Physik 1 für Maschinenwesen

Prof. Dr. Jürgen Faßbender

Institut für Festkörperphysik, TU Dresden
Institut für Ionenstrahlphysik und Materialwissenschaften,
Helmholtz–Zentrum Dresden–Rossendorf

Dr. Kilian Lenz

Institut für Ionenstrahlphysik und Materialwissenschaften,
Helmholtz–Zentrum Dresden–Rossendorf

Vorlesungs-Webseite: http://www.hzdr.de/fassbender

Lehrbücher

- E. Hering, R. Martin, M. Stohrer:
  Physik für Ingenieure
  Springer Verlag
- H. Stroppe
  Physik für Studenten der Natur- und Technikwissenschaften
  Fachbuchverlag Leipzig
- P.A. Tippler
  Physik
  Spektrum Akademischer Verlag
- H. Lindner
  Physik für Ingenieure
  Hanser Verlag

Übungsbuch

- P. Müller, H. Heinemann, H. Krämer, H. Zimmer
  Übungsbuch Physik
  Hanser Verlag

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **5**

1.1 Physikalische Größen: 6

1.2 Fehlerrechnung 8

2 Mechanik **11**

2.1 Kinematik 11

2.1.1 Translationsbewegungen 12

2.1.1.1 1-dimensionale Bewegung 12

2.1.1.2 2-dimensionale Bewegung 15

2.1.2 Rotationsbewegungen 20

2.2 Grundgesetze der klassischen Mechanik 23

2.2.1 Newtonsche Axiome 23

2.2.2 Addition von Kräften: 25

2.2.3 Raketengleichung als Folge des Aktionsgesetzes 26

2.3 Dynamik in bewegten Bezugssystemen 27

2.4 Arbeit und Energie 29

2.4.1 Arbeit 29

2.4.2 Leistung, Wirkungsgrad 31

2.4.3 Energie 32

2.5 Stoßprozesse 33

2.5.1 Zentraler, unelastischer Stoß 33

2.5.2 Zentraler, elastischer Stoß 34

2.5.3 Schiefer, zentraler, elastischer Stoß 36

2.6 Drehimpuls $\vec{L}$ 38

2.6.1 Kreisbewegung 38

2.6.2 Drehimpulserhaltung 38

2.6.3 Drehmoment 39

2.6.4 Arbeit bei Drehbewegungen 40

2.6.5 Leistung bei Drehbewegungen 40

2.6.6 Energie bei Drehbewegungen 40

2.7 Gravitation, Keplersche Gesetze 42

2.7.1 Gravitationsgesetz 42

2.7.2 Keplersche Gesetze 43

2.7.3 Arbeit gegen die Schwerkraft, kosmische Geschwindigkeiten . . 43

2.8 Mechanik des starren Körpers 46

2.8.1 Freiheitsgrade 46

2.8.2 Kräfte am starren Körper; Drehmomente 46
2.8.3 Schwerpunkt 50
2.8.4 Trägheitsmoment 53
2.8.5 Kreisel 56
2.9 Mechanik deformierbarer Körper 59
2.9.1 Deformierbare feste Körper - elastische Verformung 59
2.9.2 Deformierbare feste Körper - plastische Verformung 61
2.9.3 Flüssigkeiten 64
2.9.4 Gase 67
2.9.5 Grenzflächeneffekte 68

3 Schwingungen und Wellen 71
3.1 Schwingungstypen 71
3.2 Ungedämpfte Schwingung 72
3.3 Gedämpfte Schwingungen 75
3.4 Erzwungene Schwingungen 78
3.5 Überlagerung von harmonischen Schwingungen 83
3.6 Gekoppelte Schwingungen 84
3.7 Zusammenhang von Schwingungen und Wellen 86
3.8 Überlagerung von Wellen, Interferenz, stehende Wellen 89

4 Thermodynamik 91
4.1 Temperatur 92
4.2 Thermische Ausdehnung 92
4.3 Zustandsgleichung idealer Gase 94
4.4 Kinetische Gastheorie 95
4.5 Wärmekapazität 97
4.6 Hauptsätze der Thermodynamik 98
4.6.1 Erster Hauptsatz: Energieerhaltungssatz 98
4.6.2 Spezielle Zustandsänderungen idealer Gase: 99
4.6.3 Kreisprozesse 103
4.6.4 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik 105
4.6.5 Dritter Hauptsatz der Thermodynamik 107
4.7 Reale Gase 108
4.7.1 Joule-Thomson-Effekt 109
4.8 Wärmeübertragung 112
4.8.1 Wärmeleitung 112
4.8.2 Konvektion 113

1 Einführung

Interdisziplinäre Kenntnisse werden immer wichtiger um die komplexen Zusammenhänge in den verschiedenen wissenschaftlichen Teilbereichen zu erfassen.

$\Rightarrow$ Die Physik, als eine der Grundlagenwissenschaften reicht in viele andere Teilgebiete hinein, so wie auch andere Teilgebiete durch zur Verfügungstellung von Methoden oder speziellen Fragestellungen in die Physik hineinreichen.

Mathematik: Theoretische Beschreibung von physikalischen Vorgängen.
Chemie: Aufbau der Materie, Atome, Moleküle, chemische Reaktionen.
Biologie: Prozesse in Zellen, wie z. B. Austausch von Ionen, Membranen, Grenzflächen, elektrische Reize in Nervenbahnen.
Medizin Physikalische Untersuchungsmethoden, wie z. B. Röntgen, Computertomographie, Elektrokardiogramm usw., biokompatible Werkstoffe.
Elektrotechnik: Elektrizität, Magnetismus, Halbleiterbauelemente, Werkstoffkunde.
Maschinenbau: Mechanik, Thermodynamik, Grenzflächen, Nano- und Mikrosysteme, Werkstoffkunde.
Informatik: Halbleitertechnologie, Optoelektronik, Magnetismus.
Architektur, Bauingenieurwesen: Bauphysik, Statik, Wärmedämmung, Schallschutz.
Astronomie: Entstehung von Sternen, Optik, elektromagnetische Wellen

---

Ziel der Vorlesung: Physikalisches Basiswissen vermitteln und Zusammenhänge aufzeigen. Es geht weniger um das Auswendiglernen von Gleichungen, sondern um das Verständnis der physikalischen Prinzipien.

1.1 Physikalische Größen:

Im Unterschied zur Mathematik kennzeichnet eine physikalische Größe neben dem Zahlenwert (2, 3, 4.72, ...) eine Einheit (m, kg, m/s, ...). Dabei unterscheidet man zwischen Basisgrößen bzw. Basiseinheiten (m, s, kg, A, ...) und abgeleiteten Größen (m/s, Am, ...).

Tip zum Rechnen in der Physik:
Beim Umformen oder Zusammenfassen von mehreren Gleichungen *immer* mit den zugehörigen Variablen rechnen. Erst am Schluss, wenn die Gleichung vollständig bekannt ist die Zahlenwerte *mit* Einheiten einsetzen und das Gesamtergebnis berechnen. Auch die Einheiten zusammenrechnen; also ggf. kürzen. Die erhaltene Einheit erlaubt eine Überprüfung der Plausibilität der Gleichung.

Beispiel:
Annahme:

$$s = \frac{v}{t}, \quad v = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad t = 5\,\mathrm{s} \tag{1.1}$$

$$\Rightarrow s = \frac{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{5\,\mathrm{s}} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \quad \textbf{Falsche Einheit!} \tag{1.2}$$

Da die Einheit nicht zur physikalischen Größe passt, ist die Grundannahme (oder die Umformung) falsch.
Annahme:

$$s = vt, \quad v = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad t = 5\,\mathrm{s} \tag{1.3}$$

$$\Rightarrow s = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 5\,\mathrm{s} = 50\,\mathrm{m}, \textbf{ Richtige Einheit!} \tag{1.4}$$

Internationales System (SI):

Basisgröße	Basiseinheit	Symbol
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunde	s
elektrische Stromstärke	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Lichtstärke	Candela	cd
Stoffmenge	Mol	mol

Messung der Länge:
Vergleich mit Maßstäben, Schieblehren, Mikrometerschrauben, etc.
Definition: 1 Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum innerhalb von 1/c = 1/299792458 Sekunden durchläuft.

Messung der Zeit:

Periodische Vorgänge dienen als Zeitmaß.
Definition: 1 Sekunde ist das 9 192 631 770-fache der Periodendauer die dem Übergang zwischen zwei bestimmten Niveaus von ^{133}Cs-Strahlung entspricht.

Meter und Sekunde sind über die Vakuum-Lichtgeschwingkeit verknüpft.

Messung der Masse:

Vergleich mit dem internationalen Kilogrammprototyp.

Messung der Temperatur:

Definition: 1 Kelvin ist der 273,16-te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes von Wasser.

Messung der Stoffmenge:

Definition: 1 Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebensoviel Einzelteilchen besteht wie in 12 g des Kohlenstoffisotops ^{12}C enthalten sind.
Avogadro-Konstante: $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ mol^{-1} $\triangleq$ Zahl der Atome oder Moleküle in 1 Mol.

Messung der Lichtstärke:

Definition: Die Candela ist die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung einer Strahlungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz 540×10^{12} Hz aussendet und deren Strahlstärke in dieser Richtung 1/683 W/Steradiant beträgt.

Dezimale Vielfache und Teile von Einheiten:

Potenz	**Vorsilbe**	**Symbol**
10^{-18}	atto	a
10^{-15}	femto	f
10^{-12}	pico	p
10^{-9}	nano	n
10^{-6}	mikro	μ
10^{-3}	milli	m
10^{-2}	centi	c
10^{-1}	dezi	d
10^{1}	Deka	da
10^{2}	Hekto	h
10^{3}	Kilo	k
10^{6}	Mega	M
10^{9}	Giga	G
10^{12}	Tera	T
10^{15}	Peta	P
10^{18}	Exa	E

Messgenauigkeit:
Messwerte sind stets mit Fehlern behaftet. Dabei unterscheidet man zwischen *systematischen* und *zufälligen/statistischen* Fehlern.

Systematische Fehler: z. B. falsche Kalibrierung von Messgeräten, Ablesefehler, Messwertdriften.
Statistische Fehler: Schwankung beim Anlegen von Maßstäben, Messgerätegenauigkeit (Schätzung von Zwischenwerten).

Während systematische Fehler nur schwer erkennbar bzw. behebbar sind, können statistische Fehler mittels Fehlerrechnung abgeschätzt werden.

1.2 Fehlerrechnung

Mittelwert:
Um statistische Fehler zu minimieren wird eine Messung der Größe x n-mal durchgeführt. Der Mittelwert $\bar{x}$ ist dann:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1.5}$$

Beispiel:

Drei Temperaturmessungen:
a) T_1=19.0°C; T_2=20.0°C; T_3=21.0°C $\Rightarrow$ $\bar{T} = 20°\text{C}$.
b) T_1=19.9°C; T_2=20.0°C; T_3=20.1°C $\Rightarrow$ $\bar{T} = 20°\text{C}$.

Bei beiden Messserien ist der Mittelwert der Temperatur $\bar{T} = 20°\text{C}$. Trotzdem ist die Schwankungsbreite verschieden. Daher muss eine zusätzliche Größe, nämlich die Standardabweichung σ, eingeführt werden.

Standardabweichung σ des Messwertes:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \tag{1.6}$$

Beispiel:

Temperaturmessungen von oben:

a) Auswerten des Ausdrucks $(x_i - \bar{x})^2$: für $T_1 \rightarrow 1$; für $T_2 \rightarrow 0$; für $T_3 \rightarrow 1$.
Auswerten der $\sum_{i=1}^{n}$ ergibt 2.
Bei n=3 Messwerten ergibt sich dann: $\sigma = \sqrt{\frac{1}{2}2} = 1$

b) Analoge Rechnung ergibt $\sigma = \sqrt{\frac{1}{2}0.02} = 0.1$

Die obige Gleichung lässt sich vereinfachen für $n \gg 1 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\bar{x^2} - (\bar{x})^2}$

Mit statistischen Fehlern behaftete Größen folgen der Normal- bzw. **Gaußverteilung**:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2} \tag{1.7}$$

Eine Einzelmessung der Größe x hat mit der Wahrscheinlichkeit $p(x)\mathrm{d}x$ einen Wert aus dem Intervall $[x, x + \mathrm{d}x]$.
Ein einzelner Messpunkt weicht im Durchschnitt um σ vom wahren Wert ab, d. h. er hat die Wahrscheinlichkeit von 0.683 innerhalb des Intervalls $\bar{x} \pm \sigma$ zu liegen.

Standardabweichung des Mittelwertes:

$$\Delta\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \cong= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{1.8}$$

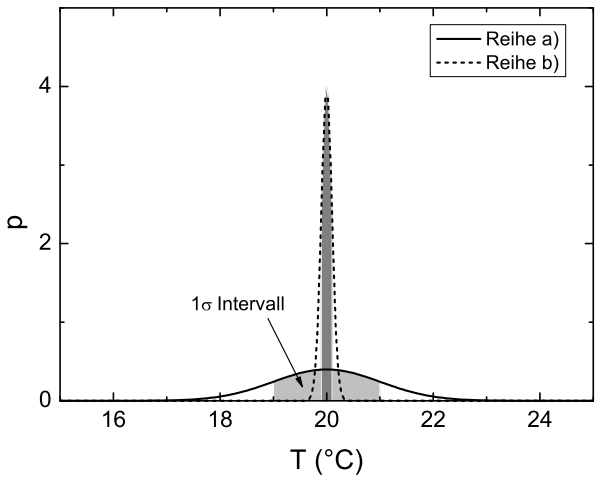


Abbildung 1.1: Gauß-Verteilung für die beiden Messungen von Temperatur-Reihen aus dem obigen Beispiel.

Der Mittelwert liegt also mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.683 im Intervall $\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Falls der Fehler von abgeleiteten Größen bestimmt werden soll, muss die Fehlerfortpflanzung berücksichtigt werden.

allgemein:

Wahrscheinlichster Wert: $\bar{f} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots)$

Standardabweichung der Größe f: $\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2_{x_i=\bar{x}_i} \sigma_i^2}$

Absoluter Größtfehler der Größe f: $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \mid \frac{\partial f}{\partial x_i} \mid \Delta \bar{x}_i$

Beispiel:

Die Geschwindigkeit v ist eine Funktion von Strecke s und Zeit t.

$$v(s,t) = \frac{s}{t} \tag{1.9}$$

d.h., $v \triangleq f$, $s \triangleq x_1$, $t \triangleq x_2$. Mit

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{t} \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{-s}{t^2} \tag{1.11}$$

folgt:

$$\sigma_v = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{t}}\right)^2 \sigma_s^2 + \left(\frac{-\bar{s}}{\bar{t}^2}\right)^2 \sigma_t^2} \tag{1.12}$$

d. h. die Standardabweichung σ_v der zusammengesetzten Größe (hier $v(s,t)$) ist auf den Mittelwert der einzelnen Variablen und deren Standardabweichungen zurückgeführt worden.

2 Mechanik

Die Mechanik besteht aus drei Teilgebieten:

Kinetik: Bewegungsvorgänge (Translation, Rotation)
Statik: Zusammensetzung und Gleichgewicht von Kräften
Dynamik: Kräfte als Ursache von Bewegungen

Die Mechanik besitzt eine Sonderrolle in der Physik, da man bis zum Ende des 19. Jahrhunderts glaubte, dass sich alle Naturerscheinungen auf die Mechanik zurückführen lassen (klassische Mechanik).

Grenzen:

- hohe Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit c;
  Einstein $\rightarrow$ relativistische Mechanik
- kleine Objekte im Bereich atomarer Dimensionen
  Heisenberg, Schrödinger $\rightarrow$ Quantenmechanik

2.1 Kinematik

Betrachtet man einen starren Körper so stellt man insgesamt sechs Freiheitsgrade der Bewegung fest:

- Drei Translationsfreiheitsgrade (Bewegung in alle drei Raumrichtungen)
- Drei Rotationsfreiheitsgrade (Drehung des Körpers um drei Achsen)

Bei einer allgemeinen Bewegung des starren Körpers können alle diese Freiheitsgrade auftreten; allerdings kann man die Bewegung in verschiedene Komponenten aufteilen:

- Translation des Schwerpunktes
- Rotation um diesen Schwerpunkt

Beispiel:

Kunstspringer, der einen Salto ausführt.

Vereinfachung: Translation des Schwerpunktes $\rightarrow$ Translation eines Massenpunktes.

Massepunkt: Die Masse ist in einem Punkt konzentriert. Es existieren nur die drei Translationsfreiheitsgrade.

2.1.1 Translationsbewegungen

2.1.1.1 1-dimensionale Bewegung

Gleichförmige Bewegung:

In gleichen Zeiten Δt werden gleiche Strecken Δs durchlaufen (die Strecke nimmt gleichförmig zu; Proportionalitätsfaktor Geschwindigkeit v).

$$s(t) = vt + s_0 \tag{2.1}$$

s : Strecke

v : Geschwindigkeit

t : Zeit

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{2.2}$$

Die Geschwindigkeit ist die Steigung im s-t-Diagramm.

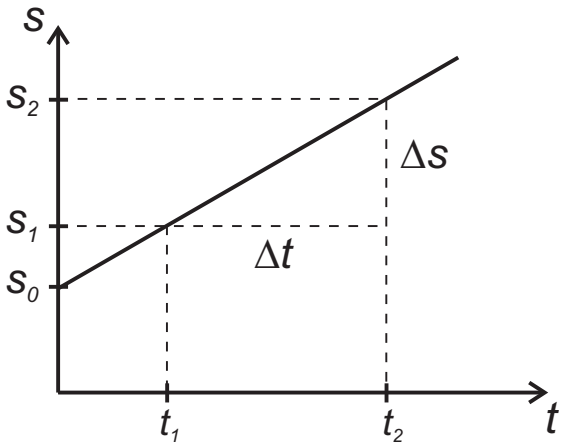


Abbildung 2.1: Weg-Zeit-Gesetz: $s = s(t)$

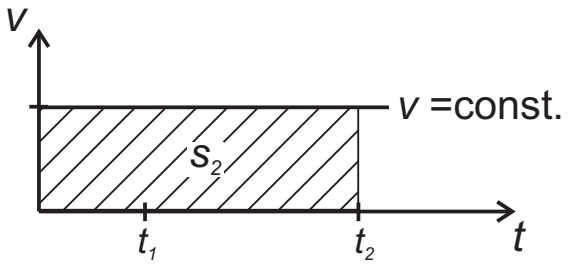


Abbildung 2.2: Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz: $v = v(t)$

v = const. Der Flächeninhalt entspricht dem durchlaufenen Weg.

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung:

Geschwindigkeit v nimmt gleichmäßig zu (Proportionalitätsfaktor Beschleunigung a)

$$v(t) = at + v_0 \qquad (2.3)$$

a : Beschleunigung

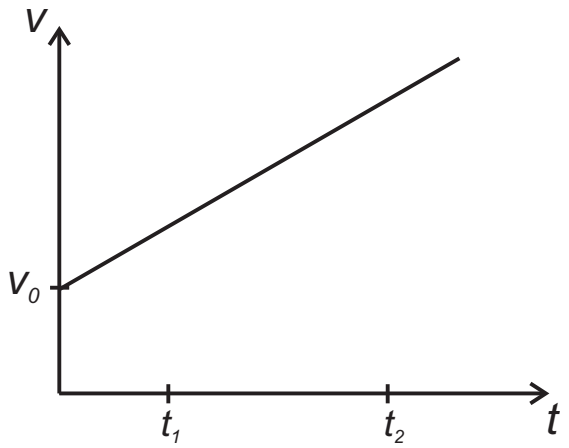


Abbildung 2.3: Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz: $v = v(t)$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \qquad (2.4)$$

Die Beschleunigung a ist die Steigung im v-t-Diagramm.

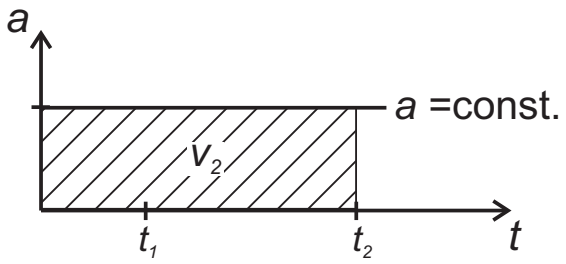


Abbildung 2.4: Beschleunigungs-Zeit-Gesetz: $a = a(t)$

a = const. Der Flächeninhalt entspricht der Geschwindigkeit v_2 am Punkt t_2.

Weg-Zeit-Gesetz?

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{2.5}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{d}s = v\mathrm{d}t \tag{2.6}$$

$$\Leftrightarrow s = \int v\mathrm{d}t \tag{2.7}$$

$$\Leftrightarrow s = \int (at + v_0)\mathrm{d}t \tag{2.8}$$

$$\Leftrightarrow s = \int at\mathrm{d}t + \int v_0\mathrm{d}t \tag{2.9}$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0 \tag{2.10}$$

s_0, v_0: Integrale sind immer nur bis auf eine Konstante bestimmt.

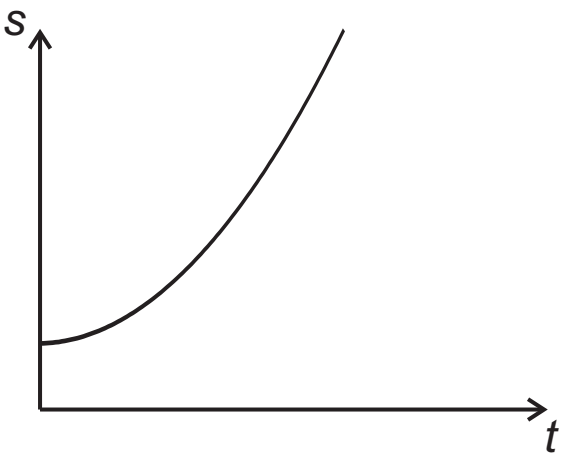


Abbildung 2.5: Weg-Zeit-Gesetz: $s = s(t)$

Freier Fall, senkrechter Wurf:

Spezialfall der gleichmäßig beschleunigten Bewegung mit:

$$a = -g; g = -9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}; (g\text{: Erdbeschleunigung}) \quad (2.11)$$
$$v_0 = 0; (\text{freier Fall}) \quad (2.12)$$
$$v_0 > 0; (\text{senkrechter Wurf nach oben}) \quad (2.13)$$
$$v_0 < 0; (\text{senkrechter Wurf nach unten}) \quad (2.14)$$

Zusammenfassung:

	Beschleunigung	**Anfangsbedingungen**	**Geschwindigkeit**	**Ort**
Definition	a	s_0, v_0	$v(t) = v_0 + \int a(\tau)d\tau$	$s(t) = s_0 + \int v(\tau)d\tau$
gleichmäßige Geschwindigkeit	$a = 0$	$s = s_0$ zur Zeit $t = t_0$	$v = v_0$	$s = s_0 + v_0(t - t_0)$
		$s = 0$ zur Zeit $t = t_0$	$v = v_0$	$s = v_0 t$
gleichmäßige Beschleunigung	$a = a_0$	$s = s_0$	$v = v_0 + a_0(t - t_0)$	$s = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2$
		$v = v_0$ zur Zeit $t = t_0$		
		$s = 0$	$v = a_0 t$	$s = \frac{1}{2}a_0 t^2$
		$v = 0$ zur Zeit $t = t_0$	$v = \sqrt{2a_0 s}$	$s = \frac{v^2}{2a_0}$

2.1.1.2 2-dimensionale Bewegung

Schräger Wurf:

Bewegung in verschiedene Raumrichtungen überlagern sich ungestört.

