

Nukleon-Nukleon-Reaktionen

Eigenschaften des Nukleons

Formalismus zur Beschreibung der elastischen Streuung
(Optisches Modell, Streuphasen) und von Reaktionen

Zwei-Nukleonen-Problem (Streulängen, NN-Potential, NN-Reaktionen)

Reaktionen zwischen Nukleonen und leichten Kernen

4. Vorlesung, TU Dresden 29.04.2008

Dr. Daniel Bemmerer



**Forschungszentrum
Dresden** Rossendorf

1. Vorlesung, 08.04.2008:

- Starke Wechselwirkung
- Ladungsunabhängigkeit, Einführung des Isospins
- Eigenschaften der Nukleonen: Masse und Lebensdauer
- Kinematik nichtrelativistisch

2. Vorlesung, 15.04.2008:

- Kinematik relativistisch
- Das Deuteron
- Definition Wirkungsquerschnitt

3. Vorlesung, 22.04.2008

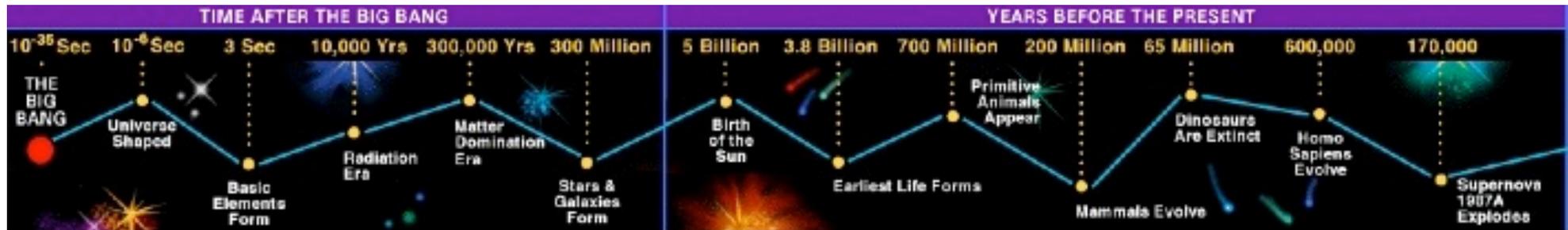
- Das Deuteron im elektromagnetischen Feld
- Reziprozitätssatz (*detailed balance theorem*)
- Experimente zu Synthese und Photodissoziation des Deuterons
- Astrophysikalisches: Bedeutung des Deuterons im Urknall

4. Vorlesung, heute

- Kosmischer Mikrowellen-Hintergrund
- Rutherford-Streuung
- Optisches Modell, elastische Streuung

Folien im Internet: <http://www.fzd.de/db/Cms?pOid=26617>

Der Urknall (auf einer Folie...)



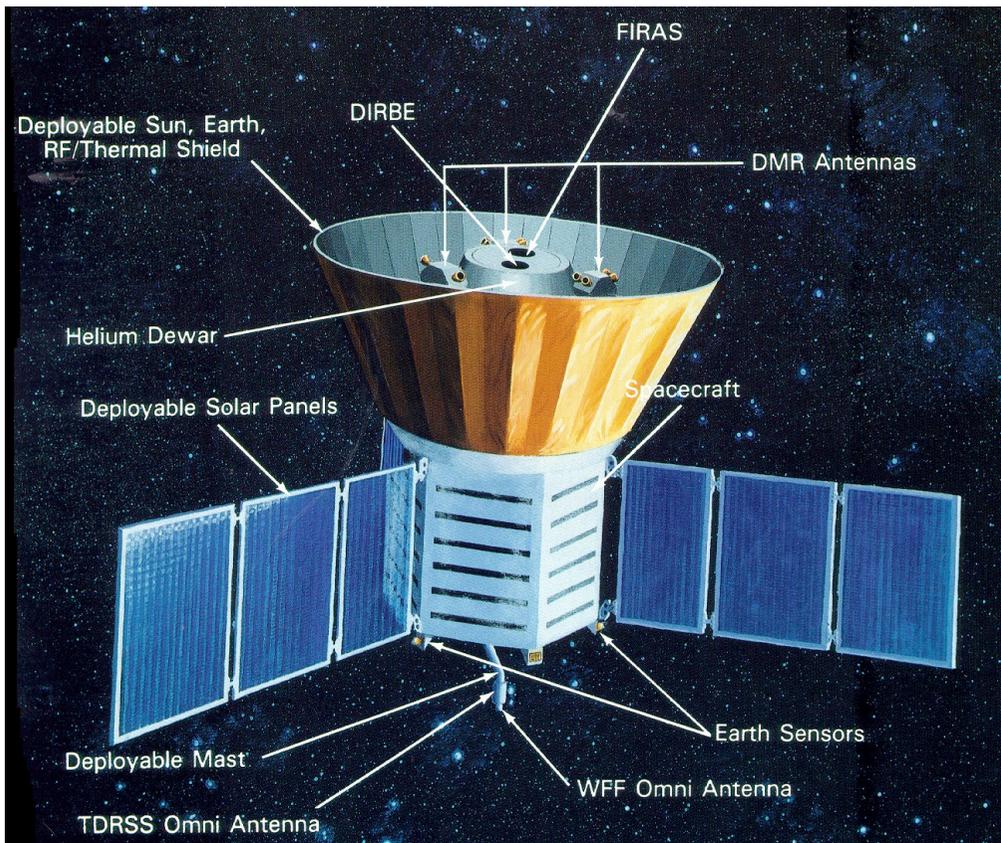
Quellen präziser Informationen über den Urknall:

