ..., 5$) für $a_0 = 0.8$. 16

2.4 Contourplot des totalen Wirkungsquerschnittes σ des Multi-Photonen Breit-Wheeler-Prozesses in Einheiten von mb für ein räumlich und zeitlich unendlich ausgedehntes Hintergrundfeld in Abhängigkeit von der Energie $\sqrt{s}$ und dem dimensionslosen Intensitätsparameter a_0. Im farbigen Bereich ist $\sigma \geq 1$mb. . . 17

2.5 Contourplot der Phasenraumverteilung $\log(d\sigma/dp_\perp dy)$ des Positrons in Einheiten von 1/MeV über einer von y (s. Gl. 2.28) und $p_\perp$(s. Gl. 2.29) aufgespannten Ebene. Parameter: $\sqrt{s} = 1.2$ MeV, $N = 8$. Oben: $a_0 = 1$, Unten: $a_L = 5$. 24
2.6 Contourplot des totalen Wirkungsquerschnittes σ in Einheiten von mb des nicht-linearen Breit-Wheeler-Prozesses in einem zirkular polarisierten, gepulsten Hintergrundfeld wie in (3.14) definiert mit $N = 4$ in Abhängigkeit von der Energie $\sqrt{s}$ und dem dimensionslosen Intensitätsparameter a_0. 26

3.1 Diagrammatische Darstellung der Paarproduktion im Laser-assistierten Breit-Wheeler-Prozess. Linkes Diagramm: die Wellenlinie symbolisiert das einlaufende Probephoton X' und die Doppellinie mit der überlagerten blauen Zickzack-Linie das durch das (XFEL + Laser)-Feld propagierende, auslaufende Elektron (e) und Positron (p). Rechte Seite: Entwicklung bis zur ersten Ordnung für ein schwaches XFEL Feld X, wobei die Doppellinien die Wellenfunktionen im Laserfeld L symbolisieren, und die blauen Zickzack-Linien stehen für das schwache XFEL-Feld X. Die nullte Ordnung (im X-Feld) ist der in Kapitel 2 diskutierte nicht-lineare Breit-Wheeler-Prozess und ist für die in den folgenden Rechnungen angenommenen Parameter stark unterdrückt. 29
3.2 Links: Einhüllende $g_L(\eta\phi)$ ((3.15), blaue Kurve) mit $\tau_L = 4\pi$ und $g_X(\phi)$ ((3.16), grüne Kurve) für $\tau_X = 7/\eta$ und $\eta = 1/600$. Rechts: Fourier-Transformierte der Einhüllenden aus der rechten Abbildung $Fg_L(\Omega/\omega_X)$ (blaue Kurve) und $Fg_X(\Omega/\omega_X)$ (grüne Kurve) in Abhängigkeit von der dimensionslosen Frequenz Ω/ω_X. 33

4.1 Differentielles Spektrum $d\sigma/d\ell dz d\varphi$ als Funktion von ℓ des laser-assistierten Breit-Wheeler-Prozesses bei konstanten Werten von $z = 0$ und $\varphi = \pi$. Parameter: $a_L = 0.1$, $\sqrt{s_{XX'}} = 1.2$ MeV,$\eta = 1/600$,$\tau_L = 4\pi$ und $\tau_X = 7/\eta$. Die roten Linien symbolisieren die cut-off-Werte erster Art. 45
4.2 Differentielles Spektrum wie in Abbildung 4.1, aber mit unterschiedlichen Werten von $\sqrt{s_{XX'}}$ (oben: $\sqrt{s_{XX'}} = 1.04$ MeV, unten: $\sqrt{s_{XX'}} = 1.2$ MeV) und $a_L = 0.1$. Zu beachten ist die linearen Skala der Ordinate. Die rotgestrichelten, vertikalen Linien entsprechen den mit (4.19) berechneten cut-off-Werten. 48
4.3 Wie in Abbildung 4.2 für einen Wert von $a_L = 1.0$. Oben: $\sqrt{s_{XX'}} = 1.04$ MeV, unten: $\sqrt{s_{XX'}} = 1.2$ MeV. 49