- senrechter Wurf nach oben (y-Komponente)
- gleichförmige Bewegung (x-Komponente)

Beispiel:

Schräger Wurf mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 10\frac{\text{m}}{\text{s}}$ unter einem Winkel von 30° nach oben. Aufspaltung in horizontale (x) und vertikale (y) Komponente:

$$v_{0_x} = v_0 \cos 30° = 8.7\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{2.15}$$

$$v_{0_y} = v_0 \sin 30° = 5\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{2.16}$$

Betrachte zunächst y-Komponente:

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0_y}t \tag{2.17}$$

Aufprall auf den Boden für $y(t) = 0$.

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0_y}t = 0 \tag{2.18}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}gt + v_{0_y} = 0 \tag{2.19}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2v_{0_y}}{g} \tag{2.20}$$

$$\Rightarrow t_F = 1.02 \text{ s (Flugzeit)} \tag{2.21}$$

Flugweite aus x-Komponente:

$$x(t) = v_{0_x}t_F \tag{2.22}$$

$$\Rightarrow x_F = 8.8 \text{ m} \tag{2.23}$$

Beschreibung durch einen Ortsvektor:

$$\vec{r}(t) = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

Impliziert eine überlagerte Bewegung in x-, y- und z-Richtung.

Mittlere Geschwindigkeit:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{2.25}$$

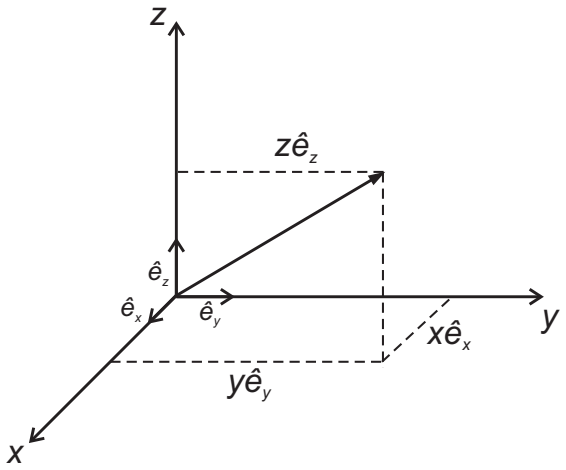


Abbildung 2.6: 3-dimensionales Koordinatensystem.

Momentangeschwindigkeit:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

Die Geschwindigkeit ist die Steigung in einem Weg-Zeit-Diagramm.
Spezialfall gleichförmige geradlinige Bewegung: $\vec{v}_m = \vec{v}$

Mittlere Beschleunigung:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{2.27}$$

Momentanbeschleunigung:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

Die Beschleunigung ist die Steigung im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm.

Sowohl die Momentangeschwindigkeit $\vec{v}(t)$ als auch die Momentanbeschleunigung $\vec{a}(t)$ sind Zeitableitungen aus vektoriellen Größen:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \tag{2.29}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{2.30}$$

d. h. eine Änderung von $\vec{v}$ bzw. $\vec{a}$ liegt vor wenn sich der **Betrag** oder die **Richtung** der entsprechenden Größe ändert!

Alleinige Änderung des Betrages: **Translationsbewegungen**
Alleinige Änderung der Richtung: **Rotationsbewegung**

Im Allgemeinen Überlagerung von Translations- und Rotationsbewegungen:

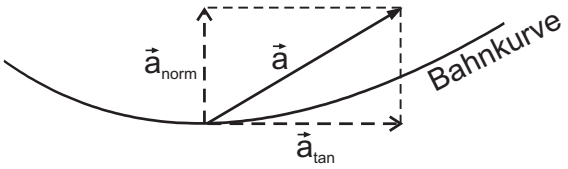


Abbildung 2.7: Bahnkurve wird in Tangential- und Normal-Komponenten zerlegt.

$$\vec{a} = \vec{a}_{\tan} + \vec{a}_{\mathrm{norm}} \tag{2.31}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{v}(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{v}(t)\vec{e}_{\tan}(t)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\vec{e}_{\tan}(t)) \tag{2.32}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\tan} + v\frac{\mathrm{d}\vec{e}_{\tan}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2.33}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} = \underbrace{a_{\tan}\vec{e}_{\tan}(t)}_{\triangleq\vec{a}_{\tan}} + \underbrace{v\frac{\mathrm{d}\vec{e}_{\tan}(t)}{\mathrm{d}t}}_{\triangleq\vec{a}_{\mathrm{norm}}} \tag{2.34}$$

$\vec{a}_{\tan}$: Beschreibt die Änderung des Betrages der Beschleunigung.
$\vec{a}_{\mathrm{norm}}$: Beschreibt die Änderung der Richtung der Beschleunigung.

Zur Bestimmung der Normalbeschleunigung muss $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_{\tan}}{\mathrm{d}t}$ berechnet werden:

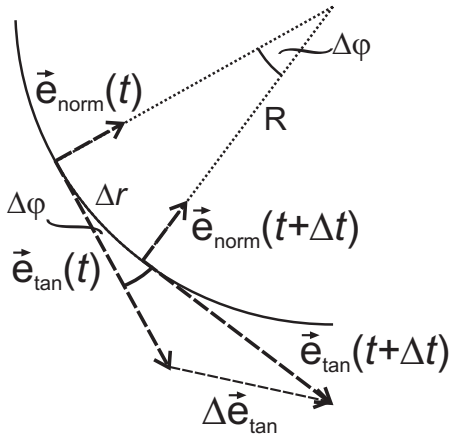


Abbildung 2.8: Komponenten bei einer Kreisbewegung.

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta r}{R} \tag{2.35}$$

$$\Delta\varphi \approx \frac{|\Delta\vec{e}_{\tan}|}{\underbrace{|\vec{e}_{\tan}|}_{\substack{\vec{e}_{\tan}\text{: Einheitsvektor}}}} = |\Delta\vec{e}_{\tan}| \tag{2.36}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta r}{R} \approx |\Delta\vec{e}_{\tan}| \tag{2.37}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\Delta\vec{e}_{\tan}}{\Delta t}\right| \approx \frac{\Delta r}{\Delta t R} \tag{2.38}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e}_{\tan}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{e}_{\tan}}{\Delta t}\right|\vec{e}_{\mathrm{norm}} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t R}\vec{e}_{\mathrm{norm}} = \frac{v}{R}\vec{e}_{\mathrm{norm}} \tag{2.39}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{\mathrm{norm}} = v\frac{\mathrm{d}\vec{e}_{\tan}}{\mathrm{d}t} = \frac{v^2}{R}\vec{e}_{\mathrm{norm}} \tag{2.40}$$

Gesamtbeschleunigung

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\tan} + \frac{v^2}{R}\vec{e}_{\mathrm{norm}} \tag{2.41}$$

2.1.2 Rotationsbewegungen

Gleichförmige Kreisbewegung:

$$\vec{a}_{\tan} = 0 \tag{2.42}$$

$$\vec{a}_{\text{norm}} = \underbrace{\frac{v^2}{R}}_{|\vec{a}_{\text{zp}}|} \vec{e}_{\text{norm}} \tag{2.43}$$

$$\vec{a}_{\text{zp}} : \text{Zentripetalbeschleunigung} \tag{2.44}$$

Bei Kreisbewegungen ist es günstig anstelle der Größen Strecke $\vec{r}$, Geschwindigkeit $\vec{v}$, Beschleunigung $\vec{a}$ die Größen Drehwinkel φ, Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$ zu verwenden.

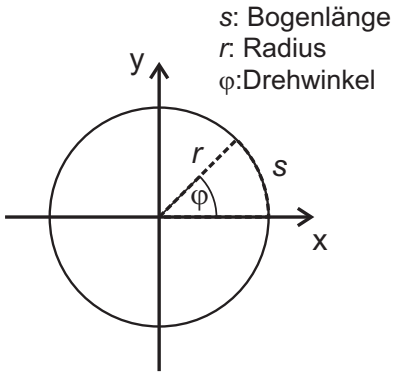


Abbildung 2.9: Kreisbahn in Winkelkoordinaten.

$$\varphi = \frac{s}{r}, \quad \text{(Bogenmaß, rad)} \tag{2.45}$$

$$|\vec{\omega}| = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \quad \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) \tag{2.46}$$

$$|\vec{\alpha}| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}, \quad \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right) \tag{2.47}$$

$\vec{\omega}$ und $\vec{\alpha}$ sind axiale Vektoren.
$\vec{\omega}$ definiert die Drehrichtung.
Die Richtung von $\vec{\omega}$ steht senkrecht auf der Ebene der Kreisbahn und definiert den Umlaufsinn rechtshändig.
$\vec{\alpha}$ definiert die Winkelbeschleunigung.
$\vec{\alpha}$ und $\vec{\omega}$ sind gleichsinning: positive Beschleunigung
$\vec{\alpha}$ und $\vec{\omega}$ sind gegensinning: negative Beschleunigung

Kreisbewegung:
Gleichmäßige Geschwindigkeit:

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0 \tag{2.48}$$

$$|\vec{\omega}(t)| = \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2.49}$$

Gleichmäßige Beschleunigung:

$$|\vec{\omega}(t)| = |\vec{\alpha} t + \vec{\omega}_0| \tag{2.50}$$

$$|\vec{\alpha}(t)| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}(t)}{\mathrm{d}t}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}^2\vec{\varphi}(t)}{\mathrm{d}t^2}\right| \tag{2.51}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\,|\vec{\alpha}|\,t^2 + |\vec{\omega}_0|\,t + \varphi_0 \tag{2.52}$$

Kreisbewegung völlig analog zu Translationsbewegung mit den Entsprechungen:

$$\varphi \triangleq r$$
$$\vec{\omega} \triangleq \vec{v}$$
$$\vec{\alpha} \triangleq \vec{a}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω hängt mit der Drehfrequenz v und der Periodendauer T zusammen:

$$|\vec{\omega}(t)| = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \tag{2.53}$$

Bahngeschwindigkeit:

$$|\vec{v}(t)| = \frac{2\pi R}{T} \tag{2.54}$$

Zusammenhang zwischen Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und Bahngeschwindigkeit $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{2.55}$$

analog:
Zentripetalbeschleunigung:

$$\vec{a}_{\mathrm{zp}} = \vec{\omega} \times \vec{v} = -\omega^2\vec{r} \tag{2.56}$$

Tangentialbeschleunigung:

$$\vec{a}_{\mathrm{tan}} = \vec{\alpha} \times \vec{r} \tag{2.57}$$

Zusammenfassung: Kreisbewegungsgleichungen

Bewegungsgrößen	**gleichmäßige Kreisbewegung** $\varphi(t_0) = \varphi_0$	**gleichmäßige beschleunigte Kreisbewegung** $\varphi(t_0) = 0, \omega_0 = 0, t_0 = 0$
Winkelbeschleunigung	$\alpha = 0$	$\alpha = \alpha_0$
Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \omega_0$	$\omega = \alpha_0 t = \sqrt{2\alpha_0\varphi}$
Drehwinkel	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0)$	$\varphi = \frac{1}{2}\alpha_0 t^2 = \frac{\omega^2}{2\alpha_0} = 2\pi N$
Umfangsgeschwindigkeit $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$	$v = r\omega_0$	$v = r\alpha_0 t$
Zentripetalbeschleunigung $\vec{a}_{\mathrm{zp}} = \vec{\omega} \times \vec{v} = -\omega^2\vec{r}$	$\vec{a}_{\mathrm{zp}} = r\omega_0^2$	$\vec{a}_{\mathrm{zp}} = r\alpha_0^2 t^2$
Tangentialbeschleunigung $\vec{a}_{\tan} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$	$\vec{a}_{\tan} = 0$	$\vec{a}_{\tan} = \alpha_0 r$

2.2 Grundgesetze der klassischen Mechanik

Kinematik betrachtet nur die Bewegung von Körpern, nicht aber deren Ursache. Die Ursache der Bewegung ist immer die Wechselwirkung zweier Systeme. Die Kraft ist die physikalische Größe, die den Bewegungszustand des Körpers ändert.

2.2.1 Newtonsche Axiome

1. Trägheitsgesetz

Jeder Körper bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ (kann auch $\vec{v} = 0$ sein), wenn keine äußeren Kräfte auf ihn wirken.

2. Aktionsgesetz

Eine Kraft $\vec{F}$, die auf einen Körper der Masse m wirkt beschleunigt diesen mit der Beschleunigung $\vec{a}$.

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\underbrace{m\vec{v}}_{\vec{p}}) = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}, p\text{: Impuls} \tag{2.58}$$

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \text{Trägheitsgesetz} \tag{2.59}$$

3. Reaktionsgesetz (Wechselwirkungsprinzip)

actio = reactio

Wirkt ein Körper „1“ mit der Kraft $\vec{F}_{12}$ auf einen anderen Körper „2“, dann wirkt dieser umgekehrt mit der entgegengesetzen Kraft $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

Beispiele:

Trägheitsgesetz:
Trägheit ist der Widerstand eines Körpers gegen Bewegungsänderung
$\Rightarrow$ **träge Masse**
Die Masse hat zusätzlich die Eigenschaft der „Schwere“. Gewichtskräfte sind proportional zur Masse $\Rightarrow$ **schwere Masse**
Experimentell sind träge und schwere Masse gleich!

Aktionsgesetz:
Kraft ist die zeitliche Änderung des Impulses $\vec{p} = m\vec{v}$.

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = m\underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}_{\vec{a}} + \vec{v}\underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{m}}{\mathrm{d}t}}_{=0 \text{ für konstante Masse}} \tag{2.60}$$

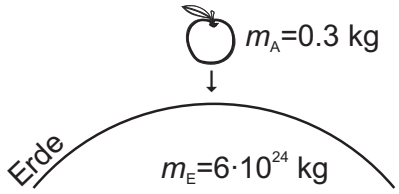


Abbildung 2.10: Wechselwirkungsprinzip am Beispiel Apfel und Erde.

Wechselwirkungsprinzip:
Anziehung zweier Massen, Erde (E), $m_E = 6 \times 10^{24}$ kg und Apfel (A), $m_A = 0.3$ kg

$$\vec{F}_{EA} = -F_{AE} \tag{2.61}$$
$$\Leftrightarrow m_E \vec{a}_E = -m_A \vec{a}_A \tag{2.62}$$
$$\overset{\text{Betrag}}{\Rightarrow} m_E a_E = -m_A a_A \tag{2.63}$$
$$\Leftrightarrow a_E = \frac{m_A}{m_E} a_A, a_A = g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \tag{2.64}$$
$$\Rightarrow a_E = 4,905 \times 10^{-25} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \tag{2.65}$$

Falldauer:

$$s_A = \frac{1}{2} g t_A^2 \tag{2.66}$$
$$\Leftrightarrow t_A = \sqrt{\frac{2 s_A}{g}} \tag{2.67}$$

Bewegung der Erde:

$$s_E = \frac{1}{2} a_E t_A^2 = \frac{1}{2} a_E \frac{2 s_A}{g} \tag{2.68}$$
$$\Leftrightarrow s_E = \frac{1}{2} \frac{m_A}{m_E} g \frac{2 s_A}{g} \tag{2.69}$$
$$\Leftrightarrow s_E = \frac{m_A}{m_E} s_A \tag{2.70}$$
$$\Rightarrow s_E = 5 \times 10^{-26} s_A \tag{2.71}$$

d. h., die Erdbewegung ist vernachlässigbar. **Aber:** Bei Planetenbewegungen z. B. vergleichbare Massen ⇒ Störung der Planetenbahnen.

Kraft:

Die Kraft ist eine vektorielle Größe deren Richtung parallel zur Beschleunigung $\vec{a}$ ist.

$$\text{Einheit: } 1\ \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \triangleq 1\ \text{N (Newton)}$$

Impuls:

Die Bewegungsgröße eines Körpers ist der Impuls p.

$$\vec{p} = m\vec{v}\ ; [\frac{\text{kg m}}{\text{s}} = \text{Ns}] \tag{2.72}$$

Kraftstoß:

Die Wirkung einer Kraft $\vec{F}$ ändert den Impuls:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\mathrm{d}t = \int_{p_1}^{p_2} \mathrm{d}p = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p} \tag{2.73}$$

2.2.2 Addition von Kräften:

Kräfteparallelogramm:

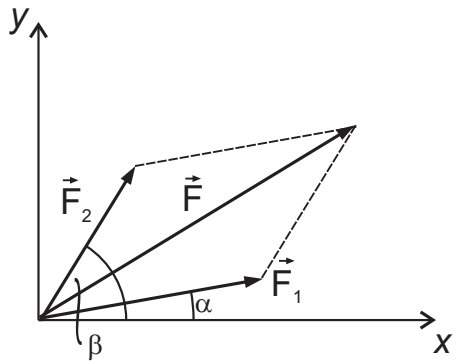


Abbildung 2.11: Kräfteparallelogramm

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{2.74}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{\vec{F}_1^2 + \vec{F}_2^2 + 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2| \cos\left(\angle \vec{F}_1, \vec{F}_2\right)} \tag{2.75}$$

$$\angle(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \beta - \alpha \tag{2.76}$$

in Komponenten: (2.77)

$$F_x = F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta \tag{2.78}$$

$$F_y = F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta \tag{2.79}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \tag{2.80}$$

mehr als zwei Kräfte: (2.81)

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots = \begin{pmatrix} \sum F_{jx} \\ \sum F_{jy} \\ \sum F_{jz} \end{pmatrix} \tag{2.82}$$

Kräftegleichgewicht, wenn die Gesamtkraft $\vec{F} = 0$ ist.

2.2.3 Raketengleichung als Folge des Aktionsgesetzes

Die Beschleunigung einer Rakete ist der besondere Bewegungsfall, bei dem die Masse des Körpers nicht konstant ist.

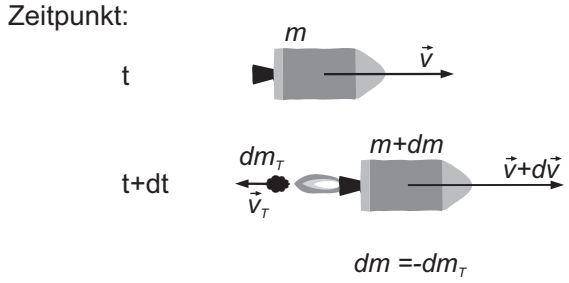


Abbildung 2.12: Raketenflug per Impulsantrieb: Die Verbrennungsgase werden ausgestoßen.

$$\mathrm{d}\vec{p} = (m + \mathrm{d}m)(\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}) + \mathrm{d}m_T\vec{v}_t - m\vec{v} \tag{2.83}$$
$$= m\mathrm{d}\vec{v} - \mathrm{d}m\,(\vec{v}_T - (\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v})) \tag{2.84}$$
$$= m\mathrm{d}\vec{v} - \vec{v}_{\mathrm{rel}}\mathrm{d}m \tag{2.85}$$
mit (2.86)
$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_t - (\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}) \tag{2.87}$$
$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}_{\vec{F}_a} - \underbrace{\vec{v}_{\mathrm{rel}}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}_{\vec{F}_{\mathrm{schub}}} = \vec{F}_a + \vec{F}_{\mathrm{schub}} \tag{2.88}$$

Impulserhaltungssatz:
Der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems von N Massepunkten ist konstant (es wirken nur innere Kräfte).

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = konst. \tag{2.89}$$

2.3 Dynamik in bewegten Bezugssystemen

Inertialsystem:
Die Geschwindigkeit eines Körpers ist ohne Krafteinwirkung konstant (**1. Newtonsches Axiom**)
Bewegen sich zwei Bezugssysteme mit einer konstanten Geschwindigkeit zueinander so haben sämtliche Gleichungen in der Mechanik die gleiche Struktur $\rightarrow$ Galilei-invariant.

Beispiele für Nicht-Inertialsysteme:
Beschleunigtes Auto: Fahrer wird in den Sitz gedrückt (Scheinkraft)
Erde: Drehbewegung durch Erdrotation (Richtung von $\vec{v}$ nicht konstant und somit beschleunigt).

Gleichförmig rotierende Bezugssysteme:
Zusätzlich zu den physikalischen Kräften wirken Scheinkräfte, z. B. die Zentrifugalkraft bzw. die Coriolis-Kraft.

Berechnung der Geschwindigkeit $\vec{v}'$ und der Beschleunigung $\vec{a}'$ im rotierenden Bezugssystem als Funktion von $\vec{v}$ und $\vec{a}$ im ruhenden Bezugssystem.

Kreisbewegung in der x-y-Ebene:

$$\vec{r} = x\vec{e}_i + y\vec{e}_j \qquad \text{ruhendes Bezugssystem} \tag{2.90}$$
$$\vec{r}\,' = x'\vec{e}_i + y'\vec{e}_j \qquad \text{rotierendes Bezugssystem} \tag{2.91}$$
$$\vec{r} = \vec{r}\,' \tag{2.92}$$

Ortsvektor in beiden Systemen gleich, wenn beide Systeme den gleichen Ursprung haben (Koordinatentransformation)

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t} \tag{2.93}$$
$$= \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\vec{e}_i\,' + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\vec{e}_j\,' + x'\frac{\mathrm{d}\vec{e}_i\,'}{\mathrm{d}t} + y'\frac{\mathrm{d}\vec{e}_j\,'}{\mathrm{d}t} \tag{2.94}$$
$$= \underbrace{\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\vec{e}_i\,' + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\vec{e}_j\,'}_{\vec{v}\,'} + x'\underbrace{\vec{e}_i\,'\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}}_{\vec{\omega}\times\vec{e}_i\,'} + y'\underbrace{\vec{e}_j\,'\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}}_{\vec{\omega}\times\vec{e}_j\,'} \tag{2.95}$$

Daraus folgt in komplett vektorieller Schreibweise:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega}\times\vec{r} \tag{2.96}$$
$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{\omega}\times\vec{r} \tag{2.97}$$

Für die Beschleunigung folgt:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}\,'}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}}_{\triangleq\vec{\alpha}} \times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v} \tag{2.98}$$

Ohne Kreisbeschleunigung folgt $\alpha = 0$ und damit:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}\,'}{\mathrm{d}t} + \vec{\omega}\times\vec{v} \tag{2.99}$$

Einsetzen von (2.96) in (2.99) ergibt:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{v}\,' + \vec{\omega}\times\vec{r}) + \vec{\omega}\times(\vec{v}\,' + \vec{\omega}\times\vec{r}) \tag{2.100}$$
$$\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{\omega}\times\vec{v}\,' + \vec{\omega}\times\vec{v}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \tag{2.101}$$
$$\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{a}\,' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \tag{2.102}$$

Spezialfall: $\vec{r}$ wird zerlegt in:

$$R: \text{Komponente } \perp \vec{\omega} \text{ und} \tag{2.103}$$

$$A: \text{Komponente } \| \vec{\omega} \tag{2.104}$$

$$\tag{2.105}$$

$$\Leftarrow \vec{a}\,' = \underbrace{2\vec{v}\,' \times \vec{\omega}}_{\text{Coriolis-Beschleunigung}} + \underbrace{\omega^2 \vec{R}}_{\text{Zentrifugalbeschleunigung}} \tag{2.106}$$

2.4 Arbeit und Energie

2.4.1 Arbeit

Wird ein Körper durch die Kraft $\vec{F}$ um die Strecke $\vec{s}$ bewegt so wird die Arbeit W verrichtet:

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\mathrm{d}\vec{s} \tag{2.107}$$

$$\Rightarrow W = \int \vec{F}\mathrm{d}\vec{s} \tag{2.108}$$

$$[\mathrm{Nm} = \mathrm{J} = \frac{\mathrm{kg\ m^2}}{\mathrm{s^2}}] \tag{2.109}$$

Eine Kraft heißt **konservativ**, wenn die Arbeit wegunabhängig ist.

