Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

1 Motivation 3

2 Leitfaden der Arbeit 6

2 Einführung in die Vielfrequenztechnik **10**

1 Die Greenschen Funktionen in der Vielfrequenztechnik 12

2 Die grundlegenden Identitäten der Vielfrequenztechnik 17

3 Die Vielfrequenztechnik in zwei Dimensionen **21**

1 Mittelung über das Zufallspotential und Übergang zur Q-Feld-Formulierung 23

2 Bestimmung des Sattelpunktes und Herleitung des Diffusons 29

3 Probleme der Vielfrequenztechnik 36

4 Die g-Feld-Technik im nulldimensionalen Fall **42**

1 Herleitung der g-Feld-Technik im nulldimensionalen Fall 43

2 Anwendung der g-Feld-Technik im nulldimensionalen Fall 49

2.1 Beweis der Eins-Eigenschaft in der g-Feld-Technik 50

2.2 Berechnung der Zustandsdichte 53

2.3 Berechnung der Zweiteilchen-Greenfunktion 55

3 Beweis der Äquivalenz von Vielfrequenztechnik und Supersymmetrietechnik 56

5 Die g-Feld-Technik in zwei Dimensionen **58**

1 Herleitung der g-Feld-Technik in 2D 59

2 Beweis der Eins-Eigenschaft bis u^2 66
3 Beweis der Eins-Eigenschaft in allen Ordnungen in u für den rein retardierten Fall 69
4 Diffusionsnäherung bis u^2 75
5 Diffusionsnäherung in allen Ordnungen in u 81
5.1 Zusammenhängende Diagramme 82
5.2 Kombinatorik 87

6 Zusammenfassung und Ausblick 93

A Die Hubbard-Stratonovich-Transformation in der Vielfrequenztechnik 96
1 Symmetriebeziehungen 96
2 Transformation des Diffusionskanals 98
3 Transformation des Cooperkanals 104
4 Zusammenfassung von Diffusions- und Cooperkanal 107

B Eine einfache Berechnung der Greenschen Funktion im nulldimensionalen Fall 110

1. Einleitung

1. Motivation

Im Jahr 1958 bewies P.W.Anderson das *"nontransport" theorem* [1], welches besagt, daß im Fall hinreichend starker Unordnung Elektronen nicht mehr frei durch einen Festkörper diffundieren können, sondern in einem endlichen Gebiet lokalisiert bleiben. Seit dieser Zeit hat sich das Verständnis des grundlegenden physikalischen Mechanismus der Lokalisierung vertieft. Dieser besteht darin, daß die quantenmechanisch berechnete Rückkehrwahrscheinlichkeit eines in einem ungeordneten System diffundierenden Teilchens größer ist als die, die sich aus einer rein klassischen Betrachtung ergäbe. Ursache hierfür ist die konstruktive Interferenz derjenigen Amplitude, die ein quantenmechanisches Teilchen beim Durchlaufen eines geschlossenen Weges in *einer* Richtung aufsammelt, mit derjenigen, die es auf dem *entgegengesetzten* Weg erhält. Dieser zusätzliche Beitrag (der nur bei Zeitumkehr-Invarianz auftritt) "verlangsamt" somit die freie Diffusion und kann, je nach Dimension des Systems und Stärke der Unordnung, zum völligen Zusammenbruch jeder ausgedehnten Bewegung und somit zur Lokalisierung führen (vorhandene Magnetfelder und die Berücksichtigung von Spins erfordern weitergehende Betrachtungen).

Zur detaillierten Untersetzung dieses qualitativen Schemas wurde in den vergangenen Jahrzehnten eine Fülle von Methoden angewandt, aus anderen Gebieten übernommen oder neu entwickelt. Einen wichtigen Meilenstein dieser Entwicklung markierte die Anwendung der scaling-Theorie, die 1979 in einer Arbeit von Abrahams, Anderson, Licciardello und Ramakrishnan [2] einen gewissen Höhepunkt erreichte.

Seine feldtheoretische Entsprechung fand das oben skizzierte Bild zunächst in einer Diagrammtechnik, in der Diffusonen und Cooperonen, also Leiterdiagramme und maximal gekreuzte Diagramme eine dominierende Rolle spielen [3]. Diese Methodik wurde Anfang der 80er Jahre bis zur Aufstellung einer Selbstkonsistenzgleichung [4], [5] ausgebaut, aus der unmittelbar auf das Verschwinden der Gleichstromleitfähigkeit für D$\leq$ 2 geschlossen werden kann. Für D>2 erhält man hingegen eine Grenze der Unordnungstärke, an der metallisches in isolierendes Verhalten umschlägt.

In diesselbe Zeit fiel auch das verstärkte Bemühen um einen weniger "kunstgewerblichen" Zugang zum Lokalisierungsproblem. Dieser gelang schließlich, nachdem Symmetrieüberlegungen es möglich gemacht hatten, die vollständige Funktionalintegraldarstellung des Problems auf ein nichtlineares σ-Modells [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12] zu reduzieren. Einerseits war damit der Weg frei für eine systematische Behandlung des komplizierten Wechselspiels von Diffusonen und Cooperonen. Andererseits erwies sich dieses nichtlineare σ-Modell — zumindest in niedrigen Loopordnungen — auch als renormierbar. Die Lösung der entsprechenden Renormierungsgruppengleichung erbrachte die erwarteten Ergebnisse: in D=2 wird die Diffusionskonstante auf Null renormiert, in D=3 gibt es einen Metall-Isolator-Übergang.

Seine Eignung für die Behandlung ungeordneter Systeme konnte dieser Zugang insbesondere anhand der Beschreibung des integralen Quantenhalleffektes nachweisen. Levine, Libby und Pruisken gelang es ab 1984 [14], [15], [16], einen topologischen Zusatzterm zur Wirkung des gewöhnlichen nichtlinearen σ-Modells abzuleiten, mit dessen Hilfe eine natürliche Erklärung der genauen Leifähigkeitsquantisierung gegeben werden konnte. Gerade das Auftreten dieses topologischen Terms verweist auf den besonderen Vorteil einer Funktionalintegraldarstellung, in der die Mittelung über das zufällige Potential vor jeder störungstheoretischen Behandlung durchgeführt wird.

Bevor die Leistungsfähigkeit dieser Funktionalintegraldarstellungen fruchtbar gemacht werden konnte, mußte jedoch das Problem der Unordnungsmittelung überwunden werden. Der naive Versuch, eine physikalische Größe zu mitteln, scheitert zunächst nämlich an der Abhängigkeit des Normierungsnenners von der jeweiligen Potentialkonfiguration. Es mußte also eine solche Formulierung gefunden werden, in der dieser Nenner unabhängig vom konkreten Potential wird. Eine häufig (auch in den oben zitierten Arbeiten [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12]) benutzte Methode, die genau dies gewährleistet, ist die Verwendung des Replicatricks [13]. Dabei werden die verwendeten Felder N-mal vervielfacht (repliziert), und nach Anwendung des Wick-Theorems auf die jeweils berücksichtigten Glieder der Störungsreihe wird der Grenzwert $N \rightarrow 0$ gebildet. Auf diese Weise verschwinden die Diagramme, in denen Vakuumschleifen auftreten. Während diese Methode einerseits eine relativ übersichtliche Handhabung gestattet und sich auch auf wechselwirkende Systeme übertragen läßt, krankt sie andererseits an einer unzureichenden mathematischen Fundierung und kann bei nichtstörungstheoretischen Rechnungen zu falschen Ergebnissen führen [17].

Eine weitere Möglichkeit, das Nennerproblem zu vermeiden, besteht in der Anwendung der Supersymmetrietechnik [18], [19], [20]. Diese Methode beruht auf der Einsicht, daß bei der Behandlung nichtwechselwirkender Elektronen (und auf solche ist diese Technik denn auch beschränkt) deren Statistik gar keine Rolle spielt – es also gleichgültig ist, ob diese durch Bose- oder Graßmannfelder beschrieben werden. Die Supersymmetrie drückt genau diese Invarianz gegenüber Änderungen der zugrunde gelegten Statistik aus. Technisch äußert sich dies darin, daß der Normierungsnenner ein Gaußsches Integral über Graßmannfelder enthält, welches eine Determinante liefert, und ein Gaußsches Integral über Bosefelder, welches genau das Inverse derselben Determinante ergibt. Die Supersymmetriemethode ist mathematisch exakt; sie läßt sich aber nicht auf wechselwirkende Systeme verallgemeinern, da diese selbstverständlich nach Berücksichtigung des fermionischen Charakters der Elektronen verlangen.

Im Schatten dieser beiden etablierten Mittelungstechniken hat es immer wieder Bestrebungen gegeben, die Tatsache, daß der Normierungsnenner des Funktionalintegrals gleich Eins ist, auf natürlicherem Wege zu begründen [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28]. Bei allen Unterschieden ist es ein gemeinsames Merkmal dieser Arbeiten, die Beschränkung auf zwei benachbarte Energieschalen aufzugeben und alle Energien bzw. Zeiten zu berücksichtigen. In der Arbeit von Weller und Souleiman [28], die Anregungen von Aronov und Joselevich [21] aufgriff und präzisierte, wurde für T=0 eine Feldtheorie auf dem Zeitgitter konstruiert, mit deren Hilfe die Greenschen Funktionen auf dem Zeitgitter bestimmt werden können. Es zeigte sich, daß der Normierungsnenner dieser Feldtheorie gleich Eins ist. Die nun naheliegende Frage, ob es möglich wäre, diese Methode zur Behandlung ungeordneter System einzusetzen, diente als Motivation der vorliegenden Arbeit.

2. Leitfaden der Arbeit

Das zweite Kapitel ist der Einführung in die *Vielfrequenztechnik*, wie die Modifikation der Theorie von Aronov und Joselevich [21] durch Weller und Souleiman [28] im weiteren genannt werden soll, gewidmet.

Dabei erfährt im ersten Abschnitt die Funktionalintegraldarstellung der Greenschen Funktionen (Formeln 1.4–1.7) in (1.10)–(1.15) eine konkrete Interpretation als Grenzwert einer Formulierung auf dem Zeitgitter. Dabei werden, im Gegensatz etwa zu [29], periodische Randbedingungen in der Zeit gewählt. Infolge der damit verbundenen Invarianz gegenüber Zeittranslationen ist in dieser Version die Energie erhalten. Dies äußert sich darin, daß die Wirkung diagonal in der Energiedarstellung wird (1.25)–(1.26). In zweiten Abschnitt kann dann gezeigt werden, daß der Normierungsnenner dieser Theorie gleich Eins ist (2.3)–(2.5) und unverbundene Diagramme vermöge gewisser Identitäten verschwinden. Diese Identitäten (2.2) besagen, daß Frequenzsummen über beliebige Produkte retardierter Greenscher Funktionen Null ergeben[1]. Die Frequenzsummen übernehmen in der Vielfrequenztechnik somit die gleiche Rolle, wie sie die Grenzwertbildung $N \to 0$ in der Replicatechnik bzw. das gegenseitige Wegheben fermionischer und bosonischer Beiträge in der Supersymmetriemethode spielt.

Kapitel 3 macht die Unterschiede und Probleme der Vielfrequenztechnik gegenüber der Replicatechnik deutlich. Zunächst werden in enger Anlehnung an Rechnungen mit der Replicamethode [8] die Potentialmittelung (1.1)–(1.6), die

[1] Dies gilt selbstverständlich auch für die avancierten Funktionen.

Hubbard-Stratonovich-Transformation (Anhang A), die Sattelpunktsbestimmung (2.10) und die Diffusionsnäherung (2.27) durchgeführt. Auch kann für die anschließende Störungsentwicklung vollständige Parallelität zu derjenigen der Replicamethode gezeigt werden. Damit sind aber bereits die Analogien erschöpft. Versucht man nämlich, wie in der Replicatechnik eine Unterteilung in harte und weiche Moden vorzunehmen und unter Vernachlässigung der ersteren ein nichtlineares $\sigma-$Modell abzuleiten (3.7)-(3.9), so stellt sich heraus, daß diese Trennung in der Vielfrequenztechnik nicht in der notwendigen Eindeutigkeit möglich ist. Ursache hierfür ist letztlich die Verschiedenartigkeit der Symmetrien in beiden Formulierungen. Während in der Replicatechnik eine ursprüngliche U(2N)-Symmetrie (N ist die Zahl der Replicas) spontan auf U(N)$\times$U(N) gebrochen wird und die weichen Moden als Goldstonebosonen in Erscheinung treten, wird in der Vielfrequenztechnik die U(4N)-Symmetrie des Wechselwirkungsterms (hier meint 2N die gegen ∞ strebende Anzahl von Energieindizes) im kinetischen Term *explizit* gebrochen, da hier alle Frequenzen auftauchen. Zwar lassen sich noch immer Moden mit geringen Energieunterschieden als weiche Moden interpretieren. Für eine strikte Abtrennung harter Moden fehlt aber jede Berechtigung (dies kommt schon bei Kree [22] deutlich zum Ausdruck). Auch die Arbeit von Horbach und Schön [26], in der eine solche Abtrennung einfach analog zum Replicatrick vorgenommen wird, kann aus diesem Grunde nicht überzeugen.

Ausgehend von dem Befund, daß die Vielfrequenztechnik mit dem Konzept des nichtlinearen $\sigma-$Modells *auf diesem direktem Weg* nicht in Übereinklang zu bringen ist, wird im vierten und fünften Kapitel eine modifizierte Form der Vielfrequenztechnik ausgearbeitet und getestet. In dieser wird die Leistungsfähigkeit der Vielfrequenztechnik, welche im Prinzip die Berechnung von Korrelationsfunktionen von Feldern zu beliebigen Frequenzen gestatten würde, auf diejenige der Replica- oder Supersymmetriemethode reduziert. Dabei wird das Interesse auf Korrelationsfunktionen von Feldern zu einer (oder zwei) Frequenz(en) beschränkt. Die Bestandteile des Wechselwirkungsterms, in denen Felder zu den übrigen Frequenzen auftreten, werden *summarisch* durch ein *einziges* neu eingeführtes Feld g ersetzt. Letztendlich entsteht eine Version, in der nur die physikalisch relevanten

Felder enthalten sind und in der das Wegheben der Vakuumschleifen von gewissen funktionalen Differentiationen nach den g-Quellen geleistet wird.

Zur Verdeutlichung der Idee behandeln wir im vierten Kapitel diese Technik, die im weiteren kurz g-Feld-Technik genannt werden soll, zunächst für den einfachen Fall eines nulldimensionalen Systems (Quantenpunkt). Dabei wird zunächst das (Funktional-)Integral der Vielfrequenztechnik in dasjenige der g-Feld-Technik (1.33) umgeformt. Die Eins-Eigenschaft wird in allen Ordnungen des Parameters u, der ein Maß für die Stärke der Unordnung ist, gezeigt. Als Beispiele werden die Zustandssumme (2.26) und die Zweiteilchen-Greenfunktionen (2.29) berechnet, was natürlich auch auf einfacherem Weg möglich ist (siehe Anhang B). Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird mit Hilfe der g-Feld-Technik ein einfacher und in allen Ordnungen gültiger Beweis für die Äquivalenz von Vielfrequenz- und Supersymmetrietechnik angegeben (3.1)–(3.6).

Im fünften Kapitel greifen wir die ursprüngliche Problemstellung wieder auf und behandeln die g-Feld-Technik in zwei Dimensionen. Wiederum wird zuerst das Funktionalintegral der g-Feld-Technik (1.23) aus der Vielfrequenztechnik abgeleitet. Sodann wird die Eins-Eigenschaft bis zur Ordnung u^2 bewiesen (2.1)–(2.11). Es zeigt sich, daß die Beseitigung von Vakuum-Diagrammen in einer nicht sehr übersichtlichen und auf höhere Ordnungen zunächst nur schwer zu verallgemeinernden Art und Weise erfolgt. Dies liegt in erster Linie an der Eigenart der Theorie, nur die physikalisch relevanten Felder einer Hubbard-Stratonovich-Transformation zu unterwerfen, die lediglich zum Beseitigen von Vakuumschleifen benötigten Terme hingegen durch funktionale Differentiationen zu erzeugen. Sie ähnelt in dieser Hinsicht einer Supersymmetrietechnik, die wir dergestalt modifizieren, daß nur der Fermi-Fermi-Sektor durch Einführung eines Q-Feldes entkoppelt wird, die ursprünglichen bosonischen Felder aber erhalten bleiben. Im Abschnitt 5.4 lassen wir uns von dieser Analogie leiten und führen die Diffusionsnäherung bis zur Ordnung u^2 durch. Hier zeigen wir, wie ein Fermi-Fermi-Diagramm, das aus der Gaußschen Abintegration der Q-Felder resultiert, kompensiert wird durch entsprechende Differentiationen nach g, welche den Fermi-Bose-, Bose-Fermi- und Bose-Bose-Diagrammen der Supersymmetrietechnik entsprechen. Dies zeigt, daß die g-Feld-Technik durchaus handhabbar ist, womit der Weg zur Renormierung eines nichtlinearen σ-Modells im Rahmen dieser Technik gewiesen ist — zumindest in niedrigen Ordnungen in u.

Aber auch die letzte Einschränkung ist nicht unbedingt notwendig. Wiederum geleitet von Analogien zu der oben angeführten modifizierten Supersymmetrietechnik gelingt es nämlich im Abschnitt 5.5, für eine *ganze Klasse* von Diagrammen den Weghebemechanismus in allen Ordnungen in u aufzuzeigen. Ausführlich wird dies für die Diffusionsnäherung getan. Während der Beitrag der physikalisch relevanten Felder durch eine einfache Gaußsche Integration entsteht, müssen die aus funktionalen Differentiationen herrührenden Terme — die den Bose-Fermi-, Fermi-Bose- und Bose-Bose-Diagrammen der modifizierten Supersymmetrietechnik entsprechen — in jeder Ordnung in u identifiziert werden. Da dies exemplarisch für das Diffuson gelingt, sollte die Renormierung eines nichtlinearen σ-Modells im Prinzip auch unter Berücksichtigung aller Ordnungen in u möglich sein.

Die Realisierung dieses Programms bleibt indessen der weiteren Arbeit vorbehalten. Angesichts des hohen technischen Aufwandes bei der Anwendung der g-Feld-Technik muß ein wichtiger Aspekt hervorgehoben werden: Souleiman konnte in [28] für T=0 und wechselwirkungsfreie Teilchen eine Transformation der Vielfrequenztechnik in die Keldysch-Technik angeben. Es erscheint somit denkbar, daß sich gewisse Züge der Vielfrequenztechnik und der g-Feld-Technik auch in die Keldysch-Technik für wechselwirkende Systeme übertragen lassen. Das angestrebte — in dieser Arbeit noch nicht realisierte — Ziel der Behandlung eines nichtlinearen σ-Modells in der g-Feld-Technik (ohne direkten Rückgriff auf die Supersymmetrie) könnte dafür ein wichtiger Meilenstein sein. Insofern versteht sich die vorliegende Arbeit in mehrfacher Hinsicht als Vorarbeit.

2. Einführung in die Vielfrequenztechnik

In diesem Kapitel sollen die wichtigsten Elemente der Vielfrequenztechnik dargestellt werden. Dabei stützen wir uns auf die grundlegende Arbeit von Aronov und Joselevich [21] sowie auf die detaillierte Ausarbeitung der Methode durch Weller und Souleiman [28]. Die für die Behandlung ungeordneter Systeme maßgebliche Besonderheit einer (Zeit-)Gitterfeldtheorie für wechselwirksfreie Elektronen besteht darin, daß der Normierungsnenner *unabhängig* von der speziellen Form des Zufallspotential ist und gleich Eins gewählt werden kann. Diese Eins-Eigenschaft ist für die feldtheoretische Behandlung ungeordneter Systeme von entscheidender Bedeutung, gestattet sie doch eine Abintegration des Zufallspotentials *vor* etwaigen Störungsentwicklungen. Die Vielfrequenztechnik hat diese Eigenschaft mit dem häufig benutzten Replicatrick [6], [8] sowie mit der Supersymmetriemethode [18] gemeinsam. Während der aus mathematischer Sicht nicht unproblematische Replica-Grenzübergang $N \rightarrow 0$ erwiesenermaßen zu falschen Resultaten führen [17] und die Supersymmetriemethode nicht auf wechselwirkende Systeme verallgemeinert werden kann, ist die Vielfrequenztechnik einerseits mathematisch exakt und gestattet andererseits (für wechselwirkungsfreie Elektronen) eine Transformation [28] in die Keldysch-Technik [30], welche sich wiederum auch auf wechselwirkende Elektronen anwenden läßt.

Die Tatsache, daß der Normierungsnenner einer Feldtheorie nichtrelativistischer und untereinander wechselwirkungsfreier Elektronen (die sich jedoch in einem *beliebigen* statischen Potential bewegen dürfen) gleich Eins ist, läßt sich anhand einer einfachen Überlegung plausibel machen: die Funktion des Normierungsnenners in der Feldtheorie besteht in der Beseitigung von Vakuumschleifen. Vakuumschleifen sind diagrammatische Darstellungen für die Erzeugung virtueller Paare. Paarerzeugung darf in einem nichtrelativistischen Einelektronenproblem aber nicht auftreten. Eine adäquate Feldtheorie sollte demgemäß von vornherein ohne Normierungsnenner auskommen. Die Notwendigkeit, Mittelungstechniken wie den Replicatrick oder die Supersymmetriemethode einzusetzen, erweist sich unter diesem Gesichtspunkt als Folge einer *künstlichen* Einschränkung der Theorie auf eine (oder wenige) Energieschale(n).

Die Vielfrequenztechnik in der Version von Weller und Souleiman [28], die im ersten Abschnitt vorgestellt werden soll, wurde von Anfang an mit Blick auf die obige Argumentation konzipiert. Dabei wurde die Tatsache berücksichtigt, daß die Kontinuumsformulierung einer Quantenfeldtheorie als Limes *verschiedener* Gitterformulierungen begriffen werden kann. Durch die spezielle Wahl periodischer Randbedingungen entsteht eine Version, die Invarianz gegenüber Zeittranslationen aufweist und somit Energieerhaltung gewährleistet. Diese äußert sich darin, daß die Greenschen Funktionen diagonal in der Energiedarstellung werden. Damit eng zusammenhängend kann im zweiten Abschnitt die Gültigkeit von Identitäten der Gestalt

$$\sum_{\omega_\mu} \left(G\left(\omega_\mu\right)\right)^k = 0 \tag{0.1}$$

gezeigt werden. In diesen Identitäten manifestiert sich unmittelbar das Fehlen von Vakuumschleifen in einer nichtrelativistischen, wechselwirkungsfreien Einelektronen-Feldtheorie. Erkauft wird dieses physikalisch befriedigende Verhalten dadurch, daß die Greenschen Funktionen in der *Zeitdarstellung* ihren jeweils retardierten oder avancierten Charakter für sehr große Zeitdifferenzen verlieren (1.18). Wählt man indessen andere Randbedingungen [21], [29], wird die Aufrechterhaltng einer strengen Interpretation zeitlicher Retardierung bzw. Avancierung mit Nichtdiagonalität in der Energiedarstellung bezahlt. Hinsichtlich der Anwendbarkeit auf ungeordnete Systeme erweist sich u.E. die hier benutzte Variante als geeigneter.

1. Die Greenschen Funktionen in der Vielfrequenztechnik

Wir betrachten wechselwirkungsfreie Elektronen in zwei Dimensionen (2D), die sich in einem zufälligen, aber zeitunabhängigen Potential $V\left(\vec{r}\right)$ bewegen. Für jede dieser konkreten Potentialkonfigurationen $V\left(\vec{r}\right)$ erhält man die interessierenden physikalischen Größen, wie z.B. die Zustandsdichte oder die Leitfähigkeit, durch Kombinationen der retardierten und avancierten Greenschen Funktionen G^V_{ret} und G^V_{av}. Diese können durch Funktionalintegrale über Bose- oder Graßmannfelder ausgedrückt werden, wobei wir uns in dieser Arbeit (bis auf Abschnitt 4.3) auf letztere beschränken wollen. Graßmannfelder antikommutieren gemäß

$$\overline{\psi}_k\psi_l + \psi_l\overline{\psi}_k = \psi_k\psi_l + \psi_l\psi_k = \overline{\psi}_k\overline{\psi}_l + \overline{\psi}_l\overline{\psi}_k = 0 \ . \tag{1.1}$$

Die Integration über Graßmannvariable wird durch die Regeln

$$\int d\overline{\psi} = \int d\psi = 0 \text{ und } \int d\overline{\psi}\overline{\psi} = \int d\psi\psi = 1 \tag{1.2}$$

beschrieben. Die Operation der komplexen Konjugation genügt der Beziehung

$$\overline{\overline{\psi_1}\psi_2} = \overline{\psi_2}\psi_1 \tag{1.3}$$

Die Greenschen Funktionen lassen sich für eine konkrete Potentialkonfiguration V durch

$$\tilde{G}^V_\alpha\left(\vec{r_1}, t_1; \vec{r_2}, t_2\right) = -i\left(Z^V_\alpha\right)^{-1}\int D\overline{\psi}D\psi\psi_\alpha\left(\vec{r_1}, t_1\right)\overline{\psi}_\alpha\left(\vec{r_2}, t_2\right)\exp\left(-F^V_\alpha\right) \tag{1.4}$$

mit dem Normierungsnenner

$$Z^V_\alpha = \int D\overline{\psi}_\alpha D\psi_\alpha \exp(-F^V_\alpha) \tag{1.5}$$

und

$$F^V_\alpha = -i\int d^2\ \vec{r}\ dt\overline{\psi}_\alpha(\vec{r}, t)L^V_\alpha(\vec{r}, \tfrac{\partial}{\partial\vec{r}}, \tfrac{\partial}{\partial t})\psi_\alpha(\vec{r}, t) \tag{1.6}$$

darstellen. Unter $L^V_\alpha(\vec{r}, \frac{\partial}{\partial\vec{r}}, \frac{\partial}{\partial t})$ wird dabei

$$L^V_\alpha(\vec{r}, \tfrac{\partial}{\partial\vec{r}}, \tfrac{\partial}{\partial t}) = i\frac{\partial}{\partial t} - H_0\left(\tfrac{\partial}{\partial\vec{r}}\right) - V\left(\vec{r}\right) + i\sigma_\alpha\delta \tag{1.7}$$

verstanden, wobei H_0 der Hamiltonoperator des freien Teilchens

$$H_0\left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right) = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^{\,2}} \tag{1.8}$$

ist und wir

$$\sigma_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \text{ für } \alpha = ret \\ -1 \text{ für } \alpha = av \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

vereinbaren wollen. δ ist infinitesimal klein und gibt an, auf welcher Seite der reellen Achse $\widetilde{G}$ analytisch ist.

Die Funktionalintegrale in (1.4) und (1.5) sind zunächst nur formale Ausdrücke, die noch einer konkreten Interpretation als Grenzwerte endlichdimensionaler Integrale bedürfen. Dabei legen wir hier den Schwerpunkt auf die Konstruktion des Funktionalintegrals auf dem *Zeitgitter*. Zu diesem Zweck zerlegen wir das Zeitintervall zwischen $-\frac{T}{2}$ und $+\frac{T}{2}$ durch $2N$ Gitterpunkte t_n mit $-N \leq n \leq N-1$ in Segmente der Länge Δ. Dadurch erhalten die Funktionalintegrale in (1.4) und (1.5) einen wohldefinierten Sinn als Grenzwerte der Ausdrücke

$$\int \prod_{\vec{r}} \prod_{n=-N}^{N-1} d\overline{\psi}\left(\vec{r}, t_n\right) d\psi\left(\vec{r}, t_n\right) \ldots\ldots \tag{1.10}$$

In der Vielfrequenztechnik [28] wird die Wirkung im Exponenten folgendermaßen konkretisiert:

$$F_\alpha^V = -i \int d^2\,\vec{r} \sum_{n,n'=-N}^{N-1} \overline{\psi}_\alpha(\vec{r}, t_n) L_\alpha^V\left(\vec{r}, \frac{\partial}{\partial \vec{r}}, t_n, t_{n'}\right) \psi_\alpha(\vec{r}, t_{n'}) \tag{1.11}$$

mit

$$\begin{aligned} & L_{ret}^V(\vec{r}, \frac{\partial}{\partial \vec{r}}, t_n, t_{n'}) \\ = \; & i\delta_{n,n'} - ib_{ret}^V\left(\vec{r}, \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right)\left[\delta_{n-1,n'}(1-\delta_{n,-N}) + \delta_{n,-N}\delta_{n',N-1}\right] \end{aligned} \tag{1.12}$$

bzw.

$$\begin{aligned} & L_{av}^V(\vec{r}, \frac{\partial}{\partial \vec{r}} t_n, t_{n'}) \\ = \; & -i\delta_{n,n'} + ib_{av}^V\left(\vec{r}, \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right)\left[\delta_{n+1,n'}(1-\delta_{n,N-1}) + \delta_{n,N-1}\delta_{n',-N}\right] \;. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Dabei soll

$$b_{ret}^{V}\left(\vec{r},\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)=1-i\Delta\left[H_0\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)+V\left(\vec{r}\right)-i\delta\right] \tag{1.14}$$

und

$$b_{av}^{V}\left(\vec{r},\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)=1+i\Delta\left[H_0\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)+V\left(\vec{r}\right)+i\delta\right] \tag{1.15}$$

vereinbart werden. $L_{ret}^{V}(\vec{r},\frac{\partial}{\partial\vec{r}},t_n,t_{n'})$ und $L_{av}^{V}(\vec{r},\frac{\partial}{\partial\vec{r}}t_n,t_{n'})$ sind in dieser Gitterformulierung somit Elemente der $2N\times 2N-$Matrizen

$$\mathbf{L}_{ret}^{V}=\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & & & & & -ib_{ret}^{V} \\ -ib_{ret}^{V} & i & 0 & & & & & \\ 0 & -ib_{ret}^{V} & i & & & & & \\ & & & \cdots & \cdots & & & \\ & & & \cdots & \cdots & & & \\ & & & & & i & 0 & 0 \\ & & & & & -ib_{ret}^{V} & i & 0 \\ & & & & & 0 & -ib_{ret}^{V} & i \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

bzw.

$$\mathbf{L}_{av}^{V}=\begin{pmatrix} -i & ib_{av}^{V} & 0 & & & & & \\ 0 & -i & ib_{av}^{V} & & & & & \\ 0 & 0 & -i & & & & & \\ & & & \cdots & \cdots & & & \\ & & & \cdots & \cdots & & & \\ & & & & & -i & ib_{av}^{V} & 0 \\ & & & & & 0 & -i & ib_{av}^{V} \\ ib_{av}^{V} & & & & & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

An dieser Stelle sei noch einmal darauf verwiesen, daß diese Gitterformulierung durchaus nicht eindeutig ist. Beispielsweise leiten Negele und Orland in [29] mit

Hilfe der Methode kohärenter Zustände aus der Operatordarstellung eine der obigen Formulierung sehr ähnliche Gitterfeldtheorie ab, die im wesentlichen auch derjenigen von Aronov und Joselevich entspricht. Allerdings werden dabei die Felder an den Rändern des Zeitintervalls Null gesetzt, d.h. die einzelstehenden Matrixelemente in der rechten oberen bzw. linken unteren Ecke für $\mathbf{L}^V_{ret}$ bzw. $\mathbf{L}^V_{av}$ treten nicht auf. Diese Variante hat gegenüber der hier verwendeten den Vorteil, daß die Vorstellung von retardierten und avancierten Greenschen Funktionen auch für sehr große $|t-t'|$ beibehalten werden kann, d.h. daß diese $\sim \Theta\left(t-t'\right)$ bzw. $\sim\Theta\left(t'-t\right)$ sind[1]. Im Gegensatz dazu erhält man gemäß [28] aus (1.4) und (1.11) bis (1.17) für die retardierte Greensche Funktion

$$\widetilde{G}_{ret}\left(n,n'\right) = -i\left(\delta_{n,n'} + b_{ret}^{n-n'}\Theta\left(n-n'\right) + b_{ret}^{N+n-n'}\Theta\left(n'-n\right)\right). \qquad (1.18)$$

Man sieht, daß für $n'-n \approx N$ der retardierte Charakter von $\widetilde{G}_{ret}$ verloren geht.