4.4 Contourplot der Phasenraumverteilung $d\sigma/d\ell dz d\varphi$ des Positrons in Einheiten von MeV^{-2} über einer von z und ℓ aufgespannten Ebene bei konstantem $\varphi = \pi$. Parameter: $\sqrt{s_{XX'}} = 1.2$ MeV, $\eta = 1/600$,$\tau_L = 4\pi$ und $\tau_X = 7/\eta$. Oben: $a_L = 10^{-10}$, Einheiten von $10^{-4} \times \mathrm{MeV}^{-2}$; unten: $a_L = 0.1$, Einheiten von $10^{-6} \times \mathrm{MeV}^{-2}$. 51

4.5 Wie in Abbildung 4.4 aber für unterschiedliche Werte von a_L. Oben: $a_L = 0.5$, Einheiten von $10^{-6} \times \mathrm{MeV}^{-2}$; unten: $a_L = 1$, Einheiten von $10^{-6} \times \mathrm{MeV}^{-2}$. . 52

4.6 Contourplot der Phasenraumverteilung $d\sigma/d\ell dz d\varphi$ des Positrons in Einheiten von $10^{-5} \times \mathrm{MeV}^{-2}$ in einer von φ und ℓ aufgespannten Ebene bei konstantem $z = 0$. Parameter: $\eta = 1/600$,$\tau_L = 4\pi$ und $\tau_X = 7/\eta$. Oben: $a_L = 0.1$, $\sqrt{s_{XX'}} = 1.2$ MeV; (b) unten links: $a_L = 1.0$, $\sqrt{s_{XX'}} = 1.2$; (c) unten rechts: $a_L = 1.0$ und $\sqrt{s_{XX'}} = 1.022$ MeV 55

5.1 Abhängigkeit des Energietransfers ℓ von der invarianten Laserphase ϕ für die Parameter $a_L = 1$, $a_X = 10^{-5}$, $\sqrt{s_{XX'}} = 1.2$ MeV, $\eta = 1/600$, $\tau_L = 4\pi$ und $\tau_X = 7/\eta$ und konstanten Azimutalwinkel $\varphi = \pi$. Die rote Kurve beschreibt die Lösungen $\ell_-(\phi)$ und die blaue Kurve die Lösungen $\ell_+(\phi)$. Links: Mit „Scheinlösungen“, rechts: ohne „Scheinlösungen“. 57

5.2 Optische Kaustiken als Regionen deutlich erhöhter Intensität im Ortsraum erzeugt durch Lichtbrechung an einem Wasserglas. 59

5.3 Spektrum des laser-assistierten Breit-Wheeler-Prozesses bei konstanten $z = 0$ und $\varphi = \pi$ mit den Parametern $a_L = 0.1$, $a_X = 10^{-5}$, $\sqrt{s_{XX'}} = 1.2$ MeV, $\eta = 1/600$, $\tau_L = 4\pi$ und $\tau_X = 7/\eta$. Oberes Diagramm: $d\sigma/d\ell dz d\phi$ als Funktion von ℓ (untere Achse; die korrespondierenden Werte von $p_\perp$ sind an der oberen Achse gegeben). Das dargestellte Spektrum (blaue Kurve) ist wie in Kapitel 4 berechnet worden und ist hier mit einer Gaußschen-Glättungskurve mit einer Breite von $\delta\ell = 0.8$ (rote Kurve) gefaltet worden. Mittleres Diagramm: Die Glättungskurve einzeln dargestellt. Unteres Diagramm: Die Phase ϕ als Funktion von ℓ wie in (5.2) berechnet. Die vertikal gepunkteten Linien zeigen die Positionen der Ableitung $d\phi/d\ell$ an der Stelle, wo zwei Zweige von $\phi(\ell)$ auseinander laufen. Die grauen Flächen kennzeichnen die geschätzte Breite der kaustischen Regionen. 60