Beispiele

a) Ziehen eines Körpers:

$$W = \int \vec{F}\mathrm{d}\vec{s} = \int |\vec{F}| cos\varphi \mathrm{d}s \tag{2.110}$$

$$\Rightarrow = |\vec{F}| cos\varphi \Delta s \tag{2.111}$$

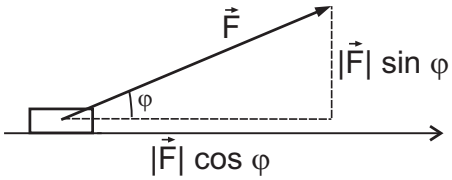


Abbildung 2.13: Kraftkomponenten beim Ziehen.

b) Hubarbeit:

$$|\vec{F}| = mg \tag{2.112}$$
$$|\vec{s}| = h_2 - h_1 \tag{2.113}$$
$$\vec{F} \| \vec{s} \tag{2.114}$$
$$\Rightarrow W = mg(h_2 - h_1) \tag{2.115}$$

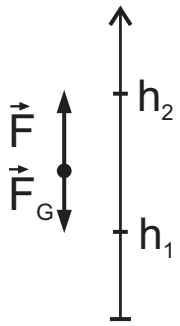


Abbildung 2.14: Kraftkomponenten beim Heben

c) Reibungsfreie, schiefe Ebene:

$$F = mg \sin \alpha \tag{2.116}$$
$$s = \frac{h}{\sin \alpha} \tag{2.117}$$
$$\Rightarrow W = Fs = mgh \tag{2.118}$$

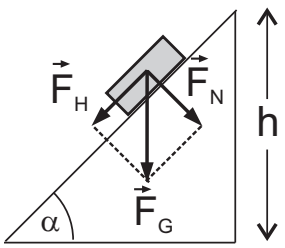


Abbildung 2.15: Hangabtriebskraft $\vec{F}_H$, Gewichtskraft $\vec{F}_G$ und Normalkraft $\vec{F}_N$ bei der schiefen Ebene.

d) Beschleunigungsarbeit (ohne Reibung)

$$F = ma \tag{2.119}$$

$$s = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} \tag{2.120}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \left(v_2^2 - v_1^2\right) \tag{2.121}$$

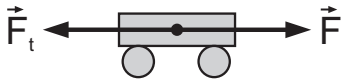


Abbildung 2.16: Kraftkomponenten bei Beschleunigung

e) Verformungsarbeit (gegen Rückstellkraft)

$$F = -cx \tag{2.122}$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} cx \mathrm{d}x \tag{2.123}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} c(x_2^2 - x_1^2) \tag{2.124}$$

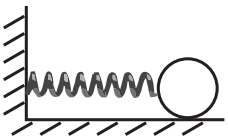


Abbildung 2.17: Rückstellfeder.

2.4.2 Leistung, Wirkungsgrad

Leistung

ist die pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\vec{v} \tag{2.125}$$

mittlere Leistung:

$$P_m = \frac{W_g}{t_g} = \frac{\text{Gesamtarbeit}}{\text{Gesamtzeit}} \tag{2.126}$$

Wirkungsgrad η

$$\eta = \frac{P_{\text{eff}}}{P_{\text{N}}} = 1 - \frac{P_{\text{V}}}{P_{\text{N}}} \tag{2.127}$$

P_N: Nennleistung, P_V: Reibungsverlustleistung.

2.4.3 Energie

Physikalischer Zustand des Körpers:

Führt man einem Körper mechanische Arbeit zu, so erhöht sich dessen Energie. Die Energie ist der Vorrat an Arbeit, der abgegeben werden kann.

Potentielle Energie

Energie der Lage

$$E_{\text{pot}} = mgh; \qquad \text{(Hubarbeit)} \tag{2.128}$$

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}cx^2; \qquad \text{(Verformungsarbeit)} \tag{2.129}$$

Änderung der potentiellen Energie $\triangleq$ aufzuwendende bzw. gewonnene Verschiebungsarbeit.

Kinetische Energie

Bewegungsenergie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2; \qquad \text{(Beschleunigungsarbeit)} \tag{2.130}$$

Die kinetische Energie wird vollständig freigesetzt, wenn ein Körper von der Geschwindigkeit v auf $v = 0\frac{\text{m}}{\text{s}}$ abgebremst wird.

Energie kann weder erzeugt noch vernichtet werden.
Sie wird lediglich in verschiedene Formen umgewandelt!

$\Rightarrow$ Energieerhaltungssatz

Die Gesamtenergie ist

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \text{konst.} \tag{2.131}$$

für abgeschlossene Systeme.

2.5 Stoßprozesse

Stoßen mehrere Körper gegeneinander, so wird Impuls und Energie zwischen den einzelnen Körpern übertragen. Der Gesamtimpuls und die Gesamtenergie bleibt erhalten. Bei inelastischen Stößen geht ein Teil der Energie in Reibungs- bzw. Verformungsenergie über.

2.5.1 Zentraler, unelastischer Stoß

Zwei Körper stoßen gegeneinander und bleiben dann nach dem Stoß verbunden.

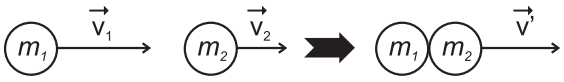


Abbildung 2.18: Zentraler, unelastischer Stoß.

Impulserhaltung: $\sum m_i \vec{v}_i = \text{konst.}$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}' \tag{2.132}$$

$$\Leftrightarrow \vec{v}' = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{(m_1 + m_2)} \tag{2.133}$$

Energieerhaltung: $\sum E_i = \text{konst.}$

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{v}'^2 + \Delta E \tag{2.134}$$

$$\Leftrightarrow \Delta E = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{v}'^2 \tag{2.135}$$

einsetzen von (2.133):

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{(m_1 + m_2)}\right)^2 \tag{2.136}$$

$$\Leftrightarrow \Delta E = \left(\frac{1}{2}m_1 - \frac{m_1^2}{2(m_1 + m_2)}\right)\vec{v}_1^2 + \left(\frac{1}{2}m_2 - \frac{m_2^2}{2(m_1 + m_2)}\right)\vec{v}_2^2 - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1\vec{v}_2 \tag{2.137}$$

$$\Leftrightarrow \Delta E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}\left(\vec{v}_1^2 - 2\vec{v}_1\vec{v}_2 + \vec{v}_2^2\right) \tag{2.138}$$

$$\Leftrightarrow \Delta E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)^2 \tag{2.139}$$

Spezialfälle

a.)

$$m_1 = m_2 \tag{2.140}$$
$$\Rightarrow \vec{v}\,' = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \tag{2.141}$$

b.)

$$v_2 = -v_1 \tag{2.142}$$
$$\Rightarrow \vec{v}\,' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 \tag{2.143}$$

c.)

$$m_1 = m_2, v_2 = -v_1 \tag{2.144}$$
$$\Rightarrow \vec{v}\,' = 0 \tag{2.145}$$
$$\Rightarrow \Delta E = \frac{m_1^2}{2(2m_1)}(2\vec{v}_1)^2 = m_1 v_1^2 \tag{2.146}$$
$$\Leftrightarrow \Delta E = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^{\,2} \tag{2.147}$$

Die gesamte kinetische Energie ist in Verformungsenergie übergegangen.

2.5.2 Zentraler, elastischer Stoß

Abbildung 2.19: Zentraler, elastischer Stoß.

Impulserhaltung:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1\,' + m_2\vec{v}_2\,' \tag{2.148}$$
$$\Leftrightarrow m_1\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_1\,'\right) = m_2\left(-\vec{v}_2 + \vec{v}_2\,'\right) \tag{2.149}$$

Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^{\,2} = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1{}'^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2{}'^2 \tag{2.150}$$
$$\Leftrightarrow m_1\left(\vec{v}_1^{\,2} - \vec{v}_1{}'^2\right) = m_2\left(-\vec{v}_2^{\,2} + \vec{v}_2{}'^2\right) \tag{2.151}$$

Division von (2.151)/(2.149) ergibt:

$$\frac{(\vec{v}_1^{\,2} - \vec{v}_1^{\,\prime 2})}{(\vec{v}_1 - \vec{v}_1^{\,\prime})} = \frac{(\vec{v}_2^{\,\prime 2} - \vec{v}_2^{\,2})}{(\vec{v}_2^{\,\prime} - \vec{v}_2)} \tag{2.152}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_1^{\,\prime})(\vec{v}_1 + \vec{v}_1^{\,\prime})}{(\vec{v}_1 - \vec{v}_1^{\,\prime})} = \frac{(\vec{v}_2^{\,\prime} - \vec{v}_2)(\vec{v}_2^{\,\prime} + \vec{v}_2)}{(\vec{v}_2^{\,\prime} - \vec{v}_2)} \tag{2.153}$$

$$\Leftrightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_1^{\,\prime} = \vec{v}_2 + \vec{v}_2^{\,\prime} \tag{2.154}$$

Eliminieren von $\vec{v}_1^{\,\prime}$ oder $\vec{v}_2^{\,\prime}$ aus (2.149)

$$\vec{v}_1^{\,\prime} = \vec{v}_2^{\,\prime} + \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \tag{2.155}$$

$$\Rightarrow m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_2^{\,\prime} - \vec{v}_2 + \vec{v}_1) = m_2\vec{v}_2^{\,\prime} - m_2\vec{v}_2 \tag{2.156}$$

$$\Leftrightarrow 2m_1 v_1 - m_1\vec{v}_2^{\,\prime} - m_1\vec{v}_2 = m_2\vec{v}_2^{\,\prime} - m_2\vec{v}_2 \tag{2.157}$$

$$\Leftrightarrow (m_1 + m_2)\vec{v}_2^{\,\prime} = 2m_1\vec{v}_1 + (m_2 - m_1)\vec{v}_2 \tag{2.158}$$

$$\Leftrightarrow \vec{v}_2^{\,\prime} = \frac{2m_1\vec{v}_1 + (m_2 - m_1)\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{2.159}$$

analog:

$$\vec{v}_1^{\,\prime} = \frac{2m_2\vec{v}_2 + (m_1 - m_2)\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \tag{2.160}$$

Spezialfälle:

a.) Geschwindigkeitsübertrag

$$m_1 = m_2, \quad \vec{v}_2 = 0 \tag{2.161}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1^{\,\prime} = 0 \text{ und } \vec{v}_2^{\,\prime} = \vec{v}_1 \tag{2.162}$$

b.)

$$m_1 \gg m_2, \quad \vec{v}_2 = 0 \tag{2.163}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1^{\,\prime} \approx \vec{v}_1 \text{ und } \vec{v}_2^{\,\prime} \approx 2\vec{v}_1 \tag{2.164}$$

c.) Rückprall

$$m_1 \ll m_2, \quad \vec{v}_2 = 0 \tag{2.165}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1' \approx -\vec{v}_1 \text{ und } \vec{v}_2' \approx \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \approx 0 \tag{2.166}$$

d.) Reflektion

$$m_1 = m_2, \quad \vec{v}_2 = -\vec{v}_1 \tag{2.167}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1' = \vec{v}_2 \text{ und } \vec{v}_2' = \vec{v}_1 \tag{2.168}$$

$$\Leftrightarrow \vec{v}_1' = -\vec{v}_1 \text{ und } \vec{v}_2' = -\vec{v}_2 \tag{2.169}$$

2.5.3 Schiefer, zentraler, elastischer Stoß

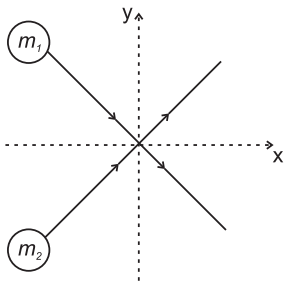


Abbildung 2.20: Schiefer, zentraler, elastischer Stoß.

Impulserhaltung gilt für alle Komponenten getrennt.

Impulserhaltung:

$$\text{x-Komponente: } m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v_{1x}' + m_2 v_{2x}' \tag{2.170}$$

$$\text{y-Komponente: } m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v_{1y}' + m_2 v_{2y}' \tag{2.171}$$

Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2} m_1 \left(v_{1x}^2 + v_{1y}^2\right) + \frac{1}{2} m_2 \left(v_{2x}^2 + v_{2y}^2\right) = \frac{1}{2} m_1 \left(v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2\right) + \frac{1}{2} m_2 \left(v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2\right) \tag{2.172}$$

Lösung des Gleichungssystems:
Körper 1, Masse m_1

$$v_{1x}' = v_{1x} \tag{2.173}$$

$$v_{1y}' = \frac{2m_2 v_{2y} + (m_1 - m_2) v_{1y}}{m_1 + m_2} \tag{2.174}$$

Körper 2, Masse m_2

$$v'_{2x} = v_{2x} \tag{2.175}$$

$$v'_{2y} = \frac{2m_1 v_{1y} + (m_2 - m_1)v_{2y}}{m_1 + m_2} \tag{2.176}$$

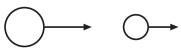
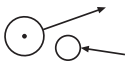
Stoßart	Bild	Charakteristika
gerade		Die Bahnen beider Schwerpunkte liegen auf einer Geraden.
schief		Die Bahnen beider Schwerpunkte liegen in einer Ebene und schließen einen Winkel ein.
zentral		Die Schwerpunkte der Stoßpartner liegen auf der Normalen zur Berührungsebene durch den Berührungspunkt (Stoßnormale)
exzentrisch		Die Schwerpunkte liegen nicht auf der Stoß-normalen. Es tritt Rotation auf.
elastisch		Die Summen der kinetischen Energien vor und nach dem Stoß sind gleich.
inelastisch		Die Summen der kinetischen Energien vor und nach dem Stoß sind verschieden.
unelastisch		Die Körper bewegen sich nachher mit einer gleichen, gemeinsamen Endgeschwindigkeit weiter.

Abbildung 2.21: Klassifikation der Stoßprozesse.

2.6 Drehimpuls $\vec{L}$

Genau wie der Impuls $\vec{p}$ die (Translations-)Bewegungsgröße eines Körpers ist, ist der Drehimpuls $\vec{L}$ die (Rotations-)Bewegungsgröße eines Körpers:

Definition:
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
$\vec{L}$ ist ein axialer Vektor dessen Richtung den Drehsinn definiert (wie $\vec{\omega}$ bei der Kreisbewegung).

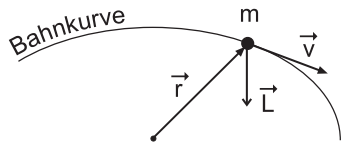


Abbildung 2.22: Vektoren des Drehimpulses.

2.6.1 Kreisbewegung

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{2.177}$$
$$\Leftrightarrow \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}, (\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{2.178}$$
$$\Leftrightarrow \vec{L} = \vec{r} \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{2.179}$$
$$\Leftrightarrow \vec{L} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{2.180}$$
$$\Leftrightarrow \vec{L} = m((\vec{r}\vec{r})\vec{\omega} - \underbrace{(\vec{r}\vec{\omega})}_{=0, \vec{r} \perp \vec{\omega}} \vec{r}) \tag{2.181}$$
$$\Leftrightarrow \vec{L} = mr^2\vec{\omega} \tag{2.182}$$

2.6.2 Drehimpulserhaltung

Analog zum Impulserhaltungssatz. Der Gesamtdrehimpuls eines Systems aus N Massepunkten bleibt erhalten.

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \text{konst.} \tag{2.183}$$

Aus dem 2. Newtonschen Axiom folgt, dass eine Kraft $\vec{F}$ aufgewendet werden muß um den Impuls $\vec{p}$ zu ändern.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{2.184}$$

analoges gilt für den Drehimpuls.

2.6.3 Drehmoment

Um den Drehimpuls zu ändern muss ein Drehmoment $\vec{M}$ aufgewendet werden.

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{2.185}$$

einsetzen:

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times \vec{p}) \tag{2.186}$$

$$\Leftrightarrow \vec{M} = \underbrace{\underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}}_{=\vec{v}} \times \vec{p}}_{=0, \vec{v} \| \vec{p}} + \vec{r} \times \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}}_{=\vec{F}} \tag{2.187}$$

$$\Leftrightarrow \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{2.188}$$

2.6.4 Arbeit bei Drehbewegungen

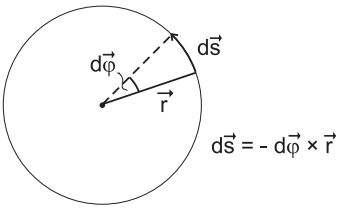


Abbildung 2.23: Arbeit bei der Drehbewegung.

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\mathrm{d}\vec{s} \tag{2.189}$$

$$\Rightarrow W = \int_{s_0}^{s_1} \vec{F}(s)\mathrm{d}\vec{s} \tag{2.190}$$

$$\Leftrightarrow W = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \vec{F}(\varphi)(\mathrm{d}\vec{\varphi} \times \vec{r}) \tag{2.191}$$

$$\Leftrightarrow W = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left(\vec{r} \times \vec{F}(\varphi)\right) d\vec{\varphi} \tag{2.192}$$

$$\Leftrightarrow W = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \vec{M}(\varphi)\mathrm{d}\vec{\varphi} \tag{2.193}$$

$$\Rightarrow W = \vec{M}(\vec{\varphi}_1 - \vec{\varphi}_0), \text{da } \vec{M} \text{ unabhängig von } \varphi \tag{2.194}$$

2.6.5 Leistung bei Drehbewegungen

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{M}\vec{\varphi} = \vec{M}\vec{\omega} \tag{2.195}$$

2.6.6 Energie bei Drehbewegungen

$$E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 \tag{2.196}$$

Tabelle 2.1: Analogien zwischen Translation und Rotation.

Translation		**Rotation**	
Größe, Formelzeichen	**Einheit**	**Größe, Formelzeichen**	**Einheit**
Weg $\vec{s}$, $\mathrm{d}\vec{s}$	m	Winkel $\vec{\varphi}$, $\mathrm{d}\vec{\varphi}$	rad=1
Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{\mathrm{d}t}$	m/s	Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}$	rad/s = 1/s
Beschleunigung $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{s}}{\mathrm{d}t^2}$	m/s^2	Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t^2}$	rad/s^2 =1/s^2
Masse m	kg	Massenträgheitsmoment $J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$	kg m^2
Kraft $\vec{F} = m\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$	kg m /s^2 = N	Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ $\vec{M} = J\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$	Nm
Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$	kg m/s = Ns	Drehimpuls $\vec{L} = J\vec{\omega}$	kg m^2/s = Nms
Arbeit $\mathrm{d}W = \vec{F}\mathrm{d}\vec{s}$	Nm = J = Ws	Arbeit $\mathrm{d}W = \vec{M}\mathrm{d}\vec{\varphi}$	Nm = J = Ws
kinetische Energie $E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{trans}} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$	J	kinetische Energie $E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}J\vec{\omega}^2$	J
Leistung $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\vec{v}$	W = J/s	Leistung $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{M}\vec{\omega}$	W = J/s

2.7 Gravitation, Keplersche Gesetze

Insgesamt gibt es nur vier fundamentale Wechselwirkungen:

1. **Gravitation:** Massenanziehung
2. **elektromagnetische Wechselwirkung:** Kräfte zwischen Ladungen
3. **starke Wechselwirkung:** Zusammenhalt der Atomkerne
4. **schwache Wechselwirkung:** β-Zerfall der Atomkerne

2.7.1 Gravitationsgesetz

Das Gravitationsgesetz wurde 1687 von Newton entdeckt. Zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 im Abstand von r_{12} voneinander üben eine Kraft $\vec{F}_G$ aufeinander aus.

$$|\vec{F}_G| = \gamma_G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \tag{2.197}$$

$$\gamma_G = 6.673 \times 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2} \tag{2.198}$$

mit γ_G: Gravitationskonstante

Bezug zur Erdbeschleunigung g:

$$\vec{F} = m\vec{g} = \gamma_G \frac{m m_E}{r_E^2} \Rightarrow g = \gamma_G \frac{m_E}{r_E^2} \tag{2.199}$$

Die Gravitationskraft der Sonne ist die Zentralkraft, die die Planeten auf ihrer Umlaufbahn hält.

$\Rightarrow$ **Keplersche Gesetze**

2.7.2 Keplersche Gesetze

1. Keplersches Gesetz

Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren gemeinsamen Brennpunkt die Sonne steht (Folgerung aus dem Energieerhaltungssatz).

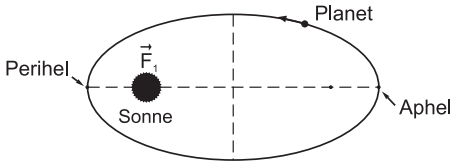


Abbildung 2.24: 1. Keplersches Gesetz.

2. Keplersches Gesetz

Der von der Sonne zum Planeten gezogene Radiusvektor $\vec{r}$ überstreicht in gleichen Zeiten Δt gleiche Flächen ΔA (Folgerung aus dem Drehimpulserhaltungssatz).

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{konst.} \tag{2.200}$$

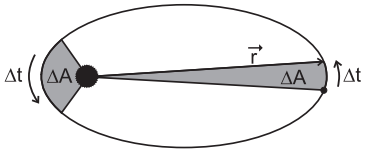


Abbildung 2.25: 2. Keplersches Gesetz.

3. Keplersches Gesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten T_1, T_2 zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen (Folgerung aus dem 3. Newtonschen Gesetz für stabile Bahnen; Zentripetalkraft = Gravitationskraft).

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \tag{2.201}$$

2.7.3 Arbeit gegen die Schwerkraft, kosmische Geschwindigkeiten

$$W = \vec{F}\mathrm{d}\vec{s} \tag{2.202}$$

$$\Rightarrow W = \int_{r_1}^{r_2} F\mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2} \gamma m M \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \gamma m M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{2.203}$$

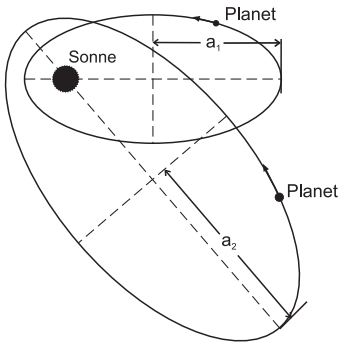


Abbildung 2.26: 3. Keplersches Gesetz.