Dieser Nachteil gegenüber [29] wird jedoch aufgewogen durch das physikalisch befriedigendere Verhalten der Greenschen Funktionen in der Energiedarstellung. Um dies zu zeigen, führen wir folgende diskrete Fouriertransformation aus:

$$\psi_\alpha(\vec{r},t_n) = \frac{1}{\sqrt{2N}}\sum_{\mu=-N}^{N-1}\exp(-it_n\omega_\mu)\psi_{\alpha,\mu}(\vec{r}) \qquad (1.19)$$

$$\overline{\psi}_\alpha(\vec{r},t_n) = \frac{1}{\sqrt{2N}}\sum_{\mu=-N}^{N-1}\exp(it_n\omega_\mu)\overline{\psi}_{\alpha,\mu}(\vec{r}) \qquad (1.20)$$

mit $t_n = \Delta n$ und

$$\omega_\mu = \frac{2\pi}{2N\Delta}\mu\ . \qquad (1.21)$$

Damit transformieren sich die Bestandteile der Wirkung in

$$\begin{aligned} F_{ret}^V = \tfrac{1}{2N}\int d^2\,\vec{r}\sum_{\substack{\mu,\mu'=-N\\ n,n'=-N}}^{N-1} &\left[\overline{\psi}_{ret,\mu}(\vec{r})\psi_{ret,\mu}(\vec{r})\exp\left(i\tfrac{2\pi}{2N}(\mu n-\mu' n')\right)\right] \\ &\times\left[\delta_{n,n'} - b_{ret}^V\left(\delta_{n-1,n'}(1-\delta_{n,-N}) + \delta_{n,-N}\delta_{n',N-1}\right)\right] \end{aligned} \qquad (1.22)$$

[1] Mit Θ ist die Heaviside'sche Sprungfunktion gemeint.

bzw.

$$F_{av}^V = -\tfrac{1}{2N}\int d^2\, \vec{r} \sum_{\substack{\mu,\mu'=-N \\ n,n'=-N}}^{N-1} \left[\overline{\psi}_{av,\mu}(\vec{r})\psi_{av,\mu}(\vec{r})\exp\left(i\tfrac{2\pi}{2N}(\mu n-\mu' n')\right)\right]$$
$$\times\left[\delta_{n,n'} - b_{av}^V\left(\delta_{n+1,n'}(1-\delta_{n,N-1}) + \delta_{n,N-1}\delta_{n',-N}\right)\right] \ . \tag{1.23}$$

Die Ausnutzung der Orthogonalitätsrelation

$$\frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N-1}\exp\left(i\frac{2\pi}{2N}n(\mu-\mu')\right) = \delta_{\mu,\mu'} \tag{1.24}$$

führt auf

$$F_{ret}^V = \int d^2\, \vec{r} \sum_{\mu=-N}^{N-1} \overline{\psi}_{ret,\mu}(\vec{r})\left[1 - b_{ret}^V \exp\left(i\frac{2\pi}{2N}\mu\right)\right]\psi_{ret,\mu}(\vec{r}) \tag{1.25}$$

und

$$F_{av}^V = -\int d^2\, \vec{r} \sum_{\mu=-N}^{N-1} \overline{\psi}_{av,\mu}(\vec{r})\left[1 - b_{av}^V \exp\left(-i\frac{2\pi}{2N}\mu\right)\right]\psi_{av,\mu}(\vec{r}) \ . \tag{1.26}$$

Man sieht, daß die Wirkung in der Energiedarstellung diagonal wird. Diese Eigenschaft ist in der Formulierung von Negele und Orland [29] sowie derjenigen von Aronov und Joselevich [21] nicht gegeben, da die dafür notwendigen Randterme $\delta_{n,-N}\delta_{n',N-1}$ in (1.22) bzw. $\delta_{n,N-1}\delta_{n',-N}$ in (1.23) fehlen. Für unsere Zwecke erachten wir diese Diagonalität in der Energiedarstellung als wichtiger als das den üblichen Vorstellungen völlig entsprechende zeitliche Verhalten der Greenschen Funktionen.

Aufgrund dieser Diagonalität (und der im weiteren noch zu beweisenden Eins-Eigenschaft) können die Bestandteile der Wirkung sofort durch die reziproken Greenschen Funktionen ausgedrückt werden. Fassen wir die Funktionalintegrale über retardierte und avancierte Felder zusammen, so erhalten wir insgesamt

$$Z^V = \int D\overline{\psi} D\psi \exp(-F^V) \tag{1.27}$$

mit

$$F^V = -i \int d^2 \vec{r} \sum_{\alpha=ret,av} \sum_{\mu=-N}^{N-1} \overline{\psi}_{\alpha,\mu}(\vec{r}) \left[\tilde{G}^V_{\alpha,\mu}(\vec{r}, \frac{\partial}{\partial \vec{r}})\right]^{-1} \psi_{\alpha,\mu}(\vec{r}) \tag{1.28}$$

und

$$\left[\tilde{G}^V_{\alpha,\mu}(\vec{r}, \frac{\partial}{\partial \vec{r}})\right]^{-1} = -i\sigma_\alpha \left[b^V_\alpha \left(\vec{r}, \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right) \exp\left(i\sigma_\alpha \omega_\mu \Delta\right) - 1\right] \ . \tag{1.29}$$

Für kleine (physikalische) Frequenzen sind die so definierten Greenschen Funktionen bis auf einen Faktor Δ mit den herkömmlichen identisch:

$$\omega_\mu \Delta \ll 1 \longrightarrow \tilde{G}^{-1}_{ret,\mu} = \Delta(\omega_\mu - H + i\delta) \text{ und } \tilde{G}^{-1}_{av,\mu} = \Delta(\omega_\mu - H - i\delta) \ . \tag{1.30}$$

Aus Zweckmäßigkeitsgründen ändern wir an dieser Stelle die Konvention. Wir transformieren die Graßmannfelder gemäß

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_{\alpha,\mu} \exp\left(\tfrac{i}{2}\sigma_\alpha \omega_\mu \Delta\right) &\longrightarrow \overline{\psi}_{\alpha,\mu} \\ \psi_{\alpha,\mu} \exp\left(\tfrac{i}{2}\sigma_\alpha \omega_\mu \Delta\right) &\longrightarrow \psi_{\alpha,\mu} \end{aligned} \tag{1.31}$$

um und erhalten (die Korrektur des Maßes dabei ist gleich 1)

$$F^V = -i \int d^2 \vec{r} \sum_{\alpha=ret,av} \sum_{\mu=-N}^{N-1} \overline{\psi}_{\alpha,\mu}(\vec{r}) \left[G^V_{\alpha,\mu}(\vec{r}, \frac{\partial}{\partial \vec{r}})\right]^{-1} \psi_{\alpha,\mu}(\vec{r}) \tag{1.32}$$

mit der neuen Vereinbarung

$$\left[G^V_{\alpha,\mu}(\vec{r}, \frac{\partial}{\partial \vec{r}})\right]^{-1} = -i\sigma_\alpha \left[b_\alpha \left(\vec{r}, \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right) - \exp\left(-i\sigma_\alpha \omega_\mu \Delta\right)\right] \ . \tag{1.33}$$

2. Die grundlegenden Identitäten der Vielfrequenztechnik

In diesem Abschnitt sollen die grundlegenden Identitäten der Vielfrequenztechnik behandelt werden. Diese sind

$$Z^V = 1 \tag{2.1}$$

und

$$\sum_{\mu}\left(G^V_{\alpha,\mu}\right)^k = 0 \text{ für } k = 1, 2, \ldots . \tag{2.2}$$

Beide sind insofern äquivalent, als sie auseinander abgeleitet werden können. $Z^V = 1$ bedeutet, daß die Zustandssumme unabhängig von V ist, was auch gezeigt werden kann, indem man Z^V nach V entwickelt. Die Entwicklungskoeffizienten dieser Reihe haben gerade die Gestalt (2.2) und müssen Null ergeben[2]. Beide Formeln sind als Kürzel für Grenzwertbildungen zu verstehen, auf die im folgenden eingegangen wird.

Für einen vereinfachten Beweis von (2.1) beschränken wir uns auf den retardierten Teil des Funktionalintegrals. Desweiteren vernachlässigen wir die räumlichen Dimensionen und wählen einen einzigen Eigenwert ϵ von H_0 zusammen mit einer homogenen Störung V. Aus (1.11) und (1.12) folgt dann

$$\begin{aligned} Z^V(N,\Delta,\delta) &= \det\left(-i\mathbf{L}^V\right) = 1 - \left(b^V\right)^{2N} \\ &= 1 - (1 - i\Delta\epsilon - iV\Delta - \Delta\delta)^{2N} \\ &= 1 - \left(1 + \frac{T}{2N}(-i\epsilon - iV - \delta)\right)^{2N} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Führt man zunächst $N \longrightarrow \infty$ und $\Delta \longrightarrow 0$, so daß $2N\Delta = T = \text{const}$, erhält man

$$1 - \exp\left(-T\left(i\epsilon + iV + \delta\right)\right) . \tag{2.4}$$

Läßt man nun $T \longrightarrow \infty$ streben, geht der Exponentialausdruck gegen Null. Erst dann darf $\delta \longrightarrow 0$ erfolgen. Zusammenfassend kann

$$Z^V := \lim_{\delta\to 0} \lim_{T\to\infty} \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta\to 0 \\ 2N\Delta=T=const}} Z^V(N,\Delta,\delta) = 1 \tag{2.5}$$

notiert werden. Diese Identität wurde zwar in der Zeitdarstellung hergeleitet, bleibt aber auch in der Energiedarstellung gültig, da letztere durch die unitäre Transformation (1.19), (1.20) aus der ersteren hervorgegangen war.

[2] Ausführlich dazu Souleiman in [28].

Die Identitäten (2.2) könnten nun aus (2.3) durch Ableitung nach V gewonnen werden. Wir wollen hier einen anderen Weg beschreiten und die entsprechenden Summen direkt auswerten. Ausgangspunkt hierfür ist die folgende Darstellung der Frequenzsummen durch ein Kurvenintegral:

$$\sum_{\mu=-N}^{N-1} f\left(i\frac{2\pi}{2N}\mu\right) = \oint_{C'} dz' \frac{f\left(i\frac{2\pi}{2N}z'\right)}{\exp\left(2\pi i z'\right) - 1} \ . \tag{2.6}$$

Die Kontur C'

führt dabei unmittelbar unterhalb der reellen Achse von –N bis N-1 und unmittelbar oberhalb der reellen Achse wieder zurück nach –N , wo sie sich schließt.Diese Formel wird verständlich, wenn man die Residuen der rechten Seite betrachtet. Mit Hilfe der Transformation

$$z = \exp\left(i\frac{2\pi}{2N}z'\right) \tag{2.7}$$

folgt

$$\sum_{\mu=-N}^{N-1} f\left(i\frac{2\pi}{2N}\mu\right) = \frac{N}{i\pi}\oint_{C} dz \frac{f\left(z\right)}{z\left(z^{2N} - 1\right)} \ . \tag{2.8}$$

Die Kontur C geht dabei direkt aus C' hervor.

Sie führt von unmittelbar unterhalb von -1 am Einheitskreis außen entlang bis unmittelbar oberhalb von -1, um von dort aus innerhalb des Einheitskreises im entgegengesetzten Richtungssinn zurückzulaufen. Mit (2.8) soll nun als Beispiel die Frequenzsumme über $G^V_{ret,\mu}$ berechnet werden. Man erhält

$$
\begin{aligned}
\sum_{\mu=-N}^{N-1} G^V_{ret,\mu} &= \frac{N}{i\pi} \oint\limits_C \frac{dz}{z\left(z^{2N}-1\right)(-i)\left(b^V_{ret}-\dfrac{1}{z}\right)} \\
&= \frac{N}{\pi b^V_{ret}} \oint\limits_C \frac{dz}{\left(z^{2N}-1\right)\left(z-\dfrac{1}{b^V_{ret}}\right)} \\
&= 2i\frac{N}{b^V_{ret}} \frac{1}{1-\dfrac{1}{\left(b^V_{ret}\right)^{2N}}} \qquad .
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Im letzten Schritt wurde dabei ausgenutzt, daß man anstatt der Residuen im Inneren der Kontur auch diejenigen außerhalb, versehen mit einem Minuszeichen, in Rechnung stellen kann. Führt man die Grenzwertbildung wie in (2.5) angegeben aus, sieht man, daß der Ausdruck gegen Null konvergiert.

Auf demselben Weg lassen sich auch Identitäten der Gestalt (1.1) für Produkte von Greenschen Funktionen beweisen, und zwar unabhängig von deren Impulsargumenten.

3. Die Vielfrequenztechnik in zwei Dimensionen

Ausgehend von den grundlegenden Relationen der Vielfrequenztechnik, wie sie im vorangegangenen Kapitel dargelegt wurden, soll hier die Anwendbarkeit des Kalküls auf das Lokalisierungsproblem in 2D getestet werden.

Grob skizziert, läßt sich die diesbezügliche Vorgehensweise im Rahmen der Replica- [8] und Supersymmetriemethode [18] folgendermaßen zusammenfassen: Der nach Mittelung über das Zufallspotential entstehende $\left(\overline{\psi}\psi\right)^2$-Term trägt zur Störungsreihe nur dann wesentlich bei, wenn die Impulsargumente der Felder in gewissen Kombinationen auftreten (1.4). Die zugehörigen Leiterdiagramme repräsentieren Diffusonen und die maximal gekreuzten Diagramme Cooperonen [3]. Nach Ersetzung der $\overline{\psi}\psi$-Terme durch bosonische Felder Q vermittels einer Hubbard-Stratonovich-Transformation und anschließender Sattelpunktsbestimmung werden die Gaußschen Fluktuationen um diesen Sattelpunkt bestimmt. Für die verschiedenen Q-Komponenten ergibt sich dabei eine klare Trennung zwischen massiven (harten) und masselosen (weichen) Moden. Die weichen Moden erweisen sich als Goldstonebosonen, die infolge einer spontanen Symmetriebrechung auftreten, welche wiederum aus dem unterschiedlichen analytischen Verhalten retardierter und avancierter Greenscher Funktionen resultiert. Die Einschränkung der Theorie auf diese weichen Moden führt auf ein nichtlineares σ-Modell, welches eine systematische Behandlung von Diffusonen und Cooperonen zuläßt und überdies auch renormiert werden kann. Bei dieser Prozedur stellt sich heraus, daß die Differenz zwischen den Energien der retardierten und der avancierten Greenschen Funktion *keine* Renormierung erfährt (eine Folge der Teilchenzahlerhaltung), die

Diffusionskonstante hingegen gegen Null läuft. Während sich aus den Gaußschen Fluktuationen somit noch freie Diffusion der Elektronen ablesen läßt, bewirken die höheren Störterme ein solches Absinken der Diffusionskonstante, aus dem mittels Renormierungsgruppengleichung auf Lokalisierung in 2D geschlossen werden kann.

Versucht man, im Rahmen der Vielfrequenztechnik die oben skizzierten Schritte nachzuvollziehen, stößt man auf ein wesentliches Problem. Es gelingt zwar ohne Schwierigkeit, die Mittelungsprozedur, die Hubbard-Stratonovich-Transformation und die Bestimmung des Sattelpunktes durchzuführen sowie die Gaußschen Fluktuationen und die höheren Störterme zu formulieren. Dabei sieht man auch, wie sich die Identitäten der Vielfrequenztechnik, die sich zunächst nur auf die ungestörten Greenschen Funktionen bezogen hatten, auf die entsprechenden renormierten Greenschen Funktionen übertragen und kann aus dieser Kenntnis nach Abintegration der Gaußschen Fluktuationen Diffusion als erste Näherung der Theorie bestimmen. Prinzipiell kann auch eine nachfolgende Störungstheorie (ganz analog zur Replica-Methode) aufgestellt werden. Es gelingt aber *nicht*, eine strenge Trennung zwischen weichen und harten Moden zu begründen und die Theorie sinnvoll auf ein nichtlineares σ-Modell zu reduzieren. Grund hierfür ist das Fehlen eines Äquivalents jener Symmetrie, die im Raum der N identischen Replicas bzw. im Superraum zu finden ist. Das Nichtvorhandensein einer solchen Symmetrie ist nicht etwa ein zufälliges Manko der Theorie, sondern gleichsam ihre Grundlage, hängt doch die Gültigkeit der Identitäten (2.2) damit eng zusammen. Man gelangt so zu dem Eindruck, daß das Konzept der Vielfrequenztechnik, welches auf der Mitnahme aller — also auch unphysikalischer — Frequenzen beruht, mit demjenigen des nichtlinearen σ-Modells nicht vereinbar ist, welches gerade eine Beschränkung auf kleine Frequenzunterschiede voraussetzt.

Auf diese Schwierigkeit soll im dritten Abschnitt detailliert eingegangen werden, während zuvor die Theorie bis zur Berechnung des Diffusons entwickelt wird.

1. Mittelung über das Zufallspotential und Übergang zur Q-Feld-Formulierung

Wir gehen aus von den Formeln (1.27), (1.32), (1.33) und erinnern daran, daß diese Ausdrücke sich auf eine ganz konkrete Potentialkonfiguration $V\left(\vec{r}\right)$ bezogen. Tatsächlich hat man es bei der Messung physikalischer Größen, wie z.B. der Zustandsdichte oder der Leitfähigkeit, durchaus auch mit einem konkreten (ungeordneten) System zu tun und müßte strenggenommen zur Bestimmung dieser Größen auch das jeweils gegebene Potential in Rechnung stellen. Allerdings sind die meisten physikalischen Größen (wie z.B. die Leitfähigkeit, eine intensive Größe) *selbstmittelnd,* was impliziert, daß ihr Wert für eine konkrete makroskopische Probe gegen denjenigen Wert konvergiert, der sich als Mittelwert eines Ensembles makroskopischer Proben ergibt [31]. (Eine wichtige Ausnahme von dieser Regel stellt z.B der Widerstand eines ungeordneten eindimensionalen Systems dar, eine extensive Größe also [32], [33].) Als Modellverteilung des zufälligen Potentials wollen wir Gaußsches weißes Rauschen in Ansatz bringen, d.h. ein räumlich völlig unkorreliertes Potential, das an jedem Raumpunkt eine Gaußsche Verteilung mit einer mittleren quadratischen Potentialstärke $2u^2$ aufweist. Die ersten beiden Moment dieser Verteilung lauten

$$\left\langle V\left(\vec{r}\right)\right\rangle = 0 \tag{1.1}$$

und

$$\left\langle V\left(\vec{r}\right) V\left(\vec{r}'\right)\right\rangle = 2u^2\delta\left(\vec{r} - \vec{r}'\right). \tag{1.2}$$

Das unordnungsgemittelte Funktionalintegral kann folgendermaßen notiert werden:

$$Z = \left\langle Z^V \right\rangle := \int \prod_{\vec{r}} dV(\vec{r}) \frac{1}{2u\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{4u^2}\int d^2\ \vec{r}\ V^2(\vec{r})\right)\ Z^V\ . \tag{1.3}$$

Gaußsches weißes Rauschen erweist sich als eine sehr bequeme Modellverteilung, gestattet es doch an jedem Raumpunkt eine unabhängige Gaußsche Integration. In deren Ergebnis entsteht

$$Z = \int D\overline{\psi} D\psi \exp(-F) \tag{1.4}$$

mit der (effektiven) Wirkung $F = F^0 + F^{WW}$, worin

$$F^0 = -i \int d^2 \vec{r} \sum_{\alpha=ret,av} \sum_{\mu=-N}^{N-1} \overline{\psi}_{\alpha,\mu}(\vec{r}) \overset{0}{G}{}^{-1}_{\alpha,\mu} (\frac{\partial}{\partial \vec{r}}) \psi_{\alpha,\mu}(\vec{r}) \tag{1.5}$$

und

$$F^{WW} = u^2 \Delta^2 \int d^2 \vec{r} \left(\sum_{\alpha=ret,av} \sum_{\mu=-N}^{N-1} \overline{\psi}_{\alpha,\mu}(\vec{r}) \psi_{\alpha,\mu}(\vec{r}) \right)^2 \tag{1.6}$$

sind. Hierbei ist $\overset{0}{G}{}^{-1}_{\alpha,\mu} (\frac{\partial}{\partial \vec{r}})$ bis auf den $V\left(\vec{r}\right)$-Term mit (1.33) identisch. Im folgenden wollen wir die Wertebereiche von α und μ nicht mehr anschreiben.

Wir gehen nun vermittels der Fouriertransformation

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &= \sum_{\vec{k}} \psi(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \ , \\ \overline{\psi}(\vec{r}) &= \sum_{\vec{k}} \overline{\psi}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \end{aligned} \tag{1.7}$$

in die Impulsdarstellung über, wobei für konkrete Rechnungen die Impulssumme als $\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 \vec{k}$ zu interpretieren ist[1]. Hierbei transformieren sich die Bestandteile der Wirkung in

$$F^0 = -i \sum_{\substack{\alpha \\ \mu \\ \vec{k}}} \overline{\psi}_{\alpha,\mu}(\vec{k}) \overset{0}{G}{}^{-1}_{\alpha,\mu} (\vec{k}) \psi_{\alpha,\mu}(\vec{k}) \tag{1.8}$$

mit

$$\overset{0}{G}{}^{-1}_{\alpha,\mu} (\vec{k}) = -i\sigma_\alpha \left(b_\alpha(\vec{k}) - e^{-i\sigma_\alpha \omega_\mu \Delta} \right) \ , \tag{1.9}$$

worin

$$b_\alpha\left(\vec{k}\right) = 1 - i\sigma_\alpha \Delta \left(\frac{k^2}{2m} - i\sigma_\alpha \delta \right) \tag{1.10}$$

[1]Das Integrationsvolumen ist gleich Eins gesetzt worden.

ist, sowie

$$F^{WW} = u^2\Delta^2 \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ \vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3}} \overline{\psi}_{\alpha_1,\mu_1}(\vec{k}_1+\vec{k}_3)\psi_{\alpha_1,\mu_1}(\vec{k}_2+\vec{k}_3)\overline{\psi}_{\alpha_2,\mu_2}(\vec{k}_2)\psi_{\alpha_2,\mu_2}(\vec{k}_1)\ . \tag{1.11}$$

Aus dieser hinsichtlich der Impulsargumente noch nicht eingeschränkten Formulierung von F^{WW} lassen sich diejenigen Anteile herauslösen, die in der Störungsentwicklung wesentliche Beiträge liefern [8]. Mit den Spezifizierungen

$$\vec{k}_3 = \vec{q} \quad \text{bzw.} \quad \vec{k}_3 = -\vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{q} \tag{1.12}$$

sind dies die Terme

$$F^{WW,D} = u^2\Delta^2 \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ \vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{q}}} \overline{\psi}_{\alpha_1,\mu_1}(\vec{k}_1+\vec{q})\psi_{\alpha_1,\mu_1}(\vec{k}_2+\vec{q})\overline{\psi}_{\alpha_2,\mu_2}(\vec{k}_2)\psi_{\alpha_2,\mu_2}(\vec{k}_1) \tag{1.13}$$

und

$$F^{WW,C} = u^2\Delta^2 \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ \vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{q}}} \overline{\psi}_{\alpha_1,\mu_1}(\vec{k}_1+\vec{q})\psi_{\alpha_1,\mu_1}(\vec{k}_2+\vec{q})\overline{\psi}_{\alpha_2,\mu_2}(-\vec{k}_1)\psi_{\alpha_2,\mu_2}(-\vec{k}_2)\ , \tag{1.14}$$

die jeweils Diffusions- und Cooperkanal repräsentieren. Der Integrationsbereich von $\vec{q}$ ist dabei auf kleine Werte beschränkt[2].

Um diese beiden Bestandteile von F^{WW} formal zusammenfassen zu können, gehen wir zu einer Spinordarstellung über: dazu werden neue, zweikomponentige Felder ϕ und $\overline{\phi}$ gemäß

$$\overline{\phi}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\psi(\vec{k}), \overline{\psi}(-\vec{k})\right) \tag{1.15}$$

und

[2]Ein weiterer Term mit kleinen $\vec{q}$, der aber nur eine uninteressante Verschiebung der Fermienergie bewirkt, wird von vornherein vernachlässigt.

$$\phi(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \overline{\psi}(\vec{k}) \\ \psi(-\vec{k}) \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

eingeführt. Man beachte, daß damit zwar eine formale Verdopplung der Feldanzahl, aber natürlich nicht eine Verdopplung der Anzahl der unabhängigen Freiheitsgrade einhergeht. Wir führen einen neuen Index $\beta = 1, 2$ ein, der die Stellung des jeweiligen ψ- oder $\overline{\psi}$-Feldes innerhalb der Vektoren (1.15) und (1.16) abzählt, und vereinbaren

$$\overline{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \text{ falls } \beta = 1 \\ 1 \text{ falls } \beta = 2 \end{pmatrix} . \tag{1.17}$$

ϕ und $\overline{\phi}$ sind durch die Operation der Ladungskonjugation miteinander verknüpft, d.h es gilt

$$\overline{\phi} = (\mathbf{C}\phi)^T , \tag{1.18}$$

wobei $\mathbf{C}$ die Matrixelemente

$$C_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2 \\ \beta_1,\beta_2 \\ \vec{k}_1,\vec{k}_2}} = \delta_{\alpha_1,\alpha_2} \delta_{\mu_1,\mu_2} \delta_{\vec{k}_1,-\vec{k}_2} (-1)^{\beta_1} \delta_{\beta_1,\overline{\beta_2}} \tag{1.19}$$

besitzt. Damit erhalten die Bestandteile der Wirkung die Gestalt

$$F^0 = -i \sum_{\substack{\alpha \\ \mu \\ \beta \\ \vec{k}}} \overline{\phi}_{\alpha,\mu,\beta}(\vec{k}) \, \overset{0}{G}{}^{-1}_{\alpha,\mu} (\vec{k}) \phi_{\alpha,\mu,\beta}(\vec{k}) \tag{1.20}$$

sowie

$$\begin{aligned} F^{WW} = \; & 2u^2\Delta^2 \\ & \times \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2 \\ \beta_1,\beta_2 \\ \vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{q}}} \overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,\beta_1}(\vec{k}_1 + \vec{q}) \phi_{\alpha_1,\mu_1,\beta_1}(\vec{k}_2 + \vec{q}) \overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,\beta_2}(\vec{k}_2) \phi_{\alpha_2,\mu_2,\beta_2}(\vec{k}_1) \, . \end{aligned} \tag{1.21}$$

Da alle interessierenden physikalischen Größen durch Greensche Funktionen (bzw. durch deren Produkte) und diese wiederum durch Einsetzungen von Produkten mit 2 (bzw. mit einer geraden Anzahl von) ϕ-Faktoren ins Funktionalintegral dargestellt werden können, kann von den ϕ-und $\overline{\phi}$-Feldern zu bosonischen Variablen Q übergegangen werden, die jeweils bilineare Ausdrücke $\phi_i\overline{\phi}_k$, also Dichten vertreten[3]. Dieser Übergang wird von einer Hubbard-Stratonovich-Transformation geleistet, in der ausgiebig von der Identität

$$\exp\left(y^4\right) = \int dQ \exp\left(-\pi Q^2 + 2\sqrt{\pi} Q y^2\right) \tag{1.22}$$

Gebrauch gemacht wird. Die dementsprechende Entkopplung des Ausdrucks $\exp\left(-F^{WW}\right)$ mit F^{WW} aus (1.21) wird unter Berücksichtigung aller Symmetriebeziehungen detailliert im Anhang A dargestellt. Nach dieser Entkopplung verbleiben in der Wirkung lediglich noch in ϕ bilineare Terme, die unter Nutzung der Integrationsformel für Vektoren ψ von Graßmannvariablen

$$\int d\overline{\psi} d\psi \exp\left(-\overline{\psi}\mathbf{A}\psi\right) = \det\left(\mathbf{A}\right) \tag{1.23}$$

abintegriert werden können. Übrig bleibt ein Funktionalintegral

$$Z = \int D\mathbf{Q} \exp\left(-F\left[\mathbf{Q}\right]\right) \tag{1.24}$$

über die neuen bosonischen Felder $\mathbf{Q}$ mit der umgeschriebenen Wirkung

$$F\left[\mathbf{Q}\right] = \frac{\pi}{4} \sum_{\vec{q}} \widetilde{Sp} \mathbf{Q}^2\left(\vec{q}\right) - \frac{1}{2} Sp \ln\left(-i \overset{0}{\mathbf{G}}{}^{-1} - \sqrt{2\pi} u \Delta \mathbf{Q}\right) \tag{1.25}$$

[3]Der tiefere Grund für den Übergang zur Q-Feld-Formulierung besteht indessen darin, daß die — noch zu behandelnde — spontane Symmetriebrechung in einer φ-Feld-Formulierung nicht adäquat widergespiegelt werden kann. Ausführlich dazu: [9].

und dem Integrationsmaß

$$\begin{aligned}\int D\mathbf{Q} := \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} & \prod_{\substack{\alpha \\ \mu}} \frac{1}{\sqrt{2}} dQ_{\substack{\alpha,\alpha \\ \mu,\mu \\ 1,1}} \left(\vec{0}\right) \\ & \times \prod_{\left[\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2}\right] \in OD} dReQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2 \\ 1,1}} \left(\vec{0}\right) dImQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2 \\ 1,1}} \left(\vec{0}\right) \\ & \times \prod_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2 \\ \vec{q} \in HE}} dReQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2 \\ 1,1}} \left(\vec{q}\right) dImQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2 \\ 1,1}} \left(\vec{q}\right) \\ & \times \prod_{\substack{\left[\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2}\right] \in OD \\ \vec{q}}} dReQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_1 \\ \mu_1,\mu_2 \\ 1,2}} \left(\vec{q}\right) dImQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2 \\ 1,2}} \left(\vec{q}\right) \quad .\end{aligned} \tag{1.26}$$

Die Bezeichnungen werden dabei wie folgt verwendet: $\mathbf{Q}$ ist eine Matrix mit den Elementen

$$Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2 \\ \beta_1,\beta_2 \\ \vec{k}_1,\vec{k}_2}} = Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2 \\ \beta_1,\beta_2}} \left(\vec{k}_1 - \vec{k}_2\right) \ . \tag{1.27}$$

Dementsprechend bezieht sich Sp auf Matrizen im α-μ-β-$\vec{k}$-Raum, $\widetilde{Sp}$ hingegen auf solche im eingeschränkten α-μ-β-Raum. $\overset{0}{\mathbf{G}}{}^{-1}$ ist eine Diagonalmatrix im α-μ-β-$\vec{k}$-Raum mit den Elementen aus (1.9), d.h.

$$\overset{0}{G}{}^{-1}_{\substack{\alpha,\alpha \\ \mu,\mu \\ \beta,\beta \\ \vec{k},\vec{k}}} = \overset{0}{G}{}^{-1}_{\alpha,\mu} (\vec{k}) = -i\sigma_\alpha (b_\alpha(\vec{k}) - e^{-i\sigma_\alpha \omega_\mu \Delta}) \ . \tag{1.28}$$

Im Maß verweist die Bezeichnung $\left[\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2}\right] \in OD$ darauf, daß der Wertebereich der in Klammern stehenden Indizes auf den Bereich *o*berhalb der *D*iagonale eingeschränkt ist. Die Bezeichnung $\vec{q} \in HE$ begrenzt den Impuls $\vec{q}$ auf eine Halbebene, wobei der Nullpunkt ausgeschlossen sein soll.

Für die Durchführung der Hubbard-Stratonovich-Transformation war Hermitizität von **Q** nötig. Somit gilt

$$Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ \beta_1,\beta_2}}\left(\vec{q}\right) = Q^*_{\substack{\alpha_2,\alpha_1\\ \mu_2,\mu_1\\ \beta_2,\beta_1}}\left(-\vec{q}\right) \ . \tag{1.29}$$

Weiterhin überträgt sich die Symmetrie (1.18), (1.19) in der Form

$$Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ \beta_1,\beta_2}}\left(\vec{q}\right) = (-1)^{\beta_1+\beta_2} Q_{\substack{\alpha_2,\alpha_1\\ \mu_2,\mu_1\\ \overline{\beta_2},\overline{\beta_1}}}\left(\vec{q}\right) \tag{1.30}$$

auf das Feld **Q**.

2. Bestimmung des Sattelpunktes und Herleitung des Diffusons

Die Auswertung des Funktionalintegrals (1.24) beginnt mit der Bestimmung des Sattelpunktes für das Feld **Q**. Dabei nehmen wir an, daß dieser Sattelpunkt räumlich homogen und somit in der Impulsdarstellung nur für $\vec{q}=\vec{0}$ einen von Null verschiedenen Wert aufweist. Diagonalität wird ebenfalls in den Indizes α, μ und β vorausgesetzt. Unter diesen Voraussetzungen führt die Differentiation von (1.25) nach den Diagonalelementen von **Q** auf die Sattelpunktsgleichung

$$\overset{SP}{Q}_{\alpha,\mu} := \overset{SP}{Q}_{\substack{\alpha,\alpha\\ \mu,\mu\\ \beta,\beta}}\left(\vec{0}\right) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}u\Delta \sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}\right) \ , \tag{2.1}$$

worin $\overset{B}{G}$ die renormierte Greensche Funktion in *B*ornscher Näherung, also

$$\overset{B}{G}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}\right) = \left(\overset{0}{G}{}^{-1}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}\right) - i\sqrt{2\pi}u\Delta\,\overset{SP}{Q}_{\alpha,\mu}\right)^{-1} \tag{2.2}$$

ist.