5.4 Wie Abbildung 5.3, aber mit $a_L = 1.0$ und $\delta\ell = 5$. Im unteren Diagramm ist neben der „−“-Lösung (graue Linie) auch die „+“-Lösung (grün-gestrichelte Linie) zu sehen. Das abrupte Abbrechen der Kurven am linken Rand in den Diagrammen wird durch die Bedingung $p_\perp = 0$ bestimmt. 61

5.5 Wie in Abbildung 5.4 aber mit einer längeren Pulsdauer von $\tau_L = 8\pi$ und $\tau_X = 14/\eta$, was zu einer Erhöhung der Anzahl von Kaustiken führt. 62
5.6 Vergrößerte Ausschnitte des Spektrums von Abbildung 5.5 für unterschiedliche Bereiche von ℓ. 63
5.7 Contourplot der Phasenraumverteilung des Positrons über einer von z und ℓ aufgespannten Ebene bei konstantem $\varphi = \pi$. Parameter: $a_L = 1$, $\sqrt{s_{XX'}} = 1.2$ MeV, $\eta = 1/600$, $\tau_L = 4\pi$ und $\tau_X = 7/\eta$. Oben: $\log(d\sigma/d\ell dz d\varphi)$ in Einheiten von MeV^{-2}, unten: $d\sigma/d\ell dz d\varphi$ in Einheiten von $10^{-6} \times \mathrm{MeV}^{-2}$. Die grau und grün punktierten Kurven kennzeichnen den Verlauf der kaustischen Peaks. . . 65

7.1 Schematische Darstellung des Volkov-Zustandes. Hier symbolisiert eine Doppellinie (links) das Elektron im Furry-Bild und die einzelnen Diagramme (rechts) dessen perturbative Entwicklung in Feynman-Diagrammen. 72
7.2 Vergleich des Transversalimpulses $p_{p\perp}$ über der Ebene (ℓ, y) (links) und über der Ebene (ℓ, z) (rechts) in MeV. Parameter $\omega_X = \omega_{X'} = 0.6$ MeV und $\omega_L = 1$ keV. 75
7.3 Vergleichende Abbildungen des differentiellen Wirkungsquerschnittes in unterschiedlichen Koordinatensystemen a) $d\sigma/dzd\ell d\varphi$ in Einheiten von $10^{-6} \times \mathrm{MeV}^{-2}$ und b) $d\sigma/dp_\perp dEd\varphi$ in Einheiten von $10^{-6} \times \mathrm{MeV}^{-4}$ bei konstantem $\varphi = \pi$. Parameter: $a_L = 0.5$, $a_X = 10^{-5}$, $\sqrt{s_{XX'}} = 1.2$ MeV, $\eta = 1/600$,$\tau_L = 4\pi$ und $\tau_X = 7/\eta$. 81
7.4 Abbildungen des differentiellen Wirkungsquerschnittes in $d\sigma/dp_\perp dEd\varphi$ in Einheiten von $10^{-6} \times \mathrm{MeV}^{-4}$: a) $a_L = 0.01$, $\varphi = \pi/2$; b) $a_L = 0.01$, $\varphi = \pi$; c) $a_L = 0.1$, $\varphi = \pi/2$; d) $a_L = 0.1$, $\varphi = \pi$. Parameter: $a_X = 10^{-5}$, $\sqrt{s_{XX'}} = 1.2$ MeV, $\eta = 1/600$, $\tau_L = 4\pi$ und $\tau_X = 7/\eta$. 83
7.5 Wie in Abbildung 7.4, aber mit den Laserintensitätsparameter a) $a_L = 0.5$, $\varphi = \pi/2$; b) $a_L = 0.5$, $\varphi = \pi$; c) $a_L = 1$, $\varphi = \pi/2$; d) $a_L = 1$, $\varphi = \pi$. 84
7.6 Abbildungen des differentiellen Wirkungsquerschnittes in $d\sigma/dp_\perp dzd\varphi$ und konstanten $\varphi = \pi$: a) $\sqrt{s_{XX'}} = 1.022$ MeV, in Einheiten von $10^{-5} \times \mathrm{MeV}^{-2}$; b)$\sqrt{s_{XX'}} = 1.06$ MeV, in Einheiten von $10^{-5} \times \mathrm{MeV}^{-2}$; c) $\sqrt{s_{XX'}} = 1.1$ MeV, in Einheiten von $10^{-6} \times \mathrm{MeV}^{-2}$; d) $\sqrt{s_{XX'}} = 1.4$ MeV, in Einheiten von $10^{-6} \times \mathrm{MeV}^{-2}$. Parameter: $a_L = 0.1$, $a_X = 10^{-5}$, $\eta = 1/600$,$\tau_L = 4\pi$ und $\tau_X = 7/\eta$. 85
7.7 Wie die Abbildungen 7.6 nur mit $a_L = 1$: a) $\sqrt{s_{XX'}} = 1.022$ MeV, in Einheiten von $10^{-5} \times \mathrm{MeV}^{-2}$; b)$\sqrt{s_{XX'}} = 1.06$ MeV, in Einheiten von $10^{-5} \times \mathrm{MeV}^{-2}$; c) $\sqrt{s_{XX'}} = 1.1$ MeV, in Einheiten von $10^{-6} \times \mathrm{MeV}^{-2}$; d) $\sqrt{s_{XX'}} = 1.4$ MeV, in Einheiten von $10^{-6} \times \mathrm{MeV}^{-2}$. 86