Es sei M: Erdmasse, $r_1 = R$: Erdradius, $r_2 = R + h$.

$$W = \gamma m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) = mgR \frac{h}{R+h} \tag{2.204}$$

$$\Leftrightarrow W = mgR \frac{h}{R+h} \overbrace{\approx}^{h \ll R} mgh \tag{2.205}$$

Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche:

$$g = \frac{\gamma M}{R^2} \tag{2.206}$$

Fallbeschleunigung $g(h)$ in der Höhe h über der Erdoberfläche:

$$g(h) = \frac{\gamma M}{(R+h)^2} = g \frac{R^2}{(R+h)^2} \tag{2.207}$$

Kosmische Geschwindigkeiten:
Ein Satellit umkreist die Erde (3. Keplersches Gesetz)

$$\text{Zentripetalkraft} = \text{Gravitationskraft} \tag{2.208}$$

$$\frac{mv^2}{R+h} = mg(h) = mg\frac{R^2}{(R+h)^2} \tag{2.209}$$

$$\Rightarrow v_1(h) = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} \overset{h \ll R}{\approx} \sqrt{gR} = 7.9\frac{\text{km}}{\text{s}} \tag{2.210}$$

1. kosmische Geschwindigkeit (2.211)

$v > v_1$: Satellit umkreist die Erde auf einer elliptischen Bahn.
$v < v_1$: Satellit kehrt zur Erde zurück.

Fluchtgeschwindigkeit, die ein Körper mindestens erhalten muss, um sich aus dem Anziehungsbereich der Erde vollständig zu entfernen $\Rightarrow$ 2. kosmische Geschwindigkeit.

Aus der Energieerhaltung folgt:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgR\frac{h}{R+h} \tag{2.212}$$

$$\overset{h \to \infty}{\Rightarrow} v_2 = \sqrt{2gR} = 11.2\ \frac{\text{km}}{\text{s}} \tag{2.213}$$

2. kosmische Geschwindigkeit (2.214)

2.8 Mechanik des starren Körpers

2.8.1 Freiheitsgrade

Starrer Körper

System von N Massepunkten, deren Abstände zueinander unveränderlich sind:

1. Punktmasse m_1: 3 Freiheitsgrade
2. Punktmasse m_2: 2 Freiheitsgrade, da der Abstand zu m_1 konstant ist (beliebige Rotation um m_1 in zwei Dimensionen möglich)
3. Punktmasse m_3: 1 Freiheitsgrad, da der Abstand zu m_1 und m_2 konstant ist (nur noch Drehung um die durch m_1 und m_2 definierte Achse möglich).

n. alle weiteren Punktmassen: kein Freiheitsgrad

$\Rightarrow$ insgesamt 6 Freiheitsgrade (3 Translation + 3 Rotation)

2.8.2 Kräfte am starren Körper; Drehmomente

Im Gegensatz zum Massepunkt können bei einem (ausgedehnten) starren Körper die Kräfte an verschiedenen Punkten angreifen.

Zusammensetzen von Kräften

a) Kräfte, die in einem Punkt angreifen:

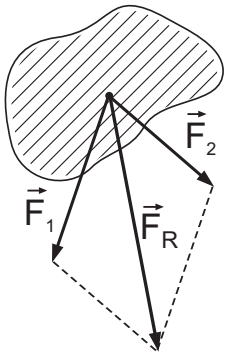


Abbildung 2.27: Vektoraddition der Kräfte, die in einem Punkt angreifen.

$\Rightarrow$ Gesetze der Vektoraddition (wie beim Massepunkt)

b) Kräfte, die an verschiedenen Punkten mit angreifen mit gleicher Wirkungslinie:

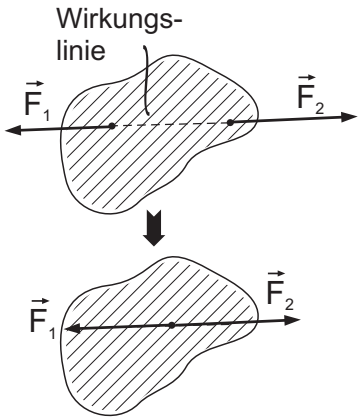


Abbildung 2.28: Vektoraddition bei unterschiedlichem Angriffspunkt.

⇒ Die Kräfte können entlang der Wirkungslinie ohne Änderung des Bewegungszustandes verschoben werden bis sie an einem gemeinsamen Punkt angreifen.
⇒ Vektoraddition
⇒ Nur Translationsbewegung, keine Rotationsbewegung.

c) Kräfte, die an verschiedenen Punkten angreifen mit verschiedenen Wirkungslinien:

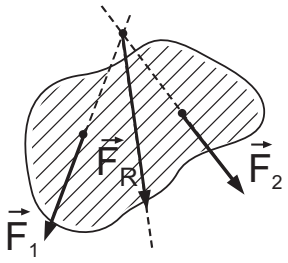


Abbildung 2.29: Vektoraddition bei unterschiedlichem Angriffspunkt und Richtung.

⇒ Kräfte werden entlang der Wirkungslinien bis zum Schwerpunkt verschoben.
⇒ Vektoraddition in diesem Punkt
⇒ Die resultierende Kraft kann wieder entlang deren Wirkungslinie verschoben werden.

d) Kräfte, die an verschiedenen Punkten angreifen mit parallelen Wirkungslinien:

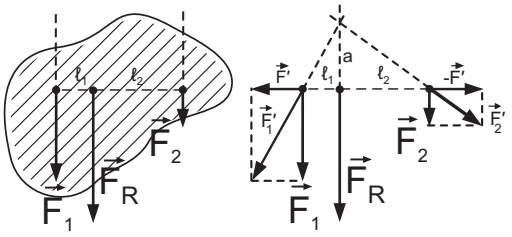


Abbildung 2.30: Vektoraddition bei parallelen Wirkungslinien.

$\Rightarrow$ Graphische Bestimmung der resultierenden Kraft durch die beiden Hilfskräfte $\vec{F}'$ und $-\vec{F}'$, die sich gegenseitig kompensieren:

$$\Rightarrow \frac{a}{l_1} = \frac{F_1}{F'} \qquad \text{und} \qquad \frac{a}{l_2} = \frac{F_2}{F'} \tag{2.215}$$

$$\Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{l_1}{l_2} \tag{2.216}$$

$$\tag{2.217}$$

bestimmt den Angriffspunkt der resultierenden Kraft:

$$\Rightarrow \vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{2.218}$$

Es folgt:

$$\Rightarrow \vec{F}_1 l_1 = \vec{F}_2 l_2 \tag{2.219}$$

$$\Leftrightarrow \vec{M}_1 = \vec{M}_2 \tag{2.220}$$

$$\tag{2.221}$$

Drehmomente sind gleich.

e) Betragsmäßig gleiche Kräfte entgegengesetzter Richtung mit parallelen Wirkungslinien: ⇒ Kräftepaar

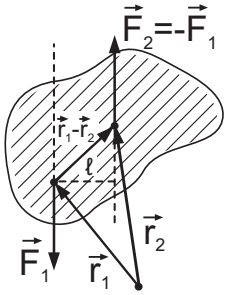


Abbildung 2.31: Drehmoment bei unterschiedlichen Angriffspunkten.

Kraft: $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_1 - \vec{F}_1 = 0$

Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \tag{2.222}$$
$$\Leftrightarrow \vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 \tag{2.223}$$
$$\Leftrightarrow \vec{M} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 \tag{2.224}$$
$$\Rightarrow |\vec{M}| = lF_1 \tag{2.225}$$
$$\tag{2.226}$$

⇒ nur Rotationsbewegung, keine Translationsbewegung.

Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0 \tag{2.227}$$

⇒ keine resultierenden Kräfte
⇒ keine Translationsbewegungen
und

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = 0 \tag{2.228}$$

⇒ keine resultierenden Drehmomente
⇒ keine Rotationsbewegungen

2.8.3 Schwerpunkt

Bei einem starren Körper greift die Schwerkraft an allen N Massenelementen an. Anstelle der N Kräfte kann man eine resultierende Kraft betrachten, die am Schwerpunkt (Massenmittelpunkt) angreift. Dort ist das Drehmoment Null.

Beispiel

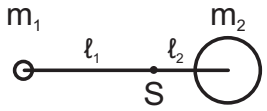


Abbildung 2.32: Bestimmung des Schwerpunkts.

Im Schwerpunkt S sind die Drehmomente entgegengesetzt gleich.

$$\Rightarrow m_1 g l_1 = m_2 g l_2 \tag{2.229}$$

$$\Leftrightarrow m_1 l_1 = m_2 l_2 \tag{2.230}$$

$\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ sind die Koordinaten von m_1 und m_2. $\vec{r}_S$ ist die Koordinate des Schwerpunktes.

$$\Rightarrow m_1(\vec{r}_S - \vec{r}_1) = m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_S) \tag{2.231}$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}_S = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{2.232}$$

allgemein gilt für N Massepunkte:

$$\vec{r}_S = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \tag{2.233}$$

für homogene Massendichte ρ:

$$\vec{m}_i\vec{r}_i = \rho\Delta V_i\vec{r}_i \xrightarrow{\lim\limits_{\Delta V\to 0}} \rho\int \vec{r}\,\mathrm{d}V \tag{2.234}$$

$$\vec{m}_i = \rho\Delta V_i \xrightarrow{\lim\limits_{\Delta V\to 0}} \rho\int \mathrm{d}V = m_{\text{Gesamtmasse}} \tag{2.235}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_S = \frac{1}{V}\int \vec{r}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\iiint \vec{r}(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{2.236}$$

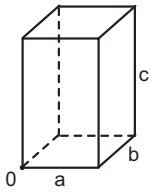


Abbildung 2.33: Kantenlängen des Quaders.

Beispiele:

Kubus mit den Kantenlängen a, b, c:

$$V = a\,b\,c \tag{2.237}$$

$$\vec{r}_S = \frac{1}{abc}\int_0^a\int_0^b\int_0^c \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{2.238}$$

$$\vec{r}_S = \frac{1}{abc}\left[\begin{array}{c} \frac{1}{2}x^2yz \\ \frac{1}{2}xy^2z \\ \frac{1}{2}xyz^2 \end{array}\right]_{\begin{array}{l}0-a\\0-b\\0-c\end{array}} \tag{2.239}$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}_S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{Mittelpunkt des Kubus.} \tag{2.240}$$

Halbkugel: Kugelkoordinaten:

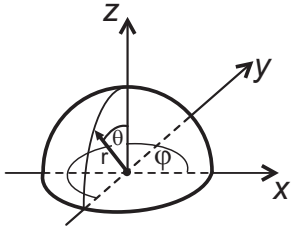


Abbildung 2.34: Definition der Kugelkoordinaten.

$$x = r\sin\Theta\cos\varphi \tag{2.241}$$

$$y = r\sin\Theta\sin\varphi \tag{2.242}$$

$$z = r\cos\Theta \tag{2.243}$$

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r^2\sin\Theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\Theta\mathrm{d}\varphi \tag{2.244}$$

$$\tag{2.245}$$

$$V = \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\Theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\Theta\mathrm{d}\varphi \tag{2.246}$$

$$= 2\pi \int_0^R \int_0^{\pi/2} r^2 \sin\Theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\Theta \tag{2.247}$$

$$= 2\pi \int_0^R r^2 \mathrm{d}r \tag{2.248}$$

$$= \frac{2\pi}{3} R^3 \tag{2.249}$$

$$\vec{r}_S = \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} r\sin\Theta\cos\varphi \\ r\sin\Theta\sin\varphi \\ r\cos\Theta \end{pmatrix} r^2 \sin\Theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\Theta\mathrm{d}\varphi \tag{2.250}$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^R \int_0^{\pi/2} 2\pi r^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\Theta\sin\Theta \end{pmatrix} \mathrm{d}r\mathrm{d}\Theta \tag{2.251}$$

$$= \frac{3}{R^3}\frac{1}{4} R^4 \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\Theta\sin\Theta \end{pmatrix} \mathrm{d}\Theta \tag{2.252}$$

$$= \frac{3}{4} R \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sin^2\Theta|_0^{\pi/2} \end{pmatrix} \tag{2.253}$$

$$= \frac{3}{8} R \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.254}$$

Potentielle Energie:

$$E_{\mathrm{pot}} = mgz_S; \qquad z_S\text{: Höhe des Schwerpunktes} \tag{2.255}$$

$\Rightarrow$ verschiedene Arten des Gleichgewichts durch räumliche Änderung der potentiellen Energie gegeben.

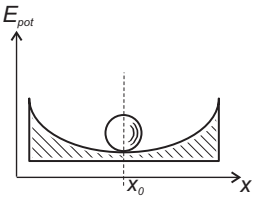
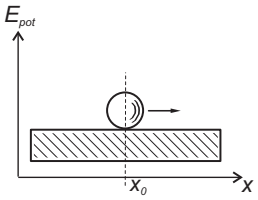
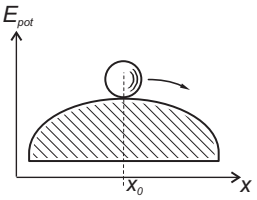
Gleichgewicht	stabil	indifferent	labil
Verlauf der potentiellen Energie in Richtung einer Koordinate x x_0 Ort der Gleichgewichtslage			
Reaktion auf eine Verrückung aus der Gleichgewichtslage x_0	Körper kehrt zurück	Körper bleibt liegen	Körper entfernt sich
Schwerpunktslage S bei Verrückung aus der Gleichgewichtslage x_0	S wird angehoben	S bleibt in gleicher Höhe	S senkt sich

Abbildung 2.35: Gleichgewichtslagen

Kinetische Energie:
Translationsenergie des Schwerpunktes + Rotationsenergie um den Schwerpunkt

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \vec{v}_S^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2}_{J\text{: Massenträgheitsmoment}} \vec{\omega}^2 \tag{2.256}$$

$$\Leftrightarrow E_{kin} = \frac{1}{2} m \vec{v}_S^2 + \frac{1}{2} J \vec{\omega}^2 \tag{2.257}$$

2.8.4 Trägheitsmoment

Genau wie die träge Masse der Widerstand eines Körpers gegen eine Änderung der Translationsbewegung ist, ist das Trägheitsmoment der Widerstand eines Körpers gegen eine Änderung der Rotationsbewegung.

Definition:

$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = \int r^2 \mathrm{d}m = \int \rho r^2 \mathrm{d}V \tag{2.258}$$

Beispiele:

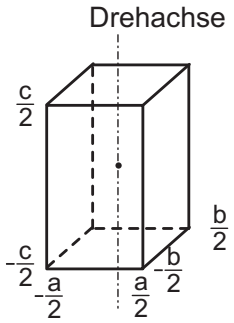


Abbildung 2.36: Rotation eines Quaders.

Kubus mit homogener Massendichte:

$$J = \rho \int r^2 \mathrm{d}V \tag{2.259}$$

$\vec{r}$ ist der Abstand zur Drehachse: $\Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2$

$$\Rightarrow J = \rho \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-c/2}^{c/2} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{2.260}$$

$$\Leftrightarrow J = \rho c \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.261}$$

$$\Leftrightarrow J = \rho c \int_{-a/2}^{a/2} \left(x^2 b + \frac{1}{3}\frac{b^3}{4}\right) \mathrm{d}x \tag{2.262}$$

$$\Leftrightarrow J = \rho c \left(\frac{1}{3}\frac{a^3}{4} b + \frac{1}{3}\frac{b^3}{4} a\right) \tag{2.263}$$

$$\Leftrightarrow J = \frac{\rho a b c}{12} \left(a^2 + b^2\right) \tag{2.264}$$

$$\Leftrightarrow J = \frac{m}{12} \left(a^2 + b^2\right) \tag{2.265}$$

Halbkugel mit homogener Massendichte:

Kugelkoordinaten, Abstand zur Achse: $r \sin \Theta$

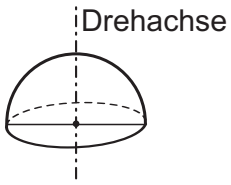


Abbildung 2.37: Rotation einer Halbkugel.

$$\Rightarrow J = \rho \iiint r^2 \mathrm{d}V \tag{2.266}$$

$$\Leftrightarrow J = \rho \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 \Theta r^2 \sin \Theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\Theta \mathrm{d}\varphi \tag{2.267}$$

$$\Leftrightarrow J = 2\pi\rho \int_0^R \int_0^{\pi/2} r^4 \sin^3 \Theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\Theta \tag{2.268}$$

$$\Leftrightarrow J = \frac{2}{5}\pi\rho R^5 \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^3 \Theta d\Theta}_{=\frac{2}{3}} \tag{2.269}$$

$$\Leftrightarrow J = \frac{4}{15}\pi\rho R^5 \tag{2.270}$$

mit $V = \frac{2}{3}\pi R^3$ und $m = \rho V$ folgt:

$$\Leftrightarrow J = \frac{2}{5} m R^2 \tag{2.271}$$

$$\tag{2.272}$$

Das Trägheitsmoment einer Halbkugel ist gleich dem der Vollkugel!

Rotation um Achse, die nicht durch den Schwerpunkt geht:

$\Rightarrow$ **Satz von Steiner**

$$J_A = J_S + ms^2 \tag{2.273}$$

J_S: Trägheitsmoment bei Rotation um eine Achse durch den Schwerpunkt
J_A: Trägheitsmoment bei Rotation um eine beliebige Achse A
s: Abstand beider paralleler Drehachsen.

Hauptträgheitsachsen, freie Achsen:

Die Drehachsen durch den Schwerpunkt mit dem größten und kleinsten Trägheitsmoment stehen senkrecht aufeinander. Diese beiden und die darauf senkrecht stehende Drehachse bezeichnet man als Hauptträgheitsachsen. Um diese drei Achsen ist eine freie Rotation (ohne Lager) möglich. ⇒ freie Achsen.

Stabile Rotation: Rotation um Achsen mit kleinstem bzw. größtem Trägheitsmoment.

Labile Rotation: Rotation um Achse mit mittlerem Trägheitsmoment.

2.8.5 Kreisel

Starrer Körper, der eine Drehbewegung ausführt.

Kugelkreisel

$J_x = J_y = J_z$

Symmetrischer Kreisel

$J_x = J_y \neq J_z$ Symmetrieachse = Figurenachse

Kräftefreier Kreisel

Es greifen keine Kräfte oder Drehmomente am Kreisel an ⇒ Drehimpulsachse raumfest. Eine kardanische Aufhängung gewährleistet Kräftefreiheit, da der Kreisel in seinem Schwerpunkt unterstützt wird.

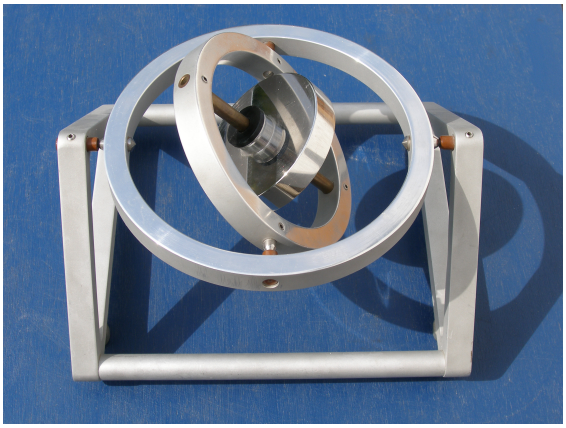


Abbildung 2.38: Kräftefreier symmetrischer Kreisel in kardanischer Aufhängung.

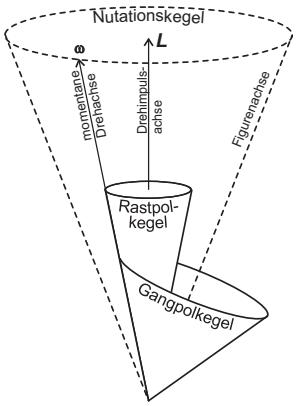


Abbildung 2.39: Nutationsbewegung eines abgeplatteten Kreisels.

Nutation

Einfachste Kreiselbewegung: Drehimpulsachse fällt mit Figurenachse beim kräftefreien Kreisel zusammen.

Kurzer Schlag bewirkt eine Drehimpulsänderung: $\Delta L = \int M dt$ danach Drehimpulsachse $\neq$ Figurenachse wieder konstant.
$\Rightarrow$ Figurenachse dreht sich um Drehimpulsachse.

Rastpolkegel (Drehimpulsachse) raumfest
Gangpolkegel (Figurenachse) wälzt sich auf dem Rastpolkegel ab.
$\Rightarrow$ Figurenachse läuft auf dem Nutationskegel

Kreisel unter Einwirkung einer äußeren Kraft

Ein unsymmetrisch aufgehängter Kreisel dreht sich um den Aufhängungspunkt aufgrund des ausgeübten Drehmomentens $\Rightarrow$ **Präzession**

$$\omega_p = \frac{M}{L} = \frac{M}{J\omega} \tag{2.274}$$

$$\vec{M} = \vec{\omega}_p \times \vec{L} \tag{2.275}$$

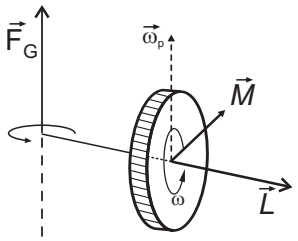


Abbildung 2.40: Präzession eines Kreisels unter Einwirkung einer äußeren Kraft (hier Gewichtskraft).

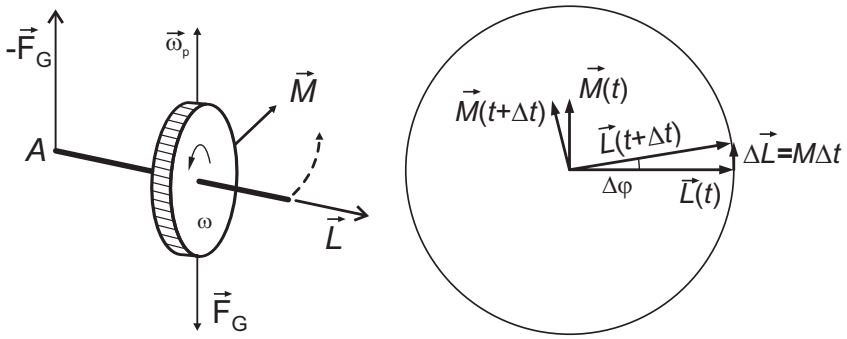


Abbildung 2.41: Drehmoment und Drehimpulse beim aufgehängten Kreisel.

Kreiselmoment

Erzwingt man bei einem rotierenden Kreisel von außen eine Richtungsänderung der Drehachse so müssen die Lager bei dieser künstlichen Präzession Kräfte und Momente $\vec{M}_p$ aufnehmen:
$\vec{M}_p = -\vec{M} = \vec{L} \times \vec{\omega}_p$

Anwendungen

Kreiselkompaß, Kreiselhorizont, freihändiges Radfahren.

2.9 Mechanik deformierbarer Körper

Festkörper
Festes Volumen, feste Gestalt; Volumen-, Gestaltsänderungen reversibel (für kleine Kräfte) $\rightarrow$ Formelastizität

Flüssigkeiten
Festes Volumen, keine feste Gestalt $\rightarrow$ Volumenelastizität

Gase
Kein festes Volumen, keine feste Gestalt
$\rightarrow$ Füllen jedes Volumen aus
$\rightarrow$ Viel kompressibler als Festkörper oder Flüssigkeiten

2.9.1 Deformierbare feste Körper - elastische Verformung

Eine auf einen Festkörper wirkende Kraft $\vec{F}$ führt zu einer Deformation.

Dehnung eines Festkörpers

$$\Delta l = \alpha \frac{F l_0}{A} \tag{2.276}$$

mit Δl : Längenänderung
und α : Stoffkonstante

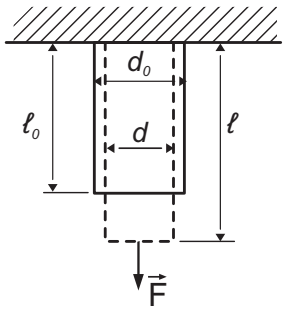


Abbildung 2.42: Längenänderung durch Dehnung.