1. Entstehung der leichten Elemente ^2H , $^3,^4\text{He}$, $^6,^7\text{Li}$, (Be, B)
 - Einige Sekunden nach dem Urknall
2. Mikrowellen-Hintergrund (*cosmic microwave background*, CMB)
 - 300 000 Jahre nach dem Urknall

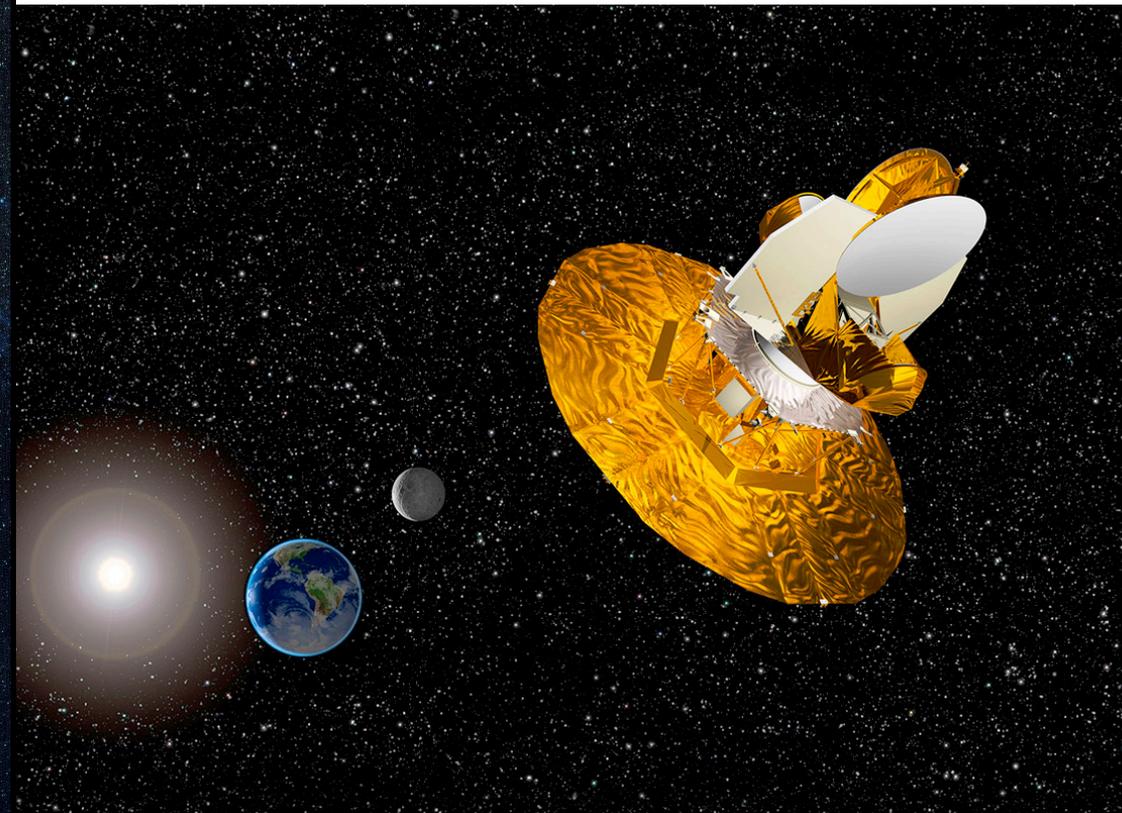
Daten zum Mikrowellen-Hintergrund (CMB)

<http://map.gsfc.nasa.gov>

COBE-Satellit (1989)