Literaturverzeichnis

[Apo18] Apollon: *https://portail.polytechnique.edu/luli/en/cilex-apollon/apollon* (2018).

[Bam99] C. Bamber, S. Boege, T. K. T. Kotseroglou, A. Melissinos et al.: *Studies of nonlinear QED in collisions of 46.6-GeV electrons with intense laser pulses*, Phys. Rev. D **60**, 092004 (1999).

[Bel08] A. R. Bell and J. G. Kirk: *Possibility of Prolific Pair Production with High-Power Lasers*, Phys. Rev. Lett. **101**, 200403 (2008).

[Ber80] M. V. Berry and C. Upstill: *IV Catastrophe Optics: Morphologies of Caustics and Their Diffraction Patterns*, in E. Wolf (Editor), *Progress in Optics*, volume 18, pages 257–346, Elsevier, 1980.

[Bre34] G. Breit and J. A. Wheeler: *Collision of Two Light Quanta*, Phys. Rev. **46**, 1087 (1934).

[Bur97] D. Burke, R. Field, G. Horton-Smith, T. Kotseroglou, J. Spencer et al.: *Positron production in multi-photon light by light scattering*, Phys. Rev. Lett. **79**, 1626 (1997).

[Chi79] C. B. Chiu and S. Nussinov: *Diagrammatic approach to pair production in slowly varying and constant fields*, Phys. Rev. D **20**, 945 (1979).

[DP12] A. Di Piazza, C. Müller, K. Z. Hatsagortsyan and C. H. Keitel: *Extremely high-intensity laser interactions with fundamental quantum systems*, Rev. Mod. Phys. **84**, 1177 (2012).

[DP16] A. Di Piazza: *Nonlinear Breit-Wheeler Pair Production in a Tightly Focused Laser Beam*, Phys. Rev. Lett. **117**, 213201 (2016).

[Dra17] Draco: *https://www.hzdr.de/db/Cms?pNid=2096* (2017).

[Elk11] N. V. Elkina, A. M. Fedotov, I. Y. Kostyukov, M. V. Legkov, N. B. Narozhny, E. N. Nerush and H. Ruhl: *QED cascades induced by circularly polarized laser fields*, Phys. Rev. ST Accel. Beams **14**, 054401 (2011).

[Ext17] Extreme Light Infrastructure: *https://www.eli-beams.eu/en/about/vision/* (2017).

[Fed10] A. M. Fedotov, N. B. Narozhny, G. Mourou and G. Korn: *Limitations on the Attainable Intensity of High Power Lasers*, Phys. Rev. Lett. **105**, 080402 (2010).