Dehnung
relative Längenänderung

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \tag{2.277}$$

Spannung

(Normalspannung) Auf die Querschnittsfläche bezogene Normalkraft.

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{2.278}$$

Hooksches Gesetz

(reversible Verformung) Dehnungen und Spannungen sind einander proportional.

$$\epsilon = \alpha\sigma \quad \text{oder} \quad \sigma = E\epsilon \tag{2.279}$$

$$\text{mit } E = \frac{1}{\alpha} : \text{Elastizitätsmodul.}$$

Scherung eines Festkörpers

Die Scherspannung ist die auf die Querschnittsfläche bezogene Tangentialkraft:

$$\tau = \frac{F}{A} \tag{2.280}$$

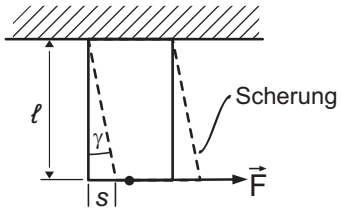


Abbildung 2.43: Scherung eines Festkörpers.

Hooksches Gesetz

Scherungen und Scherspannungen sind einander proportional

$$\tau = G\gamma \tag{2.281}$$

$$\text{mit } G : \text{Schermodul}$$

Querkontraktion

Vergrößert eine Zugspannung die Länge l_0 eines Stabes so verkleinert sich die Breite d_0 (bzw. umgekehrt).

Querdehnung

$$\epsilon_Q = -\frac{\Delta d}{d_0} \tag{2.282}$$

Poissonsche Querkontraktionszahl

$$\mu = \frac{\epsilon_Q}{\epsilon} = \frac{-\frac{\Delta d}{d_0}}{\frac{\Delta l}{l_0}} \tag{2.283}$$

Verhältnis von Querdehnung zu Längsdehnung.
$\Rightarrow$ Volumenänderung des Stabes.

$$\begin{aligned}
\Delta V &= (d_0 + \Delta d)^2 (l_0 + \Delta l) - d_0^2 l_0 && (2.284)\\
&= (d_0^2 + 2 d_0 \Delta d + (\Delta d)^2)(l_0 + \Delta l) - d_0^2 l_0 && (2.285)\\
&\underbrace{\approx}_{(\Delta d)^2 \approx 0, (\Delta d \Delta l) \approx 0} d_0^2 \Delta l + 2 d_0 l_0 \Delta d && (2.286)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ relative Volumenänderung

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta V}{V} &= \frac{d_0^2 \Delta l + 2 d_0 l_0 \Delta d}{d_0^2 l_0} && (2.287)\\
\Leftrightarrow \frac{\Delta V}{V} &= \frac{\Delta l}{l_0} + 2\frac{\Delta d}{d_0} && (2.288)\\
\Leftrightarrow \frac{\Delta V}{V} &= \epsilon - 2\epsilon_Q = \epsilon(1 - 2\mu) && (2.289)
\end{aligned}$$

Allseitiger Druck

Volumenänderung dreimal so groß.

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\epsilon(1 - 2\mu) = -\frac{1}{K} = -\kappa \tag{2.290}$$

mit K: Kompressionsmodul bzw. κ: Kompressibilität (Maß für die Volumenelastizität fester und flüssiger Stoffe); da immer Volumenverkleinerung folgt:

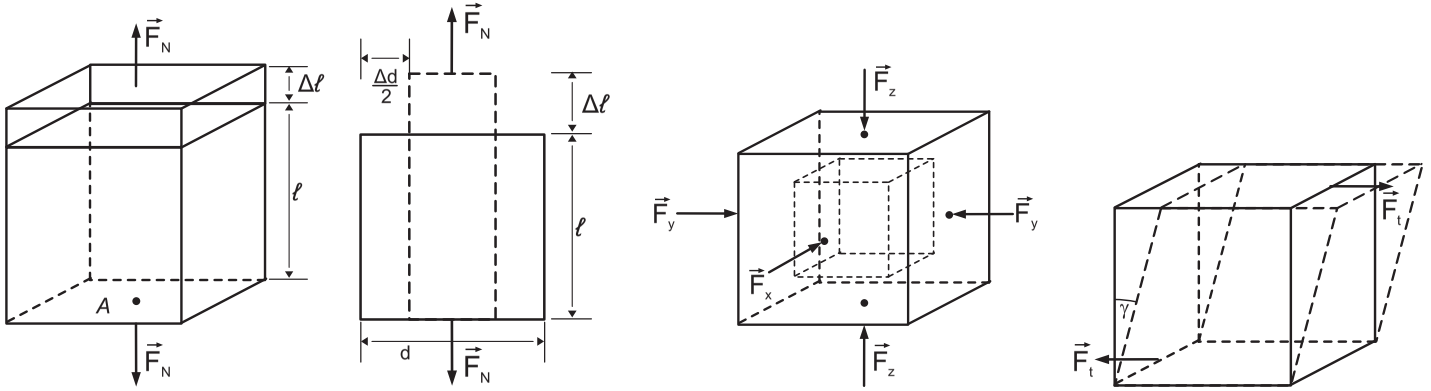
$$K > 0 \tag{2.291}$$

$$\mu < 0.5 \tag{2.292}$$

2.9.2 Deformierbare feste Körper - plastische Verformung

Wird ein bestimmter Wert der Kraft überschritten, so sind die auftretenden Dehnungen oder Scherungen nicht mehr reversibel.
R_P: Streckgrenze
R_M: Zugfestigkeit

Tabelle 2.2: Übersicht der Verformungsarten.

Verformungsart	Dehnung	Querdehnung	allseitige Kompression	Scherung
Kenngröße	Elastizitätsmodul E	Querdehnungszahl oder Poisson-Zahl μ	Kompressionsmodul K	Schubmodul (Torsionsmodul) G
Skizze				
Gesetzmäßigkeit	$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta l}{l}$ $\sigma = E\epsilon$ (Hookesches Gesetz)	$\frac{\Delta d}{d} = -\mu\frac{\Delta l}{l}$ $\epsilon_q = -\mu\epsilon$ $\frac{\Delta V}{V} = \epsilon(1-2\mu)$ $0 < \mu < 0,5$	$\frac{\Delta V}{V} = 3\epsilon(1-2\mu)$ $-\frac{\Delta pV}{\Delta V} = K$ $\frac{1}{K} = \kappa$	$\tau = \frac{F_t}{A} = G\gamma$
Zusammenhang			$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$	$G = \frac{E}{2(1+2\mu)}$; $\frac{E}{3} < G < \frac{E}{2}$

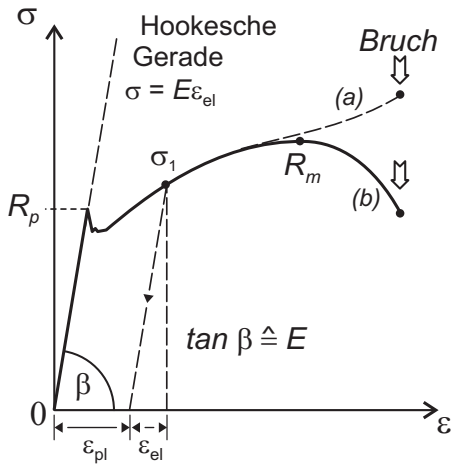


Abbildung 2.44: Spannungs-Dehnungs-Diagramm: (a) wahre Spannungs-Dehnungs-Kurve $\sigma = F/A = f(\epsilon)$; (b) scheinbare Spannungs-Dehnungs-Kurve $F/A_0 = g(\epsilon)$.

a) Spannungs-Dehnungs-Diagramm
b) Last-Verlängerungs-Diagramm (Querschnitt wird als konstant angenommen)

Mikroskopische Erklärung der Plastizität

Abgleiten ganzer Kristallbereiche, durch sogenanntes Fließen des Metalls.

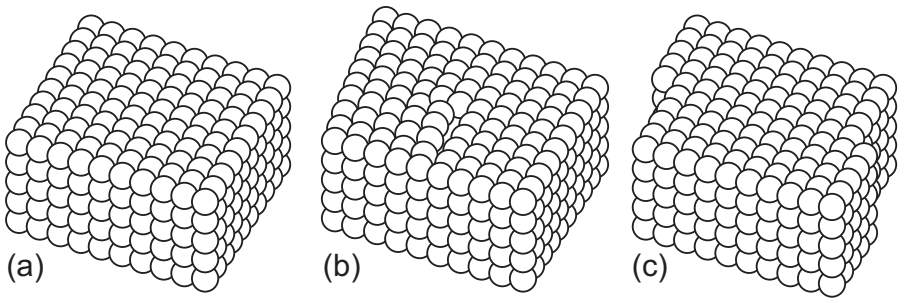


Abbildung 2.45: Plastische Verformung durch Gleitung: (a) Idealkristall (kubisch primitives Gitter); (b) Kristall nach Einwanderung einer Stufenversetzung von rechts. (c) Ungestörter Endzustand des Kristalls nach Durchlauf der Versetzung.

2.9.3 Flüssigkeiten

Flüssigkeitsteilchen sind frei gegeneinander verschiebbar.
$\rightarrow$ Flüssigkeitsoberfläche stets senkrecht zur wirkenden Kraft.

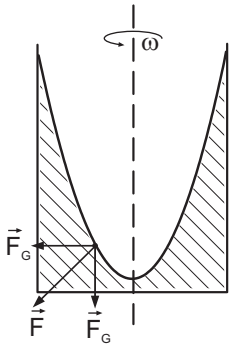


Abbildung 2.46: Kräfte bei Rotation von Flüssigkeiten

$F_Z = mr\omega^2$	Zentrifugalkraft
$F_G = mg$	Schwerkraft
F	resultierende Kraft

Hydrostatischer Druck

Kraft wirkt immer senkrecht auf die Begrenzungsfläche; anstelle von Kraftvektor
$\rightarrow$ skalare Größe Druck p

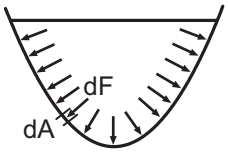


Abbildung 2.47: Hydrostatische Druckverteilung.

$$p = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A} \tag{2.293}$$

mit dF: Kraftelement und dA: Flächenelement.

Gesetz von Pascal

Überall im Inneren einer Flüssigkeit sowie an der Gefäßwand ist der Druck gleich.

Anwendung: Hydraulische Presse

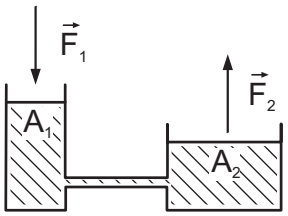


Abbildung 2.48: Spart Kraft aber keine Arbeit.

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \tag{2.294}$$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2 \tag{2.295}$$

Schweredruck in Flüssigkeiten

Flüssigkeitssäule der Höhe h und der Querschnittsfläche A hat die Masse.

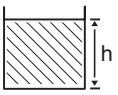


Abbildung 2.49: Schweredruck einer Flüssigkeitssäule.

$$m = \rho h A; \qquad \rho\text{: Dichte} \tag{2.296}$$

$$\Rightarrow F = g\rho h A; \qquad \text{Kraft auf den Boden} \tag{2.297}$$

$$\Rightarrow P = \frac{F}{A} = g\rho h; \qquad \text{Schweredruck einer Flüssigkeit} \tag{2.298}$$

Gesamtdruck

$$p = \underbrace{g\rho h}_{\substack{\text{Schweredruck} \\ \text{der Flüssigkeit}}} + \underbrace{p_0}_{\substack{\text{offener Behälter,} \\ \text{Luftdruck} \\ \text{der Umgebung}}} + \underbrace{p_u}_{\substack{\text{geschlossener} \\ \text{Behälter,} \\ \text{Kolbendruck}}} \tag{2.299}$$

→ Quecksilberbarometer

$\rightarrow$ kommunizierende Röhren: Zwei nicht mischbare Flüssigkeiten mit verschiedenen

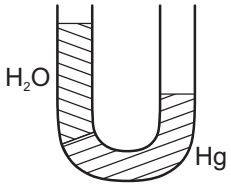


Abbildung 2.50

Dichten ρ_1 und ρ_2 stehen in den Schenkeln eines U-Rohrs.

$$p = g\rho_1 h_1 = g\rho_2 h_2 \tag{2.300}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1} \tag{2.301}$$

Auftrieb

Ein Körper taucht vollständig in eine Flüssigkeit ein. Der Auftrieb F_A ist:

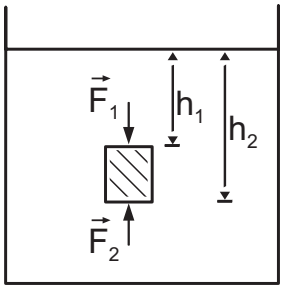


Abbildung 2.51: Auftriebskraft.

$$F_A = F_2 - F_1 = g\rho(h_2 - h_1)A = g\rho V \tag{2.302}$$

Satz von Archimedes:

Der Auftrieb ist gerade so groß wie das Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmenge.

$$F_A = F_G; \quad \text{Körper schwebt in der Flüssigkeit} \tag{2.303a}$$

$$F_A > F_G; \quad \text{Körper schwimmt} \tag{2.303b}$$

$$F_A < F_G; \quad \text{Körper sinkt} \tag{2.303c}$$

Stabilitätsbedingung beim Schwimmen:

Der Angriffspunkt der Schwerkraft F_G ist der Schwerpunkt S; der Angriffspunkt des Auftriebs F_A ist der Schwerpunkt S_{Fl} der verdrängten Flüssigkeit. Liegt S senkrecht

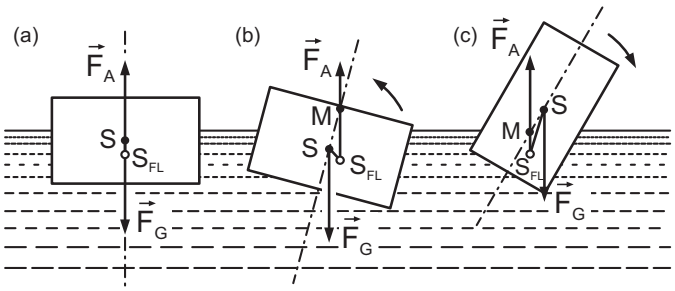


Abbildung 2.52: Stabilität schwimmender Körper: (a) stabiles Schwimmen, (b) stabil aber schwankend (c) labil. (S: Massenschwerpunkt, S_{Fl}: Schwerpunkt des verdrängten Volumens, M: Metazentrum)

oberhalb von S_{Fl} so ist die Schwimmlage stabil. Liegt S_{Fl} seitlich unterhalb von S so wird ein Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_A$ erzeugt. Der Schnittpunkt der Mittelebene des Körpers mit der Wirkungslinie des Auftriebs heißt Metazentrum M.

M oberhalb von S: Schwimmlage stabil
M unterhalb von S: Schwimmlage labil

2.9.4 Gase

Schweredruck

Bei einer Höhenzunahme $\mathrm{d}h$ ändert sich der hydrostatische Druck aufgrund der Abnahme der darüberliegenden Gassäule.

$$\mathrm{d}p = -\rho g \mathrm{d}h \tag{2.304}$$

für konstante Temperatur: $\dfrac{\rho}{\rho_0} = \dfrac{p}{p_0}$ (Gesetz von Boyle-Mariott) (2.305)

$$\Rightarrow \int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g \int_0^h \mathrm{d}h \tag{2.306}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{\rho_0 g}{p_0} h \tag{2.307}$$

$$\Rightarrow p = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0}{p_0} g h\right) \text{ (barometrische Höhenformel)} \tag{2.308}$$

2.9.5 Grenzflächeneffekte

Kohäsionskräfte:

Zwischen den Molekülen einer Phase (fest, flüssig, gasförmig) bestehen Anziehungskräfte (Kohäsionskräfte)

$$\text{Festkörper} > \text{Flüssigkeit} > \text{Gase} \tag{2.309}$$

Adhäsionskräfte:

An einer Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Phasen auftretende zwischenmolekulare Kräfte. Ursache der Benetzbarkeit von Oberflächen.

Oberflächenspannung:

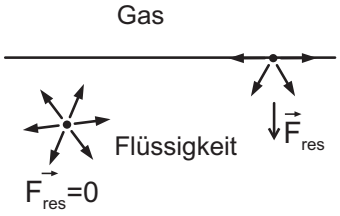


Abbildung 2.53: Oberflächenspannung.

Kohäsionskräfte heben sich im Inneren der Flüssigkeit auf, nicht aber an der Oberfläche.
$\Rightarrow$ Flüssigkeitsoberflächen sind Minimalflächen (energetisch günstigster Zustand).

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}A} \tag{2.310}$$

Es wird auf die Arbeit $\mathrm{d}W$ zur Vergrößerung der Oberfläche $\mathrm{d}A$ verwendet.

Bestimmung der Oberflächenspannung:

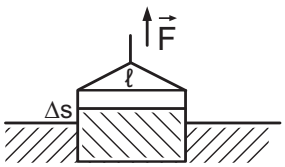


Abbildung 2.54: Messung der Oberflächenspannung.

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}A} = \frac{F\Delta s}{\Delta s 2l} = \frac{F}{2l} \tag{2.311}$$

Die „2“ im Nenner taucht wegen Vorder- bzw. Rückseite des Drahtes auf.

Grenzflächenspannung:

Festkörper - Flüssigkeit: σ_{12}
Festkörper - Gas: σ_{13}
Flüssigkeit - Gas: σ_{23}

$$\sigma_{13} - \sigma_{12} = \sigma_{23} \cos \alpha \tag{2.312}$$

α ist der Kontaktwinkel

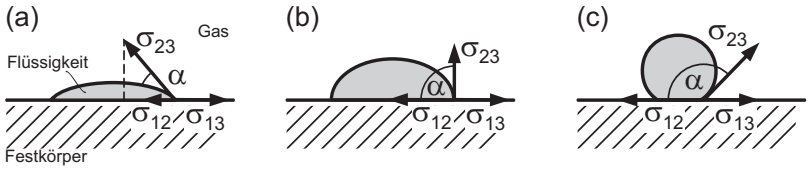


Abbildung 2.55: Grenzflächenspannung und Kontaktwinkel bei Benetzung und Tropfenbildung.

Kapilare Steighöhe:

Folge der Benetzbarkeit in engen Röhren mit dem Radius r:

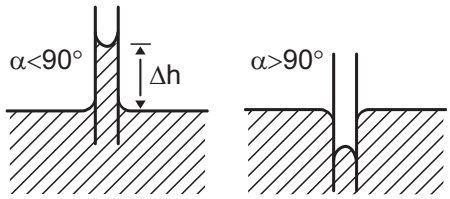


Abbildung 2.56: Kapillareffekt in Röhren mit Radius r.

Gleichgewicht zwischen Oberflächenspannung und Gewichtskraft der angehobenen Flüssigkeitssäule:

$$F = \sigma l = \sigma 2\pi r \tag{2.313}$$

$$F = mg = \rho V g = \rho \pi r^2 h g \tag{2.314}$$

gleichsetzen:

$$\Rightarrow h = \frac{2\sigma}{\rho r g} \quad \text{(vollständige Benetzung)} \tag{2.315}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{2\sigma \cos \alpha}{\rho g r} \tag{2.316}$$

3 Schwingungen und Wellen

3.1 Schwingungstypen

Schwingungen: periodische Zustandsänderungen in mechanischen oder elektromagnetischen Systemen. Energie wird periodisch zwischen Energiereservoirs ausgetauscht (kinetische, potentielle, elastische Energie)
Schwingungsdauer T: Periodendauer
Frequenz f: Anzahl der Zyklen pro Zeiteinheit

$$f = \frac{1}{T} \quad \left[1/\mathrm{s}\right] \text{ oder } \left[\mathrm{Hz}\right] \text{ Hertz} \tag{3.1}$$

periodisch wiederkehrende Muster: z. B. Auslenkung

$$y(t) = y(t+T) \tag{3.2}$$

freie Schwingung: System wird einmalig angeregt und schwingt mit Eigenfrequenz f_0.

ungedämpfte Schwingung: Amplitude bleibt konstant.

gedämpfte Schwingung: Amplitude nimmt durch Energieverlust (Reibung) ab.

erzwungene Schwingung: periodische Anregung des schwingungsfähigen Systems von außen.

Allgemeine mathematische Beschreibung schwierig, jedoch häufig durch sin- oder cos-Funktionen beschreibbar $\rightarrow$ harmonische Schwingungen.

3.2 Ungedämpfte Schwingung

Lineare Federschwingung:
Harmonische Schwingung: Projektion einer gleichförmigen Kreisbahn

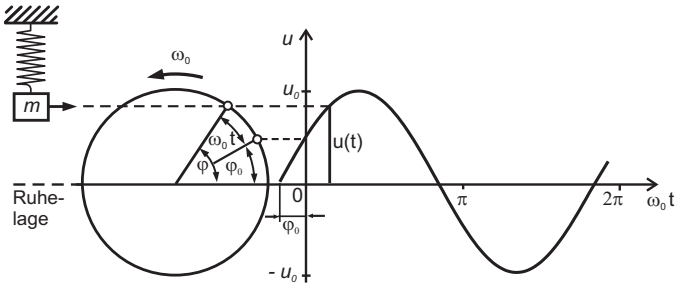


Abbildung 3.1: Ein linearer Federschwinger beschreibt eine harmonische Schwingung.

$$u(t) = u_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{3.3}$$

u_0 : Amplitude

$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = 2\pi f$: Kreisfrequenz

φ_0 : Anfangswinkel

Kräftegleichgewicht:
Federkraft: $F_c = -cu$ (c: Federkonstante)
Bewegungskraft: $F_a = ma$

$$\Rightarrow F_a = F_c \tag{3.4}$$
$$\Leftrightarrow ma = -cu \tag{3.5}$$
$$\Leftrightarrow m\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + cu = 0 \tag{3.6}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{c}{m}u = 0 \tag{3.7}$$
$$\tag{3.8}$$

Differentialgleichung (DGL) des Feder-Masse-Systems.

Lösungsansatz:

$$u(t) = u_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{3.9}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \omega_0 u_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{3.10}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega_0^2 u_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{3.11}$$
$$= -\omega_0^2 u(t) \tag{3.12}$$

Einsetzen in DGL:

$$-\omega_0^2 u(t) + \frac{c}{m} u(t) = 0 \tag{3.13}$$
$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{c}{m} \tag{3.14}$$
$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \tag{3.15}$$
$$\Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{m}c \tag{3.16}$$

allgemeine Differentialgleichung für harmonische, ungedämpfte Schwingungen:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\text{Variable}) + \text{konst. (Variable)} = 0 \quad \text{mit konst.} = \omega_0^2 \tag{3.17}$$

Drehschwingungen:

Analog zu den Kräften bei der linearen Schwingung werden Drehmomente bei der Drehschwingung betrachtet.

Drehfeder: $M = -D\varphi$

Bewegungsmoment: $M = J\varphi = J\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$

$$\Rightarrow J\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + D\varphi = 0 \tag{3.18}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{D}{J}\varphi = 0 \tag{3.19}$$
$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{D}{J} \tag{3.20}$$
$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}} \tag{3.21}$$
$$\Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{JD} \tag{3.22}$$

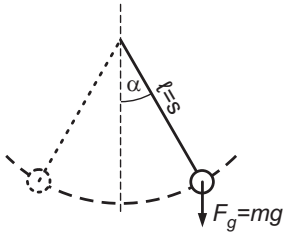


Abbildung 3.2: Pendelschwingung.