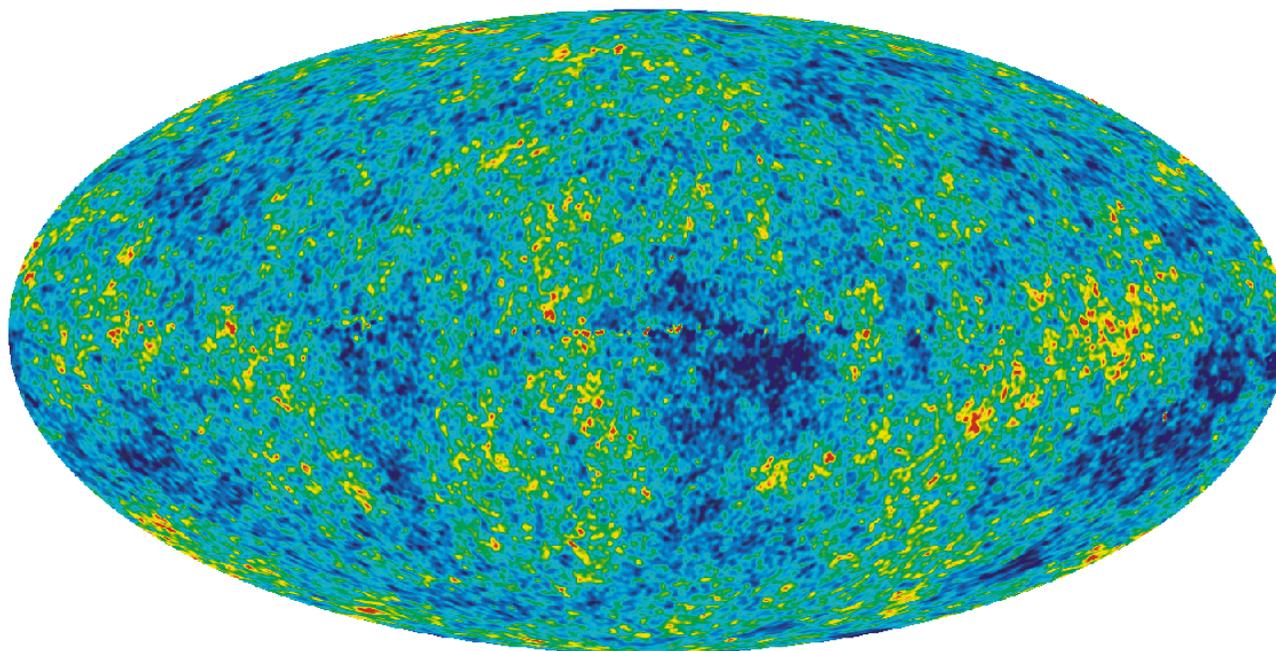


WMAP-Satellit (2001)