[Fra81] E. S. Fradkin and D. M. Gitman: *Furry Picture for Quantum Electrodynamics with Pair-Creating External Field*, Fortschr. Phys. **29**, 381 (1981).

[Fri64] Z. Fried and J. H. Eberly: *Scattering of a High-Intensity, Low-Frequency Electromagnetic Wave by an Unbound Electron*, Phys. Rev. **136**, B871 (1964).

[Fur51] W. H. Furry: *On Bound States and Scattering in Positron Theory*, Phys. Rev. **81**, 115 (1951).

[Gla63a] R. J. Glauber: *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field*, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).

[Gla63b] R. J. Glauber: *Photon Correlations*, Phys. Rev. Lett. **10**, 84 (1963).

[Har09] C. Harvey, T. Heinzl and A. Ilderton: *Signatures of high-intensity Compton scattering*, Phys. Rev. A **79**, 063407 (2009).

[Heb11] F. Hebenstreit, A. Ilderton, M. Marklund and J. Zamanian: *Strong field effects in laser pulses: The Wigner formalism*, Phys. Rev. D **83**, 065007 (2011).

[Hei09] T. Heinzl and A. Ilderton: *A Lorentz and gauge invariant measure of laser intensity*, Optics Communications **282**, 1879 (2009).

[Hei10] T. Heinzl, A. Ilderton and M. Marklund: *Finite size effects in stimulated laser pair production*, Phys. Lett. B **692**, 250 (2010).

[HER17] HERCULES: *https://cuos.engin.umich.edu/researchgroups/hfs/facilities/hercules-petawatt-laser/* (2017).

[Hu14] H. Hu and J. Huang: *Trident pair production in colliding bright x-ray laser beams*, Phys. Rev. A **89**, 033411 (2014).

[Ild11] A. Ilderton: *Trident pair production in strong laser pulses*, Phys. Rev. Lett. **106**, 020404 (2011).

[Ild15] A. Ilderton, G. Torgrimsson and J. Wårdh: *Pair production from residues of complex worldline instantons*, Phys. Rev. D **92**, 025009 (2015).

[Jan13] M. Jansen and C. Müller: *Strongly enhanced pair production in combined high- and low-frequency laser fields*, Phys. Rev. A **88**, 052125 (2013).

[Jan15] M. J. A. Jansen and C. Müller: *Pair Creation of Scalar Particles in Intense Bichromatic Laser Fields*, J. Phys.: Conf. Ser. **594**, 012051 (2015).

[Kra83] Y. A. Kravtsov and Y. I. Orlov: *Caustics, catastrophes, and wave fields*, Sov.

Phys. Usp. **26**, 1038 (1983).

[Kra93] Y. A. Kravtsov and Y. I. Orlov: *Caustics, Catastrophes and Wave Fields*, number 15 in Springer Series on Wave Phenomena, Springer Berlin Heidelberg, 1993.

[Kra11] K. Krajewska and J. Z. Kamiński: *Correlations in laser-induced electron-positron pair creation*, Phys. Rev. A **84**, 033416 (2011).

[Kra12] K. Krajewska and J. Z. Kamiński: *Phase effects in laser-induced electron-positron pair creation*, Phys. Rev. A **85**, 043404 (2012).

[Kra14] K. Krajewska and J. Z. Kamiński: *Coherent combs of antimatter from nonlinear electron-positron-pair creation*, Phys. Rev. A **90**, 052108 (2014).

[Lan82] L. D. Landau and E. M. Lifschitz: *Course of Theoretical Physics*, volume 4, Quatum Electrodynamics, authors: V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii, Butterworth-Heinemann, 1982.

[Meu15] S. Meuren, C. Keitel and A. Di Piazza: arXiv:1503.03271 (2015).

[Mü09] S. J. Müller and C. Müller: *Few-photon electron-positron pair creation by relativistic muon impact on intense laser beams*, Phys. Rev. D **80**, 053014 (2009).

[Nar69] N. B. Narozhny: *Propagation of Plane Electromagnetic Waves in a Constant Field*, JETP **28**, 371 (1969).