Pendelschwingung:

Rücktreibendes Drehmoment:

$$M = s \times F_g = -mgs \sin\alpha \tag{3.23}$$

$$\Rightarrow M = -mgs\alpha, \quad \text{für kleine Auslenkungen } \sin\alpha \approx \alpha \tag{3.24}$$

Beziehungen für Drehschwingungen gelten auch für Pendelschwingungen mit kleinen Auslenkungen.

$$D = mgs = mgl \quad \text{mit} \quad J = ml^2 \tag{3.25}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \tag{3.26}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{3.27}$$

3.3 Gedämpfte Schwingungen

Freie Schwingung durch Reibungskräfte gedämpft.
Schwingungsenergie $\rightarrow$ thermische Energie.

Reibungskräfte
a) geschwindigkeitsunabhängige Reibung (z. B. Gleitreibung, Rollreibung)

$$F_R = -\mu F_N \tag{3.28}$$

mit F_N: Normalkraft und μ: Reibungskoeffizient.

Differentialgleichung:

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \underbrace{\mu F_N}_{\equiv cu_0} + cu = 0 \tag{3.29}$$

$$\Rightarrow m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c(u + u_0) = 0, \text{ Substitution: } s = u + u_0 \tag{3.30}$$

$$\Rightarrow m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + cs = 0 \tag{3.31}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{c}{m} \tag{3.32}$$

wie ungedämpfte Schwingung, aber phasenverschoben, da $s = u + u_0$

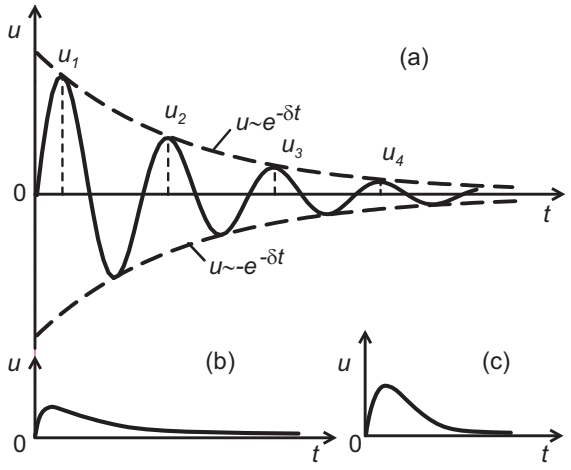


Abbildung 3.3: Freie gedämpfte Schwingungen für verschiedene Dämpfung bei gleichen Anfangsbedingungen $u(0) = 0$ und $\dot{u}(0) = v_0$.
(a) schwache Dämpfung: $\delta < \omega_0$ (Schwingfall)
(b) starke Dämpfung: $\delta > \omega_0$ (Kriechfall)
(c) $\delta = \omega_0$ (aperiodischer Grenzfall).

b) geschwindigkeitsabhängige Reibung (Newtonsche Reibung, viskose Reibung)

$$F_R = -bv = -b\frac{\partial u}{\partial t} \tag{3.33}$$

Differentialgleichung:

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial u}{\partial t} + cu = 0 \tag{3.34}$$

Es sei:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}},\ \text{Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung} \tag{3.35}$$

$$\delta = \frac{b}{2m},\ \text{Abklingkoeffizient} \tag{3.36}$$

$$D = \frac{\delta}{\omega_0},\ \text{Dämpfungsgrad} \tag{3.37}$$

$$Q = \frac{1}{2D},\ \text{Güte} \tag{3.38}$$

Umschreiben der DGL:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2D\omega_0\frac{\partial u}{\partial t} + \omega_0^2 u = 0 \tag{3.39}$$

allgemeine Lösung:

$$u(t) = u_0 \exp(-\delta t)\sin(\omega_D t + \varphi_0) \tag{3.40}$$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_0\Big[-\delta\exp(-\delta t)\sin(\omega_D t+\varphi_0) + \omega_D\exp(-\delta t)\cos(\omega_D t+\varphi_0)\Big] \tag{3.41}$$

$$= u_0\exp(-\delta t)\Big[-\delta\sin(\omega_D t+\varphi_0) + \omega_D\cos(\omega_D t+\varphi_0)\Big] \tag{3.42}$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_0\Big[-\delta\exp(-\delta t)\Big(-\delta\sin(\omega_D t+\varphi_0) + \omega_D\cos(\omega_D t+\varphi_0)\Big) + \delta\exp(-\delta t)\Big(-\delta\omega_D\cos(\omega_D t+\varphi_0) - \omega_D^2\sin(\omega_D t+\varphi_0)\Big)\Big] \tag{3.43}$$

$$= u_0\exp(-\delta t)\Big[(\delta^2-\omega_D^2)\sin(\omega_D t+\varphi_0) - 2\delta\omega_D\cos(\omega_D t+\varphi_0)\Big] \tag{3.44}$$

Einsetzen in DGL:

$$u_0 \exp(-\delta t)\Big[(\delta^2 - \omega_D^2)\sin(\omega_D t + \varphi_0) - 2\delta\omega_D \cos(\omega_D t + \varphi_0)\Big] +$$
$$2D\omega_0 u_0 \exp(-\delta t)\Big[-\delta \sin(\omega_D t + \varphi_0) + \omega_D \cos(\omega_D t + \varphi_0)\Big] +$$
$$\omega_0^2 u_0 \exp(-\delta t)\sin(\omega_D t + \varphi_0) = 0 \tag{3.45}$$
$$\Leftrightarrow \Big[(\delta^2 - \omega^2) - \underbrace{2D\omega_0\delta}_{=2\delta^2} + \omega_0^2\Big]\sin(\omega_D t + \varphi_0) +$$
$$\underbrace{\Big[-2\delta\omega_D + \underbrace{2D\omega_0\omega_D}_{=2\delta\omega_D}\Big]\cos(\omega_D t + \varphi_0)}_{=0} = 0 \tag{3.46}$$
$$\Leftrightarrow \left(\delta^2 - \omega_D^2 - 2\delta^2 + \omega_0^2\right)\sin(\omega_D t + \varphi_0) = 0 \tag{3.47}$$

$$\Rightarrow \omega_D^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \tag{3.48}$$
$$\Rightarrow \omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \tag{3.49}$$

ω_D : Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung

Anfangsbedingungen:

$$u(0) = u_0 \sin\varphi_0 = 0 \tag{3.50}$$
$$\Rightarrow \varphi_0 = 0 \tag{3.51}$$

und

$$\frac{\partial u(0)}{\partial t} = u_0(-\delta \sin\varphi_0 + \omega_D \cos\varphi_0) = v_0 \tag{3.52}$$
$$\Rightarrow u_0 = \frac{v_0}{\omega_D} = \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \tag{3.53}$$
$$\Rightarrow u(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \exp(-\delta t)\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2 t}\right) \tag{3.54}$$

gilt nur für den Schwingfall ($\delta < \omega_0$), d.h. für **schwache Dämpfung**.

Für **starke Dämpfung** ($\delta > \omega_0$) wird das Argument $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = i\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ imaginär. Mit der trigonometrischen Beziehung $\sin(ix) = i\sinh(x)$ folgt:

$$u(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \exp(-\delta t) \sinh\left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}t\right) \tag{3.55}$$

aperiodischer Grenzfall:

$$\lim_{\omega_D \to 0} \frac{\sin(\omega_D t)}{\omega_D} = t \tag{3.56}$$

$$\Rightarrow u(t) = v_0 t \exp(-\delta t) \tag{3.57}$$

3.4 Erzwungene Schwingungen

Schwingungsfähiges System wird von außen periodisch angeregt.
$\rightarrow$ nach einer Einschwingungszeit schwingt das System mit der Anregungsfrequenz.

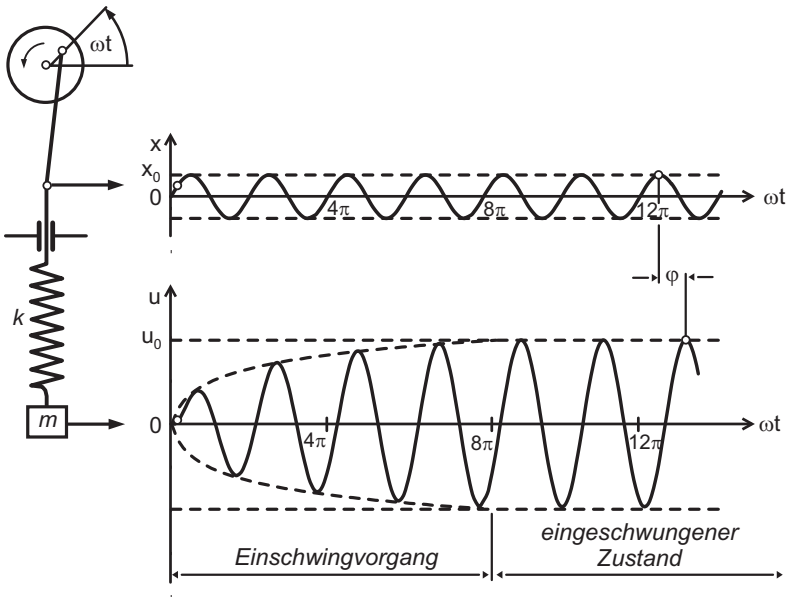


Abbildung 3.4: Erzwungene Schwingungen $u(t)$ durch Erregerauslenkung $x(t)$.

periodischer Erregerausschlag: $x(t) = x_0 \sin(\omega t)$

Kräftebilanz der erzwungenen Schwingung:

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial u}{\partial t} + cu = cx \tag{3.58}$$

$\rightarrow$ Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2D\omega_0\frac{\partial u}{\partial t} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 x \tag{3.59}$$

$$= \omega_0^2 x_0 \sin(\omega t) \tag{3.60}$$

Lösungsansatz:

$$u = u_0 \sin(\omega t - \varphi) = u_0(\sin\omega t\cos\varphi - \cos\omega t\sin\varphi) \tag{3.61}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_0\,\omega(\cos\omega t\cos\varphi + \sin\omega t\sin\varphi) \tag{3.62}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -u_0\,\omega^2(\sin\omega t\cos\varphi - \cos\omega t\sin\varphi) \tag{3.63}$$

$$= -\omega^2 u(t) \tag{3.64}$$

Einsetzen:

$$2\underbrace{D\omega_0}_{\delta}\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)u = \omega_0^2 x_0 \sin\omega t \tag{3.65}$$

$$\Leftrightarrow 2\delta u_0\,\omega(\cos\omega t\cos\varphi + \sin\omega t\sin\varphi) +$$
$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)u_0(\sin\omega t\cos\varphi - \cos\omega t\sin\varphi) = \omega_0^2 x_0\sin\omega t \tag{3.66}$$

$$\Leftrightarrow \left(2\delta u_0\omega\sin\varphi + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)u_0\cos\varphi\right)\sin\omega t +$$
$$\left(2\delta u_0\omega\cos\varphi - \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)u_0\sin\varphi\right)\cos\omega t = \omega_0^2 x_0\sin\omega t \tag{3.67}$$

$$\Leftrightarrow \left(2\delta u_0\omega\sin\varphi + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)u_0\cos\varphi - \omega_0^2 x_0\right)\sin\omega t +$$
$$\left(2\delta u_0\omega\cos\varphi - \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)u_0\sin\varphi\right)\cos\omega t = 0 \tag{3.68}$$

gilt nur für alle t wenn beide Vorfaktoren Null sind

$$\Rightarrow 2\delta u_0\omega\sin\varphi + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)u_0\cos\varphi - \omega_0^2 x_0 = 0 \tag{3.69}$$

und

$$2\delta u_0\omega\cos\varphi - \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)u_0\sin\varphi = 0 \tag{3.70}$$

Aus der 2. Gleichung folgt für die **Phasenverschiebung** φ zwischen der erzwungenen Schwingung $u(t)$ und der Erregerschwingung $x(t)$:

$$\tan\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{3.71}$$

aus der 1. Gleichung folgt die Amplitudenresonanz $\frac{u_0}{x_0}$:

$$\frac{u_0}{x_0} = \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\varphi + 2\delta\omega\sin\varphi} \tag{3.72}$$

Nebenrechnung zur Eliminierung von φ. Betrachte nur Nenner:

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\varphi}} \tag{3.73}$$

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi}} \tag{3.74}$$

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\varphi + 2\delta\omega\sin\varphi = \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\varphi}} + 2\delta\omega\sqrt{\frac{\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi}} \tag{3.75}$$

$$\text{mit} \quad \tan^2\varphi = \frac{(2\delta\omega)^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\varphi + 2\delta\omega\sin\varphi = \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sqrt{\frac{1}{1+\frac{(2\delta\omega)^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}\varphi}} + 2\delta\omega\sqrt{\frac{\frac{(2\delta\omega)^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}\varphi}{1+\frac{(2\delta\omega)^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}\varphi}} \tag{3.76}$$

$$\Leftrightarrow \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\varphi + 2\delta\omega\sin\varphi = \sqrt{\frac{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^4}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + (2\delta\omega)^2}} + \sqrt{\frac{(2\delta\omega)^4}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + (2\delta\omega)^2}} \tag{3.77}$$

setze $a = \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2$
und $b = (2\delta\omega)^2$

$$\Leftrightarrow \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\varphi + 2\delta\omega\sin\varphi = \sqrt{\frac{a^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a+b}} \tag{3.78}$$

$$= a\sqrt{\frac{1}{a+b}} + b\sqrt{\frac{1}{a+b}} \tag{3.79}$$

$$= (a+b)\sqrt{\frac{1}{a+b}} \tag{3.80}$$

$$= (a+b)\frac{1}{\sqrt{a+b}} \tag{3.81}$$

$$= \sqrt{a+b} \tag{3.82}$$

$$\Leftrightarrow \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\varphi + 2\delta\omega\sin\varphi = \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\delta\omega)^2} \tag{3.83}$$

Einsetzen in Gleichung (3.72) liefert:

$$\frac{u_0}{x_0} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\delta\omega)^2}} \tag{3.84}$$

Verschiedene Anregungsfälle:

Niederfrequente Anregung: $\omega << \omega_0$

$$\tan\varphi \approx \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0 \tag{3.85}$$

$$\frac{u_0}{x_0} \approx \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^4}} \approx 1 \tag{3.86}$$

Hochfrequente Anregung: $\omega >> \omega_0$

$$\tan\varphi \approx \frac{2\delta\omega}{-\omega^2} = -\frac{2\delta}{\omega} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pi \tag{3.87}$$

$$\frac{u_0}{x_0} \approx \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega^4 + (2\delta\omega)^2}} \approx 0 \tag{3.88}$$

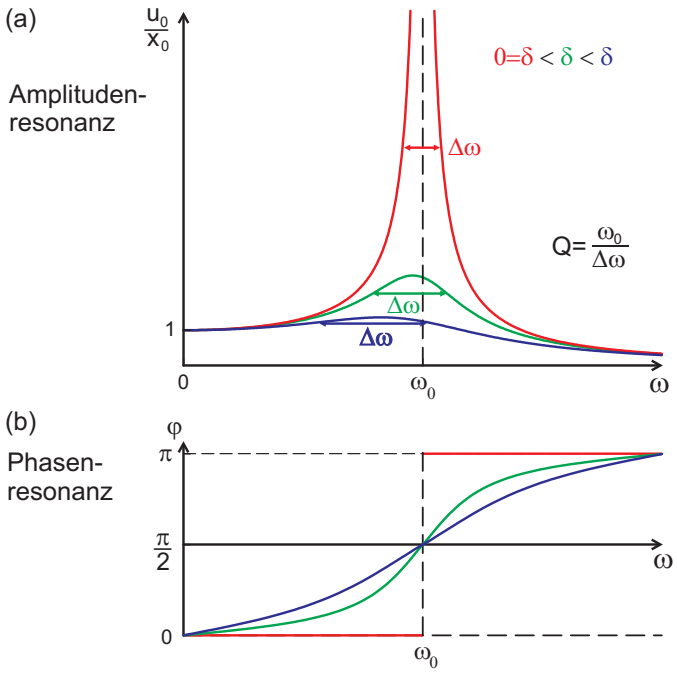


Abbildung 3.5: (a) Amplitudenresonanz und (b) Phasenresonanz für verschiedene Dämpfungskonstanten.

Resonante Anregung: $\omega \approx \omega_0$

$$\tan\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \approx \infty \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \tag{3.89}$$

$$\frac{u_0}{x_0} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\underbrace{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}_{0} + (2\delta\omega)^2}} = \frac{\omega_0^2}{2\delta\omega} \tag{3.90}$$

$$\approx \frac{\omega_0}{2\delta} \overset{\delta\approx 0}{\longrightarrow} \infty \quad \text{Resonanzkatastrophe} \tag{3.91}$$

3.5 Überlagerung von harmonischen Schwingungen

Zwei Schwingungen u_1 und u_2 längs gleicher Richtung können superponiert werden.

$$u_1 = u_0 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \tag{3.92}$$

$$u_2 = u_0 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \tag{3.93}$$

$$\Rightarrow u_{\text{ges}} = u_1 + u_2 \tag{3.94}$$

$$\Leftrightarrow u_{\text{ges}} = u_0 \Big(\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \Big) \tag{3.95}$$

$$\Leftrightarrow u_{\text{ges}} = 2u_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \tag{3.96}$$

$$\Leftrightarrow u_{\text{ges}} = 2u_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t + \frac{\Delta\varphi}{2} \right) \sin(\bar{\omega} t + \bar{\varphi}) \tag{3.97}$$

mit:

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \tag{3.98}$$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tag{3.99}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{3.100}$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \tag{3.101}$$

$$\tag{3.102}$$

Spezialfall: gleiche Frequenz, verschiedene Phase

$$\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow \Delta\omega = 0, \bar{\omega} = \omega \tag{3.103}$$

$$\Rightarrow u_{\text{ges}} = \underbrace{2u_0 \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right)}_{\text{neue Amplitude}} \sin(\omega t + \bar{\varphi}) \tag{3.104}$$

maximale Amplitude für $\Delta\varphi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, ...$
minimale Amplitude (0) für $\Delta\varphi = \pm\pi, \pm 3\pi, ...$

Spezialfall: verschiedene Frequenz, gleiche Phase

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = 0, \bar{\varphi} = \varphi \tag{3.105}$$

$$\Rightarrow u_{\text{ges}} = \underbrace{2u_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t \right)}_{\text{Amplitude moduliert}} \underbrace{\sin(\bar{\omega} t)}_{\text{Hüllkurve}} \tag{3.106}$$

Schwebung

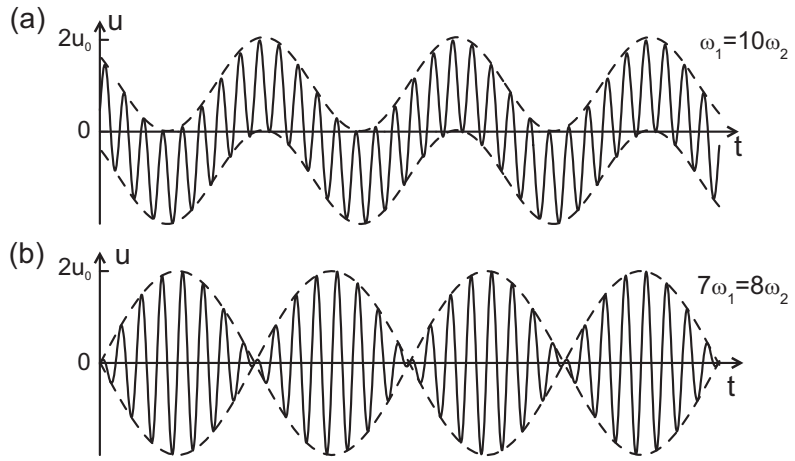


Abbildung 3.6: Überlagerung zweier Schwingungen mit (a) verschiedener Frequenz $\omega_1 \gg \omega_2$, (b) nahezu gleicher Frequenz $\omega_1 \approx \omega_2$ (Schwebung).

3.6 Gekoppelte Schwingungen

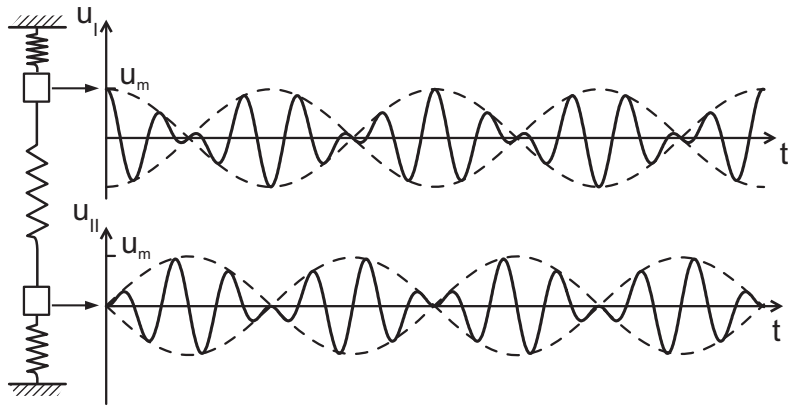


Abbildung 3.7: Gekoppelte Federschwingungen.

Zwischen gekoppelten Oszillatoren findet ein periodischer Energieaustausch statt.
Annahme: Zwei gleiche Massen mit zwei gleichen Federn der Federkonstante c sind über eine zusätzliche Feder der Federkonstanten c_{12} gekoppelt.

Differentialgleichungen:

$$m\ddot{u}_1 + cu_1 + c_{12}(u_1 - u_2) = 0 \tag{3.107}$$

$$m\ddot{u}_2 + cu_2 + c_{12}(u_2 - u_1) = 0 \tag{3.108}$$

$$\tag{3.109}$$

Addition bzw. Subtraktion und Division durch m führt zu:

$$(\ddot{u_1} + \ddot{u_2}) + \frac{c}{m}(u_1 + u_2) = 0 \tag{3.110}$$

$$(\ddot{u_1} - \ddot{u_2}) + \frac{c + c_{12}}{m}(u_1 - u_2) = 0 \tag{3.111}$$

$$\tag{3.112}$$

Substitution:

$$u_I = u_1 + u_2 \tag{3.113}$$

$$u_{II} = u_1 - u_2 \tag{3.114}$$

$$\tag{3.115}$$

Dann folgt:

$$u_I + \frac{c}{m}u_I = 0 \Rightarrow \omega_I = \frac{c}{m} \text{ gleichphasig} \tag{3.116}$$

$$u_{II} + \frac{c + c_{12}}{m}u_{II} = 0 \Rightarrow \omega_{II} = \frac{c + c_{12}}{m} \text{ gegenphasig} \tag{3.117}$$

$$\tag{3.118}$$

$\Rightarrow$ 2 Fundamentalschwingungen

3.7 Zusammenhang von Schwingungen und Wellen

Durch Kopplung von mehreren schwingungsfähigen Systemen wird die Schwingung eines Systems auf die Nachbarn übertragen → Wellenausbreitung.

Bei der Wellenbewegung wird keine Materie, aber Energie transportiert.
Transversalwellen: Ausbreitungsrichtung ⊥ Schwingungsebene
Longitudinalwellen: Ausbreitungsrichtung ∥ Schwingungsebene

Harmonische Wellen:

Neben der Zeitabhängigkeit bei harmonischen Schwingungen gibt es eine Ortsabhängigkeit.