Diese Sattelpunktsgleichung soll in zwei Grenzfällen betrachtet werden. Zunächst fassen wir den Fall unphysikalischer Frequenzen mit

$$\omega_\mu \Delta = O(1) \tag{2.3}$$

ins Auge, wo μ von der Größenordnung N ist. In diesem Fall erkennt man an (1.9), daß

$$\overset{B}{G}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}\right) = O(1) \tag{2.4}$$

und somit

$$\overset{SP}{Q}_{\alpha,\mu} = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}u \times O(\Delta) \underset{\Delta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \tag{2.5}$$

strebt. Anders liegen die Verhältnisse im Fall physikalischer Frequenzen mit

$$\omega_\mu \Delta \ll 1 \ , \tag{2.6}$$

wo die Exponentialfunktion in $\overset{0}{G}{}^{-1}$ gemäß (1.30) entwickelt werden kann. Wählt man beispielsweise $\omega_\mu = \omega_{\mu_F} := E_F$, erhält man in der ausgeschriebenen Form die Sattelpunktsgleichungen

$$\overset{SP}{Q}_{ret,\mu_F} = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}u\Delta\tfrac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} d\phi_k \int_0^\infty dk \frac{k}{i\Delta\left(E_F - \frac{k^2}{2m} + i\delta - i\sqrt{2\pi}u\Delta \overset{SP}{Q}_{ret,\mu_F}\right)} \tag{2.7}$$

und

$$\overset{SP}{Q}_{av,\mu_F} = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}u\Delta\tfrac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} d\phi_k \int_0^\infty dk \frac{k}{i\Delta\left(E_F - \frac{k^2}{2m} - i\delta - i\sqrt{2\pi}u\Delta \overset{SP}{Q}_{av,\mu_F}\right)} \ . \tag{2.8}$$

Zur Lösung dieser Selbstkonsistenzgleichungen wird in Bornscher Näherung der $\overset{SP}{Q}$-proportionale Term im Nenner vernachläsigt. Nach einer Variablentransformation $\eta = \frac{k^2}{2m}$ wird das Integral (2.7) zerlegt in ein Hauptwertintegral und ein solches über eine δ-Funktion:

$$\begin{aligned}\overset{SP}{Q}_{ret,\mu_F} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}u\Delta\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty dk\frac{1}{i\Delta\left(E_F-\frac{k^2}{2m}+i\delta\right)} \\ &= i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2\pi}um\int\limits_0^\infty d\eta\left[P\left(\frac{1}{\eta-E_F}\right)+i\pi\delta\left(\eta-E_F\right)\right]\ .\end{aligned} \tag{2.9}$$

Das Hauptwertintegral führt zu einer (für unsere Zwecke) uninteressanten Renormierung von E_F. Die Auswertung des Integrals über die δ-Funktion liefert

$$\overset{SP}{Q}_{ret}=-\overset{SP}{Q}_{av}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}um\ . \tag{2.10}$$

Diese $\overset{SP}{Q}$ sind vernünftige Lösungen, da sie die analytische Struktur der Greenschen Funktionen erhalten.

Zur Bestimmung der Gaußschen Fluktuationen um den Sattelpunkt zerlegen wir nun $\mathbf{Q}$ gemäß

$$\mathbf{Q}=\overset{SP}{\mathbf{Q}}+\widehat{\mathbf{Q}}\ . \tag{2.11}$$

Aus (1.24) und (1.25) folgt dann

$$Z=\int D\widehat{\mathbf{Q}}\exp\left(-F\left[\widehat{\mathbf{Q}}\right]\right) \tag{2.12}$$

mit einem Maßterm (1.26), in dem lediglich die Differentiale $dQ_{\substack{\alpha,\alpha\\ \mu,\mu\\ 1,1}}\left(\vec{0}\right)$ durch die jeweiligen $d\widehat{Q}_{\substack{\alpha,\alpha\\ \mu,\mu\\ 1,1}}\left(\vec{0}\right)$ ersetzt werden, und einer Wirkung

$$\begin{aligned}F\left[\widehat{\mathbf{Q}}\right]= &-\frac{\pi}{4}\widetilde{Sp}\left(\overset{SP}{\mathbf{Q}}\right)^2+\frac{1}{2}Sp\ln\left(-i\overset{B}{\mathbf{G}}{}^{-1}\right) \\ &-\frac{\pi}{4}\sum_{\vec{q}}\widetilde{Sp}\widehat{\mathbf{Q}}^2\left(\vec{q}\right)+\frac{1}{2}Sp\ln\left(1-i\sqrt{2\pi}u\Delta\overset{B}{\mathbf{G}}\widehat{\mathbf{Q}}\right)|_{o.1.O.}\ ,\end{aligned} \tag{2.13}$$

wobei $o.1.O$ andeutet, daß die Entwicklung des ln $o$hne die 1. Ordnung zu verstehen ist, welche sich definitionsgemäß mit dem Beitrag $-\frac{\pi}{2}\widetilde{Sp}\left(\overset{SP}{\mathbf{Q}}\widehat{\mathbf{Q}}\right)$ kompensiert.

Bevor die in den dynamischen Feldern $\widehat{\mathbf{Q}}$ quadratischen Terme aufgeschrieben werden, soll zunächst noch auf die Konstanten in der ersten Zeile von (2.13) eingegangen werden. Man kann leicht sehen, daß beide unabhängig voneinander identisch verschwinden. Betrachten wir z.B.

$$Sp\ln\left(-i\overset{B}{\mathbf{G}}^{-1}\right) = Sp\ln\left(-i\overset{0}{\mathbf{G}}^{-1}\right) + Sp\ln\left(1 - i\sqrt{2\pi}u\Delta\,\overset{0}{\mathbf{G}}\overset{SP}{\mathbf{Q}}\right) \quad . \tag{2.14}$$

Das Verschwinden des ersten Termes wurde in (2.3) bewiesen. Der zweite.Term kann nach Potenzen von u entwickelt werden, die jeweils

$$-\frac{1}{n}\left(i\sqrt{2\pi}u\Delta\right)^n \sum_\alpha\sum_\beta\sum_{\vec{k}}\sum_\mu \left(\overset{0}{G}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}\right)\overset{SP}{Q}_{\alpha,\mu}\right)^n \tag{2.15}$$

liefern. Jedes der darin enthaltenen $\overset{SP}{Q}_{\alpha,\mu}$ kann gemäß (2.1) und (2.2) folgendermaßen als Kettenbruch dargestellt werden:

$$\overset{SP}{Q}_{\alpha,\mu} = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}u\Delta\sum_{\vec{k}_1}\frac{\overset{0}{G}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_1\right)}{1-i\sqrt{2\pi}u\Delta\overset{0}{G}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_1\right)(-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}u\Delta)\sum_{\vec{k}_2}\frac{\overset{0}{G}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_2\right)}{1-i\sqrt{2\pi}u\Delta\overset{0}{G}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_2\right)\ldots}} \tag{2.16}$$

Offenbar treten in (2.15) immer nur Terme der Gestalt

$$\sum_\alpha\sum_\beta (\mathrm{u}\Delta)^n \sum_{\vec{k},\vec{k}_1\ldots\vec{k}_{n-1}} \sum_\mu \overset{0}{G}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}\right)\overset{0}{G}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_1\right)\ldots\overset{0}{G}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_{n-1}\right) \tag{2.17}$$

auf. Unabhängig von den konkreten Korrelationen der Impulse in (2.17) gilt nun aber (siehe Abschnitt 1.2)

$$\sum_\mu \overset{0}{G}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}\right)\overset{0}{G}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_1\right)\ldots\overset{0}{G}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_{n-1}\right) = 0 \ , \tag{2.18}$$

woraus

$$Sp\ln\left(-i\overset{B}{\mathbf{G}}^{-1}\right) = 0 \tag{2.19}$$

folgt. Die gleichen Überlegungen führen auf

$$-\frac{\pi}{4}\widetilde{Sp}\left(\overset{SP}{\mathbf{Q}}\right)^2 = 0\ . \tag{2.20}$$

Wir wollen nun die Gaußschen Fluktuationen um den Sattelpunkt bestimmen. Dies erfordert die Entwicklung des ln in der zweiten Zeile von (2.13) bis zur 2.Ordnung. Die demgemäß genäherte Wirkung wird $F^{(2)}$ und das zugehörige Funktionalintegral $Z^{(2)}$ genannt. Unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften (1.29) und (1.30) entsteht

$$\begin{aligned}
&F^{(2)} = \\
&-\frac{\pi}{2}\sum_{\substack{\alpha\\ \mu}} \widehat{Q}_{\substack{\alpha,\alpha\\ \mu,\mu\\ 1,1}}\left(\vec{0}\right)\widehat{Q}_{\substack{\alpha,\alpha\\ \mu,\mu\\ 1,1}}\left(\vec{0}\right)\left(1-2u^2\Delta^2\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}\right)\overset{B}{G}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}\right)\right) \\
&-\pi\sum_{\substack{\left[\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2}\right]\\ \in OD}} \widehat{Q}_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,1}}\left(\vec{0}\right)\widehat{Q}^*_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,1}}\left(\vec{0}\right)\left(1-2u^2\Delta^2\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}_{\alpha_1,\mu_1}\left(\vec{k}\right)\overset{B}{G}_{\alpha_2,\mu_2}\left(\vec{k}\right)\right) \\
&-\pi\sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ \vec{q}\in HE}} \widehat{Q}_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,1}}\left(\vec{q}\right)\widehat{Q}^*_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,1}}\left(\vec{q}\right)\left(1-2u^2\Delta^2\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}_{\alpha_1,\mu_1}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\overset{B}{G}_{\alpha_2,\mu_2}\left(\vec{k}\right)\right) \\
&-\pi\sum_{\substack{\left[\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2}\right]\\ \in OD\\ \vec{q}}} \widehat{Q}_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,2}}\left(\vec{q}\right)\widehat{Q}^*_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,2}}\left(\vec{q}\right)\left(1-2u^2\Delta^2\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}_{\alpha_1,\mu_1}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\overset{B}{G}_{\alpha_2,\mu_2}\left(\vec{k}\right)\right).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Diese ausführliche Form wurde gewählt, um für die Berechnung von Korrelationsfunktionen einen Ausdruck in den tatsächlich unabhängigen Feldkomponenten vorliegen zu haben. Die Abintegration der Gaußschen Integrale führt auf

$$
\begin{aligned}
Z^{(2)} \;=& \prod_{\substack{\alpha\\ \mu}} \left(1-2u^2\Delta^2 \sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}\right) \overset{B}{G}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&\times \prod_{\left[\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2}\right]\in OD} \left(1-2u^2\Delta^2 \sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{\alpha_1,\mu_1}\left(\vec{k}\right) \overset{B}{G}_{\alpha_2,\mu_2}\left(\vec{k}\right)\right)^{-1} \\
&\times \prod_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ \vec{q}\in HE}} \left(1-2u^2\Delta^2 \sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{\alpha_1,\mu_1}\left(\vec{k}+\vec{q}\right) \overset{B}{G}_{\alpha_2,\mu_2}\left(\vec{k}\right)\right)^{-1} \\
&\times \prod_{\substack{\left[\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2}\right]\in OD\\ \vec{q}}} \left(1-2u^2\Delta^2 \sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{\alpha_1,\mu_1}\left(\vec{k}+\vec{q}\right) \overset{B}{G}_{\alpha_2,\mu_2}\left(\vec{k}\right)\right)^{-1} .
\end{aligned} \tag{2.22}
$$

Hebt man die Einschränkungen der α-, μ- und $\vec{q}$-Argumente in (2.22) vermittels Umbenennung und Ausnutzung von $\overset{B}{G}\left(\vec{k}\right) = \overset{B}{G}\left(-\vec{k}\right)$ auf, so entsteht daraus

$$
\begin{aligned}
Z^{(2)} \;=& \prod_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ \vec{q}}} \left(1-2u^2\Delta^2 \sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{\alpha_1,\mu_1}\left(\vec{k}+\vec{q}\right) \overset{B}{G}_{\alpha_2,\mu_2}\left(\vec{k}\right)\right)^{-1} \\
&\times \prod_{\substack{\alpha\\ \mu\\ \vec{q}}} \left(1-2u^2\Delta^2 \sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}+\vec{q}\right) \overset{B}{G}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}\right)\right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

Beide Produkte können gemäß

$$Z^{(2)} = \left(1 + 2u^2\Delta^2 \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2 \\ \vec{q}}} \sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{\alpha_1,\mu_1} \left(\vec{k} + \vec{q} \right) \overset{B}{G}_{\alpha_2,\mu_2} \left(\vec{k} \right) + \ldots \right)$$

$$\left(1 + u^2\Delta^2 \sum_{\substack{\alpha \\ \mu \\ \vec{q}}} \sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{\alpha,\mu} \left(\vec{k} + \vec{q} \right) \overset{B}{G}_{\alpha,\mu} \left(\vec{k} \right) + \ldots \right) \tag{2.24}$$

in Reihen von Frequenzsummen entwickelt werden. Aufgrund der Identitäten (2.2) liefern alle diese Summen Null, woraus

$$Z^{(2)} = 1 \tag{2.25}$$

folgt. Unter Ausnutzung dieser Eigenschaft kann die Korrelationsfunktion

$$K\left(\omega, \vec{q}_0\right) = \int D\widehat{\mathbf{Q}} \widehat{Q}_{\substack{ret,av \\ E_F+\frac{\omega}{2}, E_F-\frac{\omega}{2} \\ 1,1}} \left(\vec{q}_0\right) \widehat{Q}^*_{\substack{ret,av \\ E_F+\frac{\omega}{2}, E_F-\frac{\omega}{2} \\ 1,1}} \left(\vec{q}_0\right) \exp\left(-F\left[\widehat{Q}\right]\right) \ , \tag{2.26}$$

aus der sich unmittelbar die Leitfähigkeit berechnen läßt, in der angegebenen Näherung problemlos berechnet werden. Man erhält

$$K^{(2)}\left(\omega, \vec{q}_0\right) = \left(1 - 2u^2\Delta^2 \sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{ret,E_F+\frac{\omega}{2}} \left(\vec{k} + \vec{q}_0 \right) \overset{B}{G}_{av,E_F-\frac{\omega}{2}} \left(\vec{k} \right) \right)^{-1} . \tag{2.27}$$

Prinzipiell kann dieses Näherung beliebig verbessert werden, wenn die höheren Terme der Entwicklung des ln in (2.13) berücksichtigt werden. Der erste Korrekturterm zu (2.27) hat beispielsweise die Gestalt

$$-\frac{1}{8}\left(i\sqrt{2\pi}u\Delta\right)^4 \int D\widehat{\mathbf{Q}} \quad \widehat{Q}_{\substack{ret,av \\ E_F+\frac{\omega}{2}, E_F-\frac{\omega}{2} \\ 1,1}} \left(\vec{q}_0\right) \widehat{Q}^*_{\substack{ret,av \\ E_F+\frac{\omega}{2}, E_F-\frac{\omega}{2} \\ 1,1}} \left(\vec{q}_0\right) \exp\left(-F^{(2)}\left[\widehat{Q}\right]\right) \times Sp\left(\overset{\mathbf{B}}{\mathbf{G}}\,\widehat{\mathbf{Q}}\right)^4 . \tag{2.28}$$

Ohne diesen oder einen anderen Beitrag der Störungsreihe konkret auszuwerten, wollen wir darauf verweisen, daß diejenigen (bei der Wick-Paarung) entstehenden Terme der Form

$$\left\langle \widehat{Q}_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ \beta_1,\beta_2}} \left(\vec{q'}\right) \widehat{Q}^*_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ \beta_1,\beta_2}} \left(\vec{q'}\right) \right\rangle_{F^{(2)}} \tag{2.29}$$

verschwinden, bei denen mindestens ein Frequenzindex μ_i frei, d.h. *nicht* durch eine der beiden festen Frequenzen $E_F + \frac{\omega}{2}$ oder $E_F - \frac{\omega}{2}$ der äußeren Felder *festgelegt* ist. Dies läßt sich dadurch begründen, daß der jeweils freie Index (o.B.d.A. sei dies μ_1) eine Frequenzsummation

$$\sum_{\mu_1} \overset{B}{G}_{\alpha_1,\mu_1} \left(\vec{k} + \vec{q'}\right) \left(1 - 2u^2\Delta^2 \sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{\alpha_1,\mu_1} \left(\vec{k} + \vec{q'}\right) \overset{B}{G}_{\alpha_2,\mu_2} \left(\vec{k}\right)\right)^{-1} \tag{2.30}$$

zuläßt, die Null ergibt.

An dieser kurzen Argumentation läßt sich bereits ersehen, daß die Störungsentwicklung in der Vielfrequenztechnik bei Integration über *alle* Komponenten von **Q** völlig mit derjenigen der Replicamethode übereinstimmt. In letzterer erfolgt das Wegheben der entsprechenden Terme durch freie Summation über die N Replicas, wobei der Limes $N \longrightarrow 0$ zu bilden ist.

3. Probleme der Vielfrequenztechnik

Während die bisherigen Rechnungen eine bemerkenswerte Parallelität zu denjenigen der Replicamethode aufwiesen, stößt man auf Schwierigkeiten, wenn man versucht, das Funktionalintegral (1.24) mit der Wirkung (1.25) vermöge der Trennung in harte und weiche Moden auf ein nichtlineares σ-Modell zu reduzieren. Wir wollen zunächst in groben Zügen die Vorgehensweise in der Replicatechnik andeuten, um vor diesem Hintergrund die Probleme der Vielfrequenztechnik sichtbar zu machen.

Formal gesehen läßt sich die Replicaformulierung des Lokalisierungsproblems gewinnen, wenn man die 2N Frequenzindizes μ der Vielfrequenztechnik durch M

Replicaindizes m ersetzt und den Grenzwert $M \longrightarrow 0$ bildet, nachdem man in der Störungsentwicklung die Wick-Paarungen vorgenommen hat. Die Greenschen Funktionen, die durch den linken oberen Index R von denjenigen der Vielfrequenztechnik unterschieden werden sollen, haben für jedes m dieselbe Gestalt

$$\begin{aligned} {}^{R}G^{-1}_{ret,m} &= \left(E_F + \tfrac{\omega}{2} - H + i\delta\right) \\ {}^{R}G^{-1}_{av,m} &= \left(E_F - \tfrac{\omega}{2} - H - i\delta\right) \ . \end{aligned} \tag{3.1}$$

(Die gewählten Frequenzen $E_F + \frac{\omega}{2}$ und $E_F - \frac{\omega}{2}$ sind diejenigen, auf die es bei der Berechnung der Leitfähigkeit ankommt.) Das Replica-Pendant zu (1.32) kann in der Form

$$\begin{aligned} {}^{R}F = \ & -i\int d^2\,\vec{r} \sum_{\alpha=ret,av}\ \sum_{m=1}^{M} \overline{\psi}_{\alpha,m}\left(\vec{r}\right)\left(E_F - H\right)\psi_{\alpha,m}\left(\vec{r}\right) \\ & -i\int d^2\,\vec{r} \sum_{\alpha=ret,av}\ \sum_{m=1}^{M} \overline{\psi}_{\alpha,m}\left(\vec{r}\right)\sigma_\alpha\left(\frac{\omega}{2} + i\delta\right)\psi_{\alpha,m}\left(\vec{r}\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

notiert werden. Man sieht, daß dem dominierenden ersten Term in (3.2) eine $\mathrm{U}(2M)$ $-$Symmetrie innewohnt, die durch den zweiten (sehr kleinen) Beitrag zunächst nur unwesentlich gestört wird. Führt man indessen die Rechnungen in enger Anlehnung an die vorangegangenen Abschnitte weiter und bestimmt die Sattelpunkte

$${}^{R}\overset{SP}{Q}_{\alpha,m} = -\sigma_\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}} um \ , \tag{3.3}$$

so erkennt man, daß die infinitesimalen $\pm\delta$ eine spontane Symmetriebrechung von $\mathrm{U}(2M)$ auf $\mathrm{U}(M)\times\mathrm{U}(M)$ bewirken. Diese spontane Symmetriebrechung ist die Ursache dafür, daß in der Replica-Version ${}^{R}F^{(2)}$, die sich aus (2.21) vermittels Ersetzung der μ durch m und der $\overset{B}{G}$ durch ${}^{R}\overset{B}{G}$ ergibt, Goldstonebosonen, also masselose (weiche) Moden entstehen, die sich eindeutig von den massiven (harten) Moden unterscheiden lassen. Das Kriterium dieser Unterscheidung ist, ob die Indizes $\alpha_1$und α_2 in den jeweiligen Beiträgen

$$\hat{Q}_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ m_1,m_2 \\ 1,1}}\left(\vec{q}\right)\hat{Q}^*_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ m_1,m_2 \\ 1,1}}\left(\vec{q}\right)\left(1 - 2u^2\sum_{\vec{k}} {}^{R}\overset{B}{G}_{\alpha_1}\left(\vec{k}+\vec{q}\right){}^{R}\overset{B}{G}_{\alpha_2}\left(\vec{k}\right)\right) \tag{3.4}$$

gleich sind oder nicht. Im ersten Fall ergibt sich

$$\left(1 - 2u^2 \sum_{\vec{k}} \overset{B}{{}^R G_\alpha} \left(\vec{k} + \vec{q}\right) \overset{B}{{}^R G_\alpha} \left(\vec{k}\right)\right) \approx 1 \;, \tag{3.5}$$

im zweiten Fall

$$\left(1 - 2u^2 \sum_{\vec{k}} \overset{B}{{}^R G_{ret}} \left(\vec{k} + \vec{q}\right) \overset{B}{{}^R G_{av}} \left(\vec{k}\right)\right) = \frac{-i\left(\omega_{ret} - \omega_{av}\right) + Dq^2}{2u^2 m} \;, \tag{3.6}$$

also eine masselose Mode[4]. Angesichts dieser deutlichen Trennung harter und weicher Moden wird eine Reduzierung des Funktionalintegrals auf solche Komponenten von Q möglich, die gerade die weichen Moden und somit große Beiträge in der Störungsentwicklung liefern. Aus dem Goldstonetheorem folgt, daß dies gerade Felder aus dem Quotientenraum $\mathrm{U}(2M)\,/\mathrm{U}(M)\times\mathrm{U}(M)$ sind. Eine Parametrisierung dieser Felder ist durch

$${}^R Q = T^{-1}\, \overset{SP}{{}^R Q}\, T \tag{3.7}$$

mit

$$T = \exp\begin{pmatrix} 0 & B \\ -B^+ & \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

gegeben, wobei unter $\begin{pmatrix} 0 & B \\ -B^+ & \end{pmatrix}$ eine Matrix im *ret-av*-Raum zu verstehen ist. (Die Symmetriebeziehung für B, die sich aus der Ladungskonjugation ergibt, kann hier zunächst vernachlässigt werden.) Mit einer dergestalt eingeschränkten

[4]Detaills dieser Rechnung siehe Abschnitt 5.4.

Feldkonfiguration kann die Replica-Version von (1.24) auf

$$\begin{aligned}
{}^R F &= \tfrac{\pi}{4}\widetilde{Sp}\, {}^R\overset{SP}{\mathbf{Q}}{}^2 - \tfrac{1}{2} Sp \ln\left(-i\, {}^R\overset{0}{\mathbf{G}}{}^{-1} - \sqrt{2\pi} u \mathbf{T}^{-1}\, {}^R\overset{SP}{\mathbf{Q}}\, \mathbf{T}\right) \\
&= 0 - \tfrac{1}{2} Sp \ln\left(-i\mathbf{T}\, {}^R\overset{0}{\mathbf{G}}{}^{-1}\, \mathbf{T}^{-1} + i\, {}^R\overset{0}{\mathbf{G}}{}^{-1} - i\, {}^R\overset{0}{\mathbf{G}}{}^{-1} - \sqrt{2\pi} u\, {}^R\overset{SP}{\mathbf{Q}}\right) \\
&= -\tfrac{1}{2} Sp \ln\left(-i\, {}^R\overset{B}{\mathbf{G}}{}^{-1}\right) - \tfrac{1}{2} Sp \ln\left(1 + {}^R\overset{B}{\mathbf{G}}\left(\mathbf{T}\, {}^R\overset{0}{\mathbf{G}}{}^{-1} - {}^R\overset{0}{\mathbf{G}}{}^{-1}\, \mathbf{T}\right)\mathbf{T}^{-1}\right) \\
&= -\tfrac{1}{2} Sp \ln\left(1 + {}^R\overset{B}{\mathbf{G}}\left(\mathbf{T}\, {}^R\overset{0}{\mathbf{G}}{}^{-1} - {}^R\overset{0}{\mathbf{G}}{}^{-1}\, \mathbf{T}\right)\mathbf{T}^{-1}\right)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

reduziert werden. (Die Konstanten verschwinden wegen M$\longrightarrow$ 0.) Der Term $\left(\mathbf{T}\, {}^R\overset{0}{\mathbf{G}}{}^{-1} - {}^R\overset{0}{\mathbf{G}}{}^{-1}\, \mathbf{T}\right)$ in (3.9) mißt jeweils die Differenzen der rechten und linken Energie- bzw. Impulsindizes von T. Da diese Differenzen von vornherein als klein angenommen worden sind (ω bzw. $\vec{q}$), kann die Entwicklung des ln auf die erste Ordnung ($\sim \omega$) und die zweite Ordnung ($\sim q^2$) beschränkt werden[5]. Diese Beschränkung führt auf ein nichtlineares σ-Modell, das im weiteren renormiert werden kann [8].

Anders liegen die Verhältnisse im Fall der Vielfrequenztechnik. An der ausgeschriebenen Version von (1.33)

$$\begin{aligned}
G^{-1}_{ret,\mu} &= -i\left(-i\Delta H + 1 - \Delta\delta - e^{-i\omega_\mu \Delta}\right) \\
G^{-1}_{av,\mu} &= i\left(i\Delta H + 1 - \Delta\delta - e^{+i\omega_\mu \Delta}\right)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

erkennt man, daß der frequenzabhängige Term $1 - \Delta\delta - e^{-\sigma_\alpha i\omega_\mu \Delta}$ sich lediglich im Bereich $\omega_\mu \Delta \ll 1$ als geringfügige Störung der ursprünglichen Symmetrie interpretieren läßt, im übrigen Bereich mit $\omega_\mu \Delta = O(1)$ aber zum dominierenden Term (gegenüber ΔH) wird. Als Konsequenz dieses Verhaltens von G^{-1} läßt sich in $F^{(2)}$ (2.21) keine scharfe Trennlinie zwischen harten und weichen Moden ziehen.

[5]Zur Bestimmung mesoskopischer Fluktuationen können allerdings die höheren Terme der Entwicklung des ln wichtig sein [34].

Zwar kann für kleine Frequenzen $\omega_{\mu_1}\Delta \ll 1$ und $\omega_{\mu_2}\Delta \ll 1$ das Verhalten von

$$\left(1 - 2u^2\Delta^2 \sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{\alpha_1,\mu_1}\left(\vec{k}+\vec{q}\right) \overset{B}{G}_{\alpha_2,\mu_2}\left(\vec{k}\right)\right) \tag{3.11}$$

genauso wie in der Replica-Methode gemäß (3.5), (3.6) klassifiziert werden. Für große Frequenzen aber wird der zweite Summand in (3.11) vernachlässigbar klein, und die entsprechenden Moden werden massiv, unabhängig davon, ob $\alpha_1 = \alpha_2$ oder $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ist.

Man könnte nun geneigt sein, sich im Fall der Vielfrequenztechnik auf die tatsächlich weichen Moden zu beschränken und aus diesen ein nichtlineares σ-Modell aufzubauen. Da diese Beschränkung aber ein Abschneiden der hohen Frequenzen implizieren würde, wären die Identitäten der Vielfrequenztechnik nicht mehr anwendbar. Angesichts der Tatsache, daß mit wachsenden Frequenzen weiche Moden kontinuierlich in harte Moden übergehen, müßte dieses Abschneiden zudem mit einer unvertretbaren Willkür erfolgen.

Zusammenfassend kann man die folgenden Schlußfolgerungen ziehen: die Vielfrequenztechnik gestattet bei Abintegration *aller* Feldkomponeneten eine Störungsrechnung für physikalische Größen (wie z.B. die Leitfähigkeit), die mit derjenigen der Replica- oder der Supersymmetriemethode völlig identisch ist. Abweichungen ergeben sich erst dann, wenn man — ausgehend von einer Unterteilung in harte und weiche Moden — versucht, das Problem auf ein nichtlineares σ-Modell zu reduzieren. Dies gelingt nur unter Preisgabe desjenigen Mechanismus, der für die Beseitigung der Vakuumschleifen sorgt, was als Defizit gegenüber der Replica- und Supersymmetriemethode angesehen werden muß.

Die offensichtliche Diskrepanz, die zwischen dem Konzept der Vielfrequenztechnik und demjenigen des nichtlinearen σ-Modells besteht, dient als Ausgangspunkt der folgenden Überlegung. Bedenkt man die Tatsache, daß zur Bestimmung physikalischer Größen die Berechnung Greenscher Funktionen in der Nähe der Fermienergie ausreicht, so liegt der Gedanke nahe, den Einfluß der Felder zu allen anderen Frequenzen in einer mehr *summarischen* Weise zur Geltung zu bringen. Angesichts der oben erläuterten "Unverträglichkeit" von Vielfrequenztechnik und nichtlinearem σ-Modell erscheint eine solche Formulierung der Theorie wünschenswert, in der die Identitäten der Vielfrequenztechnik (in welchen die Greenschen Funktionen zu allen Frequenzen benötigt werden) noch *vor* der Reduktion auf die weichen Moden zum Einsatz kommen.

Die folgenden Kapitel sind der Formulierung und Auswertung einer solchen Theorie gewidmet. Sie stellen den wesentlichen Gegenstand der Arbeit dar.

4. Die g-Feld-Technik im nulldimensionalen Fall

Die vorangegangenen Kapitel haben gezeigt, daß die Vielfrequenztechnik im Rahmen einer einfachen Störungstheorie zur Replicamethode äquivalent ist. Die Beschränkung auf weiche Moden im Rahmen eines nichtlinearen σ-Modells erweist sich allerdings als nicht durchführbar; sie würde — im Gegensatz zur Replicamethode — zum Verlust des Weghebemechanismus für Vakuumschleifen führen. Dies muß im Grunde genommen nicht verwundern, wenn man bedenkt, daß ein nichtlineares σ-Modell in der Vielfrequenztechnik gestatten würde, Korrelationsfunktionen von Feldern zu *beliebigen* Frequenzen in einfacher Weise zu berechnen; eine Aufgabe, die auch von der Replica- oder der Supersymmetriemethode nicht erfüllt werden kann[1].

Diese Überlegungen legen es nahe, auf eine (weniger anspruchsvolle) Technik auszuweichen, welche — so wie in der Replica- und Supersymmetrietechnik — von vornherein nur Felder zu einer (oder zwei) Frequenz(en) verwendet. Wie eine solche Technik beschaffen sein kann und wodurch der notwendige Mechanismus des Weghebens von Vakuumschleifen realisiert wird, soll für den nulldimensionalen Fall in diesem Kapitel vorgeführt werden.

Als nulldimensional werden dabei (in verkürzter Sprache) solche mikroskopischen oder mesoskopischen Systeme charakterisiert, deren Ausdehnung in allen Richtungen so gering ist, daß für physikalische Anwendungen die Beschränkung

[1] Wird in diesen Techniken die Differenzfrequenz ω groß gemacht, so wird auch dort die Unterscheidung von harten und weichen Moden sinnlos und damit die Reduktion auf ein nichtlineares σ-Modell unmöglich.

auf das energetisch niedrigste Niveau sinnvoll ist. Solche "Quantenpunkte" können seit einiger Zeit experimentell realisiert werden [35]. Dabei wird Unordnungsmittelung dann nötig, wenn ein ganzes Ensemble solcher Quantenpunkte mit zufälligen chemischen Potentialen betrachtet wird.

Im ersten Abschnitt erfolgt die Ableitung der in dieser Arbeit neu entwickelten Technik, die wir hier und im folgenden als g-Feld-Technik bezeichnen wollen.

Im zweiten Abschnitt wird die prinzipielle Anwendbarkeit dieser Technik anhand der Berechnung der Ein- und Zweiteilchen-Greenfunktionen getestet. (Im Anhang B wird gezeigt, daß man die entsprechenden Ergebnisse natürlich auch mit einer einfacheren Methode gewinnen kann.)

Der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit dem Zusammenhang von Vielfrequenztechnik und Supersymmetriemethode. Souleimann konnte in [28] die Äquivalenz beider Methoden in den ersten Ordnungen der Störungstheorie nachweisen. Wir zeigen hier, wiederum exemplarisch für das nulldimensionale Problem, daß dieser Zusammenhang unter Zuhilfenahme der g-Feld-Technik in allen Ordnungen bewiesen werden kann.

1. Herleitung der g-Feld-Technik im nulldimensionalen Fall

Wir gehen aus von den Gleichungen (1.27), (1.32), (1.33) mit (1.14) und (1.15). Betrachten wir sehr kleine Systeme, können wir die Eigenfunktionen von H_0 zu den höheren Eigenwerten vernachlässigen und uns auf das tiefste Niveau beschränken, welches aber noch von der konkreten Potentialkonfiguration abhängt. Mitteln wir nun über das Zufallspotential, erhalten wir

$$Z = \int \prod_{\substack{\alpha \\ \mu}} d\overline{\psi}_{\alpha,\mu} d\psi_{\alpha,\mu} \exp\left(-F^0 - F^{WW}\right) \tag{1.1}$$

mit

$$F^0 = -i \sum_{\substack{\alpha \\ \mu}} \overline{\psi}_{\alpha,\mu} \overset{0}{G}{}^{-1}_{\alpha,\mu} \psi_{\alpha,\mu} \ , \tag{1.2}$$

worin

$$\overset{0}{G}{}^{-1}_{\alpha,\mu} = -i\sigma_\alpha(1 - \Delta\delta - e^{i\sigma_\alpha\omega_\mu\Delta}) \tag{1.3}$$

ist, und

$$F^{WW} = u^2\Delta^2 \left(\sum_{\substack{\alpha \\ \mu}} \overline{\psi}_{\alpha,\mu}\psi_{\alpha,\mu} \right)^2 . \tag{1.4}$$

Die Ableitung der g-Feld-Technik erfolgt nun in fünf Schritten.