[Nik63] A. Nikishov and V. Ritus: *Quantum Processes in the Field of a Plane Electromagnetic Wave and in a Constant Field. I*, J. Exp. Theor. Phys. **46**, 776 (1963).

[Nik64] A. Nikishov and V. Ritus: *Quantum Processes in the Field of a Plane Electromagnetic Wave and in a Constant Field. 2*, J. Exp. Theor. Phys. **19**, 1191 (1964).

[Nik67] A. Nikishov and V. Ritus: *Pair Production by a Photon and Photon Emission by an Electron in the Field of an Intense Electromagnetic Wave and in a Constant Field*, JETP **25**, 1135 (1967).

[Nou11] T. Nousch: *Multiphotonen Paarerzeugung in starken gepulsten Laserfeldern*, Diploma Thesis, TU Dresden (2011).

[Nou12] T. Nousch, D. Seipt, B. Kämpfer and A. Titov: *Pair production in short laser pulses near threshold*, Phys. Lett. B **715**, 246 (2012).

[Nou16] T. Nousch, D. Seipt, B. Kämpfer and A. I. Titov: *Spectral caustics in laser assisted Breit–Wheeler process*, Phys. Lett. B **755**, 162 (2016).

[Nou17] T. Nousch, A. Otto, D. Seipt, B. Kämpfer, A. I. Titov, D. Blaschke, A. D. Panferov and S. A. Smolyansky: *Laser Assisted Breit-Wheeler and*

Schwinger Processes, in S. Schramm and M. Schäfer (Editors), *New Horizons in Fundamental Physics*, FIAS Interdisciplinary Science Series, pages 253–262, Springer International Publishing, 2017, dOI: 10.1007/978-3-319-44165-8_18.

[Ott15] A. Otto, D. Seipt, D. Blaschke, B. Kämpfer and S. A. Smolyansky: *Lifting shell structures in the dynamically assisted Schwinger effect in periodic fields*, Phys. Lett. B **740**, 335 (2015).

[Ott16] A. Otto, T. Nousch, D. Seipt, B. Kämpfer, D. Blaschke, A. D. Panferov, S. A. Smolyansky and A. I. Titov: *Pair production by Schwinger and Breit–Wheeler processes in bi-frequent fields*, Plasma Phys. **82** (2016).

[Pik14] O. J. Pike, F. Mackenroth, E. G. Hill and S. J. Rose: *A photon-photon collider in a vacuum hohlraum*, Nat. Photon **8**, 434 (2014).

[POL17] POLARIS: *"http://www.ioq.uni-jena.de/en/Laser+systems/POLARIS.html"* (2017).

[Rei62] H. R. Reiss: *Absorption of Light by Light*, J. Math. Phys. **3**, 59 (1962).

[Sau31] F. Sauter: *Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs*, Z. Phys. **69**, 742 (1931).

[Sch51] J. Schwinger: *On Gauge Invariance and Vacuum Polarization*, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).

[Sei11] D. Seipt and B. Kämpfer: *Nonlinear Compton scattering of ultrashort intense laser pulses*, Phys. Rev. A **83**, 022101 (2011).

[Sei14] D. Seipt and B. Kämpfer: *Laser assisted Compton scattering of X-ray photons*, Phys. Rev. A **89**, 023433 (2014).

[Sei16] D. Seipt, A. Surzhykov, S. Fritzsche and B. Kämpfer: *Caustic structures in x-ray Compton scattering off electrons driven by a short intense laser pulse*, New J. Phys. **18**, 023044 (2016).

[Sok10] I. V. Sokolov, N. M. Naumova, J. A. Nees and G. A. Mourou: *Pair Creation in QED-Strong Pulsed Laser Fields Interacting with Electron Beams*, Phys. Rev. Lett. **105**, 195005 (2010).

[Str85] D. Strickland and G. Mourou: *Compression of amplified chirped optical pulses*, Optics Communications **56**, 219 (1985).