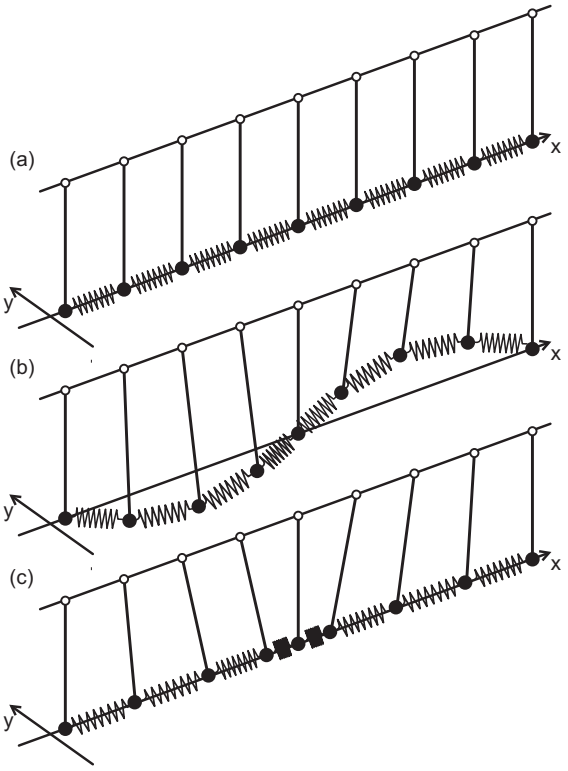


Abbildung 3.8: Fortschreitende Welle zwischen gekoppelten Pendeln: (a) Pendel mit Kopplungsfedern, (b) Transversalwelle, (c) Longitudinalwelle.

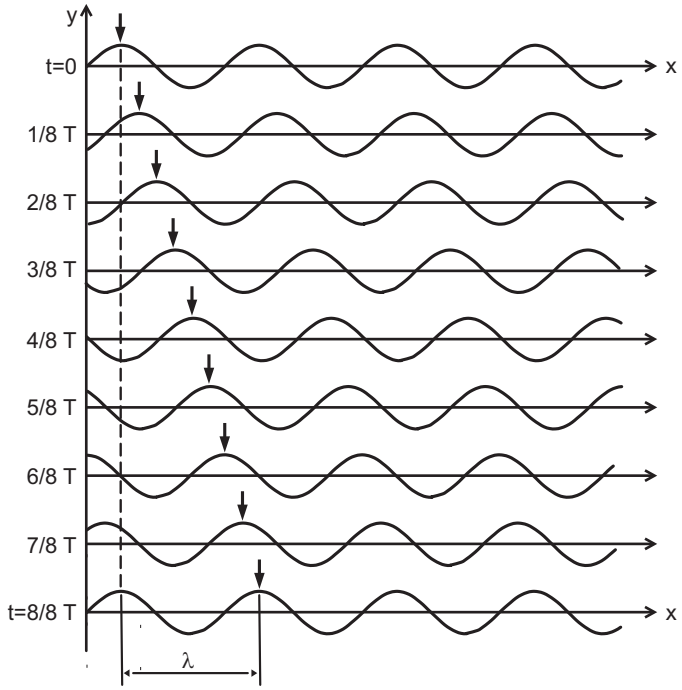


Abbildung 3.9: Zustände einer laufenden Transversalwelle.

Schwingungsverlauf der einzelnen Systeme:

$$x = 0: \qquad u(t, x = 0) = u_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \tag{3.119}$$

$$x = a: \qquad u(t, a) = u_0 \sin(\omega(t - \Delta t) + \varphi_0) \tag{3.120}$$

$$= u_0 \sin(\omega(t - \frac{a}{c}) + \varphi_0) \tag{3.121}$$

$$x = 2a: \qquad u(t, 2a) = u_0 \sin(\omega(t - 2\Delta t) + \varphi_0) \tag{3.122}$$

$$= u_0 \sin(\omega(t - \frac{2a}{c}) + \varphi_0) \tag{3.123}$$

c: Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle

allgemein:

$$u(t, x) = u_0 \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right) \tag{3.124}$$

$$\tag{3.125}$$

zeitlich und räumlich periodischer Vorgang.

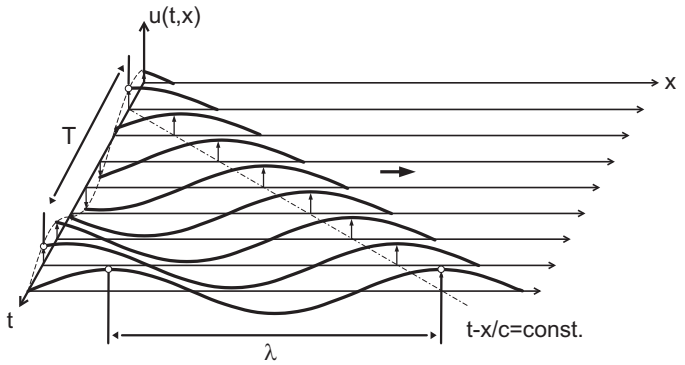


Abbildung 3.10: Raum-Zeit-Diagramm einer entstehenden Seilwelle.

Periodendauer T: Schwingungsdauer eines Oszillators

Wellenlänge λ: räumlicher Abstand zweier Oszillatoren mit gleicher Phase.

Kreisfrequenz ω: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Wellenzahl k: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Phasengeschwindigkeit c: $c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$

$\rightarrow$ harmonische Wellen

$$u(t,x) = u_0 \sin(\omega t - kx) \tag{3.126}$$

eine von vielen Lösungen der sogenannten Wellengleichung, die die Orts- und Zeitkoordinate in Verbindung setzt ist die 1-dim. Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3.127}$$

Allgemeine Lösung nach D'Alembert:

$$u(t,x) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right) \tag{3.128}$$

f, g: zwei beliebige zweimal differenzierbare Funktionen

Überlagerung zweier Wellen mit entgegengesetzten Phasengeschwindigkeiten.

3.8 Überlagerung von Wellen, Interferenz, stehende Wellen

Genau wie bei den Schwingungen gilt das Prinzip der ungestörten Überlagerung (Superposition):

$$u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x) \tag{3.129}$$

a) Gleiche Frequenz, gleiche Richtung

$$u_1 = u_0 \sin(\omega t - kx) \tag{3.130}$$
$$u_2 = u_0 \sin(\omega t - kx + \varphi_0) \tag{3.131}$$
$$u = u_0 \left(\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t - kx + \varphi_0)\right) \tag{3.132}$$
$$\Leftrightarrow u = 2u_0 \cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) \sin\left(\omega t - kx + \frac{\varphi_0}{2}\right) \tag{3.133}$$

$\rightarrow$ gleiche Frequenz, aber andere Amplitude und andere Phase.

$\varphi_0 = 0$: Amplitude doppelt so groß; **konstruktive Interferenz**
$\varphi_0 = \pi$: Amplitude = 0; **destruktive Interferenz**

b) Gleiche Frequenz, entgegengesetzte Richtung

$$u_1 = u_0 \sin(\omega t - kx) \tag{3.134}$$
$$u_2 = u_0 \sin(\omega t + kx + \varphi_0) \tag{3.135}$$
$$\Rightarrow u = 2u_0 \cos\left(kx + \frac{\varphi_0}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_0}{2}\right) \tag{3.136}$$

$\rightarrow$ **Stehende Wellen**

Schwingungsknoten: $u = 0$
Schwingungsbäuche: $u = u_{\max} = 2u_0$

Amplitude $2u_0 \cos\left(kx + \frac{\varphi_0}{2}\right)$ hängt periodisch vom Ort ab. Schwingungsbäuche und -knoten sind ortsfest im Abstand $\lambda/2$ voneinander. Stehende Wellen treten nach Reflexion am Ende des Ausbreitungsmediums auf, da sich hin- und rücklaufende Welle überlagern.

Achtung:

Reflexion am festen Ende: Phasensprung um $\Delta\varphi = \pi$
Reflexion am losen Ende: kein Phasensprung.

4 Thermodynamik

Theorie der Wärme kann auf zwei verschiedene Arten behandelt werden.

mikroskopisch:
Bewegung von Gasatomen oder -molekülen.
$\rightarrow$ Vielzahl von Teilchen ($\approx 10^{23}$)
$\rightarrow$ im Allgemeinen nicht vollständig beschreibbar
$\rightarrow$ **kinetische Gastheorie**; mechanische Sichtweise in Kombination mit Statistik

makroskopisch:
Phänomenologisch wird eine geringe Anzahl makroskopischer Variablen eingeführt, um das Gesamtsystem zu beschreiben.
$\rightarrow$ sogenannte Zustandsgrößen (direkt messbar)
$\rightarrow$ Druck p
$\rightarrow$ Volumen V
$\rightarrow$ Temperatur T

Diese Größen sind innerhalb eines Systems definiert.

System:
Räumlich abgegrenzter Bereich, der herausgelöst aus seiner Umgebung betrachtet werden soll.

Offene Systeme: durchlässig für Materie und Energie

Geschlossene Systeme: durchlässig für Energie; undurchlässig für Materie

Abgeschlossene Systeme: undurchlässig für Materie und Energie

Adiabatische Systeme: undurchlässig für Materie und Wärme; durchlässig für mechanische Arbeit

---

4.1 Temperatur

Die Temperatur ist ein Maß für den Wärmezustand eines Körpers.

- Resultat der kinetischen Energie, der sich bewegenden Atome bzw. Moleküle.
- Im thermodynamischen Gleichgewicht haben alle Bestandteile eines Systems dieselbe Temperatur.

Definition: Kelvin
1 Kelvin ist der 273,16te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes von Wasser. (Einheit der Temperaturdifferenz).
Tripelpunkt: Zustand, bei dem der feste, flüssige und gasförmige Aggregatzustand im Gleichgewicht sind.

Absoluter Nullpunkt:

$$T = 0\,\mathrm{K} \equiv T = -273,16^{\circ}\mathrm{C} \tag{4.1}$$
$$\vartheta(^{\circ}\mathrm{C}) = T(\mathrm{K}) - 273,16 \tag{4.2}$$

Temperaturmessung
Jede physikalische Größe, die sich mit der Temperatur ändert, kann zur Temperaturmessung verwendet werden; z. B. Volumen, Druck von Gasen, Volumen von Flüssigkeiten, elektrischer Widerstand von Festkörpern, Farbe von Metallen (bei hohen Temperaturen).

4.2 Thermische Ausdehnung

Festkörper:
Länge l_1 bei Temperatur ϑ_1
Länge l_2 bei Temperatur ϑ_2

Längenänderung: $\Delta l = l_2 - l_1$

$$\Rightarrow \frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta T \tag{4.3}$$

dabei ist α der lineare thermische Ausdehnungskoeffizient mit der Einheit: $[\alpha] = \mathrm{K}^{-1}$

$$\Rightarrow l_2 = l_1(1 + \alpha \Delta T) \tag{4.4}$$
$$\Leftrightarrow l_2 = l_1\left(1 + \alpha\left(\vartheta_2 - \vartheta_1\right)\right) \tag{4.5}$$

Mittlerer thermischer Ausdehnungskoeffizient α:

PVC	80×10^{-6} K^{-1}
Aluminium	23×10^{-6} K^{-1}
Glas	9×10^{-6} K^{-1}
Silizium	2×10^{-6} K^{-1}
Quarzglas	$0{,}5\times10^{-6}$ K^{-1}

Mit der Längenausdehnung ist eine Volumenänderung verknüpft.

$$V_2 = l_2^3 = l_1^3(1+\alpha\Delta T)^3 \tag{4.6}$$

$$\Leftrightarrow V_2 = V_1(1+3\alpha\Delta T+3\alpha^2\Delta T^2+\alpha^3\Delta T^3) \tag{4.7}$$

$$\text{linearisiert} \Rightarrow V_2 = V_1(1+3\alpha\Delta T) = V_1(1+\gamma\Delta T) \tag{4.8}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \gamma\Delta T \tag{4.9}$$

mit Raumausdehnungskoeffizient $\gamma = 3\alpha$

Flüssigkeiten

keine Eigengestalt $\Rightarrow$ nur Volumenausdehnungskoeffizient sinnvoll. γ viel größer als bei Festkörpern.

Ethanol	1.1×10^{-3} K^{-1}
Glycerin	0.5×10^{-6} K^{-1}
Wasser	0.21×10^{-3} K^{-1}
Quecksilber	0.18×10^{-3} K^{-1}

Gase

Volumen hängt sowohl vom Druck als auch von der Temperatur ab. Für **konstanten Druck p** analog zur Volumenausdehnung bei Festkörpern (Gesetz von Gay-Lussac):

$$V(\vartheta) = V_0(1+\gamma\vartheta) \tag{4.10}$$

bei $p \approx 0 \rightarrow \gamma = 0.003661\text{K}^{-1} = \frac{1}{273.16\text{K}}$ für alle Gase (ideale Gase).

$$\text{analoge Beschreibung:} \quad \frac{V_0}{T_0} = \frac{V}{T} = \text{const.} \tag{4.11}$$

für konstantes Volumen V:

$$p = p_0(1+\beta\vartheta) = p_0\left(1+\frac{\vartheta}{273.16\text{K}}\right) \tag{4.12}$$

β : Spannungskoeffizient

$$\text{analoge Beschreibung:} \quad \frac{p_0}{T_0} = \frac{p}{T} = \text{const.} \tag{4.13}$$

4.3 Zustandsgleichung idealer Gase

Gesetz von Boyle-Mariott:
$$pV = \text{const.} \tag{4.14}$$

Gesetz von Gay-Lussac:
$$\frac{p}{T} = \text{const.}, \qquad \frac{V}{T} = \text{const.} \tag{4.15}$$

$$\frac{pV}{T} = \text{const.} = \frac{p_n V_n}{T_n} \tag{4.16}$$

p_n : Normdruck = 101325 Pa
V_n : Normvolumen = $22.4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$
T_n : Normtemperatur = 273.16 K

mit $V_n = \frac{m}{\rho_n}$ und
m: Masse des Gases
ρ_n: Dichte bei Normbedingungen
folgt:

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_n V_n}{T_n} = mR_i \tag{4.17}$$

R_i: individuelle Gaskonstante (für jedes Gas verschieden).
bzw.

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_n V_n}{T_n} = nR \tag{4.18}$$

n: Stoffmenge
R: Allgemeine Gaskonstante (für jedes Gas gleich; $8.3145 \frac{\text{J}}{\text{molK}}$)

Zustandsgleichung idealer Gase (auf die Stoffmenge bezogen):

$$\Rightarrow pV = nRT \tag{4.19}$$

Teilchenzahl: $N = nN_A$
N_A: Avogadro-Konstante = $6.022 \cdot 10^{23}$ Teilchen.
Boltzmann-Konstante: $k = \frac{R}{N_A} = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$

Zustandsgleichung idealer Gase (auf die Teilchenzahl bezogen):

$$\Rightarrow pV = NkT \tag{4.20}$$

4.4 Kinetische Gastheorie

Bewegung der Gasmoleküle nach den Gesetzen der Mechanik
→ Herleitung thermodynamischer Eigenschaften

Vorausetzungen: ideales Gas

- große Anzahl gleichartiger Teilchen
- Eigenvolumen der Teilchen vernachlässigbar
- Wechselwirkung zwischen Teilchen, außer Stöße vernachlässigbar
- Stöße verlaufen instantan

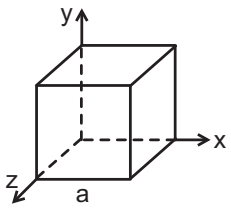


Abbildung 4.1: Würfel mit Kantenlänge a.

Teilchen in einem Würfel der Kantenlänge a vollführen Stöße mit den Wänden:
→ Impulsübertrag
→ Kraft
→ Druck
Teilchen stößt auf die Wand und wird vollkommen elastisch reflektiert.

Impulsübertrag (nur x-Komponente):

$$\Delta p_i = 2 m_M v_{xi} \tag{4.21}$$

Zeit zwischen zwei Stößen auf die gleiche Wand:

$$\Delta t = \frac{2a}{v_{xi}} \tag{4.22}$$

$$\tag{4.23}$$

Kraft:

$$F_i = \frac{\Delta p_i}{\Delta t} = \frac{2 m_M v_{xi}}{\frac{2a}{v_{xi}}} \tag{4.24}$$

$$\Leftrightarrow F_i = \frac{m_M v_{x_i}^2}{a} \tag{4.25}$$

Druck:

$$p_i = \frac{F_i}{A} = \frac{m_M v_{x_i}^2}{a^3} = \frac{m_M v_{x_i}^2}{V} \tag{4.26}$$

für N Teilchen:

$$p = \frac{m_M}{V} \sum_{i=1}^{N} v_{x_i}^2 \tag{4.27}$$

Große Anzahl von Teilchen $\rightarrow$ nur statistische Betrachtung möglich.

Mittlere quadratische Geschwindigkeit:

$$\bar{v}_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_{x_i}^2 \tag{4.28}$$

$$\Rightarrow P = \frac{m_M}{V} N \bar{v}_x^2 \tag{4.29}$$

Alle Raumrichtungen kommen gleichmäßig vor:

$$\bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2 = \frac{1}{3}\bar{v}^2 \tag{4.30}$$

Grundgleichung der kinetischen Gastheorie

$$\Rightarrow p = \frac{1}{3}\frac{N}{V} m_M \bar{v}^2 \tag{4.31}$$

Mittlere Geschwindigkeit der Gasteilchen:

$$v_m = \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3p}{\varrho}} \tag{4.32}$$

Verbindung mikroskopischer und makroskopischer Größen:

kinetische Gastheorie: $$pV = \frac{1}{3} N m_M \bar{v}^2 \tag{4.33}$$

ideale Gasgleichung: $$pV = NkT \tag{4.34}$$

Vergleich liefert:

$$\frac{1}{3} m_M \bar{v}^2 = kT \tag{4.35}$$

$$\Leftrightarrow v_m = \sqrt{\frac{3kT}{m_M}} \tag{4.36}$$

Thermische Energie (aus kinetischer Energie):

$$\overline{E_{\text{kin}}} = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{3}{2}kT \tag{4.37}$$

Die Temperatur T ist ein Maß für die mittlere kinetische Energie der Gasmoleküle.

allgemein: **Gleichverteilungssatz**

$$E_{\text{kin}} = \frac{f}{2}kT \tag{4.38}$$

mit f der Anzahl der Freiheitsgrade.
Die Wärmeenergie verteilt sich gleichmäßig auf alle Freiheitsgrade.

4.5 Wärmekapazität

Wärme ist Energie
$\rightarrow$ Wärmemenge Q entspricht einer bestimmten Menge an Energie.
$\rightarrow$ Wird einem Körper Wärme hinzugefügt, so steigt seine Temperatur.

$$Q = cm\Delta T \tag{4.39}$$

mit $c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT}$ der spezifischen Wärmekapazität, m der Masse und ΔT der Temperaturänderung.

Mit der Molmasse $M = m/n$ folgt für die molare Wärmekapazität:

$$\rightarrow c_m = cM = \frac{c\,m}{n} = \frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T} \tag{4.40}$$

4.6 Hauptsätze der Thermodynamik

4.6.1 Erster Hauptsatz: Energieerhaltungssatz

In einem abgeschlossenen System bleibt der gesamte Energievorrat, also die Summe aus Wärmeenergie, mechanischer Energie und anderer Energie stets konstant.

- **oder** -

Es existiert kein perpetuum mobile 1. Art. (Maschine die Arbeit verrichtet ohne Energie von außen aufzunehmen).

Innere Energie U: Kalorische Zustandsgröße, die den Energieinhalt als Funktion von p, V, T beschreibt.

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q + \mathrm{d}W \tag{4.41}$$

dQ: Wärme,
dW: Arbeit; positives Vorzeichen: zugeführte Wärme bzw. Arbeit.

Ausdehnungsarbeit (ideales Gas):

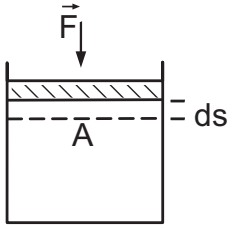


Abbildung 4.2: Kraft auf Fläche A, Ausdehnung um $\mathrm{d}s$.

$$W = -\int_{s_1}^{s_2} F\mathrm{d}s \tag{4.42}$$

$$= -\int_{s_1}^{s_2} pA\mathrm{d}s \tag{4.43}$$

$$= -\int_{s_1}^{s_2} p\mathrm{d}V \tag{4.44}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}U = \mathrm{d}Q - p\mathrm{d}V \quad \text{innere Energie} \tag{4.45}$$

Ersetzen von $\mathrm{d}Q$ durch Wärmekapazität:

$$c = \frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T} = \frac{1}{n}\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} + p\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}\right) \tag{4.46}$$

Spezifische Wärme bei konstantem Volumen:

$$\Rightarrow c_V = \frac{1}{n}\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}\right)_{V=\text{const.}} = \frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} \tag{4.47}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}U = nc_V\mathrm{d}T \tag{4.48}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}Q = nc_V\mathrm{d}T + p\mathrm{d}V \tag{4.49}$$

Zugeführte Wärme dient der Erhöhung der Temperatur oder der Volumenvergrößerung.

$$c_p = \frac{1}{n}\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}\right)_{p=\text{const.}} = \frac{1}{n}\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} + p\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}\right)_{p=\text{const.}} \tag{4.50}$$

Mit $pV = nRT \rightarrow p\mathrm{d}V = nR\mathrm{d}T$ folgt für die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck:

$$c_p = \frac{1}{n}\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} + nR\right) = c_V + R \tag{4.51}$$

4.6.2 Spezielle Zustandsänderungen idealer Gase:

isotherm: T = const.

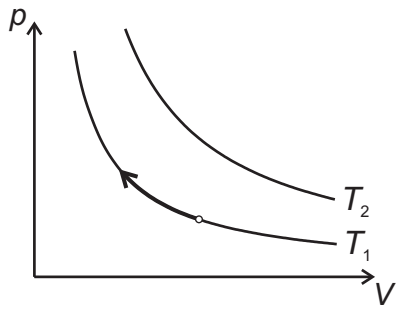


Abbildung 4.3: Isotherme Zustandsänderung.

Arbeit:

$$pV = nRT = \text{const.} \tag{4.52}$$

$$W_{12} = -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\mathrm{d}V \tag{4.53}$$

$$\Leftrightarrow W_{12} = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V}\mathrm{d}V = nRT\ln\frac{V_1}{V_2} \tag{4.54}$$

Wärme:
Keine Änderung der inneren Energie.

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q + \mathrm{d}W = 0 \tag{4.55}$$
$$\Rightarrow Q_{12} = -W_{12} \tag{4.56}$$

isobar: p = const.

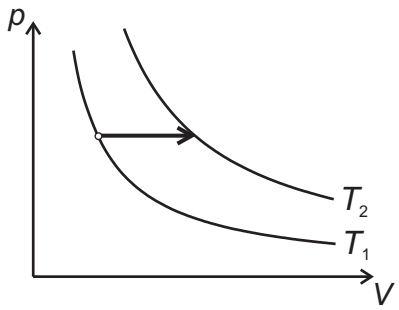


Abbildung 4.4: Isobare Zustandsänderung.

$$\frac{V}{T} = \frac{nR}{p} = \text{const.} \tag{4.57}$$

Arbeit:	$W_{12} = p\,(V_1 - V_2)$	(4.58)
Wärme:	$Q_{12} = nC_{mp}\,(T_2 - T_1)$	(4.59)

adiabatisch/isentrop: Q = const.