1. Ersetzung aller "überflüssigen" $\overline{\psi}\psi$-Bestandteile im Wechselwirkungsterm durch g

Wir wählen zunächst diejenigen festen Frequenzen ω_r und ω_a mit den zugehörigen Indizes μ_r und μ_a aus, die im weiteren bei der Bestimmung physikalischer Größen interessieren sollen. Die Felder zu allen anderen Frequenzen werden summarisch durch eine neue Variable g ersetzt. Dies geschieht durch Einschieben einer 1 ins Funktionalintegral, die als Integral einer δ-Funktion dargestellt wird:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dg\delta \left(g - \sum_{\mu\neq\mu_r} \overline{\psi}_{ret,\mu}\psi_{ret,\mu} - \sum_{\mu\neq\mu_a} \overline{\psi}_{av,\mu}\psi_{av,\mu} \right) . \tag{1.5}$$

Die δ-Funktion ihrerseits ergibt sich aus der bekannten Spektraldarstellung

$$\begin{aligned} &\delta \left(g - \sum_{\mu\neq\mu_r} \overline{\psi}_{ret,\mu}\psi_{ret,\mu} - \sum_{\mu\neq\mu_a} \overline{\psi}_{av,\mu}\psi_{av,\mu} \right) \\ = &\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \exp \left[2\pi i\lambda \left(g - \sum_{\mu\neq\mu_r} \overline{\psi}_{ret,\mu}\psi_{ret,\mu} - \sum_{\mu\neq\mu_a} \overline{\psi}_{av,\mu}\psi_{av,\mu} \right) \right] . \end{aligned} \tag{1.6}$$

Das auf diese Art erweiterte Integral (1.1) erhält damit die Gestalt

$$Z = \int dg d\lambda D\overline{\psi} D\psi e^{-F} \tag{1.7}$$

mit

$$\int dg d\lambda D\overline{\psi} D\psi := \int_{-\infty}^{+\infty} dg \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int \prod_{\substack{\alpha \\ \mu}} d\overline{\psi}_{\alpha,\mu} d\psi_{\alpha,\mu} \tag{1.8}$$

und

$$
\begin{aligned}
F = \quad & -i \sum_{\substack{\alpha \\ \mu}} \overline{\psi}_{\alpha,\mu} \overset{0}{G}{}^{-1}_{\alpha,\mu} \psi_{\alpha,\mu} \\
& + u^2\Delta^2 \left(\overline{\psi}_{ret,\mu_r}\psi_{ret,\mu_r} + \overline{\psi}_{av,\mu_a}\psi_{av,\mu_a} + g\right)^2 \\
& -2\pi i\lambda \left(g - \sum_{\mu\neq\mu_r} \overline{\psi}_{ret,\mu}\psi_{ret,\mu} - \sum_{\mu\neq\mu_a} \overline{\psi}_{av,\mu}\psi_{av,\mu} \right) \quad .
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Wir schreiben dies in eine Form um, in der die Anteile zu den interessierenden von denjenigen zu den nicht interessierenden Frequenzen getrennt auftreten:

$$
\begin{aligned}
F = \quad & \overline{\psi}_{ret,\mu_r} \left(-i \overset{0}{G}{}^{-1}_{ret,\mu_r} + 2u^2\Delta^2 g \right) \psi_{ret,\mu_r} \\
& + \overline{\psi}_{av,\mu_a} \left(-i \overset{0}{G}{}^{-1}_{av,\mu_a} + 2u^2\Delta^2 g \right) \psi_{av,\mu_a} \\
& + u^2\Delta^2 \left(\overline{\psi}_{ret,\mu_r}\psi_{ret,\mu_r} + \overline{\psi}_{av,\mu_a}\psi_{av,\mu_a}\right)^2 \\
& + \sum_{\mu\neq\mu_r} \overline{\psi}_{ret,\mu} \left(-i \overset{0}{G}{}^{-1}_{ret,\mu} + 2\pi i\lambda \right) \psi_{ret,\mu} \\
& + \sum_{\mu\neq\mu_a} \overline{\psi}_{av,\mu} \left(-i \overset{0}{G}{}^{-1}_{av,\mu} + 2\pi i\lambda \right) \psi_{av,\mu} \\
& -2\pi i\lambda g + u^2\Delta^2 g^2 \quad .
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

2. Hubbard-Stratonovich-Transformation des verbliebenen $\overline{\psi}\psi\overline{\psi}\psi$-Terms

Der verbliebene $\overline{\psi}\psi\overline{\psi}\psi$-Term wird mittels der üblichen Hubbard-Stratonovich-Transformation entkoppelt. Dazu führen wir die hermitesche Matrix

$$
\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_{rr} & Q_{ra} \\ Q_{ar} & Q_{aa} \end{pmatrix}
\tag{1.11}
$$

mit

$$
Q_{ar} = Q^*_{ra}
\tag{1.12}
$$

ein und ergänzen das Integral um einen weiteren Faktor

$$
\begin{aligned}
1 = \int d\mathbf{Q} \quad & \exp\left[-\pi \left(Q_{rr} - \tfrac{u\Delta}{\sqrt{\pi}} \overline{\psi}_{ret,\mu_r}\psi_{ret,\mu_r} \right)^2 - \pi \left(Q_{aa} - \tfrac{u\Delta}{\sqrt{\pi}} \overline{\psi}_{av,\mu_a}\psi_{av,\mu_a} \right)^2 \right] \\
& \times \exp\left[2\pi \left(Q^*_{r,a} - \tfrac{u\Delta}{\sqrt{\pi}} \overline{\psi}_{ret,\mu_r}\psi_{av,\mu_a} \right) \left(Q_{r,a} - \tfrac{u\Delta}{\sqrt{\pi}} \overline{\psi}_{av,\mu_a}\psi_{ret,\mu_r} \right) \right] \quad ,
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

wobei wir

$$\int d\mathbf{Q} := 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dQ_{rr}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dQ_{aa}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dReQ_{r,a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dImQ_{r,a} \tag{1.14}$$

vereinbart haben. Das Integral erhält dabei die Gestalt

$$Z = \int D\overline{\psi}D\psi dg d\lambda d\mathbf{Q}e^{-F} \tag{1.15}$$

mit

$$\begin{aligned} F \;=\;& \overline{\psi}_{ret,\mu_r}\left(-i\stackrel{0}{G}{}^{-1}_{ret,\mu_r} + 2u^2\Delta^2 g - 2u\Delta\sqrt{\pi}Q_{rr}\right)\psi_{ret,\mu_r} \\ &+\overline{\psi}_{av,\mu_a}\left(-i\stackrel{0}{G}{}^{-1}_{av,\mu_a} + 2u^2\Delta^2 g - 2u\Delta\sqrt{\pi}Q_{aa}\right)\psi_{av,\mu_a} \\ &+\overline{\psi}_{ret,\mu_r}\left(-2u\Delta\sqrt{\pi}Q_{ra}\right)\psi_{av,\mu_a} + \overline{\psi}_{av,\mu_a}\left(-2u\Delta\sqrt{\pi}Q_{ar}\right)\psi_{ret,\mu_r} \\ &+\sum_{\mu\neq\mu_r}\overline{\psi}_{ret,\mu}\left(-i\stackrel{0}{G}{}^{-1}_{ret,\mu} + 2\pi i\lambda\right)\psi_{ret,\mu} \\ &+\sum_{\mu\neq\mu_a}\overline{\psi}_{av,\mu}\left(-i\stackrel{0}{G}{}^{-1}_{av,\mu} + 2\pi i\lambda\right)\psi_{av,\mu} \\ & u^2\Delta^2 g^2 + \pi\left(Q_{rr}^2 + Q_{aa}^2 + 2Q_{ra}Q_{ra}^*\right) - 2\pi i\lambda g\ . \end{aligned} \tag{1.16}$$

3. Abintegration der "überflüssigen" ψ-Felder und Ausnutzung der Eins-Eigenschaft

Nun ist es möglich, die $\overline{\psi}$-und ψ-Felder unter Zuhilfenahme der Identität

$$\int D\overline{\psi}D\psi e^{-\overline{\psi}\mathbf{A}\psi} = \det\mathbf{A} = e^{Sp\ln\mathbf{A}} \tag{1.17}$$

abzuintegrieren. Hierbei entsteht aus der 1. bis 3. Zeile von (1.16) die Determinante einer 2x2-Matrix im ret-av-Raum. Aus der 4. und 5. Zeile hingegen entstehen die beiden Produkte

$$\prod_{\mu\neq\mu_{r_0}}\left(-i\stackrel{0}{G}{}^{-1}_{ret,\mu} + 2\pi i\lambda\right) \tag{1.18}$$

und

$$\prod_{\mu\neq\mu_{r_0}}\left(-i\stackrel{0}{G}{}^{-1}_{av,\mu} + 2\pi i\lambda\right)\ . \tag{1.19}$$

Aufgrund der in Abschnitt 2.2 gezeigten Eigenschaften der Greenschen Funktionen sind diese Produkte aber, und zwar für beliebiges λ, genau

$$\left(-i \overset{0}{G}{}^{-1}_{ret,\mu_r} +2\pi i\lambda\right)^{-1} \tag{1.20}$$

bzw.

$$\left(-i \overset{0}{G}{}^{-1}_{av,\mu_a} +2\pi i\lambda\right)^{-1} \quad . \tag{1.21}$$

Eine Umskalierung der Variablen g und λ gemäß

$$\frac{u\Delta}{\sqrt{\pi}} g \longrightarrow g \tag{1.22}$$

und

$$\frac{\sqrt{\pi}}{u\Delta} \lambda \longrightarrow \lambda \tag{1.23}$$

führt auf

$$Z = \int d\lambda dg d\mathbf{Q} e^{-F} \tag{1.24}$$

mit

$$\begin{aligned} F = -Sp \ln\left(-i\overset{\mathbf{0}}{\mathbf{G}}{}^{-1} + 2\sqrt{\pi}u\Delta\left(\mathbf{g}-\mathbf{Q}\right)\right) + Sp\ln\left(-i\overset{\mathbf{0}}{\mathbf{G}}{}^{-1} - i2\sqrt{\pi}u\Delta\mathbf{\Lambda}\right) \\ +\pi Sp\mathbf{Q}^2 + g^2 - 2\pi i\lambda g \end{aligned} \quad . \tag{1.25}$$

In dieser indexfreien Schreibweise stellen sowohl $\mathbf{Q}$ als auch $\overset{0}{G}{}^{-1}$, $\mathbf{g}$ und $\mathbf{\Lambda}$ Matrizen im ret-av-Raum dar, wobei die letzteren drei nur Diagonalelemente aufweisen:

$$\overset{\mathbf{0}}{\mathbf{G}}{}^{-1} = \begin{pmatrix} \overset{0}{G}{}^{-1}_{ret,\mu_r} & 0 \\ 0 & \overset{0}{G}{}^{-1}_{av,\mu_a} \end{pmatrix}, \tag{1.26}$$

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}, \tag{1.27}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{1.28}$$

4. Ersetzung von λ durch Ableitungen nach g

Im folgenden wird das Integral (1.24) mit (1.25) weiter vereinfacht. Zunächst läßt sich die Matrix $\mathbf{\Lambda}$ in $Sp\ln\left(-i\overset{\mathbf{o}}{\mathbf{G}}^{-1}-i2\sqrt{\pi}u\Delta\mathbf{\Lambda}\right)$ ersetzen durch

$$\mathbf{\Lambda}=\frac{1}{2\pi i}\partial_g\exp\left(2\pi i\lambda g\right):=\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial g} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial g}\end{pmatrix}\exp\left(2\pi i\lambda g\right)\ . \tag{1.29}$$

Die einzige λ-Abhängigkeit verbleibt danach in $e^{2\pi i\lambda g}$ und kann zu $\delta\left(g\right)$ abintegriert werden. Übrig bleibt hierbei das Integral

$$\begin{aligned}Z=\int d\mathbf{Q}dg\quad&\exp\left[-\pi Sp\mathbf{Q}^2+Sp\ln\left(-i\overset{\mathbf{o}}{\mathbf{G}}^{-1}+2\sqrt{\pi}u\Delta\left(\mathbf{g}-\mathbf{Q}\right)\right)-\pi g^2\right]\\&\times\exp\left[Sp\ln\left(-i\overset{\mathbf{o}}{\mathbf{G}}^{-1}+\tfrac{u\Delta}{\sqrt{\pi}}\partial_g\right)\right]\delta\left(g\right)\qquad .\end{aligned}\tag{1.30}$$

5. Partielle Integration

Entwickelt man den Ausdruck

$$\exp\left[Sp\ln\left(-i\overset{\mathbf{o}}{\mathbf{G}}^{-1}+\frac{u\Delta}{\sqrt{\pi}}\partial_g\right)\right]\delta\left(g\right)\tag{1.31}$$

nach Potenzen von u, so entstehen Ableitungen der δ-Funktion in allen Ordnungen. Diese können gemäß der Regel

$$\begin{aligned}\int dxf\left(x\right)\left(\frac{d^n}{dx^n}\delta\left(x\right)\right)\quad&=\left(-1\right)^n\int dx\delta\left(x\right)\left(\frac{d^n}{dx^n}f\left(x\right)\right)\\&=\left(-1\right)^n\left(\frac{d^n}{dx^n}f\left(x\right)\right)\,|_{x=0}\end{aligned}\tag{1.32}$$

auf die restlichen g-abhängigen Terme des Integranden übergeworfen werden, und man erhält

$$\begin{aligned}Z=\quad&\exp\left[-Sp\ln\left(-i\overset{\mathbf{o}}{\mathbf{G}}^{-1}-\tfrac{u\Delta}{\sqrt{\pi}}\partial_g\right)\right]\exp\left(-\pi g^2\right)\\&\times\int d\mathbf{Q}\exp\left[-\pi Sp\mathbf{Q}^2+Sp\ln\left(-i\overset{\mathbf{o}}{\mathbf{G}}^{-1}+2\sqrt{\pi}u\Delta\left(\mathbf{g}-\mathbf{Q}\right)\right)\right]\,|_{g=0}\quad .\end{aligned}\tag{1.33}$$

Mit (1.33) ist somit eine Formulierung der Theorie entstanden, die nur ein Integral über die tatsächlich interessierenden Q-Variablen enthält (zweite Zeile von 1.33) und in der das Wegheben von Vakuumschleifen durch geeignete Differentiationen geleistet wird.

2. Anwendung der g-Feld-Technik im nulldimensionalen Fall

In diesem Abschnitt sollen physikalisch relevante Größen, wie die Zustandsdichte und die Zweiteilchen-Greenfunktion berechnet werden. Das Ergebnis der Zustandsdichteberechnung steht dabei von vornherein fest: schließlich hatte sich die Unordnungsmittelung im vorliegenden nulldimensionalen Fall auf eine Mittelung über die Lage eines einzigen Energieniveaus reduziert. Die hierbei hineingesteckte Gaußverteilung muß auch als Resultat wieder herauskommen. Interessanter ist hingegen das Verhalten der Zweiteilchen-Greenfunktion. Verbaarschoot und Zirnbauer hatten in [17] das Versagen des Replicatricks bei der Bestimmung eines nichtstörungstheoretischen Resultats gezeigt, welches zuvor Efetov [18] mit der Supersymmetriemethode erzielt hatte. Beide Ergebnisse resultierten dabei aus der Behandlung eines nichtlinearen σ-Modells. Wesentlich dabei ist, daß die führende Ordnung dieser Zweiteilchen-Greenfunktion nicht ω^{-2} , wie man anhand der Störungsentwicklung nach $u\Delta$ vermuten könnte, sondern ω^{-1} lautet. Hier wird dieses Resultat durch Aufsummation der gesamten Störungsreihe gefunden, was natürlich ebenfalls — entsprechend den Überlegungen von Anhang B — auf einfacherem Wege möglich wäre[2].

Zuvor soll jedoch, gleichsam zur Kontrolle der bisherigen Rechnungen, die Eins-Eigenschaft verifiziert werden.

[2]Das hier behandelte Problem ist nur eine "abgerüstete" Version des allgemeinen Problems der Berechnung von Energieniveauverteilungen, wie sie in der Theorie der Zufallsmatrizen vorgenommen wird (beginnend mit Dyson [36], ein neuerer Überblick bei Bohigas [37]). Um Anschluß an diese Aufgabenstellungen zu finden, müßte ebenfalls eine Art nichtlineares σ-Modell der g-Feld-Technik für den Fall mehrerer innerer Freiheitsgrade entwickelt werden.

2.1. Beweis der Eins-Eigenschaft in der g-Feld-Technik

Wir gehen aus von Formel (1.33), zerlegen $\mathbf{Q}$ gemäß

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[Q_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + Q_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + Q_2\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + Q_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] \tag{2.1}$$

nach Paulimatrizen, vereinbaren die Schreibweise

$$\vec{Q} := (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) \tag{2.2}$$

sowie

$$\int d\,\vec{Q} := \int_{-\infty}^{\infty} dQ_0 \int_{-\infty}^{\infty} dQ_1 \int_{-\infty}^{\infty} dQ_2 \int_{-\infty}^{\infty} dQ_3 \;. \tag{2.3}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} Z = \; & \frac{1}{\det\left(1 - i\frac{u\Delta}{\sqrt{\pi}}\overset{\mathbf{0}}{\mathbf{G}}\,\partial_g\right)} \exp\left(-\pi g^2\right) \\ & \times \int d\,\vec{Q}\,\exp\left(-\pi\,\vec{Q}^{\,2}\right)\det\left(1 + i2\sqrt{\pi}u\Delta\overset{\mathbf{0}}{\mathbf{G}}\left(\mathbf{g}-\mathbf{Q}\right)\right)\,|_{g=0} \end{aligned} \quad . \tag{2.4}$$

Weiterhin wählen wir die Energien für $\overset{0}{G}_{ret}$ und $\overset{0}{G}_{av}$ symmetrisch zur Fermienergie. In deren Nähe können die Gitter-Greenfunktionen auch bedenkenlos in die Kontinuumsform entwickelt werden:

$$\overset{0}{G}{}^{-1} := \overset{0}{G}{}^{-1}_{ret,\mu_r} = -\,\overset{0}{G}{}^{-1}_{av,\mu_a} = -\omega_{r_0}\Delta + i\Delta\delta \;. \tag{2.5}$$

Unter dieser Bedingung ergibt sich

$$\begin{aligned} Z \; &= \left[1 + \left(\frac{u\Delta}{\sqrt{\pi}}\,\overset{0}{G}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial g}\right)^2\right]^{-1} \exp\left(-\pi g^2\right) \\ & \quad \times \int d\,\vec{Q}\,\exp\left(-\pi\,\vec{Q}^{\,2}\right)\det\left(1 + i2\sqrt{\pi}u\Delta\overset{\mathbf{0}}{\mathbf{G}}\left(\mathbf{g}-\mathbf{Q}\right)\right)\,|_{g=0} \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\left(\frac{u\Delta}{\sqrt{\pi}}\,\overset{0}{G}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial g}\right)^2\right)^n\right]\exp\left(-\pi g^2\right) \\ & \quad \times \int d\,\vec{Q}\,\exp\left(-\pi\,\vec{Q}^{\,2}\right)\det\left(1 + i2\sqrt{\pi}u\Delta\overset{\mathbf{0}}{\mathbf{G}}\left(\mathbf{g}-\mathbf{Q}\right)\right)\,|_{g=0} \end{aligned} \tag{2.6}$$

mit

$$
\begin{aligned}
&\det\left[1 + i2\sqrt{\pi}u\Delta\overset{\mathbf{0}}{\mathbf{G}}(\mathbf{g}-\mathbf{Q})\right] \\
&= 1 - i2\sqrt{2\pi}u\Delta\overset{0}{G}Q_3 \\
&+ 2\pi(u\Delta)^2\overset{0}{G}{}^2\left(Q_0^2 - Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2 + 2g^2 - 2\sqrt{2}Q_0 g\right).
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

Von den Termen, die aus den Ableitungen nach g entstehen, bleiben unter Berücksichtigung von $g \to 0$ nur Hermitesche Polynome an der Stelle 0 übrig, wir erhalten lten

$$
Z = \int d\vec{Q}\, e^{-\pi\vec{Q}^2}\,(A + B + C)\ , \tag{2.8}
$$

worin die Abkürzungen A, B und C für

$$
\begin{aligned}
A =\ & \left(1 - i2\sqrt{2\pi}u\Delta\overset{0}{G}Q_3 + 2\pi(u\Delta)^2\overset{0}{G}{}^2\left(Q_0^2 - Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2\right)\right) \\
& \times\sum_{n=0}^{\infty}\left(iu\Delta\overset{0}{G}\right)^{2n} H_{2n}(0)\ , \\
B =\ & 4(u\Delta)^2\overset{0}{G}{}^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(iu\Delta\overset{0}{G}\right)^{2n} 4n(2n-1)H_{2n-2}(0)\ , \\
C =\ & 4\sqrt{2\pi}(u\Delta)^2\overset{0}{G}{}^2 Q_0\sum_{n=0}^{\infty}\left(iu\Delta\overset{0}{G}\right)^{2n} 2nH_{2n-1}(0)
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

stehen. Unter H_k wird darin das k-te Hermitesche Polynom verstanden, und es gilt

$$
H_{2n}(0) = (-1)^n\frac{(2n)!}{n!} \tag{2.10}
$$

sowie

$$
H_{2n+1}(0) = 0\ , \tag{2.11}
$$

so daß der dritte Summand in (2.8), C, verschwindet.

An dieser Stelle kann nun die Eins-Eigenschaft der Zustandssumme oder, synonym dazu, das Verschwinden aller Ordnungen in u gezeigt werden. Die in Q_0 und Q_3 linearen Terme des Integranden liefern 0, die 1 entsteht definitionsgemäß aus $\int d\vec{Q}\, e^{-\pi\vec{Q}^2} \times 1$. An u^2-proportionalen Termen müssen aus A

$$
\int d\vec{Q}\, e^{-\pi\vec{Q}^2}\left(-(u\Delta)^2\overset{0}{G}{}^2\right)(-1)\frac{2}{1} = 2(u\Delta)^2\overset{0}{G}{}^2 \tag{2.12}
$$

sowie

$$\int d\,\vec{Q}\; e^{-\pi\vec{Q}^2}\, 2\pi\,(u\Delta)^2 \stackrel{0}{G}{}^2 \left(Q_0^2 - Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2\right) = -2\,(u\Delta)^2 \stackrel{0}{G}{}^2 \qquad (2.13)$$

berücksichtigt werden, die sich gegenseitig heben.

Ab u^4 müssen jeweils drei Terme aus A und B zusammengefaßt werden. Diese ergeben jeweils

$$\begin{aligned}
& \left(iu\Delta \stackrel{0}{G}\right)^{2n+4} \\
& \quad \times \left[H_{2n+4}(0) + 2H_{2n+2}(0) - 4(2n+2)(2n+1)H_{2n}(0)\right] \\
= & \left(iu\Delta \stackrel{0}{G}\right)^{2n+4} \\
& \quad \times (-1)^n \left[\frac{(2n+4)!}{(n+2)!} - 2\frac{(2n+2)!}{(n+1)!} - 4(2n+2)(2n+1)\frac{(2n)!}{n!}\right] \\
= & \left(iu\Delta \stackrel{0}{G}\right)^{2n+4} \\
& \quad \times (-1)^n \frac{(2n+2)!}{(n+1)!} \left[(2n+3)(2n+4) - (2n+4) - 4(n+2)(n+1)\right] \\
= & \; 0 \qquad .
\end{aligned} \qquad (2.14)$$

Das Wegheben der Vakuumschleifen, für das in der Replicatechnik der Grenzwert N$\rightarrow$ 0 und in der Vielfrequenztechnik Summen der Gestalt $\sum_\mu \stackrel{0}{G}_\mu$ verantwortlich zeichnen, wird in der vorliegenden g-Feld-Technik von einem Zusammenwirken der Integrale über die physikalisch interessierenden Felder mit den Ableitungen nach einer (danach Null zu setzenden) Variable g geleistet. Im hier betrachteten nulldimensionalen Fall kann man sich sogar explizit von der g-Abhängigkeit befreien und eine Theorie konstruieren, die nur noch von den interessierenden Q-Feldern abhängt und die darüberhinaus eine einfache Berechnung beliebiger Korrelationsfunktionen gestattet.

2.2. Berechnung der Zustandsdichte

Die Gitter-Greenfunktionen unterschieden sich durch einen Faktor Δ von den üblichen Kontinuumsausdrücken. Die Zustandsdichte wird aus diesem Grunde durch

$$\rho(\omega_\mu) = -\frac{1}{\pi}\Delta Im G_{ret,\mu} \tag{2.15}$$

angegeben. Für G_{ret,μ_r} verwenden wir die Darstellung

$$G_{ret,\mu_r} = i \int D\overline{\psi} D\psi \overline{\psi}_{ret,\mu_r} \psi_{ret,\mu_r} e^{-F^0 - F^{WW}} \tag{2.16}$$

mit den bekannten Bezeichnungen

$$F^0 = -i \sum_{\alpha=ret,av} \sum_{\mu=-N}^{N-1} \overline{\psi}_{\alpha,\mu} \overset{0}{G}{}^{-1}_{\alpha,\mu} \psi_{\alpha,\mu} \tag{2.17}$$

und

$$F^{WW} = u^2\Delta^2 \left(\sum_{\alpha=ret,av} \sum_{\mu=-N}^{N-1} \overline{\psi}_{\alpha,\mu}\psi_{\alpha,\mu} \right)^2 \tag{2.18}$$

aus Abschnitt 3.1. Da wir die weiteren Berechnungen in der Q-Feldtechnik vornehmen wollen, erinnern wir uns zunächst an den Ausdruck (1.16), in dem $\overline{\psi}\psi$ und Q-Terme noch gemeinsam auftraten:

$$\begin{aligned} F \;=\; & \overline{\psi}_{ret,\mu_r} \left(-i \overset{0}{G}{}^{-1}_{ret,\mu_r} + 2u^2\Delta^2 g - 2u\Delta\sqrt{\pi} Q_{rr} \right) \psi_{ret,\mu_r} \\ & + \overline{\psi}_{av,\mu_a} \left(-i \overset{0}{G}{}^{-1}_{av,\mu_a} + 2u^2\Delta^2 g - 2u\Delta\sqrt{\pi} Qaa \right) \psi_{av,\mu_a} \\ & + \overline{\psi}_{ret,\mu_r} \left(-2u\Delta\sqrt{\pi} Q_{ra} \right) \psi_{av,\mu_a} + \overline{\psi}_{av,\mu_a} \left(-2u\Delta\sqrt{\pi} Q_{ar} \right) \psi_{ret,\mu_r} \\ & + \sum_{\mu\neq\mu_r} \overline{\psi}_{ret,\mu} \left(-i \overset{0}{G}{}^{-1}_{ret,\mu} + 2\pi i\lambda \right) \psi_{ret,\mu} \\ & + \sum_{\mu\neq\mu_a} \overline{\psi}_{av,\mu} \left(-i \overset{0}{G}{}^{-1}_{av,\mu} + 2\pi i\lambda \right) \psi_{av,\mu} \\ & u^2\Delta^2 g^2 + \pi \left(Q_{rr}^2 + Q_{aa}^2 + 2Q_{ra}Q_{ra}^* \right) - 2\pi i\lambda g \;. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Wie man sieht, kann man folgende Identität benutzen:

$$i\overline{\psi}_{ret,\mu_r}\psi_{ret,\mu_r} = \frac{i}{2u\Delta\sqrt{\pi}} \left(\frac{\partial}{\partial Q_{rr}} e^{-F} + 2\pi Q_{rr} \right) . \tag{2.20}$$

Nach der daraufhin möglichen Abintegration der ψ-Felder und unter Beachtung von (2.1) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
G_{ret,\mu_r} &= \frac{i}{2\sqrt{2\pi}u\Delta} \int d\,\vec{Q}\ e^{-\pi\vec{Q}^2} \left(\frac{\partial}{\partial Q_0} + \frac{\partial}{\partial Q_3} \right) (A+B+C) \\
&= \overset{0}{G}_{ret,\mu_r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(iu\Delta\ \overset{0}{G}_{ret,\mu_r} \right)^{2n} (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

mit den in (2.9) angegebenen Bestimmungen von A, B und C. Die asymptotische Reihe (2.21) läßt sich geschlossen darstellen. Um das zu sehen, betrachten wir zunächst das Integral

$$
\int_0^{\infty} dx e^{-x^2-ax} \tag{2.22}
$$

mit $Re a > 0$. Entwickeln wir e^{-x^2} und integrieren die Reihe gliedweise, so erhalten wir

$$
\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{a}\right)^{2n} \frac{(2n)!}{n!} \ . \tag{2.23}
$$

Genau diese Struktur liegt in (2.21) aber vor. Man findet somit für G_{ret,μ_r}

$$
G_{ret,\mu_r} = \frac{1}{iu\Delta} \int_0^{\infty} \exp\left(-x^2 - \frac{1}{iu\Delta}\ \overset{0}{G}{}^{-1}_{ret,\mu_r}\ x \right) dx \ . \tag{2.24}
$$

An dieser Stelle sei eingefügt, daß tatsächlich

$$
Re\left(\frac{1}{iu\Delta}\ \overset{0}{G}{}^{-1}_{ret,\mu_r} \right) = Re\left(\frac{-\omega_{\mu_{r_0}}\Delta + i\delta\Delta}{iu\Delta} \right) = \frac{\delta}{u} > 0 \tag{2.25}
$$

gilt, wodurch die Gültigkeit der Entwicklung im nachhinein gerechtfertigt ist. Obiges Integral (2.24) läßt sich nun auswerten:

$$
G_{ret,\mu_r} = \frac{\sqrt{\pi}}{2iu\Delta} \exp\left(-\frac{1}{4u^2\Delta^2}\ \overset{0}{G}{}^{-2} \right) Erfc\left(\frac{1}{2iu\Delta}\ \overset{0}{G}{}^{-1} \right) \ ,
$$

wobei $Erfc(x) = 1 - Erf(x)$ gilt. Der Realteil von $Erf\left(\frac{1}{2iu\Delta}\overset{0}{G}{}^{-1}\right)$ geht mit $\delta \to 0$ ebenfalls gegen 0, so daß als Zustandsdichte erwartungsgemäß übrigbleibt:

$$\rho(\omega_\mu) = -\frac{1}{\pi}\Delta Im G_{ret,\mu} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}u}\exp\left(-\frac{\omega^2}{4u^2}\right) \ . \tag{2.26}$$

Wie oben bereits bemerkt, hätte dieses Ergebnis auch direkt aus der angenommenen Mittelung über das Potential

$$\int dV \frac{1}{2\sqrt{\pi}u}\exp\left(-\frac{V^2}{4u^2}\right)\ldots , \tag{2.27}$$

die schließlich nichts anderes als die Mittelung über die Lage eines einzelnen Niveaus ist, abgelesen werden können.

2.3. Berechnung der Zweiteilchen-Greenfunktion

Die Berechnung der Zweiteilchen-Greenfunktion (wir wählen hier $\langle Q_{rr}Q_{aa}\rangle$) stellt nach den Vorarbeiten der vorangegangenen Abschnitte kein Problem mehr dar. Wir haben zu berechnen:

$$\langle Q_{rr}Q_{aa}\rangle = \int d\,\vec{Q}\; e^{-\pi\vec{Q}^2}\frac{1}{2}\left(Q_0^2 - Q_3^2\right)(A+B) \ . \tag{2.28}$$

Unter Beachtung der Eins-Eigenschaft sieht man unmittelbar, daß von diesen Termen lediglich

$$\begin{aligned}
\langle Q_{rr}Q_{aa}\rangle &= \int d\,\vec{Q}\; e^{-\pi\vec{Q}^2}\frac{1}{2}\left(Q_0^2 - Q_3^2\right)^2 2\pi\,(u\Delta)^2\,\overset{0}{G}{}^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(iu\Delta\,\overset{0}{G}\right)^{2n} H_{2n}(0)\\
&= \frac{1}{\pi}u^2\Delta^2\,\overset{0}{G}{}^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(iu\Delta\,\overset{0}{G}\right)^{2n}(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}\\
&= \frac{u\Delta\,\overset{0}{G}}{i\pi}\int_0^{\infty}\exp\left(-x^2 - \frac{1}{iu\Delta}\,\overset{0}{G}{}^{-1}_{ret,\mu_{r_0}}\,x\right)dx\\
&= \frac{u\Delta\,\overset{0}{G}}{2i\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{1}{4u^2\Delta^2}\,\overset{0}{G}{}^{-2}\right)Erfc\left(\frac{1}{2iu\Delta}\,\overset{0}{G}{}^{-1}\right)
\end{aligned} \ , \tag{2.29}$$

übrigbleibt, ein Ausdruck somit, der sich für $\omega \to 0$ wie $\frac{1}{\omega}$ verhält. Dies steht in Übereinstimmung mit dem Ergebnis der Behandlung eines supersymmetrischen nichtlinearen σ-Modells [17].