[Tan13] S. Tang, B.-S. Xie, D. Lu, H.-Y. Wang, L.-B. Fu and J. Liu: *Electron-positron pair creation and correlation between momentum and energy level in a symmetric potential well*, Phys. Rev. A **88**, 012106 (2013).

[Tho98] K. A. Thompson and P. Chen: *Energy spectrum of electron - positron pairs produced via the trident process, with application to linear colliders in the deep quantum regime*, SLAC-PUB-7776 pages 378–387 (1998).

[Tit12] A. Titov, B. Kämpfer, A. Takabe and A. Hosaka: *Enhanced subthreshold electron-positron production in short laser pulses*, Phys. Rev. Lett. **108**, 240406 (2012).

[Tit13] A. Titov, B. Kämpfer, A. Takabe and A. Hosaka: *Breit-Wheeler process in very short electromagnetic pulses*, Phys. Rev. A **87**, 042160 (2013).

[Tit16] A. I. Titov, B. Kämpfer, A. Hosaka, T. Nousch and D. Seipt: *Determination of the carrier envelope phase for short, circularly polarized laser pulses*, Phys. Rev. D **93**, 045010 (2016).

[Vai92] A. Vaidya, C. Farina and M. Hott: *Furry's picture in the path integral framework*, Il Nuovo Cimento A **105**, 925 (1992).

[VC13] S. Villalba-Chávez and C. Müller: *Photo-production of scalar particles in the field of a circularly polarized laser beam*, Phys. Lett. B **718**, 992 (2013).

[Vol35] D. M. Volkov: *Über eine Klasse von Lösungen der Diracschen Gleichung*, Z. Physik **94**, 250 (1935).

[Vul18] Vulcan: *https://www.clf.stfc.ac.uk/Pages/Vulcan-laser.aspx* (2018).

Danksagung

Hiermit möchte ich mich herzlich bei Prof. Dr. Burkhard Kämpfer bedanken, der diese Arbeit ermöglichte. Die fachlichen Diskussionen und Ratschläge haben mich in den letzten Jahren inspiriert und unterstützt. Insbesondere durch seine Ermutigungen und Geduld konnte diese Arbeit fertiggestellt werden.

Weiterhin bedanke ich mich für die sehr guten Arbeitsbedingungen am Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf. Ich danke den Direktoren Prof. Dr. Roland Sauerbrey und Prof. Dr. P. Joehnk, sowie den Direktoren des Instituts Prof. Dr. Thomas Cowan und Prof. Dr. Ulrich Schramm für die Bereitstellung der Arbeitsumgebung und die damit verbundene Möglichkeit, diese Arbeit anzufertigen.

Des Weiteren bedanke ich mich bei Prof. Dr. M. Vojta für die freundliche Unterstützung des Instituts für theoretische Physik an der TU Dresden.

Ich danke allen Kollegen und Weggefährten für die hilfreichen Gespräche, Anregungen und Korrekturen.

Großer Dank gilt auch meiner Frau und meinen Kindern für die stetige Motivation, den langen Atem und das Verständnis, welches sie mir über all die Jahre entgegengebracht haben.

Abschließend will ich diese Arbeit meiner Mutter widmen, die leider die Fertigstellung nicht mehr miterleben konnte.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit von mir selbständig und ohne die unzulässige Hilfe Dritter angefertigt worden ist. Dabei wurden lediglich die von mir explizit angegebenen Hilfsmittel verwendet. Wissen, welches von mir direkt oder indirekt aus fremden Quellen übernommen wurde, ist als solches kenntlich gemacht und in das Literaturverzeichnis aufgenommen worden.

Diese Dissertation wurde am Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf e.V. unter der wissenschaftlichen Betreuung von Herrn Prof. Dr. Burkhard Kämpfer angefertigt. Ich habe bisher an keiner Institution, weder im Inland noch im Ausland, einen Antrag auf die Eröffnung eines Promotionsverfahrens gestellt oder diese Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form bei einer anderen Prüfungsbehörde eingereicht.

Dresden, den 22.08.2018

Tobias Nousch