Vorgang so schnell, daß kein Wärmeaustausch stattfindet.

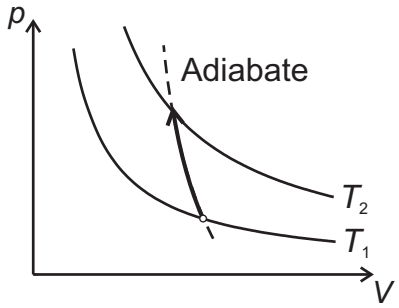


Abbildung 4.5: Adiabatische Zustandsänderung.

$$\mathrm{d}U = -p\mathrm{d}V = \mathrm{d}W \tag{4.60}$$

$$\mathrm{d}U = nC_{mV}\mathrm{d}T \tag{4.61}$$

$$\text{mit} \quad pV = nRT \Rightarrow dT = \frac{(p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p)}{nR} \tag{4.62}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}U = \frac{C_{mv}}{R}(p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p) = -p\mathrm{d}V \tag{4.63}$$

$$\text{mit} \quad R = c_p - c_V \quad \text{folgt}$$

$$\Rightarrow \frac{c_p}{c_V}\frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0 \tag{4.64}$$

Poissonsche Adiabatengleichung:

$$pV^{\kappa} = \text{const.} \tag{4.65}$$

$$TV^{\kappa-1} = \text{const.} \tag{4.66}$$

$$Tp^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = \text{const.} \tag{4.67}$$

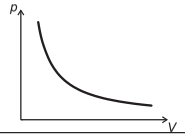
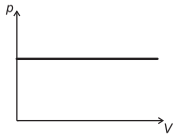
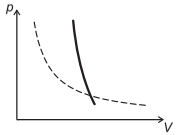
$$\text{mit} \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad \text{Adiabatenexponent} \tag{4.68}$$

Arbeit:

$$W_{12} = \frac{p_1V_1}{\kappa - 1}\left(\frac{V_1}{V_2}^{\kappa-1} - 1\right) \tag{4.69}$$

$$\Leftrightarrow W_{12} = nC_{mV}(T_2 - T_1) \tag{4.70}$$

Tabelle 4.1: Übersicht der Zustandsänderungen idealer Gase.

Zustands-änderung	Bedingung	$p-V-$ Diagramm	thermische Zustandsgrößen	erster Hauptsatz	Wärme	Volumen-änderungsarbeit
isotherm	$\mathrm{d}T = 0$ $V = \text{const.}$		pV=const. Boyle-Mariotte	$\mathrm{d}Q + \mathrm{d}W = 0$ $Q_{12} + W_{12} = 0$	$\mathrm{d}Q = -\mathrm{d}W$ $Q_{12} = nRT\ln(V_2/V_1)$	$\mathrm{d}W = -p\mathrm{d}V$ $W_{12} = nRT\ln(V_1/V_2)$
isochor	$\mathrm{d}V = 0$ $V = \text{const.}$		$\frac{p}{T} = \text{const.}$ Charles	$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q$ $U_2 - U_1 = Q_{12}$	$\mathrm{d}Q = nC_{mV}\mathrm{d}T$ $Q_{12} = nC_{mV}(T_2 - T_1)$ $= mc_p(T_2 - T_1)$	$\mathrm{d}W = 0$ $W_{12} = 0$
isobar	$\mathrm{d}p = 0$ $p = \text{const.}$		$\frac{V}{T} = \text{const.}$ Gay-Lussac	$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q + \mathrm{d}W$ $U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12}$	$\mathrm{d}Q = nC_{mp}\mathrm{d}T$ $Q_{12} = nC_{mp}(T_2 - T_1)$ $= mc_p(T_2 - T_1)$	$\mathrm{d}W = p\mathrm{d}V$ $W_{12} = p(V_1 - V_2)$
isentrop	$\mathrm{d}S = 0$ $\mathrm{d}Q = 0$ $S = \text{const.}$		$pV^\kappa = \text{const.}$ $TV^{\kappa-1} = \text{const.}$ $p^{1-\kappa}T^\kappa = \text{const.}$	$\mathrm{d}U = \mathrm{d}W$ $U_2 - U_1 = W_{12}$	$\mathrm{d}Q = 0$ $Q_{12} = 0$	$\mathrm{d}W = nC_{mV}\mathrm{d}T$ $W_{12} = nC_{mV}(T_2 - T_1)$ $= \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{\kappa - 1}$

4.6.3 Kreisprozesse

Anfangs- und Endzustand des Systems stimmen überein. Die je Umlauf nach außen abgegebene Nutzarbeit entspricht dem Flächeninhalt der vom Prozeß eingeschlossenen Figur im p-V-Diagramm.

$$W = \oint \mathrm{d}W = -\oint p\mathrm{d}V \tag{4.71}$$

Carnotscher Kreisprozeß (rechtsläufig)

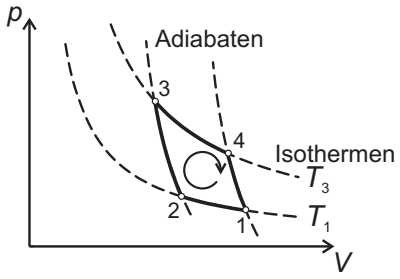


Abbildung 4.6: Carnotscher Kreisprozeß (rechtsläufig).

1 → 2: isotherme Kompression von V_1 nach V_2 bei T_1.

$$W_{12} = nRT_1 \ln \frac{V_1}{V_2} \text{ zugeführte Arbeit} \tag{4.72}$$

$$Q_{12} = -nRT_1 \ln \frac{V_1}{V_2} \text{ abgegebene Wärme} \tag{4.73}$$

2 → 3: adiabatische Kompression von V_2 nach V_3; Temperatur steigt von T_1 nach T_3.

$$W_{23} = nC_{mV}(T_3 - T_1) \text{ zugeführte Arbeit} \tag{4.74}$$

$$Q_{23} = 0 \quad \text{adiabatisch} \tag{4.75}$$

3 → 4: isotherme Expansion von V_3 nach V_4 bei T_3

$$W_{34} = -nRT_3 \ln \frac{V_4}{V_3} \text{ abgegebene Arbeit} \tag{4.76}$$

$$Q_{34} = nRT_3 \ln \frac{V_4}{V_3} \text{ zugeführte Wärme} \tag{4.77}$$

4 → 1: adiabatische Expansion von V_4 nach V_1; Temperatur fällt von T_3 nach T_1

$$W_{41} = -nC_{mV}(T_3 - T_1) \quad \text{abgegebene Arbeit} \tag{4.78}$$

$$Q_{41} = 0 \quad \text{adiabatisch} \tag{4.79}$$

$$\Rightarrow W = \oint \mathrm{d}W = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} \tag{4.80}$$

$$\Rightarrow W \overset{W_{23}=-W_{41}}{\overset{\downarrow}{=}} W_{12} + W_{34} = -nR\left(T_3 \ln\frac{V_4}{V_3} - T_1 \ln\frac{V_1}{V_2}\right) \tag{4.81}$$

mit den Adiabatengleichungen:

$$T_3 V_3^{\kappa-1} = T_1 V_2^{\kappa-1} \tag{4.82}$$

$$T_3 V_4^{\kappa-1} = T_1 V_1^{\kappa-1} \tag{4.83}$$

folgt für die Arbeit insgesamt:

$$W = -nR \ln\frac{V_4}{V_3}(T_3 - T_1) \tag{4.84}$$

Da W negativ ist wird Arbeit nach außen abgegeben.

Thermischer Wirkungsgrad η:

Quotient aus nach außen abgegebener Arbeit und zugeführter Wärme.

$$\eta = \frac{|W|}{Q_{34}} \tag{4.85}$$

mit

$$|W| = Q_{\text{zugeführt}} - |Q_{\text{abgeführt}}| \tag{4.86}$$

$$\Leftrightarrow Q_{12} + Q_{34} + W = 0 \tag{4.87}$$

folgt für den Wirkungsgrad des Carnotschen Kreisprozesses (rechtsläufig):

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_3} \tag{4.88}$$

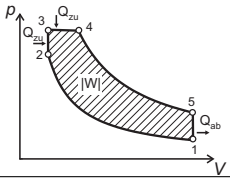
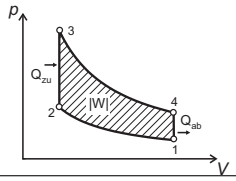
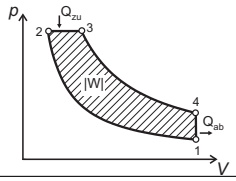
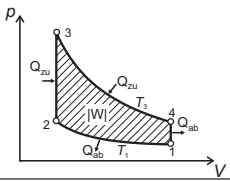
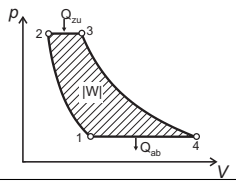
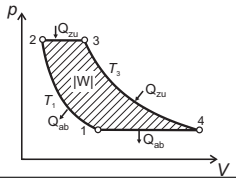
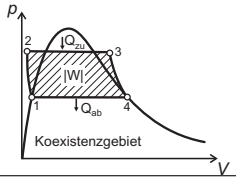
Der Wirkungsgrad hängt nur von den Temperaturen der Wärmebäder ab.

Linksläufiger Carnotscher Kreisprozess:
Arbeit wird in Wärme umgesetzt; Wärme wird von kaltem Reservoir in warmes Reervoir überführt.
$\Rightarrow$ Wärmepumpe, Kältemaschine

Leistungszahl ϵ:

$$\epsilon = \frac{Q_{12}}{W} = \frac{T_3}{T_1 - T_3} \tag{4.89}$$

Tabelle 4.2: Technische Kreisprozesse.

		Prozeß	p–V-Diagramm	Einzelprozesse	thermischer Wirkungsgrad
Kolbenmaschinen	Verbrennungsmotoren	Seiliger-Prozeß		2 Isentropen, 2 Isochoren, 1 Isobare	$\eta_{\mathrm{th}} = 1 - \frac{T_5 - T_1}{T_3 - T_2 + \kappa(T_4 - T_3)}$
		Otto-Prozeß		2 Isentropen, 2 Isochoren	$\eta_{\mathrm{th}} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}}$
		Diesel-Prozeß		2 Isentropen, 1 Isochore, 1 Isobare	$\eta_{\mathrm{th}} = 1 - \frac{\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\kappa} - 1}{\kappa\left(\frac{V_3}{V_2} - 1\right)\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}}$
	Heißluftmotor	Stirling-Prozeß		2 Isothermen, 2 Isochoren	$\eta_{\mathrm{th}} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = \eta_{\mathrm{th,C}}$
Strömungsmaschinen	offene Gasturbine	Joule-Prozeß		2 Isentropen, 2 Isobaren	$\eta_{\mathrm{th}} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ $= 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$
	geschlossene Gasturbine	Ericsson-Prozeß		2 Isothermen, 2 Isobaren	$\eta_{\mathrm{th}} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = \eta_{\mathrm{th,C}}$
	Dampfkraftanlagen	Clausius-Rankine-Prozeß		2 Isentropen, 2 Isobaren	$\eta_{\mathrm{th}} = \frac{h_3 - h_4}{h_3 - h_1} \approx 1 - \frac{h_4}{h_3}$

4.6.4 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Reversibel/irreversibel:
Ein Vorgang ist irreversibel, wenn er nicht in umgekehrte Richtung ohne Arbeitsverrichtung ablaufen kann. Technische Prozesse sind irreversibel.

$\Rightarrow$ Es gibt keine periodisch arbeitenden Maschinen, die Wärme vollständig in mechanische Arbeit umwandeln.

Der Wirkungsgrad beliebiger Kreisprozesse ist kleiner oder gleich (irreversible bzw. reversible Kreisprozesse) dem Wirkungsgrad des Carnotschen Kreisprozesses.

$$\eta_{\text{irr}} < \eta_{\text{rev}} = \eta_{\text{Carnot}} = \frac{T_1 - T_3}{T_1} \tag{4.90}$$

allgemein gilt:

$$\eta = 1 + \frac{Q_{12}}{Q_{34}} \leq 1 - \frac{T_3}{T_1} \tag{4.91}$$

$$\frac{Q_{12}}{T_1} + \frac{Q_{34}}{T_3} \leq 0 \tag{4.92}$$

Kreisprozeß
Reversibel:

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0 \tag{4.93}$$

$$\Rightarrow \oint \underbrace{\frac{\mathrm{d}Q_{\text{rev}}}{T}}_{\mathrm{d}S} = 0 \tag{4.94}$$

Irreversibel:

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} < 0 \tag{4.95}$$

$$\tag{4.96}$$

Entropie S:

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q_{\text{rev}}}{T} \tag{4.97}$$

Zustandsgröße, die den Grad der Irreversibilität eines Vorgangs angibt. Sie ist ein Maß für die Unordnung eines Systems. Vorgänge finden nur von selbst statt, bei denen die Entropie zunimmt.

4.6.5 Dritter Hauptsatz der Thermodynamik

Absolutwert der Entropie alleine aus dem 1. und 2. Hauptsatz nicht bestimmbar.

Nernstsches Wärmetheorem:

S hängt bei $T \to 0\,\mathrm{K}$ nicht von V, p und Aggregatzustand ab.
$\Rightarrow$ **3. Hauptsatz:**

$$S \to 0 \text{ für } T \to 0 \tag{4.98}$$

$T = 0$ ist aber nicht erreichbar!

4.7 Reale Gase

Im Gegensatz zur idealen Gasgleichung wird das Eigenvolumen der Gasteilchen und die Wechselwirkung zwischen ihnen nicht mehr vernachlässigt.
Van der Waalssche Zustandsgleichung für 1 mol eines Gases:

$$\Rightarrow \left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \tag{4.99}$$

$\frac{a}{V^2}$ berücksichtigt die Wechselwirkungen
b berücksichtigt das Eigenvolumen.

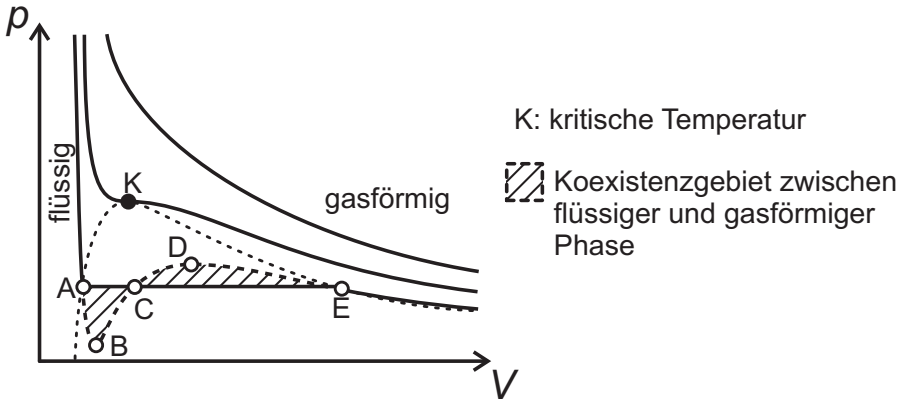


Abbildung 4.7: p–V-Diagramm eines realen Gases gemäß der van-der-Waals Zustandsgleichung für 3 verschiedene Temperaturen.

Gasverflüssigung:

Bei fallendem Volumen verläuft der Druck entlang der Punkte ECA. Am Punkt E beginnt die Verlüssigung; bei A ist sie abgeschlossen. Beim realen Gas ist die innere Energie U volumen- und druckabhängig.
$\Rightarrow$ adiabatische Expansion führt zur Temperaturabnahme (Joule-Thomson-Effekt) $\Rightarrow$ Kältespray.

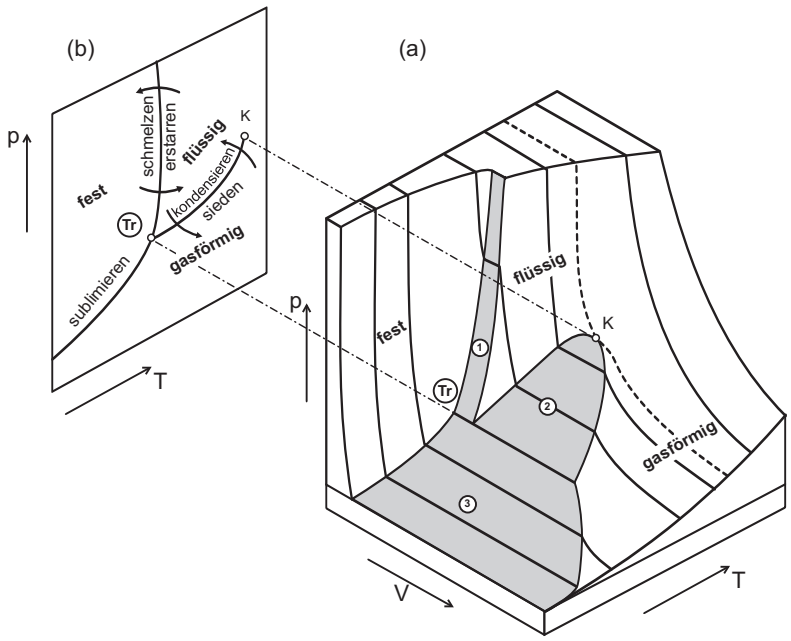


Abbildung 4.8: Zustandsdiagramm. (a) Dreidimensionales p,V,T-Diagramm (schematisch), (b) zweidimensionales p–T-Diagramm (schematisch). (Tr): Tripelpunkt, ①, ②, ③: Gleichgewichtsgebiete.

4.7.1 Joule-Thomson-Effekt

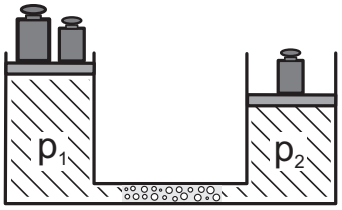


Abbildung 4.9: Joule-Thomson-Effekt. Das in Raum 1 eingeschlossene Gas wird mit konstantem Druck p_1 durch eine poröse Wand (vermeidet Wirbelbildung) in den Raum 2 (Druck $p_2 < p_1$) gepreßt.

Gas wird von 1 nach 2 gedrückt ($p_2 < p_1$)

$\Rightarrow$ es entsteht ein Temperaturunterschied zwischen 1 und 2
$\Rightarrow$ bei CO_2 und Luft sinkt die Temperatur bei H_2 steigt die Temperatur

Wenn Volumen V_1 verschwunden ist, ist p_1V_1 als Arbeit dem Gas zugeführt worden; auf der anderen Seite muss die Arbeit p_2V_2 geleistet werden. Die Differenz entspricht der inneren Energie.

$$p_1V_1 - p_2V_2 = U_2 - U_1 \tag{4.100}$$
$$\Leftrightarrow \quad U_1 + p_1V_1 = U_2 + p_2V_2 \tag{4.101}$$

Die Enthalpie $H = U + pV$ ist gleich geblieben. Die innere Energie besteht aus:
kinetischer Energie: $\frac{1}{2}fRT$ und
potentieller Energie: $-\frac{a}{V}$

$$H = U + pV \tag{4.102}$$
$$\Leftrightarrow H = \frac{1}{2}fRT - \frac{a}{V} + \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right)V \tag{4.103}$$
$$\Leftrightarrow H = RT\left(\frac{f}{2} + \frac{V}{V-b}\right) - \frac{2a}{V} \tag{4.104}$$

Wenn H = konst.; dann:

$$\mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial V}\mathrm{d}V + \frac{\partial H}{\partial T}\mathrm{d}T = 0 \tag{4.105}$$

auflösen nach $\mathrm{d}T$:

$$\mathrm{d}T = -\mathrm{d}V\frac{\frac{\partial H}{\partial V}}{\frac{\partial H}{\partial T}} \tag{4.106}$$

die partiellen Ableitungen ergeben:

$$\frac{\partial H}{\partial V} = \frac{RT}{V-b} - \frac{RTV}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^2} \tag{4.107}$$
$$= -R\left(\frac{bT}{(V-b)^2} - \frac{2a}{RV^2}\right) \tag{4.108}$$
$$\frac{\partial H}{\partial T} = R\left(\frac{f}{2} + \frac{V}{V-b}\right) \tag{4.109}$$
$$\Rightarrow dT = dV\frac{\frac{bT}{(V-b)^2} - \frac{2a}{RV^2}}{\frac{f}{2} + \frac{V}{V-b}} \tag{4.110}$$

und mit $(V-b)^2 \approx V^2$ und $\frac{V}{V-b} \approx 1$ folgt:

$$\mathrm{d}T = \frac{RTb - 2a}{\left(\frac{f}{2}+1\right)RV^2}\mathrm{d}V \tag{4.111}$$

Der Zähler wechselt bei der Inversionstemperatur $T_i = \frac{2a}{Rb}$ sein Vorzeichen. Oberhalb von T_i erwärmt sich ein Gas bei Entspannung; unterhalb von T_i kühlt sich ein Gas bei Entspannung ab. Für CO_2 und Luft ist T_i weit oberhalb von Raumtemperatur; für H_2 ist

$T_i \approx 200$ K. Ein hoher Wert von a bewirkt, dass die Temperatur bei Entspannung stark absinkt. Moleküle entfernen sich voneinander und müssen Arbeit gegen intermolekulare Anziehungskräfte leisten
$\Rightarrow$ Temperatur sinkt.
$\Rightarrow$ Linde-Verfahren zur Verflüssigung von Luft

4.8 Wärmeübertragung

Kommen Systeme mit unterschiedlichen Temperaturen zusammen so wird Wärme von den Systemen höherer Temperatur abgegeben.
$\rightarrow$ thermisches Gleichgewicht (alle Systeme befinden sich auf der gleichen Temperatur)

Drei verschiedene Übertragungsmechanismen:

Wärmeleitung in Festkörpern Phononen (Gitterschwingungen) bewegliche Ladungsträger

Konvektion Wärmetransport durch Materialtransport in Flüssigkeiten

Wärmestrahlung Wärmetransport durch elektromagnetische Strahlung (Photonentransport)

4.8.1 Wärmeleitung

Wärme strömt immer entlang eines Temperaturgefälles und zwar umso stärker, je steiler dieses Gefälle ist:

$$\vec{j} = -\lambda \nabla T \tag{4.112}$$

$\vec{j}$: Wärmestromdichte
λ : Materialkonstante
∇T : Temperaturgradient

Wärmestrom:

$$\vec{P} = \int \vec{j} \mathrm{d}\vec{A} \tag{4.113}$$

Tabelle 4.3: Wärmeleitungskoeffizient λ verschiedener Materialien.

Material	λ [W/Km]
Silber	420
Kupfer	390
Aluminium	230
Blei	36
Quarzglas	1,4
Luft	0,024

4.8.2 Konvektion

Strömungsvorgänge werden durch lokale Temperatur- und damit Dichteunterschiede ausgelöst.

1. Fickses Gesetz

$$\vec{j_n} = -D\nabla n \tag{4.114}$$

$\vec{j_n}$: Teilchenstromdichte
D : Diffusionskoeffizient
n : Teilchenzahldichte

Wenn aus einem Volumen mehr Teilchen ausströmen als hineinfließen, nimmt die Teilchenzahldichte n dort ab.

$$\dot{n} = -\nabla \vec{j_n} \tag{4.115}$$

2. Fickses Gesetz

$$\dot{n} = D\nabla^2 n = D\Delta n \tag{4.116}$$