3. Beweis der Äquivalenz von Vielfrequenztechnik und Supersymmetrietechnik

Die in diesem Kapitel entwickelte Methode, die Felder zu allen nicht interessierenden Frequenzen abzuintegrieren, erweist sich als geeignet, die Äquivalenz von Vielfrequenztechnik und Supersymmetriemethode zu beweisen. Souleiman [28] konnte diese Entsprechung in den ersten Ordnungen der Störungstheorie zeigen, indem in jeder dieser Ordnungen von den Identitäten der Vielfrequenztechnik Gebrauch gemacht wurde. Die g-Technik hat den Vorzug, daß die Eigenschaft der Vielfrequenztechnik

$$\prod_{\mu} \left(-i \overset{0}{G}{}^{-1}_{\alpha,\mu} + 2\pi i \lambda \right) = 1 \tag{3.1}$$

nur ein einziges Mal benutzt werden muß.

Wir gehen aus von den Gleichungen (1.7) und (1.10). Nach Abintegration der "unerwünschten" ψ-Felder und unter Berücksichtigung von (3.1) erhält man

$$Z = \int d\lambda dg \prod_{\alpha} d\overline{\psi}_{\alpha,\mu_\alpha} d\psi_{\alpha,\mu_\alpha} \left(-i \overset{0}{G}{}^{-1}_{\alpha,\mu_\alpha} + 2\pi i \lambda \right)^{-1} \exp\left(-\tilde{F}\right) \tag{3.2}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{F} = \ & \sum_{\alpha} \overline{\psi}_{\alpha,\mu_\alpha} \left(-i \overset{0}{G}{}^{-1}_{\alpha,\mu_\alpha} + 2u^2\Delta^2 g \right) \psi_{\alpha,\mu_\alpha} + u^2\Delta^2 \left(\sum_{\alpha} \overline{\psi}_{\alpha,\mu_\alpha} \psi_{\alpha,\mu_\alpha} \right)^2 \\ & -2\pi i \lambda g + u^2 \Delta^2 g^2 \end{aligned} \quad . \tag{3.3}$$

Nun wird der Nenner in (3.2) mit Hilfe eines Integrals über bosonische Variable dargestellt:

$$\prod_\alpha \left(-i \overset{0}{G}{}^{-1}_{\alpha,\mu_\alpha} + 2\pi i \lambda\right)^{-1}$$
$$= \; -\int \prod_\alpha \frac{1}{\pi} d\varphi^*_{\alpha,\mu_\alpha} d\varphi_{\alpha,\mu_\alpha} \exp\left(-\sum_\alpha \varphi^*_{\alpha,\mu_\alpha} \sigma_\alpha \left(-i \overset{0}{G}{}^{-1}_{\alpha,\mu_\alpha} + 2\pi i \lambda\right) \varphi_{\alpha,\mu_\alpha}\right) \; . \tag{3.4}$$

Bei diesem Gaußschen Integral über die bosonischen Felder φ und φ^* muß allerdings (im Gegensatz zur Integration über Graßmannvariable) auf die Konvergenz der Ausdrücke geachtet werden, weshalb die zusätzlichen Faktoren σ_α im Exponenten von (3.4) erforderlich werden. Führt man die Integration über λ aus, entsteht

$$\delta\left(g - \sum_\alpha \sigma_\alpha \varphi^*_{\alpha,\mu_\alpha} \varphi_{\alpha,\mu_\alpha}\right) ,$$

und nach der Integration über g bleibt

$$Z = -\int \prod_\alpha d\overline{\psi}_{\alpha,\mu_\alpha} d\psi_{\alpha,\mu_\alpha} \frac{1}{\pi} d\varphi^*_{\alpha,\mu_\alpha} d\varphi_{\alpha,\mu_\alpha} \exp\left(-F\right) \tag{3.5}$$

übrig, worin

$$\begin{aligned} F = \; & \sum_\alpha \left[\overline{\psi}_{\alpha,\mu_\alpha} \left(-i \overset{0}{G}{}^{-1}_{\alpha,\mu_\alpha}\right) \psi_{\alpha,\mu_\alpha} + \varphi^*_{\alpha,\mu_\alpha} \sigma_\alpha \left(-i \overset{0}{G}{}^{-1}_{\alpha,\mu_\alpha}\right) \varphi_{\alpha,\mu_\alpha}\right] \\ & + u^2 \Delta^2 \left[\sum_\alpha \left(\overline{\psi}_{\alpha,\mu_\alpha} \psi_{\alpha,\mu_\alpha} + \sigma_\alpha \varphi^*_{\alpha,\mu_\alpha} \varphi_{\alpha,\mu_\alpha}\right)\right]^2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

ist. Dies ist exakt der Ausdruck der Supersymmetrietechnik. Angemerkt sei noch, daß sich dieser Beweis unmittelbar auf höhere Dimensionen verallgemeinern läßt.

5. Die g-Feld-Technik in zwei Dimensionen

Die Überlegungen des vorangegangenen Kapitels sollen nun auf ausgedehnte ungeordnete Systeme übertragen werden. Konkret haben wir dabei, wie im dritten Kapitel, das Lokalisierungsproblem in 2D im Auge. Die Herleitung des entsprechenden Funktionalintegrals der g-Feld-Technik erfolgt im Abschnitt 5.1. Im Abschnitt 5.2 wird die Erhaltung der Eins-Eigenschaft bis zur Ordnung u^2 gezeigt. Im dritten Abschnitt wird das Funktionalintegral auf seinen retardierten Teil eingeschränkt. In diesem Spezialfall gelingt es, durch Ausnutzung der analytischen Eigenschaften der renormierten Greenschen Funktionen die Eins-Eigenschaft des Funktionalintegrals in allen Ordnungen von u zu zeigen, sofern man die höheren Ordnungen in $(E_F\tau)^{-1}$ [1]vernachlässigt. (Dies ist für das rein retardierte Problem durchaus gerechtfertigt, da hier im Gegensatz zum Gesamtproblem die Goldstonemoden, die trotz $(E_F\tau)^{-1} \ll 1$ große Beiträge in der Störungsentwicklung liefern, nicht vorhanden sind.) Unter dieser Einschränkung läuft der Beweis der Eins-Eigenschaft darauf hinaus zu zeigen, wie der Sattelpunktsbeitrag des Funktionalintegrals $\exp\left(-\pi\left(\overset{SP}{Q}_r\right)^2\right)$ in der Störungsreihe kompensiert wird. Der vierte Abschnitt beschäftigt sich mit der Herleitung des Diffusons im Rahmen der g-Feld-Technik. Nachdem die Gaußschen Fluktuationen des Q-Feldes abintegriert wurden, werden die zur Kompensation des entstandenen Diffusionsnenners nötigen Ableitungen nach g bis zur Ordnung u^2 bestimmt. Im fünften Abschnitt schließ-

[1] E_F ist die Fermienergie, τ ist die mittlere Stoßzeit im ungeordneten System. Mit den Konventionen dieser Arbeit gilt $\tau = \left(2u^2m\right)^{-1}$.

lich wird diese Kompensation des Diffusionsnenners in allen Ordnungen in u vorgeführt. Dies zeigt, daß es innerhalb der g-Feld-Technik durchaus möglich ist, den Weghebeprozeß ganzer Klassen von Diagrammen zu beherrschen.

1. Herleitung der g-Feld-Technik in 2D

Zur Einführung der notwendigen λ-und g-Felder verwenden wir zunächst dasjenige Vielfrequenz- Funktionalintegral, in dem die Feldanzahl noch nicht verdoppelt worden ist:

$$Z = \int D\overline{\psi} D\psi \exp\left(-F^0 - F^{WW}\right) \tag{1.1}$$

mit

$$F^0 = -i \sum_{\substack{\alpha=ret,av \\ \vec{k}}} \sum_{\mu=-N}^{N-1} \overline{\psi}_{\alpha,\mu}(\vec{k}) \overset{0}{G}{}^{-1}_{\alpha,\mu}(\vec{k}) \psi_{\alpha,\mu}(\vec{k}) \tag{1.2}$$

und

$$F^{WW} = u^2\Delta^2 \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2 \\ \vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3}} \overline{\psi}_{\alpha_1,\mu_1}(\vec{k}_1 + \vec{k}_3)\psi_{\alpha_1,\mu_1}(\vec{k}_2 + \vec{k}_3)\overline{\psi}_{\alpha_2,\mu_2}(\vec{k}_2)\psi_{\alpha_2,\mu_2}(\vec{k}_1) \,. \tag{1.3}$$

Aus dieser vollständigen Formulierung von F^{WW} lassen sich im weiteren die Terme für den Diffusions- und den Cooperkanal durch die Spezifizierungen

$$\vec{k}_3 = \vec{q} \quad \text{bzw.} \quad \vec{k}_3 = -\vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{q} \tag{1.4}$$

gewinnen. Da jedoch — wie wir sehen werden — die einzuführenden g- und λ-Felder mit zwei unabhängigen Impulsen indiziert werden müssen, deren Differenz sich nicht auf kleine Werte einschränken läßt, verwenden wir an dieser Stelle noch nicht die Spinordarstellung (1.20), (1.21), um mögliche Doppelüberdeckungen der Impulsbereiche zu vermeiden.

Zuerst werden die $\overline{\psi}\psi$-Bestandteile in F^{WW} in diejenigen zu den jeweils physikalisch interessierenden Frequenzen μ_α und in diejenigen zu allen anderen Frequenzen $\mu \neq \mu_\alpha$ sortiert:

$$\begin{aligned} F^{WW} = \ & u^2\Delta^2 \\ \times & \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3} \quad \{[\sum_\alpha \overline{\psi}_{\alpha,\mu_\alpha}(\vec{k}_1+\vec{k}_3)\psi_{\alpha,\mu_\alpha}(\vec{k}_2+\vec{k}_3) \\ & \quad + \sum_\alpha \sum_{\mu\neq\mu_\alpha} \overline{\psi}_{\alpha,\mu}(\vec{k}_1+\vec{k}_3)\psi_{\alpha,\mu}(\vec{k}_2+\vec{k}_3)] \\ & \quad \times[\sum_\alpha \overline{\psi}_{\alpha,\mu_\alpha}(\vec{k}_2)\psi_{\alpha,\mu_\alpha}(\vec{k}_1) \\ & \quad\quad + \sum_\alpha \sum_{\mu\neq\mu_\alpha} \overline{\psi}_{\alpha,\mu}(\vec{k}_2)\psi_{\alpha,\mu}(\vec{k}_1)]\} \quad . \end{aligned} \tag{1.5}$$

Die $\overline{\psi}\psi$-Terme zu den nicht interessierenden Frequenzen sollen nun summarisch durch ein Feld g ersetzt werden. Man sieht, daß dieses Feld — im Gegensatz zu dem vermittels einer Hubbard- Stratonovich-Transformation eingeführten Q-Feld — mit zwei unabhängigen $\vec{k}$-Indizes versehen werden muß. Zu beachten ist lediglich die Symmetriebeziehung

$$g\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right) = g^*\left(\vec{k}_2,\vec{k}_1\right) \quad . \tag{1.6}$$

Konkret erfolgt die Ersetzung der "überflüssigen" Terme durch Einschieben der Ausdrücke

$$\begin{aligned} 1 = \ & \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\vec{k}} d\lambda\left(\vec{k},\vec{k}\right) dg\left(\vec{k},\vec{k}\right) \\ & \times \exp\left\{2\pi i \sum_{\vec{k}} \lambda\left(\vec{k},\vec{k}\right)\left[g\left(\vec{k},\vec{k}\right) - \sum_\alpha \sum_{\mu\neq\mu_\alpha} \overline{\psi}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}\right)\psi_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{1.7}$$

sowie

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{\left[\vec{k}_1,\vec{k}_2\right]\in HR} d\lambda_1\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)d\lambda_2\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)dg_1\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)dg_2\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\times$$
$$\times\exp\left\{2\pi i\sum_{\left[\vec{k}_1,\vec{k}_2\right]\in HR}\lambda_1\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\left[g_1\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)-Re\sum_{\alpha}\sum_{\mu\neq\mu_\alpha}\overline{\psi}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_1\right)\psi_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_2\right)\right]\right\}$$
$$\times\exp\left\{2\pi i\sum_{\left[\vec{k}_1,\vec{k}_2\right]\in HR}\lambda_2\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\left[g_2\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)-Im\sum_{\alpha}\sum_{\mu\neq\mu_\alpha}\overline{\psi}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_1\right)\psi_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_2\right)\right]\right\}. \tag{1.8}$$

Dabei verweist die Beziehung $\left[\vec{k}_1,\vec{k}_2\right]\in HR$ darauf, daß $\vec{k}_1$ und $\vec{k}_2$ nur Werte in einer Hälfte eines 4-dimensionalen Raumes annehmen sollen, wobei auch die Hyperfläche $\vec{k}_1=\vec{k}_2$ ausgespart werden soll. Unter Beachtung von

$$\begin{aligned}
&Re\sum_{\alpha}\sum_{\mu\neq\mu_\alpha}\overline{\psi}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_1\right)\psi_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_2\right)\\
=&\ \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha}\sum_{\mu\neq\mu_\alpha}\left[\overline{\psi}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_1\right)\psi_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_2\right)+\overline{\left(\overline{\psi}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_1\right)\psi_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_2\right)\right)}\right]\\
=&\ \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha}\sum_{\mu\neq\mu_\alpha}\left[\overline{\psi}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_1\right)\psi_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_2\right)+\overline{\psi}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_2\right)\psi_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_1\right)\right]
\end{aligned} \tag{1.9}$$

und

$$\begin{aligned}
&Im\sum_{\alpha}\sum_{\mu\neq\mu_\alpha}\overline{\psi}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_1\right)\psi_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_2\right)\\
=&\ \tfrac{1}{2i}\sum_{\alpha}\sum_{\mu\neq\mu_\alpha}\left[\overline{\psi}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_1\right)\psi_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_2\right)-\overline{\left(\overline{\psi}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_1\right)\psi_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_2\right)\right)}\right]\\
=&\ \tfrac{1}{2i}\sum_{\alpha}\sum_{\mu\neq\mu_\alpha}\left[\overline{\psi}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_1\right)\psi_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_2\right)-\overline{\psi}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_2\right)\psi_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_1\right)\right]
\end{aligned} \tag{1.10}$$

kann (1.8) in

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\left[\vec{k}_1,\vec{k}_2\right]\in HR} d\lambda_1\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right) d\lambda_2\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right) dg_1\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right) dg_2\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)$$
$$\times \exp\left\{2\pi i \sum_{\left[\vec{k}_1,\vec{k}_2\right]\in HR} \left(\lambda_1\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right) g_1\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right) + \lambda_2\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right) g_2\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\right)\right\}$$
$$\times \exp\left\{-\pi i \sum_{\vec{k}_1\neq\vec{k}_2} \sum_{\alpha} \sum_{\mu\neq\mu_\alpha} \overline{\psi}_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_1\right) \psi_{\alpha,\mu}\left(\vec{k}_2\right) \lambda^*\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\right\} \tag{1.11}$$

umgeschrieben werden.

Sodann werden die Graßmannfelder zu den nicht interessierenden Frequenzen abintegriert. Man erhält

$$\exp\left(Sp_{|_{\mu\neq\mu_\alpha}} \ln\left(-i\overset{\mathbf{0}}{\mathbf{G}}^{-1} + 2\pi i\mathbf{\Lambda}\right)\right) \;, \tag{1.12}$$

wobei die Einschränkung $\mu \neq \mu_\alpha$ hinter der Spur darauf verweist, daß die Frequenzindizes der dahinterstehenden Matrix über alle Frequenzen *außer* μ_{ret} im retardierten und außer μ_{av} im avancierten Sektor laufen. Unter Verwendung der Identitäten der Vielfrequenztechnik erkennt man nun wieder , daß (1.12) identisch ist mit

$$\exp\left(-Sp_{|_{\mu=\mu_\alpha}} \ln\left(-i\overset{\mathbf{0}}{\mathbf{G}}^{-1} + 2\pi i\mathbf{\Lambda}\right)\right) \;, \tag{1.13}$$

worin die Frequenzindizes der Matrix *nur* μ_{ret} im retardierten und *nur* μ_{av} im avancierten Sektor umfassen. Unter $\mathbf{\Lambda}$ soll dabei in (1.13) die Matrix mit den Elementen

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha_1,\alpha_2}\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right) &= \delta_{\alpha_1,\alpha_2}\lambda\left(\vec{k}_1,\vec{k}_1\right) & \text{für } \vec{k}_1=\vec{k}_2 \\ &= \tfrac{1}{2}\delta_{\alpha_1,\alpha_2}\left(\lambda_1\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right) - i\lambda_2\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\right) & \text{für } \vec{k}_1\neq\vec{k}_2 \end{aligned} \tag{1.14}$$

verstanden werden.

Wie oben angedeutet, werden die Impulsbereiche in F^{WW} nun derart eingeschränkt, daß die verbleibenden Terme nur noch die störungstheoretisch relevanten Diffusions- und Cooperkanäle repräsentieren. Aus der Einschränkung $\vec{k}_3 = \vec{q}$ und $\vec{k}_3 = -\vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{q}$ ergibt sich

$$F^{WW} = u^2 \Delta^2 \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} \left[f^D \left(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q} \right) + f^C \left(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q} \right) \right] \tag{1.15}$$

mit

$$\begin{aligned} f^D \left(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q} \right) = & \left[\sum_\alpha \overline{\psi}_{\alpha,\mu_\alpha}(\vec{k}_1 + \vec{q}) \psi_{\alpha,\mu_\alpha}(\vec{k}_2 + \vec{q}) + g(\vec{k}_1 + \vec{q}, \vec{k}_2 + \vec{q}) \right] \\ & \times \left[\sum_\alpha \overline{\psi}_{\alpha,\mu_\alpha}(\vec{k}_2) \psi_{\alpha,\mu_\alpha}(\vec{k}_1) + g(\vec{k}_2, \vec{k}_1) \right] \quad , \\ f^C \left(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q} \right) = & \left[\sum_\alpha \overline{\psi}_{\alpha,\mu_\alpha}(\vec{k}_1 + \vec{q}) \psi_{\alpha,\mu_\alpha}(\vec{k}_2 + \vec{q}) + g(\vec{k}_1 + \vec{q}, \vec{k}_2 + \vec{q}) \right] \\ & \times \left[\sum_\alpha \overline{\psi}_{\alpha,\mu_\alpha}(-\vec{k}_1) \psi_{\alpha,\mu_\alpha}(-\vec{k}_2) + g(-\vec{k}_1, -\vec{k}_2) \right] \quad . \end{aligned} \tag{1.16}$$

Geht man analog zu (1.15)–(1.21) zur Spinordarstellung über, findet man

$$F^{WW} = 2u^2 \Delta^2 \left[X + Y + Z \right] \tag{1.17}$$

mit

$$\begin{aligned} X = & \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \\ \beta_1, \beta_2 \\ \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}}} \overline{\phi}_{\alpha_1, \mu_{\alpha_1}, \beta_1}(\vec{k}_1 + \vec{q}) \phi_{\alpha_1, \mu_{\alpha_1}, \beta_1}(\vec{k}_2 + \vec{q}) \overline{\phi}_{\alpha_2, \mu_{\alpha_2}, \beta_2}(\vec{k}_2) \phi_{\alpha_2, \mu_{\alpha_2}, \beta_2}(\vec{k}_1) \quad , \\ Y = & \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}}} \overline{\phi}_{\alpha,\beta}(\vec{k}_1) \phi_{\alpha,\beta}(\vec{k}_2) \left(g(\vec{k}_1 + \vec{q}, \vec{k}_2 + \vec{q}) + g(-\vec{k}_2 + \vec{q}, -\vec{k}_1 + \vec{q}) \right) \quad , \\ Z = & \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} g(\vec{k}_1 + \vec{q}, \vec{k}_2 + \vec{q}) \left(g(\vec{k}_2, \vec{k}_1) + g(-\vec{k}_1, -\vec{k}_2) \right) \quad . \end{aligned} \tag{1.18}$$

Der erste Term dieser Wechselwirkung, X, wird nun mittels der im Anhang A ausführlich beschriebenen Hubbard-Stratonovich-Transformation entkoppelt, wobei hervorgehoben werden muß, daß die Frequenzen der retardierten und der avancierten Felder auf je eine einzige beschränkt sind. Die daraufhin mögliche Abintegration der Graßmannfelder wird, wie ebenfalls in Anhang A dargelegt, durchgeführt, und nach einer trivialen Umskalierung $\frac{u\Delta}{\sqrt{\pi}}g \longrightarrow g$, $\frac{\sqrt{\pi}}{u\Delta}\lambda \longrightarrow \lambda$ erhält man

$$Z = \int D\mathbf{\Lambda} D\mathbf{g} D\mathbf{Q} \exp(-F) \tag{1.19}$$

mit

$$\begin{aligned} F = \; & \pi \sum_{\vec{q}} \widetilde{Sp}\mathbf{Q}^2\left(\vec{q}\right) - \tfrac{1}{2} Sp \ln\left(-i\overset{\mathbf{0}}{\mathbf{G}}^{-1} - \sqrt{2\pi}u\Delta\mathbf{Q} + 2\sqrt{\pi}u\Delta\mathbf{\Gamma}\right) \\ & + \pi \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} g\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\Gamma\left(\vec{k}_2,\vec{k}_1\right) \\ & + \widetilde{\widetilde{Sp}} \ln\left(-i\overset{\mathbf{0}}{\mathbf{G}}^{-1} + 2iu\Delta\mathbf{\Lambda}\right) - 2\pi i \sum_{\vec{k}} \lambda\left(\vec{k},\vec{k}\right) g\left(\vec{k},\vec{k}\right) \\ & - 2\pi i \sum_{\left[\vec{k}_1,\vec{k}_2\right]\in HR} \left[\lambda_1\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right) g_1\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right) + \lambda_2\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right) g_2\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\right] \; . \end{aligned} \tag{1.20}$$

Diese Formeln bedürfen einiger Erläuterung: das Integrationsmaß $\int D\mathbf{\Lambda} D\mathbf{g} D\mathbf{Q}$ ergibt sich aus (1.7), (1.8) sowie aus (4.4), wenn man die Frequenzindizes der Matrix $\mathbf{Q}$ auf je einen im retardierten und im avancierten Teil einschränkt. Konkret bedeutet dies

$$\begin{aligned} \int D\mathbf{Q} := \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} & \prod_{\alpha} \tfrac{1}{\sqrt{2}} dQ_{\substack{\alpha,\alpha \\ 1,1}}\left(\vec{0}\right) \\ & \times dReQ_{\substack{ret,av \\ 1,1}}\left(\vec{0}\right) dImQ_{\substack{ret,av \\ 1,1}}\left(\vec{0}\right) \\ & \times \prod_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \vec{q}\in HE}} dReQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ 1,1}}\left(\vec{q}\right) dImQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ 1,1}}\left(\vec{q}\right) \\ & \times \prod_{\vec{q}} dReQ_{\substack{ret,av \\ 1,2}}\left(\vec{q}\right) dImQ_{\substack{ret,av \\ 1,2}}\left(\vec{q}\right) \qquad , \end{aligned} \tag{1.21}$$

wobei in dieser Schreibweise der nun eindeutig durch α festgelegte Frequenzindex μ_α weggelassen wird. Die unterschiedlichen Spurbezeichnungen werden folgendermaßen verwendet: Sp bezieht sich auf α-, β- und $\vec{k}$- Indizes, $\widetilde{Sp}$ nur auf α- und

β- Indizes und $\widetilde{\widetilde{Sp}}$ nur auf α- und $\vec{k}$- Indizes. $\mathbf{\Lambda}$ wurde in (1.14) definiert. Unter $\mathbf{\Gamma}$ wird die Matrix mit den Elementen

$$\begin{aligned}&\mathbf{\Gamma}_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \beta_1,\beta_2}}\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\\ &= \delta_{\alpha_1,\alpha_2}\delta_{\beta_1,\beta_2}\sum_{\vec{q}}\left[g\left(\vec{k}_1+\vec{q},\vec{k}_2+\vec{q}\right)+g\left(-\vec{k}_2+\vec{q},-\vec{k}_1+\vec{q}\right)\right]\end{aligned} \tag{1.22}$$

verstanden.

Im folgenden verfahren wir ganz analog zu Abschnitt 4.1: alle Matrixelemente von $\mathbf{\Lambda}$ werden als Ableitungen nach den zugehörigen Matrixelementen von $\mathbf{g}$ in

$$\exp\left(-2\pi i\sum_{\left[\vec{k}_1,\vec{k}_2\right]\in HR}\left[\lambda_1\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)g_1\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)+\lambda_2\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)g_2\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\right]\right)$$

dargestellt. Sodann werden diese Ableitungen mittels partieller Integration auf die übrigen von $\mathbf{g}$ abhängigen Faktoren im Funktionalintegral übergeworfen, wobei ein Faktor -1 vor den jeweiligen Ableitungen in Rechnung zu stellen ist. Im Ergebnis dessen erhält man

$$\begin{aligned} Z = \; & \exp\left[-\widetilde{\widetilde{Sp}}\ln\left(-i\overset{\mathbf{0}}{\mathbf{G}}^{-1}-\frac{u\Delta}{\sqrt{\pi}}\partial_g\right)\right]\\ & \times\exp\left[-\pi\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,}g\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\Gamma\left(\vec{k}_2,\vec{k}_1\right)\right]\\ & \times\int D\mathbf{Q}\exp\left[-\frac{\pi}{4}\sum_{\vec{q}}\widetilde{Sp}\mathbf{Q}^2\left(\vec{q}\right)\right]\\ & \times\exp\left[\tfrac{1}{2}Sp\left(-i\overset{\mathbf{0}}{\mathbf{G}}^{-1}-\sqrt{2\pi}u\Delta\mathbf{Q}+2\sqrt{\pi}u\Delta\mathbf{\Gamma}\right)\right]\Big|_{g=0}\end{aligned} \tag{1.23}$$

mit den oben erläuterten Bezeichnungen und

$$\begin{aligned}\left(\partial_g\right)_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \beta_1,\beta_2}}\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right) &= \delta_{\alpha_1,\alpha_2}\delta_{\beta_1,\beta_2}\frac{\partial}{\partial g\left(\vec{k}_1,\vec{k}_1\right)} && \text{für } \vec{k}_1=\vec{k}_2,\\ &= \frac{1}{2}\delta_{\alpha_1,\alpha_2}\delta_{\beta_1,\beta_2}\left(\frac{\partial}{\partial g_1\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)}-i\frac{\partial}{\partial g_2\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)}\right) && \text{für } \vec{k}_1\neq\vec{k}_2\,.\end{aligned} \tag{1.24}$$

Erinnert sei ebenfalls noch an die Symmetrien von $\mathbf{Q}$:

$$Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \beta_1,\beta_2}}\left(\vec{q}\right) = Q^*_{\substack{\alpha_2,\alpha_1\\ \beta_2,\beta_1}}\left(-\vec{q}\right) \tag{1.25}$$

und

$$Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \beta_1,\beta_2}}\left(\vec{q}\right) = (-1)^{\beta_1+\beta_2} Q_{\substack{\alpha_2,\alpha_1\\ \overline{\beta_2},\overline{\beta_1}}}\left(\vec{q}\right) \ . \tag{1.26}$$

2. Beweis der Eins-Eigenschaft bis u^2

In diesem Abschnitt soll die Eins-Eigenschaft des oben abgeleiteten Funktionalintegrals bis zur zweiten Ordnung in u gezeigt werden. Da wir das Funktionalintegral der Vielfrequenztechnik identisch umgeformt haben, dient diese Rechnung genaugenommen nur der Kontrolle obiger Ableitung.

Zunächst müssen die Terme aus den zwei $\exp\left(\ldots Sp\ln(\ldots)\right)$ herausgeschrieben werden, welche tatsächlich zur zweiten Ordnung in u zu Z beitragen. Dazu gehört der Term $\sim u\mathbf{\Gamma}u\mathbf{\Gamma} \sim u\mathbf{g}u\mathbf{g}$ beispielsweise *nicht,* wenn man bedenkt, daß das Funktionalintegral an der Stelle g=0 genommen werden soll, nach jedem g also einmal abgeleitet werden muß, wodurch notwendigerweise ein Term $\sim$u^4 entsteht. Die tatsächlich zu $Z^{\left(u^2\right)}$ beitragenden Terme stammen aus

$$\begin{aligned}&(1 + D_1 + D_2 + D_3 + D_4) \times E \\ &\times \left[1 + F + \int D\mathbf{Q}\,(H_1 + H_2)\exp\left[-\frac{\pi}{4}\sum_{\vec{q}} \widetilde{Sp}\mathbf{Q}^2\left(\vec{q}\right)\right]\right] |_{g=0}\end{aligned} \tag{2.1}$$

mit den Bezeichnungen

$$
\begin{aligned}
D_1 &= i\frac{u\Delta}{\sqrt{\pi}} \sum_{\substack{\alpha \\ \vec{k}}} \overset{0}{G}_\alpha \left(\vec{k}\right) \frac{\partial}{\partial g\left(\vec{k},\vec{k}\right)} \qquad , \\
D_2 &= -\frac{u^2\Delta^2}{2\pi} \left(\sum_{\substack{\alpha \\ \vec{k}}} \overset{0}{G}_\alpha \left(\vec{k}\right) \frac{\partial}{\partial g\left(\vec{k},\vec{k}\right)} \right)^2 \qquad , \\
D_3 &= -\frac{u^2\Delta^2}{2\pi} \sum_{\substack{\alpha \\ \vec{k}}} \left(\overset{0}{G}_\alpha \left(\vec{k}\right) \frac{\partial}{\partial g\left(\vec{k},\vec{k}\right)} \right)^2 \qquad , \\
D_4 &= -\frac{u^2\Delta^2}{8\pi} \sum_{\substack{\alpha \\ \vec{k}_1 \neq \vec{k}_2}} \overset{0}{G}_\alpha \left(\vec{k}_1\right) \left(\frac{\partial}{\partial g_1\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)} - i\frac{\partial}{\partial g_1\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)} \right) \\
&\qquad \times \overset{0}{G}_\alpha \left(\vec{k}_2\right) \left(\frac{\partial}{\partial g_1\left(\vec{k}_2,\vec{k}_1\right)} - i\frac{\partial}{\partial g_1\left(\vec{k}_2,\vec{k}_1\right)} \right) \qquad ,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
E &= \exp\left[-\pi \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{q}} g\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right) \Gamma\left(\vec{k}_2,\vec{k}_1\right) \right] \quad , \\
F &= 2i\sqrt{\pi}u\Delta \sum_{\substack{\alpha \\ \vec{k}}} \overset{0}{G}_\alpha \left(\vec{k}\right) \Gamma\left(\vec{k},\vec{k}\right)
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

und

$$
\begin{aligned}
H_1 &= \tfrac{1}{2}u^2\Delta^2 \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \beta_1,\beta_2 \\ \vec{k},\vec{q}}} \overset{0}{G}_{\alpha_1} \left(\vec{k}+\vec{q}\right) \overset{0}{G}_{\alpha_2} \left(\vec{k}\right) Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \beta_1,\beta_2}} \left(\vec{q}\right) Q_{\substack{\alpha_2,\alpha_1 \\ \beta_2,\beta 1_2}} \left(-\vec{q}\right) \quad , \\
H_2 &= -\tfrac{1}{4}u^2\Delta^2 \left(\sum_{\substack{\alpha \\ \beta \\ \vec{k}}} \overset{0}{G}_\alpha \left(\vec{k}\right) Q_{\substack{\alpha,\alpha \\ \beta,\beta}} \left(\vec{0}\right) \right)^2 \qquad .
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Unter Berücksichtigung aller Symmetrien von **Q** und **g** entstehen aus den einzelnen Kombinationen die folgenden Beiträge: aus $D_1 \times F$:

$$-4u^2\Delta^2 \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \vec{k},\vec{q}}} \overset{0}{G}_{\alpha_1}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\overset{0}{G}_{\alpha_2}\left(\vec{k}\right) \; , \tag{2.5}$$

aus $D_2 \times E$:

$$2u^2\Delta^2 \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \vec{k},\vec{q}}} \overset{0}{G}_{\alpha_1}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\overset{0}{G}_{\alpha_2}\left(\vec{k}\right) \; , \tag{2.6}$$

aus $D_3 \times E$:

$$u^2\Delta^2 \sum_{\substack{\alpha \\ \vec{k}}} \overset{0}{G}_{\alpha}\left(\vec{k}\right)\overset{0}{G}_{\alpha}\left(\vec{k}\right) + u^2\Delta^2 \sum_{\substack{\alpha \\ \vec{q}}} \overset{0}{G}_{\alpha}\left(\frac{1}{2}\,\vec{q}\right)\overset{0}{G}_{\alpha}\left(\frac{1}{2}\,\vec{q}\right) \; , \tag{2.7}$$

aus $D_4 \times E$:

$$u^2\Delta^2 \left(\sum_{\substack{\alpha \\ \vec{k}_1 \neq \vec{k}_2}} \overset{0}{G}_{\alpha}\left(\vec{k}_1\right)\overset{0}{G}_{\alpha}\left(\vec{k}_2\right) + \sum_{\substack{\alpha \\ \vec{k},\vec{q};\vec{k}\neq\frac{1}{2}\vec{q}}} \overset{0}{G}_{\alpha}\left(-\vec{k}+\vec{q}\right)\overset{0}{G}_{\alpha}\left(\vec{k}\right) \right) \; , \tag{2.8}$$

aus H_2:

$$-u^2\Delta^2 \sum_{\substack{\alpha \\ \vec{k}_1,\vec{k}_2}} \overset{0}{G}_{\alpha}\left(\vec{k}_1\right)\overset{0}{G}_{\alpha}\left(\vec{k}_2\right) \; , \tag{2.9}$$

aus H_1:

$$u^2\Delta^2 \left(\sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \vec{k},\vec{q}}} \overset{0}{G}_{\alpha_1}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\overset{0}{G}_{\alpha_2}\left(\vec{k}\right) + \sum_{\substack{\alpha_1\neq\alpha_2 \\ \vec{k},\vec{q}}} \overset{0}{G}_{\alpha_1}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\overset{0}{G}_{\alpha_2}\left(\vec{k}\right) \right) \; . \tag{2.10}$$

Die Einschränkung $\alpha_1 \neq \alpha_2$ im zweiten Term von (2.10) stammt dabei von

$$Q_{\underset{1,2}{\alpha,\alpha}}\left(\vec{q}\right) = 0 \; . \tag{2.11}$$

Addiert man die Terme (2.5) bis (2.10) auf, erhält man erwartungsgemäß Null. Wiederum sieht man, daß sich die von der Q-Integration herrührenden Terme (2.9) und (2.10) mit denjenigen kompensieren, die aus den Ableitungen nach g und anschließender Grenzwertbildung g$\rightarrow$ 0 resultieren. Man muß jedoch feststellen, daß das Wegheben der Vakuumschleifen nicht in einer solch übersichtlichen und leicht handhabbaren Weise wie z.B. in der Vielfrequenz- oder der Replicatechnik erfolgt. Dies liegt nicht zuletzt daran, daß die Elemente des Funktionalintegrals, die das Wegheben ermöglichen, in den letztgenannten Techniken für alle Indizes (Replicaindizes n oder Frequenzindizes μ) *in der gleichen Form* auftreten, in der g-Feld-Technik aber nicht.

3. Beweis der Eins-Eigenschaft in allen Ordnungen in u für den rein retardierten Fall

In diesem Abschnitt wird ein Spezialfall behandelt, für den es gelingt, die Eins-Eigenschaft des Funktionalintegrals in der g-Feld-Technik in allen Ordnungen in u zu zeigen. Ausgangspunkt dafür ist die Beobachtung, daß Impulssummen der Gestalt

$$\sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}\right) \overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}+\vec{q}\right) \tag{3.1}$$

unter der Bedingung $E_F\tau >> 1$ als Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} dkk\, \overset{B}{G}_{ret}\left(k^2\right) \overset{B}{G}_{ret}\left(k^2+2\,\vec{k}_F\cdot\vec{q}\right) \tag{3.2}$$

geschrieben werden können[2]. Die beiden Pole des Integranden liegen dabei auf derselben Seite der reellen Achse: das Integral ist Null. Gleiches gilt auch für Produkte mit mehr als zwei retardierten Greenschen Funktionen. In dieser Näherung können also alle Produkte von Greenschen Funktionen vernachlässigt werden, wenn die Impulse von auch nur zwei dieser Funktionen eng benachbart sind. Berücksichtigt

[2]Die höheren Terme in $(E_F\tau)^{-1}$ können im Gegensatz zum *ret-av*-Fall weggelassen werden, da es hier keine weichen Moden gibt.

werden müssen lediglich solche Produkte, in denen die (Impuls-) Argumente der Greenschen Funktionen unabhängig voneinander sind. Unter dieser Voraussetzung gelingt es, einen Schematismus zu finden, mit dem man die Eins-Eigenschaft des Funktionalintegrals in allen Ordnungen (in u) bweisen kann.

Wir beginnen mit der Formulierung des Funktionalintegrals der g-Feld-Technik für den rein retardierten Fall. Die sich dabei ergebenden $Q_{\substack{ret,ret\\1,2}}$-Felder des "Cooperkanal" sind gemäß (3.5) gleich null, so daß man sich von vornherein auf den "Diffusionskanal" beschränken kann[3]. Die Herleitung erfolgt analog zu der des Gesamtproblems mit zwei Kanälen. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
Z = \int D\mathbf{Q} \quad & \exp\left[-\tfrac{\pi}{2}\sum_{\vec{q}} \mathbf{Q}^2\left(\vec{q}\right)\right] \\
& \times \exp\left[-Sp\ln\left(-i\overset{0}{\mathbf{G}}{}^{-1} - \frac{u\Delta}{\sqrt{\pi}}\partial_g\right)\right] \\
& \times \exp\left[-\pi\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} g\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\tilde{\Gamma}\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\right] \\
& \times \exp\left[Sp\ln\left(-i\overset{0}{\mathbf{G}}{}^{-1} - \sqrt{2\pi}u\Delta\mathbf{Q} + 2\sqrt{\pi}u\Delta\tilde{\mathbf{\Gamma}}\right)\right]\Big|_{g=0}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

mit

$$
\int D\mathbf{Q} = \int \frac{1}{\sqrt{2}} dQ(\vec{0}) \prod_{\vec{q}\in HE} dReQ\left(\vec{q}\right) dImQ\left(\vec{q}\right) \;, \tag{3.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_g\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right) &= \frac{\partial}{\partial g\left(\vec{k}_1,\vec{k}_1\right)} && \text{für } \vec{k}_1 = \vec{k}_2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial g_1\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)} - i\frac{\partial}{\partial g_2\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)}\right) && \text{für } \vec{k}_1 \neq \vec{k}_2
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

und

$$
\tilde{\Gamma}\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right) = \sum_{\vec{q}} g\left(\vec{k}_2+\vec{q},\vec{k}_1+\vec{q}\right) \;. \tag{3.6}
$$

[3]"Cooperkanal" und "Diffusionskanal" verweisen nur auf die jeweiligen Impulseinschränkungen. Es gibt natürlich im rein retardierten Fall weder ein Cooperon noch ein Diffuson.

Beide Spuren beziehen sich in diesem Fall auf Matrizen im $\vec{k}$-Raum. Zunächst wird durch Ableitung der Wirkung nach Q der Sattelpunkt bestimmt. Bis zur ersten Ordnung in u kann man dabei Beiträge, die aus Differentiationen nach g folgen würden, vernachlässigen. $\overset{SP}{Q}$ wird als homogen im Ortsraum angenommen. Man erhält die aus Abschnitt 3.2. bekannte Selbstkonsistenzgleichung

$$\overset{SP}{Q}_{ret} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} u\Delta \sum_{\vec{k}} \frac{1}{i\, \overset{0}{G}{}_{ret}^{-1}\left(\vec{k}\right) + \sqrt{2\pi} u\Delta\, \overset{SP}{Q}_{ret}} =: -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} u\Delta \sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}\right) \tag{3.7}$$

oder, in der ausgeschriebenen Form,

$$\overset{SP}{Q}_{ret} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} u\Delta \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\phi_k \int_0^{\infty} dk \frac{k}{i\Delta\left(\omega_0 - \frac{k^2}{2m} + i\delta - i\sqrt{2\pi} u\, \overset{SP}{Q}_{ret}\right)} . \tag{3.8}$$

mit der Lösung

$$\overset{SP}{Q}_{ret} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} um \tag{3.9}$$

in Bornscher Näherung. Setzen wir den Sattelpunkt in (3.3) ein und vereinbaren wir $\mathbf{Q} = \overset{SP}{\mathbf{Q}} + \widehat{\mathbf{Q}}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} Z = \quad & \exp\left[-Sp\ln\left(-i\overset{\mathbf{B}}{\mathbf{G}}{}^{-1}\right) + Sp\ln\left(-i\overset{\mathbf{B}}{\mathbf{G}}{}^{-1}\right)\right] \\ & \times \exp\left[-Sp\ln\left(1 + i\overset{\mathbf{B}}{\mathbf{G}}\left(\sqrt{2\pi}u\Delta\overset{\mathbf{SP}}{\mathbf{Q}} - \frac{u\Delta}{\sqrt{\pi}}\partial_g\right)\right)\right] \\ & \times \exp\left[-\pi \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} g\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right) \tilde{\Gamma}\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\right] \\ & \times \int D\mathbf{Q} \exp\left[-\tfrac{\pi}{2} \sum_{\vec{q}} \widehat{\mathbf{Q}}^2\left(\vec{q}\right)\right] \\ & \quad \times \exp\left[Sp\ln\left(1 - i\overset{\mathbf{B}}{\mathbf{G}}\left(\sqrt{2\pi}u\Delta\widehat{\mathbf{Q}} - 2\sqrt{\pi}u\Delta\tilde{\mathbf{\Gamma}}\right)\right) |_{o.1.O.}\right] |_{g=0} . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Die Abkürzung $o.1.O.$ hinter dem letzten $Sp\ln()$ weist wieder darauf hin, daß die Entwicklung dieses Spln ohne den Term erster Ordnung in $\widehat{Q}$, dh. den Term

$$\sim \sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}\left(\vec{k}\right) \widehat{Q}\left(\vec{0}\right)$$

zu verstehen ist, da dieser definitionsgemäß den (oben nicht mehr aufgeführten) Term $-\pi \overset{SP}{Q} \widehat{Q}$ kompensiert.

Gemäß der eingangs erläuterten Näherung der Impulsintegrale klassifizieren wir die Elemente der aus (3.10) hervorgehenden Störungsreihe in einfacher Weise:

$$\sum_{\vec{k}_1 \dots \vec{k}_n} \overset{B}{G}\left(\vec{k}_1\right) \overset{B}{G}\left(\vec{k}_2\right) \dots \overset{B}{G}\left(\vec{k}_n\right) \begin{cases} \approx 0 & \text{falls für mindestens ein i und ein j} \neq \text{i gilt, daß } \vec{k}_j = \vec{k}_i + \vec{q}\,, \\ = \left(i \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}u\Delta} \overset{SP}{Q}\right)^n & \text{andernfalls}\,. \end{cases} \tag{3.11}$$

Diese Klassifikation gestattet nun eine enorme Einschränkung der zu berücksichtigenden Glieder der Störungsentwicklung von (3.10). Zunächst kann man zeigen, daß alle aus

$$Sp\ln\left(1 - i\overset{\mathbf{B}}{\mathbf{G}}\left(\sqrt{2\pi}u\Delta\widehat{\mathbf{Q}} - 2\sqrt{\pi}u\Delta\widetilde{\mathbf{\Gamma}}\right)\right)|_{o.1.O} \tag{3.12}$$

hervorgehenden Glieder (im Sinne obiger Näherung) verschwinden. Erstens sieht man nämlich, daß alle Terme der Gestalt

$$Sp\overset{\mathbf{B}}{\mathbf{G}}\,\mathbf{Q} \dots \overset{\mathbf{B}}{\mathbf{G}}\,\mathbf{Q} \dots \tag{3.13}$$

wegfallen, da das Impulsargument von $\mathbf{Q}$ nur von der Größenordnung $\vec{q}$ ist und somit eine Nachbarschaft der Impulse zweier Greenscher Funktionen bedingt. Zweitens erkennt man, daß jeder Term

$$\dots \overset{B}{G}\left(\vec{k}_1\right) \widetilde{\Gamma}\left(\vec{k}_1, \vec{k}_2\right) = \dots \overset{B}{G}\left(\vec{k}_1\right) \sum_{\vec{q}} g\left(\vec{k}_2 + \vec{q}, \vec{k}_1 + \vec{q}\right) \tag{3.14}$$

nur dann einen Beitrag leistet, wenn eine Ableitung aus

$$Sp\ln\left(1 + i\overset{\mathbf{B}}{\mathbf{G}}\;\left(\sqrt{2\pi}u\Delta\overset{\mathbf{SP}}{\mathbf{Q}} - \frac{u\Delta}{\sqrt{\pi}}\partial_g\right)\right) \tag{3.15}$$

auf ihn angewandt wird, wodurch notwendigerweise eine Greensche Funktion mit dem benachbarten Impulsargument $\vec{k}_1 + \vec{q}$ an $\overset{B}{G}\left(\vec{k}_1\right)$ gekoppelt wird. Weiterhin beschränken sich die aus

$$-Sp \ln\left(1 + i\overset{\mathbf{B}}{\mathbf{G}}\ \left(\sqrt{2\pi}\mathrm{u}\Delta\overset{\mathbf{SP}}{\mathbf{Q}} - \frac{u\Delta}{\sqrt{\pi}}\partial_g\right)\right) \tag{3.16}$$

stammenden $\overset{SP}{Q}$-abhängigen Beiträge auf denjenigen der ersten Ordnung

$$-iu\Delta\sqrt{2\pi}\ \overset{SP}{Q}\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}\left(\vec{k}\right) = +\pi\ \overset{SP}{Q}^2 \quad , \tag{3.17}$$

da alle anderen zu Termen mit $\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}\left(\vec{k}\right)\ \overset{B}{G}\left(\vec{k}\right)$ führen würden. Unter Berücksichtigung dieser Überlegungen und nach Abintegration der noch verbliebenen $\widehat{Q}\widehat{Q}$-Terme im Exponenten erhält man

$$\begin{aligned} Z \approx\ & \exp\left(+\tfrac{\pi}{2}\ \overset{SP}{Q}^2\right) \\ & \times\exp\left(-Sp\ln\left(1 - i\overset{\mathbf{B}}{\mathbf{G}}\ \frac{u\Delta}{\sqrt{\pi}}\partial_g\right)\right) \\ & \times\exp\left(-\pi\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{q}} g\left(\vec{k}_1 + \vec{q}, \vec{k}_2 + \vec{q}\right) g\left(\vec{k}_2, \vec{k}_1\right)\right) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Auch dieser Ausdruck läßt sich unter Bezugnahme auf die Klassifikation (3.11) vereinfachen. Man entwickle die beiden letzten Faktoren in eine Störungsreihe nach $u\Delta$. Für eine gegeben Potenz der Ordnung $2n$ benötigt man dazu aus dem letzten Faktor den Beitrag

$$\left(-\pi\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{q}} g\left(\vec{k}_1 + \vec{q}, \vec{k}_2 + \vec{q}\right) g\left(\vec{k}_2, \vec{k}_1\right)\right)^n \quad . \tag{3.19}$$

Die darin enthaltenen g' s müssen von entsprechenden Ableitungen ∂_g beseitigt werden, wobei unter Beachtung von (3.5)

$$\partial_g\left(\vec{k}_1, \vec{k}_2\right) g\left(\vec{k}_3, \vec{k}_4\right) = \delta_{\vec{k}_1,\vec{k}_3}\delta_{\vec{k}_2,\vec{k}_4} \tag{3.20}$$

gilt. Die erforderlichen 2n-fachen Ableitungen ∂_g ergeben sich aus der Entwicklung von

$$\exp\left(-Sp\ln\left(1-i\overset{\mathbf{B}}{\mathbf{G}}\;\frac{u\Delta}{\sqrt{\pi}}\partial_g\right)\right) \tag{3.21}$$

und treten in den verschiedensten Kombinationen

$$\sim\left(Sp\left(\overset{\mathbf{B}}{\mathbf{G}}\;\partial_{\mathrm{g}}\right)\right)^{m_1}\left(Sp\left(\overset{\mathbf{B}}{\mathbf{G}}\;\partial_{\mathrm{g}}\right)^2\right)^{m_2}\ldots\left(Sp\left(\overset{\mathbf{B}}{\mathbf{G}}\;\partial_{\mathrm{g}}\right)^{2n}\right)^{m_{2n}} \tag{3.22}$$

mit der Einschränkung

$$\sum_{l=1}^{2n} m_l \times l = 2n \tag{3.23}$$

auf. Gefordert wird nun, daß bei der Differentiation von (3.19) keine zusätzliche "Rückinformation" über die Impulsargumente der $\overset{B}{G}$ entsteht, weil diese unabhängig voneinander sein sollen. Es zeigt sich, daß dies in (3.22) nur von der Kombination

$$\left(Sp\left(i\overset{\mathbf{B}}{\mathbf{G}}\;\;\partial_{\mathrm{g}}\right)^2\right)^{m_2} \tag{3.24}$$

mit $m_2 = n$ gewährleistet wird, und dies auch nur dann, wenn die beiden Ableitungen unter jeder Spur auf die je benachbarten g' s in einem Faktor von (3.19) angewandt werden. In allen anderen Fällen kommt es durch die bei den Ableitungen auftretenden Kroneckersymbole zu Korrelationen zwischen den abzuintegrierenden Impulsen.

Welche Beiträge bleiben nun in den einzelnen Ordnungen übrig? Durch Permutation der verschiedenen $Sp\left(i\overset{\mathbf{B}}{\mathbf{G}}\;\partial_g\right)^2$ auf die einzelnen Faktoren in (3.19) entsteht ein Faktor $n!$. Aus der Vertauschung innerhalb jedes einzelnen $Sp\left(i\overset{\mathbf{B}}{\mathbf{G}}\;\partial_g\right)^2$ entsteht eine 2; insgesamt also 2^n. Unter Berücksichtigung der Entwicklungskoeffizienten der exp(...) erhalten wir

$$n!2^n \times \frac{1}{n!}(-1)^n u^{2n}\Delta^{2n}\frac{1}{2^n\pi^n}\left(\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}\;\;\left(\vec{k}\right)\right)^{2n} \times (-1)^n\pi^n\frac{1}{n!} \tag{3.25}$$

$$= \left(-\frac{\pi}{2}\overset{SP}{Q^2}\right)^n \;.$$

Summiert man über alle Potenzen n auf, erhält man

$$Z = 1. \tag{3.26}$$

Das Ergebnis dieses Abschnittes, die vollständige Kompensation des Sattelpunktsbeitrages durch Ableitungsterme, läßt sich unmittelbar auch auf den Sattelpunktsbeitrag des vollständigen, *ret*- und *av*-Bestandteile umfassenden Funktionalintegrals übertragen.

4. Diffusionsnäherung bis u^2

In diesem Abschnitt soll die Anwendbarkeit der g-Feld-Technik auf physikalisch relevante Probleme anhand der Berechnung des Diffusons gezeigt werden. Wiederum steht dabei nicht das Ergebnis im Vordergrund, welches sowohl in der Replica-, der Supersymmetrie- als auch in der Vielfrequenztechnik (siehe Abschnitt 3.2) in einfacher Weise gewonnen werden kann, als vielmehr die technische Handhabbarkeit der g-Feld-Technik. Während in Replica-, Supersymmetrie- und Vielfrequenztechnik diejenigen Felder, deren Korrelationsfunktionen berechnet werden sollen, und diejenigen, die lediglich zum Wegheben geschlossener Schleifen dienen, in einer *einheitlichen* Struktur vorliegen, ist dies in der g-Feld-Technik nicht der Fall. Eher schon ähnelt sie einer Supersymmetrietechnik, die wir so modifizieren, daß ihr Fermi-Fermi-Sektor[4] wie gewöhnlich durch ein Q-Feld repräsentiert, ihr Bose-Fermi-, Fermi-Bose und Fermi-Fermi-Sektor aber keiner Hubbard-Stratonovich-Transformation unterworfen werden. In einer dergestalt abgewandelten Supersymmetrietechnik wäre es nötig, für eine gegebene Näherung des Q-Feld-Funktionalintegrals solche Diagrammklassen des Bose-Fermi-, Fermi-Bose- und des Bose-Bose-Sektors zu finden, die gerade die Terme aus der Q-Feld-Näherung kompensieren. Demgegenüber werden in einer "normalen" Supersymmetrietechnik [18], in der alle Sektoren mittels Hubbard-Stratonovich-Transformation behandelt werden, die benötigten Kompensationsterme dadurch gewonnen, daß für das Funktionalintegral über die Q-Felder des Bose-Fermi-, Fermi-Bose- und des

[4]Fermi-Fermi, Bose-Fermi, und Bose-Bose beziehen sich auf die ursprünglichen Felder.

Bose-Bose-Sektors dieselbe Näherung wie für dasjenige des Fermi-Fermi-Sektors angewandt wird.

Ausgehend von dieser Analogiebetrachtung läßt sich die Vorgehensweise in der g-Feld-Technik wie folgt skizzieren: zunächst werden — ohne die g-Quellen zu berücksichtigen — die gewünschten Näherungen des Q-Feld-Funktionalintegrals ausgeführt. Sodann werden diejenigen aus Ableitungen nach g stammenden Terme gesucht, die gerade zum Wegheben der geschlossenen Schleifen nötig sind. Diese Prozedur kann im Einzelfall und insbesondere in hohen Ordnungen der Störungstheorie zu aufwendigen kombinatorischen Berechnungen führen. Die *Existenz* der jeweiligen Kompensationsterme ist indessen durch die Ableitung der g-Feld-Technik aus der Vielfrequenztechnik abgesichert.

Dieses Programm soll hier anhand der Berechnung des Diffusons abgearbeitet werden. Zuerst werden die Q-Felder in Gaußscher Näherung abintegriert, woraufhin die Kompensation des Diffusionsnenners durch Ableitungen nach g in der Ordnung u^2 gezeigt wird.

Gaußsche Näherung des Q-Feld-Funktionalintegrals

Berechnet werden soll, wie im Abschnitt 3.2, die Korrelationsfunktion

$$\left\langle Q_{\substack{ret,av\\1,1}}\left(\vec{q}_0\right) Q^*_{\substack{ret,av\\1,1}}\left(\vec{q}_0\right)\right\rangle \ , \tag{4.1}$$

wobei unter der Mittelung $\langle\rangle$ ein Einfügen der jeweiligen Größe ins Funktionalintegral

$$\begin{aligned} Z = \ & \exp\left[-\widetilde{\widetilde{Sp}}\ln\left(-i\overset{0}{\mathbf{G}}{}^{-1} - \frac{u\Delta}{\sqrt{\pi}}\partial_g\right)\right] \\ & \times\exp\left[-\pi\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} g\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\Gamma\left(\vec{k}_2,\vec{k}_1\right)\right] \\ & \times\int D\mathbf{Q}\exp\left[-\frac{\pi}{4}\sum_{\vec{q}}\widetilde{Sp}\mathbf{Q}^2\left(\vec{q}\right)\right] \\ & \qquad \times\exp\left[\tfrac{1}{2}Sp\left(-i\overset{0}{\mathbf{G}}{}^{-1} - \sqrt{2\pi}u\Delta\mathbf{Q}+2\sqrt{\pi}u\Delta\mathbf{\Gamma}\right)\right]\Big|_{g=0} \end{aligned} \tag{4.2}$$

mit den in Abschnitt 5.1 angegebenen Bezeichnungen zu verstehen ist. In einem ersten Schritt wird dazu wiederum der Sattelpunkt des Feldes Q bestimmt, ohne den Einfluß der Quellen g zu berücksichtigen. Analog zum vorangegangenen Abschnitt erhalten wir dabei

$$\begin{aligned} \overset{SP}{Q}_{\substack{\alpha,\alpha\\ \beta,\beta}}\left(\vec{0}\right) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}u\Delta\sum_{\vec{k}}\frac{1}{i\,\overset{0}{G}_\alpha^{-1}\left(\vec{k}\right)+\sqrt{2\pi}u\Delta\,\overset{SP}{Q}_{\substack{\alpha,\alpha\\ \beta,\beta}}\left(\vec{q}\right)} \\ &\simeq -\sigma_\alpha\frac{1}{\sqrt{2\pi}}um \qquad . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Mit den Bezeichnungen $\mathbf{Q} = \overset{SP}{\mathbf{Q}} + \widehat{\mathbf{Q}}$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} Z = \ & \exp\left[-\widetilde{\widetilde{Sp}}\ln\left(1+i\overset{\mathbf{B}}{\mathbf{G}}\left(\sqrt{2\pi}u\Delta\overset{\mathbf{SP}}{\mathbf{Q}}-\frac{u\Delta}{\sqrt{\pi}}\partial_g\right)\right)\right] \\ & \times\exp\left[-\pi\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2}g\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\Gamma\left(\vec{k}_2,\vec{k}_1\right)\right] \\ & \times\int D\widehat{\mathbf{Q}}\ \ \exp\left[-\tfrac{\pi}{4}\widetilde{Sp}\overset{\mathbf{SP}}{\mathbf{Q}}^2-\tfrac{\pi}{4}\sum_{\vec{q}}\widetilde{Sp}\widehat{\mathbf{Q}}^2\left(\vec{q}\right)\right] \\ & \quad\times\exp\left[\tfrac{1}{2}Sp\ln\left(1-i\overset{\mathbf{B}}{\mathbf{G}}\left(\sqrt{2\pi}u\Delta\widehat{\mathbf{Q}}-2\sqrt{\pi}u\Delta\mathbf{\Gamma}\right)\right)_{o.1.O}\right]\Big|_{g=0}\ . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Sodann werden die Gaußschen Fluktuationen des $Q-$Funktionalintegrals in der Form

$$\begin{aligned} & \int D\widehat{\mathbf{Q}}\exp\left(-\frac{\pi}{4}\sum_{\vec{q}}\widetilde{Sp}\widehat{\mathbf{Q}}^2\left(\vec{q}\right)+\frac{\pi}{2}u^2\Delta^2 Sp\overset{\mathbf{B}}{\mathbf{G}}\ \widehat{\mathbf{Q}}\ \overset{\mathbf{B}}{\mathbf{G}}\ \widehat{\mathbf{Q}}\right) \\ = \ & \int D\widehat{\mathbf{Q}}\exp\left(-\pi\left(A+B+C+D\right)\right) \end{aligned} \tag{4.5}$$

mit

$$
\begin{aligned}
A =& \frac{1}{2}\sum_{\alpha} Q_{\substack{\alpha,\alpha\\1,1}}\left(\vec{0}\right) Q_{\substack{\alpha,\alpha\\1,1}}\left(\vec{0}\right)\left(1-2u^2\Delta^2\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}_{\alpha}\left(\vec{k}\right)\overset{B}{G}_{\alpha}\left(\vec{k}\right)\right)\ ,\\
B =& Q_{\substack{ret,av\\1,1}}\left(\vec{0}\right) Q^{*}_{\substack{ret,av\\1,1}}\left(\vec{0}\right)\left(1-2u^2\Delta^2\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}\right)\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}\right)\right)\ ,\\
C =& \sum_{\substack{\alpha_1;\alpha_2\\ \vec{q}\in HE}} Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\1,1}}\left(\vec{q}\right) Q^{*}_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\1,1}}\left(\vec{q}\right)\left(1-2u^2\Delta^2\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}_{\alpha_1}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\overset{B}{G}_{\alpha_2}\left(\vec{k}\right)\right),\\
D =& \sum_{\vec{q}} Q_{\substack{ret,av\\1,2}}\left(\vec{q}\right) Q_{\substack{ret,av\\1,2}}\left(\vec{q}\right)\left(1-2u^2\Delta^2\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

identifiziert und zu

$$
\begin{aligned}
&\prod_{\alpha}\left(1-2u^2\Delta^2\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}_{\alpha}\left(\vec{k}\right)\overset{B}{G}_{\alpha}\left(\vec{k}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\\
&\times\left(1-2u^2\Delta^2\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}\right)\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}\right)\right)^{-1}\\
&\times\prod_{\substack{\alpha_1;\alpha_2\\ \vec{q}\in HE}}\left(1-2u^2\Delta^2\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}_{\alpha_1}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\overset{B}{G}_{\alpha_2}\left(\vec{k}\right)\right)^{-1}\\
&\times\prod_{\vec{q}}\left(1-2u^2\Delta^2\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}\right)\right)^{-1}
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

abintegriert. Mit Verweis auf den vorigen Abschnitt vernachlässigen wir alle Terme der Gestalt

$$
\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}_{\alpha}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\overset{B}{G}_{\alpha}\left(\vec{k}\right)\ .
$$

Weiterhin ist an dieser Stelle anzumerken, daß der Sattelpunktsbeitrag des Funktionalintegrals kompensiert wird durch Terme, deren Berechnung völlig analog zu der im vorangegangenen Abschnitt vorgeführten erfolgt. Damit reduziert sich das

Problem im folgenden auf die Bestimmung aller aus Differentiationen nach den Quellen g stammenden Terme, die den (Diffusions-)Nenner in

$$\prod_{\vec{q}} \left(1 - 2u^2 \Delta^2 \sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{ret} \left(\vec{k} + \vec{q} \right) \overset{B}{G}_{av} \left(\vec{k} \right) \right)^{-2} \tag{4.8}$$

kompensieren. (Die Potenz 2 resultiert dabei aus der Existenz von Diffusions- *und* Cooperkanal.)

Kompensation des Nenners bis u^2

In dieser Näherung bleibt von (4.8) lediglich

$$\begin{aligned} & \left(1 - 4u^2 \Delta^2 \sum_{\vec{k}, \vec{q}} \overset{B}{G}_{ret} \left(\vec{k} + \vec{q} \right) \overset{B}{G}_{av} \left(\vec{k} \right) \right)^{-1} \\ \approx \;\; & 1 + 4u^2 \Delta^2 \sum_{\vec{k}, \vec{q}} \overset{B}{G}_{ret} \left(\vec{k} + \vec{q} \right) \overset{B}{G}_{av} \left(\vec{k} \right) \end{aligned} \tag{4.9}$$

übrig. Beachtet man die Tatsache, daß der zweite Summand in der zweiten Zeile von (4.9) das Fermi-Fermi-Diagramm

repräsentiert (die dünnen durchgezogenen Linien sind die renormierten Greenfunktionen der fermionischen Felder, die durchbrochene Linie steht für die Potentialmittelung), so sieht man, daß er durch die jeweiligen Übersetzungen der Bose-Fermi-, Fermi-Bose- und Bose-Bose-Diagramme in die g-Technik kompensiert werden muß. Bei der Betrachtung von (4.4) sieht man leicht, daß diese Terme nur aus dem Bestandteil

$$
\begin{aligned}
&\exp\left[-\widetilde{\widetilde{\widetilde{S}}}p \ln\left(1 - i\overset{\mathbf{B}}{\mathbf{G}}\frac{u\Delta}{\sqrt{\pi}}\partial_g\right)\right] \\
&\times \exp\left[-\pi \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} g\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\Gamma\left(\vec{k}_2,\vec{k}_1\right)\right] \\
&\times \exp\left[\tfrac{1}{2}Sp\ln\left(1 + i\overset{\mathbf{B}}{\mathbf{G}}2\sqrt{\pi}u\Delta\mathbf{\Gamma}\right)\right]\,|_{g=0}\,.
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

stammen können. Das Pendant des Bose-Bose-Diagramms (die dicken Linien sind die renormierten Greenschen Funktionen der Bosefelder)

ergibt sich dabei, wenn je eine Ableitung $i \overset{B}{G}_{ret} \frac{u\Delta}{\sqrt{\pi}}\partial_g$ und eine Ableitung $i \overset{B}{G}_{av} \frac{u\Delta}{\sqrt{\pi}}\partial_g$ aus der ersten Zeile von (4.10) auf

$$
\exp\left[-\pi \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} g\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\Gamma\left(\vec{k}_2,\vec{k}_1\right)\right]
\tag{4.11}
$$

wirken. Dabei entsteht ein Term

$$
+4u^2\Delta^2 \sum_{\vec{k},\vec{q}} \overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}\right).
\tag{4.12}
$$

Die entsprechenden Gegenstücke der Fermi-Bose- und Bose-Fermi-Diagramme

und

resultieren aus dem Wirken von $i \overset{B}{G}_{ret/av} \frac{u\Delta}{\sqrt{\pi}}\partial_g$ aus der ersten Zeile auf die Terme $i \overset{B}{G}_{av/ret}\, 2\sqrt{\pi}u\Delta\Gamma$ aus der dritten Zeile von (4.10). Dabei tritt ein Term

$$-8u^2\Delta^2 \sum_{\vec{k},\vec{q}} \overset{B}{G}_{ret} \left(\vec{k}+\vec{q}\right) \overset{B}{G}_{av} \left(\vec{k}\right) \tag{4.13}$$

auf. Wie man sieht, heben sich erwartungsgemäß die Beiträge (4.12) und (4.13) mit dem entsprechenden Term aus (4.9) weg.

5. Diffusionsnäherung in allen Ordnungen in u

In diesem Abschnitt wird die Kompensation des Diffusionsnenners in allen Ordnungen in u durchgeführt. Zu diesem Zweck wird zuerst untersucht, welche Ableitungen nach g dabei eine Rolle spielen können. Übersetzt in die diagrammatische Sprache einer modifizierten Supersymmetrietechnik werden hier gewissermaßen die zusammenhängenden Diagramme

(zuzüglich der entsprechenden maximal gekreuzten Vertreter) aufgeschrieben, deren Kombinatorik danach ausgewertet wird.

5.1. Zusammenhängende Diagramme

Um die Kompensation des Diffusionsnenners (4.8) in allen Ordnungen aufzuzeigen, schreiben wir diesen in eine kompliziertere Form um, aus der sich allerdings die benötigten — aus Ableitungen nach g herrührenden — Kompensationsterme bequemer ablesen lassen:

$$\begin{aligned}
&\prod_{\vec{q}} \left(1 - 2u^2\Delta^2 \sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}+\vec{q}\right) \overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}\right)\right) \\
&= \exp\left[2\sum_{\vec{q}} \ln\left(1 - 2u^2\Delta^2 \sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}+\vec{q}\right) \overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}\right)\right)\right] \\
&= \exp\left[-2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(2u^2\Delta^2\right)^n \sum_{\vec{q}} \left(\sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}+\vec{q}\right) \overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}\right)\right)^n\right] \\
&= \sum_{M=0}^{\infty} \frac{(-2)^M}{M!}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(2u^2\Delta^2\right)^n \sum_{\vec{q}} \left(\sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}+\vec{q}\right) \overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}\right)\right)^n\right]^M .
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Dies läßt sich auch in der Form

$$1+\sum_{M=1}^{\infty}\sum_{N=1}^{M} \sum_{\substack{m_1,m_2,\dots m_N \\ \text{mit } m_i\neq 0 \text{ für } i=1..N \\ \text{und } m_1+\dots+m_N=M}} \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=n_1+1}^{\infty}\dots\sum_{n_N=n_{N-1}+1}^{\infty} \Theta\left(m_1,\dots m_N; n_1,\dots n_N\right) \tag{5.2}$$

notieren, worin

$$
\begin{aligned}
&\Theta\left(m_1,...m_N;n_1,...n_N\right)\\
=\;&\prod_{i=1}^{N}\left(-2\right)^{m_i}\left(2u^2\Delta^2\right)^{m_i n_i}\frac{1}{n_i^{m_i}m_i!}\\
&\times\left[\sum_{\vec{q}}\left(\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}\right)\right)^{n_1}\right]^{m_1}\\
&\times\left[\sum_{\vec{q}}\left(\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}\right)\right)^{n_2}\right]^{m_2}\\
&:\\
&\times\left[\sum_{\vec{q}}\left(\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}\right)\right)^{n_N}\right]^{m_N}
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

vereinbart wird.

Zunächst wollen wir feststellen, wie ein einzelner Faktor

$$
\sum_{\vec{q}}\left(\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}\right)\right)^{n_N}
\tag{5.4}
$$

in (5.3) aus Ableitungen nach g entstehen kann. Es stellt sich heraus, daß es dafür prinzipiell zwei verschiedene Möglichkeiten gibt.

1. Möglichkeit

Betrachten wir dazu die erste Zeile in (4.4): der Anteil

$$
i\sqrt{2\pi}u\Delta\,\overset{B}{\mathbf{G}}\overset{SP}{\mathbf{Q}}
$$

darf weggelassen werden, da er nicht zu Termen in (5.3) beitragen kann. Der dann verbleibende Rest des Exponenten hat die Gestalt

$$
\begin{aligned}
&-\widetilde{\widetilde{\widetilde{Sp}}}\ln\left(1-i\tfrac{u\Delta}{\sqrt{\pi}}\overset{B}{\mathbf{G}}\,\partial_g\right)=\\
&\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(i\frac{u\Delta}{\sqrt{\pi}}\right)^j\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\dots\vec{k}_j}\left[\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}_1\right)\dots\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}_j\right)+\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}_1\right)\dots\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}_j\right)\right]\\
&\qquad\times\partial_g\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\partial_g\left(\vec{k}_2,\vec{k}_3\right)\dots\partial_g\left(\vec{k}_j,\vec{k}_1\right)\quad.
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

Die einzelnen Summanden in (5.5) sollen im weiteren *Ableitungsketten* genannt werden. Demgemäß werden die aus der vierten Zeile von (4.4) herrührenden Summanden in

$$\tfrac{1}{2}Sp\ln\left(1+2\sqrt{\pi}u\Delta\overset{B}{\mathbf{G}}\,\mathbf{\Gamma}\right)=$$
$$-\sum_{l=1}^{\infty}\tfrac{1}{l}\left(-i2\sqrt{\pi}u\Delta\right)^{l}\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\cdots\vec{k}_l}\left[\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}_1\right)\ldots\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}_l\right)+\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}_1\right)\ldots\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}_l\right)\right]$$
$$\times\,\Gamma\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\Gamma\left(\vec{k}_2,\vec{k}_3\right)\ldots\Gamma\left(\vec{k}_j,\vec{k}_1\right) \tag{5.6}$$

im weiteren als Γ-*Ketten* bezeichnet.

Die erste Möglichkeit, einen Faktor der Gestalt (5.4) zu erhalten, besteht darin, daß eine Ableitungskette der Länge n mit retardierten Greenschen Funktionen auf eine Γ-Kette derselben Länge n mit avancierten Greenschen Funktionen wirkt (und umgekehrt). Dabei gilt, daß entweder alle Ableitungen auf den ersten Term innerhalb der $\vec{q}$-Summe

$$\Gamma\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)=\sum_{\vec{q}}\left[g\left(\vec{k}_1+\vec{q},\vec{k}_2+\vec{q}\right)+g\left(-\vec{k}_2+\vec{q},-\vec{k}_1+\vec{q}\right)\right] \tag{5.7}$$

wirken, oder alle auf den zweiten Term. Im ersten Fall muß die Reihenfolge der Ableitungen erhalten bleiben, im zweiten Fall muß sie umgedreht werden, wobei in beiden Fällen die erste Ableitung auf ein beliebiges Γ wirken kann. Faßt man diese Vorschriften zusammen, so entsteht beim Wirken der Ableitungskette

$$\tfrac{1}{n}\left(i\tfrac{u\Delta}{\sqrt{\pi}}\right)^{n}\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\cdots\vec{k}_n}\left[\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}_1\right)\ldots\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}_n\right)+\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}_1\right)\ldots\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}_n\right)\right]$$
$$\times\,\partial_g\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\partial_g\left(\vec{k}_2,\vec{k}_3\right)\ldots\partial_g\left(\vec{k}_n,\vec{k}_1\right)\quad. \tag{5.8}$$

auf die dazu passende Γ-Kette

$$\tfrac{1}{n}\left(-i2\sqrt{\pi}u\Delta\right)^{n}\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\cdots\vec{k}_l}\left[\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}_1\right)\ldots\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}_n\right)+\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}_1\right)\ldots\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}_n\right)\right]$$
$$\times\,\Gamma\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\Gamma\left(\vec{k}_2,\vec{k}_3\right)\ldots\Gamma\left(\vec{k}_n,\vec{k}_1\right) \tag{5.9}$$

ein Faktor

$$\begin{aligned} & -2 \times 2 \times n \times \frac{1}{n^2} \left(2u^2\Delta^2\right)^n \sum_{\vec{q}} \left(\sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{ret} \left(\vec{k} + \vec{q}\right) \overset{B}{G}_{av} \left(\vec{k}\right) \right)^n \\ = \; & -4 \frac{1}{n} \left(2u^2\Delta^2\right)^n \sum_{\vec{q}} \left(\sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{ret} \left(\vec{k} + \vec{q}\right) \overset{B}{G}_{av} \left(\vec{k}\right) \right)^n \qquad . \end{aligned} \tag{5.10}$$

Dabei stammt die erste 2 in der ersten Zeile von (5.10) von den zwei Möglichkeiten, *ret*- und *av*-Ketten zusammenzuführen, die zweite 2 von den zwei Summanden in (5.7) und der Faktor n von den n möglichen Γ , auf die die erste Ableitung $\partial_g \left(\vec{k}_1, \vec{k}_2\right)$ wirken kann (die Zuordnung der verbleibenden ∂_g auf die restlichen Γ ist dann — gemäß obiger Vorschrift — festgelegt).

Diese erste Möglichkeit, Faktoren der Gestalt (5.4) zu erzeugen, korrespondiert mit den gemischten Bose-Fermi-Diagrammen der oben erwähnten modifizierten Supersymmetrietechnik.

2. Möglichkeit

Das dementsprechende Gegenstück der reinen Bose-Bose-Diagramme soll nun als zweite Möglichkeit behandelt werden. Sie wird realisiert, indem eine *ret*-Ableitungskette der Länge n und eine *av*-Ableitungskette derselben Länge n *gemeinsam* auf das n-te Glied der Entwicklung der Exponentialfunktion in der zweiten Zeile von (4.4), also auf

$$(-\pi)^n \frac{1}{n!} \left[\sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} g\left(\vec{k}_1, \vec{k}_2\right) \Gamma\left(\vec{k}_2, \vec{k}_1\right) \right]^n \tag{5.11}$$

wirken. Dabei muß innerhalb jedes Faktors $\sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} g\left(\vec{k}_1, \vec{k}_2\right) \Gamma\left(\vec{k}_2, \vec{k}_1\right)$ je eine Ableitung aus der *ret*-Ableitungskette und eine Ableitung aus der *av*-Ableitungskette angewandt werden. Auch hier muß unterschieden werden zwischen solchen Termen, in denen nur nach allen ersten Summanden in (5.7) abgeleitet wird und solchen, wo nur nach allen zweiten Summanden abgeleitet wird. Im ersten Fall muß bei einer — beliebig wählbaren — Zuordnung der Ableitungen der *ret*-Ableitungskette auf die einzelnen Faktoren $\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} g\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\Gamma\left(\vec{k}_2,\vec{k}_1\right)$ in (5.11) die nachfolgende Zuordnung der Ableitungen der *av*-Ableitungsketten auf besagte Faktoren so beschaffen sein, daß eine maximale Überkreuzung entsteht. Im zweiten Fall müssen die Ableitungen "parallel" zueinander wirken. Zusammenfassend ergibt sich aus der gemeinsamen Wirkung zweier Ableitungsketten

$$\frac{1}{n}\left(i\frac{u\Delta}{\sqrt{\pi}}\right)^n \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\dots\vec{k}_n}\left[\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}_1\right)\dots\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}_n\right)+\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}_1\right)\dots\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}_n\right)\right]$$
$$\times\,\partial_g\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\partial_g\left(\vec{k}_2,\vec{k}_3\right)\dots\partial_g\left(\vec{k}_n,\vec{k}_1\right)\quad.$$

auf das n-te Glied der Entwicklung der Exponentialfunktion ein Faktor

$$\begin{aligned}
&2\times 2\times n!\times n\times 2^n\times\frac{1}{n^2}\left(-\frac{u^2\Delta^2}{\pi}\right)^n(-\pi)^n\frac{1}{n!}\\
&\qquad\times\sum_{\vec{q}}\left(\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}\right)\right)^n\\
=\;&4\frac{1}{n}\left(2u^2\Delta^2\right)^n\sum_{\vec{q}}\left(\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}\right)\right)^n\quad.
\end{aligned}\tag{5.12}$$

Dabei steht die erste 2 in der ersten Zeile von (5.12) wiederum für die beiden Möglichkeiten, *ret*- und *av*-Ableitungsketten zu kombinieren, die zweite 2 resultiert aus der Spinorsymmetrie. $n!$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, wie man die n Faktoren $\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} g\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\Gamma\left(\vec{k}_2,\vec{k}_1\right)$ auf die n Ableitungen der *ret*-Ableitungskette verteilen kann, und n gibt an, auf wieviel Faktoren die erste Ableitung der verbliebenen *av*-Ableitungskette wirken kann. Danach ist, wie oben erläutert, die Reihenfolge der $n-1$ restlichen Ableitungen der *av*-Ableitungskette festgelegt. Der Faktor 2^n resultiert aus der Vertauschbarkeit der zwei Ableitungen innerhalb eines Faktors $\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} g\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\Gamma\left(\vec{k}_2,\vec{k}_1\right)$.

Die Korrespondenz von (5.10) und (5.12) ist nicht überraschend, wenn man für den zweiten Fall noch einen Faktor $\frac{1}{2}$ in Rechnung stellt, mit dem die beiden benötigten gleichlangen Ableitungsketten versehen werden müssen (man braucht dafür das quadratische Glied der Entwicklung der Exponentialfunktion). Dann nämlich kann man sich noch einmal der eingangs erläuterten Äquivalenz zu einer modifizierten Supersymmetrie entsinnen und erkennt in der 1. Möglichkeit das Pendant von *zwei* Bose-Fermi-Diagrammen und in der 2. Möglichkeit das Pendant *eines* Bose-Bose-Diagramms. Bedenkt man noch, daß die Gaußsche Abintegration des Q-Feldes Fermi-Fermi-Diagramme repräsentiert, so entdeckt man in (5.10) und (5.12) den Kompensationsmechanismus der Supersymmetrietechnik wieder.

5.2. Kombinatorik

Die bisherigen Betrachtungen über die Entstehung einzelner Faktoren in (5.3) dienen nun als Ausgangspunkt dafür, die Herkunft eines ganzen Summanden in (5.2) aufzuklären. Das Wesen dieser Aufgabe besteht darin, die Kombinatorik des Wirkens der verschiedenen Ableitungsketten auf die Γ-Ketten und auf die Terme der Gestalt

$$(-\pi)^n \frac{1}{n!}\left[\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} g\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\Gamma\left(\vec{k}_2,\vec{k}_1\right)\right]^n$$

zu beherrschen.

Betrachten wir dazu einen beliebigen Term

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_{\vec{q}}\left(\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}\right)\right)^{n_1}\right]^{m_1}\\
\times&\left[\sum_{\vec{q}}\left(\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}\right)\right)^{n_2}\right]^{m_2}\\
\vdots&\\
\times&\left[\sum_{\vec{q}}\left(\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}\right)\right)^{n_N}\right]^{m_N}
\end{aligned}\tag{5.13}$$

aus (5.3). Wie erläutert, muß darin jeder einzelne Faktor

$$\sum_{\vec{q}} \left(\sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{ret} \left(\vec{k} + \vec{q} \right) \overset{B}{G}_{av} \left(\vec{k} \right) \right)^{n_i} \tag{5.14}$$

aus einer der zwei beschriebenen möglichen Wirkungen von Ableitungsketten stammen. Nehmen wir zunächst an, daß innerhalb eines Faktors

$$\left[\sum_{\vec{q}} \left(\sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{ret} \left(\vec{k} + \vec{q} \right) \overset{B}{G}_{av} \left(\vec{k} \right) \right)^{n_i} \right]^{m_i} \tag{5.15}$$

$\overline{m}_i$ Faktoren aus Ableitungen der 1. Möglichkeit (Bose-Fermi-Diagramme) und $\widetilde{m}_i = m_i - \overline{m}_i$ Faktoren aus Ableitungen der 2. Möglichkeit (Bose-Bose-Diagramme) resultieren. Wenn es gelingt zu zeigen, daß der dabei entstehende kombinatorische Faktor unabhängig ist von den Faktoren zu den übrigen

$$l = 1, ...i - 1, i + 1, ...N \tag{5.16}$$

Termen derselben Gestalt in (5.3), dann kann innerhalb eines einzelnen Faktors über alle möglichen Verteilungen $\overline{m}_i$ und $\widetilde{m}_i$ mit $\widetilde{m}_i + \overline{m}_i = m_i$ summiert werden. Dieser Nachweis und die Bestimmung der $\overline{m}_i$ - und $\widetilde{m}_i$ - abhängigen kombinatorischen Faktoren soll nun in Angriff genommen werden.

Um innerhalb jedes einzelnen Terms

$$\left[\sum_{\vec{q}} \left(\sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{ret} \left(\vec{k} + \vec{q} \right) \overset{B}{G}_{av} \left(\vec{k} \right) \right)^{n_l} \right]^{m_l} \tag{5.17}$$

jeweils $\overline{m}_l$ Faktoren mittels der 1. Möglichkeit und $\widetilde{m}_l$ Faktoren mittels der 2. Möglichkeit zu erzeugen, benötigen wir aus

$$\exp \left[-\widetilde{\widetilde{S}}p \ln \left(1 - i \frac{u\Delta}{\sqrt{\pi}} \overset{B}{\mathbf{G}} \partial_g \right) \right] \tag{5.18}$$

das Produkt

$$\prod_{l=1}^{N} \frac{1}{(2\widetilde{m}_l+\overline{m}_l\,)!\,(n_l)^{2\widetilde{m}_l+\overline{m}_l}} \left(\frac{iu\Delta}{\sqrt{\pi}}\right)^{n_l\left(2\widetilde{m}_l+\overline{m}_l\,\right)}$$
$$\times\{\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\dots\vec{k}_l} \left(\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}_1\right)\dots\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}_l\right)+\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}_1\right)\dots\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}_l\right)\right) \tag{5.19}$$
$$\partial_g\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\partial_g\left(\vec{k}_2,\vec{k}_3\right)\dots\partial_g\left(\vec{k}_l,\vec{k}_1\right)\}^{2\widetilde{m}_l+\overline{m}_l} \quad ,$$

aus

$$\exp\left[-\pi\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} g\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\Gamma\left(\vec{k}_2,\vec{k}_1\right)\right] \tag{5.20}$$

das Glied

$$(-\pi)^{\sum\limits_{l=1}^{N}\widetilde{m}_l n_l}\frac{1}{\left(\sum\limits_{l=1}^{N}\widetilde{m}_l n_l\right)!}\left[\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} g\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\Gamma\left(\vec{k}_2,\vec{k}_1\right)\right]^{\sum\limits_{l=1}^{N}\widetilde{m}_l n_l} \tag{5.21}$$

sowie aus

$$\exp\left[\frac{1}{2}Sp\ln\left(1+2\sqrt{\pi}u\Delta\,\overset{B}{\mathbf{G}}\,\mathbf{\Gamma}\right)\right] \tag{5.22}$$

das Produkt

$$\prod_{l=1}^{N} \frac{1}{(\overline{m}_l\,)!\,(n_l)^{\overline{m}_l}}(-1)^{\overline{m}_l}\left(-i2\sqrt{\pi}u\Delta\right)^{n_l\overline{m}_l}$$
$$\times\{\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\dots\vec{k}_l} \left(\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}_1\right)\dots\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}_l\right)+\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}_1\right)\dots\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}_l\right)\right) \tag{5.23}$$
$$\Gamma\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2\right)\Gamma\left(\vec{k}_2,\vec{k}_3\right)\dots\Gamma\left(\vec{k}_j,\vec{k}_1\right)\}^{\overline{m}_l} \quad .$$

Nun gibt es

$$\frac{(2\widetilde{m}_l+\overline{m}_l\,)!}{(\overline{m}_l\,)!} \tag{5.24}$$

Variationen, jeder der $\overline{m}_l$ Ketten in (5.23) eine der $2\widetilde{m}_l+\overline{m}_l$ Ableitungsketten aus (5.19) zuzuweisen. Die Zuordnung der $\sum\limits_{l=1}^{N}\widetilde{m}_l n_l$ Faktoren aus (5.21) zu den nun noch verbliebenen $2\widetilde{m}_l$ Ableitungsketten erfolgt folgendermaßen: zuerst werden die $\sum\limits_{l=1}^{N} \widetilde{m}_l n_l$ Faktoren auf $\sum\limits_{l=1}^{N} \widetilde{m}_l$ ungeordnete Tupel verteilt, von denen jeweils $\widetilde{m}_l$ Tupel die Länge n_l haben. Dafür gibt es

$$\left(\frac{\sum\limits_{l=1}^{N} \widetilde{m}_l n_l}{\prod\limits_{l=1}^{N} (n_l!)^{\widetilde{m}_l}} \right) \tag{5.25}$$

Möglichkeiten. Sodann werden die verbliebenen $2\widetilde{m}_l$ Ableitungsketten in Paare aufgeteilt und diese Paare danach den entstandenen Tupeln zugewiesen. Dabei ist ein Faktor

$$\prod_{l=1}^{N} \frac{(2\widetilde{m}_l)!}{2^{\widetilde{m}_l} \widetilde{m}_l!} \tag{5.26}$$

in Rechnung zu stellen.

Auf diese Art und Weise ist das Problem zurückgeführt worden auf die Behandlung zusammenhängender "Diagramme", welche im vorangegangen Abschnitt vorgeführt wurde. Wenden wir die dort gewonnenen Ergebnisse (5.10) und (5.12) auf den vermittels der vorstehenden Überlegungen aus (5.19), (5.21) und (5.23) gewonnenen und mit den kombinatorischen Faktoren (5.24), (5.25) und (5.26) versehenen Term an, erhalten wir

$$\begin{aligned} \prod_{l=1}^{N} \; & (-2)^{\overline{m}_l} \frac{1}{\overline{m}_l \, ! \widetilde{m}_l!} \\ & \times \left[2 \left(2u^2\Delta^2\right)^{n_l} \frac{1}{l} \right]^{m_l} \\ & \times \left[\sum_{\vec{q}} \left(\sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{ret} \left(\vec{k} + \vec{q} \right) \overset{B}{G}_{av} \left(\vec{k} \right) \right)^{n_l} \right]^{m_l} . \end{aligned} \tag{5.27}$$

Da dieser Ausdruck bezüglich des Index l faktorisiert, kann innnerhalb jedes einzelnen Faktors über die verschiedenen Möglichkeiten $\overline{m}_l$ und $\widetilde{m}_l$ unter Berücksichtigung von $\widetilde{m}_l + \overline{m}_l = m_l$ summiert werden. Dabei ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\sum_{\overline{m}_l=0}^{m_l} (-2)^{\overline{m}_l} \frac{1}{\overline{m}_l!\widetilde{m}_l!} \\
=& \frac{1}{m_l!} \sum_{\overline{m}_l=0}^{m_l} (-2)^{\overline{m}_l} \frac{m_l!}{\overline{m}_l!(m_l-\overline{m}_l)!} \\
=& \frac{1}{m_l!}(1-2)^{m_l} \\
=& \frac{1}{m_l!}(-1)^{m_l} \ .
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Aus (5.27) und (5.28) kann nun der gesuchte Ausdruck (5.3) direkt abgelesen werden.

Somit ist es gelungen, diejenigen aus Ableitungen nach den Quellen g stammenden Terme zu identifizieren, die zur Kompensation des nach der Abintegration der quadratischen Fluktuationen entstandenen Normierungsnenners (4.1) notwendig sind. In Kenntnis dieser Tatsache läßt sich das Diffuson nun einfach berechnen. Man erhält

$$\begin{aligned}
&\left\langle \underset{1,1}{Q_{ret,av}}\left(\vec{q}_0\right) \underset{1,1}{\overset{*}{Q}_{ret,av}}\left(\vec{q}_0\right)\right\rangle \\
=& \left(1-2u^2\Delta^2\sum_{\vec{k}} \overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}+\vec{q}_0\right)\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}\right)\right)^{-1} \\
=& \left(1-2u^2\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}d\phi \int_{\substack{0\\(\to-\infty)}}^{\infty} \frac{kdk}{\left(\frac{k^2}{2m}-\omega_{ret}+v_Fq_0\cos\phi-iu^2m\right)\left(\frac{k^2}{2m}-\omega_{av}+iu^2m\right)}\right)^{-1} \\
=& \left(1-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\phi\frac{1}{1-i\frac{1}{2u^2m}\left(\omega_{ret}-\omega_{av}\right)+i\frac{1}{2u^2m}v_Fq\cos\varphi}\right)^{-1} \\
=& \frac{2u^2m}{-i\left(\omega_{ret}-\omega_{av}\right)+Dq^2}
\end{aligned} \tag{5.29}$$

mit der Diffusionskonstante

$$D = \frac{v_F^2}{4u^2m} \tag{5.30}$$

Aus (5.29) erhellt nun auch die Bezeichnung "Diffuson". Der Term $\dfrac{1}{-i\omega+Dq^2}$ ist gerade die Fouriertransformierte der Lösung einer Diffusionsgleichung. Als erste

Näherung für das elektronische Verhalten in ungeordneten Systemen erhält man aus (5.29) somit freie Diffusion.

Die in diesem Unterabschnitt gemachten Erfahrungen im Umgang mit den Ableitungsketten geben zu der Hoffnung Anlaß, daß es nun möglich sein sollte, im Rahmen der g-Feld-Technik auch Störterme aus der Entwicklung des Funktionalintegrals (4.4) systematisch zu behandeln. Dabei käme es darauf an zu zeigen, wie die unverbundenen Diagramme verschwinden, d.h. durch welche Ableitungen Terme der Gestalt

$$\frac{\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)}{\left(1-2u^2\Delta^2\sum_{\vec{k}}\overset{B}{G}_{ret}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\overset{B}{G}_{av}\left(\vec{k}\right)\right)} \tag{5.31}$$

kompensiert werden.

6. Zusammenfassung und Ausblick

Hauptanliegen dieser Arbeit war es, die Methodik der Vielfrequenztechnik von Aronov und Joselevich [21] in der Version von Weller und Souleiman [28] für die Behandlung ungeordneter Systeme fruchtbar zu machen. Wie die Replica- und die Supersymmetriemethode vermeidet auch die Vielfrequenztechnik das Nennerproblem, welches bei der Mittelung über die Unordnung auftritt. Ein wesentlicher Vorzug dieser Technik besteht in ihrer mathematischen Exaktheit (gegenüber dem Replicatrick) und in ihrer engen Verbindung zur Keldysch-Technik, welche auch die Behandlung von Wechselwirkung gestattet (was in der Supersymmetrietechnik nicht möglich ist).

Im Rahmen einer Einführung in die Vielfrequenztechnik behandelten wir das Funktionalintegral auf dem Zeitgitter und bewiesen die grundlegende Eigenschaft, daß die Zustandssumme gleich Eins ist. Zur Herleitung der Identitäten, die besagen, daß Frequenzsummen über Produkte Greenscher Funktionen Null ergeben, nutzten wir eine Konturintegraldarstellung aus.

Daraufhin wurde der Versuch unternommen, die Technik unmittelbar auf das Lokalisierungsproblem in zwei Dimensionen anzuwenden. Dies gelang auch bis zur Berechnung des Diffusons und zur Formulierung einer Störungsentwicklung. Indessen machte eine Analyse der jeweils zugrunde liegenden Symmetrien deutlich, daß die Reduktion auf ein nichtlineares σ-Modell, wie sie in der Replica- und Supersymmetrietechnik konsistent vorgenommen werden kann, innerhalb der Vielfrequenztechnik zunächst nicht möglich ist.

Wir konnten zeigen, daß dieser Nachteil der Vielfrequenztechnik eine direkte Folge ihrer eigentlich vorteilhaften Eigenschaft ist, prinzipiell die Berechnung von Korrelationsfunktionen von Feldern zu beliebigen Frequenzen zuzulassen.

Unter Berücksichtigung dieser Tatsache wurde im zweiten Teil der Arbeit eine modifizierte Form der Vielfrequenztechnik, die g-Feld-Technik, entwickelt. Durch summarische Behandlung aller Felder zu nicht interessierenden Frequenzen (deren Korrelationsfunktionen daraufhin auch nicht mehr berechnet werden können) und einmalige Ausnutzung der Eins-Eigenschaft der Vielfrequenztechnik formulierten wir eine Feldtheorie, in der nur noch Q-Felder zu interessierenden Frequenzen auftreten. Die Beseitigung der Vakuumschleifen wird darin durch Differentiationen nach den Quellen g geleistet.

Die Behandlung eines einfachen nulldimensionalen Problems, die Berechnung der Zustandsdichte und der Zweiteilchen-Greenfunktion diente zur Einübung in diesen Kalkül. Hier sind interessante Weiterentwicklungen in Richtung der Theorie von Zufallsmatrizen denkbar. Notwendig dafür wäre die Formulierung eines nichtlinearen σ-Modells der g-Feld-Technik mit mehreren inneren Freiheitsgraden.

Es konnte ein einfacher und in allen Ordnungen gültiger Beweis für die Äquivalenz von Vielfrequenz- und Supersymmetrietechnik erbracht werden.

Desweiteren entwickelten wir die g-Feld-Technik im zweidimensionalen Fall. Im Vordergrund stand dabei, den Kompensationsmechanismus der Vakuumschleifen handhabbar zu machen. Für den Sattelpunktsbeitrag gelang dies in allen Ordnungen in u. Zur Kompensation des Diffusionsnenners beschränkten wir uns zunächst auf die Ordnung u^2, bis zu welcher der Weghebemechanismus in einfacher und überschaubarer Weise funktioniert. Hilfreich dafür erwies sich der Vergleich mit einer Supersymmetrietechnik, die wir dahingehend modifiziert hatten, daß nur der Fermi-Fermi-Sektor einer Hubbard-Stratonovich-Transformation unterworfen worden war, die ursprünglichen Bosefelder aber erhalten geblieben waren. Bis zu dieser Ordnung u^2 scheint damit auch die Renormierung eines nichtlinearen σ-Modells der g-Feld-Technik in überschaubarer Weise möglich zu sein.

Mit einigem Aufwand konnte die Kompensation des Diffusionsnenners dann auch in allen Ordnungen in u, also für eine ganze Diagrammklasse gezeigt werden. Auch hierfür erwies sich der Vergleich mit der modifizierten Supersymmetrietechnik als nützlich.

Sollte die Renormierung eines nichtlinearen σ-Modells in der g-Feld-Technik gelingen, wäre der Versuch angezeigt, dieses neue Konzept auf die Keldysch-Technik zu übertragen. Damit könnte ein methodischer Fortschritt bei der gleichzeitigen Behandlung von Unordnung und Wechselwirkung erzielt werden.

A. Die Hubbard-Stratonovich-Transformation in der Vielfrequenztechnik

1. Symmetriebeziehungen

In diesem Anhang soll die in (1.24) angegebene Form des Funktionalintegrals der Vielfrequenztechnik abgeleitet werden. Das entsprechende Resultat der g-Feld-Technik (1.23) erhält man, wenn man die Frequenzindizes der retardierten und der avancierten Felder auf je einen beschränkt.

Ausgangspunkt der Berechnungen ist der Wechselwirkungsterm

$$F^{WW} = 2u^2\Delta^2 \times \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2=ret,av\\ \mu_1,\mu_2=-N...N-1\\ \beta_1,\beta_2=1,2\\ \vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{q}}} \overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,\beta_1}(\vec{k_1}+\vec{q})\phi_{\alpha_1,\mu_1,\beta_1}(\vec{k_2}+\vec{q})\overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,\beta_2}(\vec{k_2})\phi_{\alpha_2,\mu_2,\beta_2}(\vec{k_1}) \tag{1.1}$$

mit der Spinorsymmetrie

$$\overline{\phi} = (\mathbf{C}\phi)^T , \tag{1.2}$$

wobei

$$C_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ \beta_1,\beta_2\\ \vec{k}_1,\vec{k}_2}} = \delta_{\alpha_1,\alpha_2}\delta_{\mu_1,\mu_2}\delta_{\vec{k},-\vec{k}_2}(-1)^{\beta_1}\delta_{\beta_1,\overline{\beta_2}} \tag{1.3}$$

gelten soll. Ausgeschrieben bedeuten die letzten Relationen

$$\overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,\beta_1}\left(\vec{k}\right) = (-1)^{\beta_1}\,\phi_{\alpha_1,\mu_1,\overline{\beta}_1}\left(-\vec{k}\right)\ . \tag{1.4}$$

Diese Symmetriebeziehung schränkt die Anzahl der benötigten unabhängigen Q-Felder ein. Um dies zu sehen, zerlegen wir F^{ww} nach den Anteilen mit verschiedenen β-Indexpaaren gemäß

$$F^{ww} = 2u^2\Delta^2\left(f^{11}+f^{22}+f^{12}+f^{21}\right) \tag{1.5}$$

mit

$$f^{11} = \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2=ret,av\\ \mu_1,\mu_2=-N...N-1\\ \vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{q}}} \overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,1}(\vec{k_1}+\vec{q})\phi_{\alpha_1,\mu_1,1}(\vec{k_2}+\vec{q})\overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,1}(\vec{k_2})\phi_{\alpha_2,\mu_2,1}(\vec{k_1})\ , \tag{1.6}$$

$$f^{22} = \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2=ret,av\\ \mu_1,\mu_2=-N...N-1\\ \vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{q}}} \overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,2}(\vec{k_1}+\vec{q})\phi_{\alpha_1,\mu_1,2}(\vec{k_2}+\vec{q})\overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,2}(\vec{k_2})\phi_{\alpha_2,\mu_2,2}(\vec{k_1})\ , \tag{1.7}$$

$$f^{12} = \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2=ret,av\\ \mu_1,\mu_2=-N...N-1\\ \vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{q}}} \overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,1}(\vec{k_1}+\vec{q})\phi_{\alpha_1,\mu_1,1}(\vec{k_2}+\vec{q})\overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,2}(\vec{k_2})\phi_{\alpha_2,\mu_2,2}(\vec{k_1})\ , \tag{1.8}$$

$$f^{21} = \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2=ret,av\\ \mu_1,\mu_2=-N...N-1\\ \vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{q}}} \overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,2}(\vec{k_1}+\vec{q})\phi_{\alpha_1,\mu_1,2}(\vec{k_2}+\vec{q})\overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,1}(\vec{k_2})\phi_{\alpha_2,\mu_2,1}(\vec{k_1})\ . \tag{1.9}$$

Aufgrund der Spinorsymmetrie (1.4) können wir f^{22} umschreiben in:

$$\sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2=ret,av\\ \mu_1,\mu_2=-N...N-1\\ \vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{q}}} \phi_{\alpha_1,\mu_1,1}(-\vec{k_1}-\vec{q})\overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,1}(-\vec{k_2}-\vec{q})\phi_{\alpha_2,\mu_2,1}(-\vec{k_2})\overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,1}(-\vec{k_1})\ . \tag{1.10}$$

Man sieht sofort, daß dieser Term mit f^{11} identisch ist, wenn man die Umbenennungen

$$-\vec{k}_2 \longleftrightarrow \vec{k}_1; -\vec{q} \longrightarrow \vec{q}, \tag{1.11}$$

vornimmt. Führt man die entsprechende Transformation in f^{21} aus, erhält man

$$\sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2=ret,av \\ \mu_1,\mu_2=-N...N-1 \\ \vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{q}}} \phi_{\alpha_1,\mu_1,1}(-\vec{k}_1-\vec{q})\overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,1}(-\vec{k}_2-\vec{q})\phi_{\alpha_2,\mu_2,2}(-\vec{k}_2)\overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,2}(-\vec{k}_1)\ , \tag{1.12}$$

woraus wiederum unter Beachtung der obigen Umbenennungen

$$f^{21} = f^{12} \tag{1.13}$$

ersichtlich wird. Wir fassen die identischen Terme zu

$$f^D = f^{11} + f^{22} = 2f^{11} \tag{1.14}$$

und

$$f^C = f^{12} + f^{21} = 2f^{12} \tag{1.15}$$

zusammen, wobei mit D und C jeweils auf den Diffusions- bzw. Cooperkanal hingewiesen wird.

2. Transformation des Diffusionskanals

Es erweist sich als nützlich, f^D wiederum in drei Terme zu zerlegen, die gesondert behandelt werden:

$$f^D = f_1^D + f_2^D + f_3^D \tag{2.1}$$

mit

$$f_1^D = 2 \sum_{\substack{\alpha=ret,av \\ \mu=-N...N-1 \\ \vec{k}_1,\vec{k}_2}} \overline{\phi}_{\alpha,\mu,1}(\vec{k}_1)\phi_{\alpha,\mu,1}(\vec{k}_2)\overline{\phi}_{\alpha,\mu,1}(\vec{k}_2)\phi_{\alpha,\mu,1}(\vec{k}_1)\ , \tag{2.2}$$

$$f_2^D = 2 \sum_{\substack{\alpha_1 \neq \alpha_2 \\ \text{und/oder } \mu_1 \neq \mu_2 \\ \vec{k}_1, \vec{k}_2}} \overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,1}(\vec{k_1})\phi_{\alpha_1,\mu_1,1}(\vec{k_2})\overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,1}(\vec{k_2})\phi_{\alpha_2,\mu_2,1}(\vec{k_1}) \ , \tag{2.3}$$

$$f_3^D = 2 \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 = ret,av \\ \mu_1,\mu_2 = -N...N-1 \\ \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q} \neq \vec{0}}} \overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,1}(\vec{k_1} + \vec{q})\phi_{\alpha_1,\mu_1,1}(\vec{k_2} + \vec{q})\overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,1}(\vec{k_2})\phi_{\alpha_2,\mu_2,1}(\vec{k_1}) \ . \tag{2.4}$$

Zuerst führen wir die Hubbard-Stratonovich-Transformation für f_1^D aus. Dabei sollen hier und im folgenden alle α- und μ- Summen über die in den letzten Formeln angegebenen Wertebereiche laufen, sofern nichts anderes vereinbart wird. Wir schreiben den Term zunächst unter Beachtung der Graßmanneigenschaft der Felder in

$$f_1^D = -2 \sum_{\substack{\alpha \\ \mu}} \left(\sum_{\vec{k}} \overline{\phi}_{\alpha,\mu,\beta=1} \left(\vec{k}\right) \phi_{\alpha,\mu,\beta=1} \left(\vec{k}\right) \right)^2 \tag{2.5}$$

um. Unter Verwendung von

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\pi x^2 + ax} = e^{\frac{a^2}{4\pi}} \tag{2.6}$$

kann der von f_1^D herrührende Beitrag zum Funktionalintegral geschrieben werden als

$$\begin{aligned} &\exp\left[4u^2\Delta^2 \sum_{\substack{\alpha \\ \mu}} \left(\sum_{\vec{k}} \overline{\phi}_{\alpha,\mu,\beta=1} \left(\vec{k}\right) \phi_{\alpha,\mu,\beta=1} \left(\vec{k}\right) \right)^2 \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{\alpha \\ \mu}} dQ_{\substack{\alpha,\alpha \\ \mu,\mu \\ 1,1}} \left(\vec{0}\right) \\ &\times \exp\left[-\pi \sum_{\substack{\alpha \\ \mu}} \left(Q^2_{\substack{\alpha,\alpha \\ \mu,\mu \\ 1,1}} \left(\vec{0}\right) - \frac{4}{\sqrt{\pi}} u\Delta Q_{\substack{\alpha,\alpha \\ \mu,\mu \\ 1,1}} \left(\vec{0}\right) \sum_{\vec{k}} \overline{\phi}_{\alpha,\mu,1} \left(\vec{k}\right) \phi_{\alpha,\mu,1} \left(\vec{k}\right) \right) \right] \ , \end{aligned} \tag{2.7}$$

oder, unter Beachtung der Spinorsymmetrie, als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{\alpha \\ \mu}} dQ_{\substack{\alpha,\alpha \\ \mu,\mu \\ 1,1}}\left(\vec{0}\right)$$

$$\times \exp\left[-\pi \sum_{\substack{\alpha \\ \mu}} \left(Q^{2}_{\substack{\alpha,\alpha \\ \mu,\mu \\ 1,1}}\left(\vec{0}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} u \Delta Q_{\substack{\alpha,\alpha \\ \mu,\mu \\ 1,1}}\left(\vec{0}\right) \sum_{\beta=1,2} \sum_{\vec{k}} \overline{\phi}_{\alpha,\mu,\beta}\left(\vec{k}\right) \phi_{\alpha,\mu,\beta}\left(\vec{k}\right)\right)\right] . \tag{2.8}$$

In beiden Varianten bezeichnet das dritte Indexpaar von Q jeweils den β-Index.

Wenden wir uns nun f_2^D zu. Zunächst kann man sich leicht von der Gültigkeit der Gleichung

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{\substack{\alpha_1 \neq \alpha_2 \\ \text{und/oder } \mu_1 \neq \mu_2 \\ \vec{k}_1, \vec{k}_2}} \overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,1}(\vec{k}_1)\phi_{\alpha_1,\mu_1,1}(\vec{k}_2)\overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,1}(\vec{k}_2)\phi_{\alpha_2,\mu_2,1}(\vec{k}_1) \\ = & 4 \sum_{\substack{\left[\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2}\right] \in OD \\ \vec{k}_1, \vec{k}_2}} \overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,1}(\vec{k}_1)\phi_{\alpha_1,\mu_1,1}(\vec{k}_2)\overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,1}(\vec{k}_2)\phi_{\alpha_2,\mu_2,1}(\vec{k}_1) \end{aligned} \tag{2.9}$$

überzeugen, wobei mit dem Symbol $\left[\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2}\right] \in OD$ gemeint ist, daß die angegebenen Indizes oberhalb der Diagonale (im rechten oberen Dreieck des gemeinsamen Wertebereichs) liegen, d.h. daß gilt:

$$\begin{gathered} (\alpha_1 = \alpha_2 = ret \text{ oder } av) \text{ und } (\mu_1 < \mu_2) \\ \text{oder} \\ \alpha_1 = ret \text{ und } \alpha_2 = av \qquad . \end{gathered}$$

Zur Darstellung von f_2^D nutzen wir die Identität

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} dxdy \exp\left[-\pi\left(x+iy\right)\left(x-iy\right) + \left(x+iy\right)a + \left(x-iy\right)b\right] \\ = & \iint_{-\infty}^{\infty} dxdy \exp\left[-\pi\left(x^2+y^2\right) + x\left(a+b\right) + iy\left(a-b\right)\right] \\ = & \exp\left(\frac{ab}{\pi}\right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

und erhalten

$$
\begin{aligned}
&\exp\left(-4u^2\Delta^2 \sum_{\substack{\alpha_1\neq\alpha_2\\ \text{und/oder}\\ \mu_1\neq\mu_2\\ \vec{k}_1,\vec{k}_2}} \overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,1}(\vec{k}_1)\phi_{\alpha_1,\mu_1,1}(\vec{k}_2)\overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,1}(\vec{k}_2)\phi_{\alpha_2,\mu_2,1}(\vec{k}_1)\right)\\
&=\iint_{-\infty}^{\infty} \prod_{\left[\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2}\right]\in OD} dReQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1.1}}\left(\vec{0}\right) dImQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,1}}\left(\vec{0}\right)\\
&\times\exp\left(-\pi \sum_{\left[\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2}\right]\in OD} \left(Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,1}}\left(\vec{0}\right)\right)\left(Q^*_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,1}}\left(\vec{0}\right)\right)\right)\\
&\times\exp\left(2\sqrt{2\pi}u\Delta \sum_{\left[\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2}\right]\in OD} Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,1}}\left(\vec{0}\right) \sum_{\vec{k}} \overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,1}\left(\vec{k}\right)\phi_{\alpha_2,\mu_2,1}\left(\vec{k}\right)\right)\\
&\times\exp\left(2\sqrt{2\pi}u\Delta \sum_{\left[\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2}\right]\in OD} Q^*_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,1}}\left(\vec{0}\right) \sum_{\vec{k}} \overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,1}\left(\vec{k}\right)\phi_{\alpha_1,\mu_1,1}\left(\vec{k}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \prod_{\left[{\alpha_1,\alpha_2 \atop \mu_1,\mu_2}\right] \in OD} dReQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1.1}}\left(\vec{0}\right) dImQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,1}}\left(\vec{0}\right) \\
&\times \exp\left(-\pi \sum_{\left[{\alpha_1,\alpha_2 \atop \mu_1,\mu_2}\right] \in OD} \left(Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,1}}\left(\vec{0}\right)\right)\left(Q^*_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,1}}\left(\vec{0}\right)\right)\right) \\
&\times \exp\left(\sqrt{2\pi}u\Delta \sum_{\beta} \sum_{\left[{\alpha_1,\alpha_2 \atop \mu_1,\mu_2}\right] \in OD} Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,1}}\left(\vec{0}\right) \sum_{\vec{k}} \overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,\beta}\left(\vec{k}\right) \phi_{\alpha_2,\mu_2,\beta}\left(\vec{k}\right)\right) \\
&\times \exp\left(\sqrt{2\pi}u\Delta \sum_{\beta} \sum_{\left[{\alpha_1,\alpha_2 \atop \mu_1,\mu_2}\right] \in OD} Q^*_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,1}}\left(\vec{0}\right) \sum_{\vec{k}} \overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,\beta}\left(\vec{k}\right) \phi_{\alpha_1,\mu_1,\beta}\left(\vec{k}\right)\right) .
\end{aligned}
$$

Das letzte Gleichheitszeichen wird dabei wiederum durch die Spinorsymmetrie begründet.

Mit f_3^D verfahren wir ganz ähnlich wie oben und schreiben den Ausdruck zunächst als

$$
\begin{aligned}
f_3^D = \; 2 \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ \vec{k}_1,\vec{k}_2;\vec{q} \in HE}} & [\overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,1}(\vec{k}_1+\vec{q})\phi_{\alpha_1,\mu_1,1}(\vec{k}_2+\vec{q})\overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,1}(\vec{k}_2)\phi_{\alpha_2,\mu_2,1}(\vec{k}_1) \\
& \overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,1}(\vec{k}_1-\vec{q})\phi_{\alpha_1,\mu_1,1}(\vec{k}_2-\vec{q})\overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,1}(\vec{k}_2)\phi_{\alpha_2,\mu_2,1}(\vec{k}_1)] .
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Unter $\vec{q} \in HE$ soll verstanden werden, daß $\vec{q}$ nur eine Halbebene überstreicht, wobei die Null weiterhin ausgeschlossen bleibt. Nach einigen Umbenennungen sieht man wieder die Identität beider Beiträge in f_3^D . Die Hubbard-Stratonovich-

Transformation für den Beitrag von f_3^D entsteht also durch Einfügen von

$$
\begin{aligned}
&\iint_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ \vec{q}\in HE}} dReQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1.1}}\left(\vec{q}\right) dImQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,1}}\left(\vec{q}\right)\\
&\times \exp\left(-\pi \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ \vec{q}\in HE}} \left(Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,1}}\left(\vec{q}\right)\right)\left(Q^*_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,1}}\left(\vec{q}\right)\right)\right)\\
&\times \exp\left(2\sqrt{2\pi}u\Delta \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ \vec{q}\in HE}} Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,1}}\left(\vec{q}\right) \sum_{\vec{k}} \overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,1}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\phi_{\alpha_2,\mu_2,1}\left(\vec{k}\right)\right)\\
&\times \exp\left(2\sqrt{2\pi}u\Delta \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ \vec{q}\in HE}} Q^*_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,1}}\left(\vec{q}\right) \sum_{\vec{k}} \overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,1}\left(\vec{k}\right)\phi_{\alpha_1,\mu_1,1}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

$$
= \iint_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2 \\ \vec{q}\in HE}} dReQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2 \\ 1.1}}\left(\vec{q}\right) dImQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2 \\ 1,1}}\left(\vec{q}\right)
$$

$$
\times \exp\left(-\pi \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2 \\ \vec{q}\in HE}} \left(Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2 \\ 1,1}}\left(\vec{q}\right)\right)\left(Q^{*}_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2 \\ 1,1}}\left(\vec{q}\right)\right)\right)
$$

$$
\times \exp\left(\sqrt{2\pi}u\Delta \sum_{\beta} \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2 \\ \vec{q}\in HE}} Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2 \\ 1,1}}\left(\vec{q}\right) \sum_{\vec{k}} \overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,\beta}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\phi_{\alpha_2,\mu_2,\beta}\left(\vec{k}\right)\right)
$$

$$
\times \exp\left(\sqrt{2\pi}u\Delta \sum_{\beta} \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2 \\ \vec{q}\in HE}} Q^{*}_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \\ \mu_1,\mu_2 \\ 1,1}}\left(\vec{q}\right) \sum_{\vec{k}} \overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,\beta}\left(\vec{k}\right)\phi_{\alpha_1,\mu_1,\beta}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\right)
$$

ins Funktionalintegral.

3. Transformation des Cooperkanals

Ähnlich wie im Fall des Diffusionskanals zerlegen wir den Cooperkanal in zwei Bestandteile:

$$
f^C = f_1^C + f_2^C \tag{3.1}
$$

mit

$$
f_1^C = 2 \sum_{\substack{\alpha \\ \mu \\ \vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{q}}} \overline{\phi}_{\alpha,\mu,\beta=1}(\vec{k}_1+\vec{q})\phi_{\alpha,\mu,\beta=1}(\vec{k}_2+\vec{q})\overline{\phi}_{\alpha,\mu,\beta=2}(\vec{k}_2)\phi_{\alpha,\mu,\beta=2}(\vec{k}_1) \tag{3.2}
$$

und

$$f_2^C = 2 \sum_{\substack{\alpha_1 \neq \alpha_2 \\ \text{und/oder } \mu_1 \neq \mu_2 \\ \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}}} [\overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,\beta=1}(\vec{k_1} + \vec{q})\phi_{\alpha_1,\mu_1,\beta=1}(\vec{k_2} + \vec{q}) \times \overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,\beta=2}(\vec{k_2})\phi_{\alpha_2,\mu_2,\beta=2}(\vec{k_1})] \quad . \tag{3.3}$$

Unter Beachtung von

$$\overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,\beta_1}\left(\vec{k}\right) = (-1)^{\beta_1}\,\phi_{\alpha_1,\mu_1,\overline{\beta}_1}\left(-\vec{k}\right) \tag{3.4}$$

erhält man

$$\begin{aligned} & \sum_{\vec{k}} \overline{\phi}_{\alpha,\mu,\beta=1}(\vec{k} + \vec{q})\phi_{\alpha,\mu,\beta=2}(\vec{k}) \\ = & \ (-1)^1\,(-1)^1 \sum_{\vec{k}} \phi_{\alpha,\mu,\beta=2}(-\vec{k} - \vec{q})\ \overline{\phi}_{\alpha,\mu,\beta=1}(-\vec{k}) \\ = & \ -\sum_{\vec{k}} \overline{\phi}_{\alpha,\mu,\beta=1}(\vec{k} + \vec{q})\phi_{\alpha,\mu,\beta=2}(\vec{k}) \\ = & \ 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

und damit

$$f_1^C = 0\ . \tag{3.6}$$

Für f_2^C sieht man zunächst unter Beachtung der Spinorsymmetrie, daß

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\left[\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\end{smallmatrix}\right] \in OD \\ \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}}} [\overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,1}(\vec{k_1} + \vec{q})\phi_{\alpha_1,\mu_1,1}(\vec{k_2} + \vec{q})\overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,2}(\vec{k_2})\phi_{\alpha_2,\mu_2,2}(\vec{k_1}) \\ & \qquad + \overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,1}(\vec{k_1} + \vec{q})\phi_{\alpha_2,\mu_2,1}(\vec{k_2} + \vec{q})\overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,2}(\vec{k_2})\phi_{\alpha_1,\mu_1,2}(\vec{k_1})] \\ = 2 & \sum_{\substack{\left[\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\end{smallmatrix}\right] \in OD \\ \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}}} \overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,1}(\vec{k_1} + \vec{q})\phi_{\alpha_1,\mu_1,}(\vec{k_2} + \vec{q})\overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,2}(\vec{k_2})\phi_{\alpha_2,\mu_2,2}(\vec{k_1}) \end{aligned} \tag{3.7}$$

gilt. Im Funktionalintegral können wir also die Ersetzung

$$\exp\{-4u^2\Delta^2 \sum_{\substack{\alpha_1\neq\alpha_2 \\ \text{und/oder } \mu_1\neq\mu_2 \\ \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}}} [\overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,1}(\vec{k_1}+\vec{q})\phi_{\alpha_1,\mu_1,1}(\vec{k_2}+\vec{q})\times$$

$$\times\, \overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,2}(\vec{k_2})\phi_{\alpha_2,\mu_2,2}(\vec{k_1})]\}$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{\left[\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\end{smallmatrix}\right]\in OD \\ \vec{q}}} dReQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1.2}}\left(\vec{q}\right) dImQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,2}}\left(\vec{q}\right)$$

$$\times \exp\left(-\pi \sum_{\substack{\left[\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\end{smallmatrix}\right]\in OD \\ \vec{q}}} \left(Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,2}}\left(\vec{q}\right)\right)\left(Q^*_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,2}}\left(\vec{q}\right)\right)\right)$$

$$\times \exp\left(2\sqrt{2\pi}u\Delta \sum_{\substack{\left[\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\end{smallmatrix}\right]\in OD \\ \vec{q}}} Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,2}}\left(\vec{q}\right) \sum_{\vec{k}} \overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,1}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\phi_{\alpha_2,\mu_2,2}\left(\vec{k}\right)\right)$$

$$\times \exp\left(2\sqrt{2\pi}u\Delta \sum_{\substack{\left[\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\end{smallmatrix}\right]\in OD \\ \vec{q}}} Q^*_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,2}}\left(\vec{q}\right) \sum_{\vec{k}} \overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,2}\left(\vec{k}\right)\phi_{\alpha_1,\mu_1,1}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\right) \tag{3.8}$$

vornehmen. Die letzte Form läßt sich auch umschreiben in

$$
\begin{aligned}
=&\iint_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{\left[\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\end{smallmatrix}\right]\in OD\\ \vec{q}}} dReQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1.2}}\left(\vec{q}\right) dImQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,2}}\left(\vec{q}\right)\\
&\times \exp\left(-\pi \sum_{\substack{\left[\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\end{smallmatrix}\right]\in OD\\ \vec{q}}} \left(Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,2}}\left(\vec{q}\right)\right)\left(Q^*_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,2}}\left(\vec{q}\right)\right)\right)\\
&\times \exp\left(\sqrt{2\pi}u\Delta \sum_{\substack{\left[\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\end{smallmatrix}\right]\in OD\\ \vec{q}}} Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,2}}\left(\vec{q}\right) \sum_{\vec{k}} \overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,1}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\phi_{\alpha_2,\mu_2,2}\left(\vec{k}\right)\right)\\
&\times \exp\left(-\sqrt{2\pi}u\Delta \sum_{\substack{\left[\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\end{smallmatrix}\right]\in OD\\ \vec{q}}} Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,2}}\left(\vec{q}\right) \sum_{\vec{k}} \overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,1}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\phi_{\alpha_1,\mu_1,2}\left(\vec{k}\right)\right)\\
&\times \exp\left(\sqrt{2\pi}u\Delta \sum_{\substack{\left[\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\end{smallmatrix}\right]\in OD\\ \vec{q}}} Q^*_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,2}}\left(\vec{q}\right) \sum_{\vec{k}} \overline{\phi}_{\alpha_2,\mu_2,2}\left(\vec{k}\right)\phi_{\alpha_1,\mu_1,1}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\right)\\
&\times \exp\left(-\sqrt{2\pi}u\Delta \sum_{\substack{\left[\begin{smallmatrix}\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\end{smallmatrix}\right]\in OD\\ \vec{q}}} Q^*_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,2}}\left(\vec{q}\right) \sum_{\vec{k}} \overline{\phi}_{\alpha_1,\mu_1,2}\left(\vec{k}\right)\phi_{\alpha_2,\mu_2,1}\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\right) .
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

4. Zusammenfassung von Diffusions- und Cooperkanal

Wir fassen nun alle in diesem Anhang erhaltenen Terme zusammen. Die Terme der Gestalt QQ^* werden dabei zu $SpQQ^*$ zusammengezogen, wobei sowohl bezüglich der α-μ- und $\vec{q}$- als auch bezüglich der β-Indizes eine Verdopplung der Termanzahl auftritt, die jeweils mit einem Faktor $\frac{1}{2}$ kompensiert werden muß. Desweiteren wird mit Blick auf eine einheitliche Schreibweise in der Wirkung noch eine Umskalierung

$$Q_{\substack{\alpha,\alpha\\ \mu,\mu\\ \beta,\beta}}(\vec{0}) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} Q_{\substack{\alpha,\alpha\\ \mu,\mu\\ \beta,\beta}}(\vec{0}) \tag{4.1}$$

vorgenommen. Nach Abintegration der ϕ- und $\overline{\phi}$-Felder erhalten wir

$$Z = \int D\mathbf{Q} \exp\left(-F\left[\mathbf{Q}\right]\right) \tag{4.2}$$

mit

$$F\left[Q\right] = \frac{\pi}{4} \sum_{\vec{q}} \widetilde{Sp}\mathbf{Q}^2\left(\vec{q}\right) - \frac{1}{2} Sp \ln\left(-i \overset{0}{\mathbf{G}}{}^{-1} - \sqrt{2\pi} u \Delta \mathbf{Q}\right) \ . \tag{4.3}$$

Dabei soll

$$\begin{aligned}\int D\mathbf{Q} := \iint_{-\infty}^{\infty} & \prod_{\substack{\alpha\\ \mu}} \frac{1}{\sqrt{2}} dQ_{\substack{\alpha,\alpha\\ \mu,\mu\\ 1,1}}\left(\vec{0}\right) \\ & \times \prod_{\left[\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2}\right]\in OD} dReQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,1}}\left(\vec{0}\right) dImQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,1}}\left(\vec{0}\right) \\ & \times \prod_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ \vec{q}\in HE}} dReQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,1}}\left(\vec{q}\right) dImQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,1}}\left(\vec{q}\right) \\ & \times \prod_{\substack{\left[\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2}\right]\in OD\\ \vec{q}}} dReQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_1\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,2}}\left(\vec{q}\right) dImQ_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ 1,2}}\left(\vec{q}\right)\end{aligned} \tag{4.4}$$

gelten. Weiterhin vereinbaren wir, daß $\mathbf{Q}\left(\vec{q}\right)$eine Matrix im α-μ-β-Raum, $\mathbf{Q}$ hingegen eine Matrix im $\vec{k}$-α-μ-β-Raum mit den Elementen

$$Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ \beta_1,\beta_2\\ \vec{k}_1,\vec{k}_2}} = Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ \beta_1,\beta_2}}\left(\vec{k}_1 - \vec{k}_2\right) \tag{4.5}$$

bezeichnen soll. Dementsprechend wird die Spur $\widetilde{Sp}$ über Matrizen im α-μ-β-Raum, die Spur Sp über Matrizen im $\vec{k}$-α-μ-β-Raum genommen. $\mathbf{Q}\left(\vec{q}\right)$ist eine hermitesche Matrix, die gleichzeitig noch eine Spinorsymmetrie erfüllt:

$$Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ \beta_1,\beta_2}}\left(\vec{q}\right) = Q^*_{\substack{\alpha_2,\alpha_1\\ \mu_2,\mu_1\\ \beta_2,\beta_1}}\left(-\vec{q}\right) \ , \tag{4.6}$$

$$Q_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\\ \mu_1,\mu_2\\ \beta_1,\beta_2}}\left(\vec{q}\right) = (-1)^{\beta_1+\beta_2} Q_{\substack{\alpha_2,\alpha_1\\ \mu_2,\mu_1\\ \overline{\beta_2},\overline{\beta_1}}}\left(\vec{q}\right) \ . \tag{4.7}$$

Das Auftreten des Faktors $\frac{1}{2}$ vor dem Spln ist der Tatsache geschuldet, daß nur die Hälfte der ϕ und $\overline{\phi}$ unabhängige Variablen sind, wodurch bei der Abintegration $\sqrt{\det()}$ entsteht.

B. Eine einfache Berechnung der Greenschen Funktion im nulldimensionalen Fall

Mit den Berechnungen des 4. Kapitels sollte die Anwendbarkeit der g-Technik in einer Notation gezeigt werden, die der Q-Feldtheorie in mehreren Dimensionen am nächsten kommt. Die eigentlichen Ergebnisse lassen sich natürlich auch mit einer weniger sophistischen Methode gewinnen. Genaugenommen kann man im nulldimensionalen Fall bzw. bei Berücksichtigung weniger Eigenfunktionen auf Mittelungstechniken wie Replica-, Supersymmetrie- oder Vielfrequenztechnik ganz verzichten. Die wenigen vorliegenden Graßmannvariablen können noch vor der Mittelung über das Zufallspotential abintegriert und die dabei entstehende Störungsreihe in V kann gliedweise gemittelt werden. Dies soll in diesem Anhang am Beispiel der retardierten Einteilchen-Greenfunktion gezeigt werden. Zweiteilchen-Greenfunktionen könnten völlig analog berechnet werden.

Ausgehend von

$$G^V = i\,\frac{\int d\overline{\psi}d\psi\overline{\psi}\psi\exp\left[-\overline{\psi}\left(-i\overset{0}{G}{}^{-1}+iV\right)\psi\right]}{\int d\overline{\psi}d\psi\exp\left[-\overline{\psi}\left(-i\overset{0}{G}{}^{-1}+iV\right)\psi\right]} \tag{0.1}$$

finden wir für die V-gemittelte Greenfunktion

$$\left\langle G^V\right\rangle = i\int\limits_{-\infty}^{\infty} dV\frac{\exp\left(-\dfrac{V^2}{4u^2}\right)}{2\sqrt{\pi}u}\frac{\int d\overline{\psi}d\psi\overline{\psi}\psi\exp\left[-\overline{\psi}\left(-i\overset{0}{G}{}^{-1}+iV\right)\psi\right]}{\int d\overline{\psi}d\psi\exp\left[-\overline{\psi}\left(-i\overset{0}{G}{}^{-1}+iV\right)\psi\right]}\ . \tag{0.2}$$

Nach Abintegration der Graßmannintegrale erhält man

$$
\begin{aligned}
\left\langle G^V \right\rangle \quad &= \overset{0}{G} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dV \frac{\exp\left(-\dfrac{V^2}{4u^2}\right)}{2\sqrt{\pi}u} \frac{1}{1- \overset{0}{G}\, V} \\
&= \overset{0}{G} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dV \frac{\exp\left(-\dfrac{V^2}{4u^2}\right)}{2\sqrt{\pi}u} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\overset{0}{G}\, V\right)^n
\end{aligned}
\tag{0.3}
$$

Die Glieder dieser Reihe können leicht dargestellt werden durch

$$
\begin{aligned}
&\overset{0}{G} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dV \frac{\exp\left(-\dfrac{V^2}{4u^2}\right)}{2\sqrt{\pi}u} \left(\overset{0}{G}\, V\right)^{2k} \\
&= \overset{0}{G} \frac{d}{d\left(\dfrac{1}{4u^2}\right)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dV \frac{\exp\left(-\dfrac{V^2}{4u^2}\right)}{2\sqrt{\pi}u} \left(\overset{0}{G}\right)^{2k} \\
&= \overset{0}{G} \frac{(2k-1)!!}{2^k} \left(4u^2\right)^k \left(\overset{0}{G}\right)^{2k} \\
&= \overset{0}{G} \frac{(2k-1)!}{(2k-2)!!2^k} \left(4u^2\right)^k \left(\overset{0}{G}\right)^{2k} \\
&= \overset{0}{G} \frac{(2k)!k}{2k \cdot k!2^{k-1}2^k} \left(4u^2\right)^k \left(\overset{0}{G}\right)^{2k} \\
&= \overset{0}{G} \frac{(2k)!}{k!} \left(u\, \overset{0}{G}\right)^{2k}
\end{aligned}
\tag{0.4}
$$

Diese asymptotische Reihe entspricht exakt derjenigen in (2.12), so daß wir in Anlehnung an Abschnitt 4.2.2

$$
\left\langle G^V \right\rangle_V = \frac{\sqrt{\pi}}{2iu} \exp\left(-\frac{1}{4u^2} \overset{0}{G}{}^2\right) Erfc\left(\frac{1}{2iu} \overset{0}{G}{}^{-1}\right) \tag{0.5}
$$

erhalten.

Literaturverzeichnis

[1] Anderson, P.W.: Phys. Rev. **109,** 1492 (1958)

[2] Abrahams, E., Anderson, P.W., Licciardello, D.C., Ramakrishnan, T.V.: Phys. Rev. Lett. **42,** 673 (1979)

[3] Gorkov, L.P., Larkin, A.I., Khmelnitski, P.I.: Pisma JETP, **30**, 248 (1979)

[4] Vollhardt, D., Wölfle, P.: Phys. Rev. **B22**, 4666 (1980)

[5] Ting, C.S.: Phys. Rev. **B26**, 678 (1982)

[6] Wegner, F.: Z. Phys. **B25,** 207 (1979)

[7] Schäfer, L., Wegner, F.: Z. Phys. **38**, 113 (1980)

[8] Efetov, K.B., Larkin, A.I., Khmelnitski, D.E.: JETP **79**, 1120 (1980)

[9] Pruisken, A.M.M., Schäfer, L.: Nucl. Phys. **B200** [**FS4**], 20 (1982)

[10] McKane, A.J., Stone, M.: Ann.of Phys. **131**, 36 (1980)

[11] Hikami, S.: Phys.Rev. **B24**, 2671 (1981)

[12] Hikami, S., in: Anderson Localization, Hrsg. Y. Nagaoka und H. Fukuyama, Springer Series in Solid State Sciences, Bd.39, Springer, Berlin (1982)

[13] Edwards, S.F., Anderson, P.W.: J.Phys. **F5**, 965 (1975)

[14] Levine, H., Libby, S.B., Pruisken, A.M.M.: Nucl. Phys. **B240 (FS12)**, 30 (1984)

[15] Pruisken, A.M.M.: Nucl. Phys. **B285 [FS19]**, 719 (1987)

[16] ders.: Nucl. Phys. **B290 [FS20],** 61 (1987)

[17] Verbaarschot, J.J.M., Zirnbauer, M.R.: J. Phys. **A17**, 1093 (1985)

[18] Efetov, K.B.: Adv. Phys. **32**, 53 (1983)

[19] Apel, W.: Phys. Rev. **B35**, 6137 (1987)

[20] Hayn, R., Dissertation, TU Dresden (1986)

[21] Aronov, A.G., Joselevich, A.S.: JETP Pisma **41**, 71 (1985)

[22] Kree, R.: Z. Phys. **B65,** 505 (1987)

[23] Schuster, H.G., Vieira, V.R.: Phys. Rev. **B34**, 189 (1986)

[24] Bausch, R., Leschke, H.: Z. Phys. **B53**, 249 (1983)

[25] Kolley, E., Kolley W.: Phys. Lett. **A124**, 330 (1987)

[26] Horbach, M.L., Schön G.: Ann. Phys. **2**, 51 (1993)

[27] Weller, W., Souleiman, M., Kolley, W.: MECO 15, Karpacz (1988)

[28] Souleiman, M.: Dissertation, Uni Leipzig (1989)

[29] Negele, J.W., Orland, H.: Quantum Many Particle Systems, Redwood City: Addison Wesley (1988)

[30] Keldysch, L.W.: JETP **47**, 1513 (1964)

[31] Lifshitz, I.M., Gredeskul, S.A., Pastur L.A.: Introduction to the Theorie of Disordered Systems, New York: John Wiley (1988)

[32] Berezinski, V.L.: JETP **65**, 125 (1973)

[33] Weller, W., Kasner, M., Stefani, F.: Journal of Non-Cristalline Solids **97/98** 229 (1987)

[34] Kravtsov, V.E., Lerner, I.V., Judson, V.I.: Physics Letters **A134**, 245 (1989)

[35] Koch, S.W.: Phys. Bl. **46**, 167 (1990)

[36] Dyson, F.J.: Journ. Math. Phys. **3**, 140 (1962)

[37] Bohigas, O. in: Les Houches Session LII 1989, Chaos and Quantum Physics, Amsterdam: North-Holland (1991)