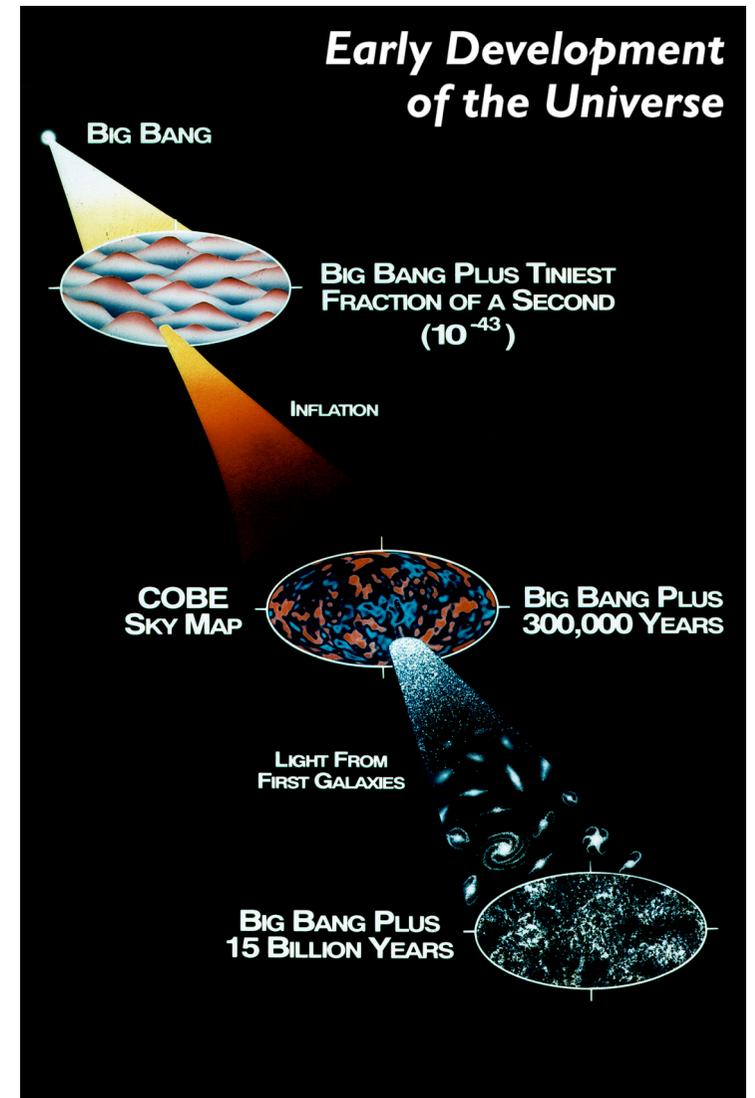


Ein Bild des 2.7 K Mikrowellen-Hintergrunds

Himmelskarte im Mikrowellen-Licht

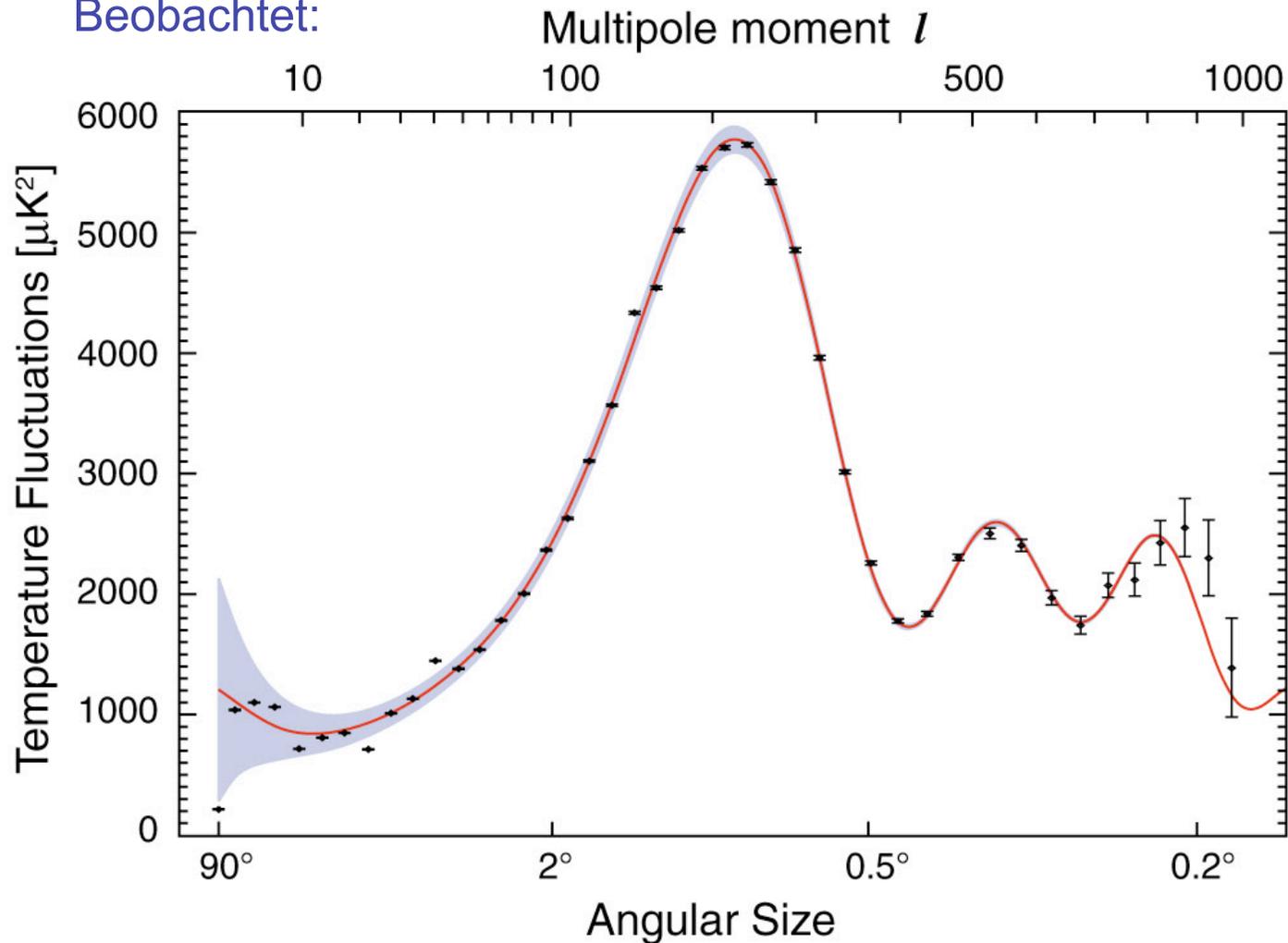


Anisotropien 10^5 -fach verstärkt dargestellt

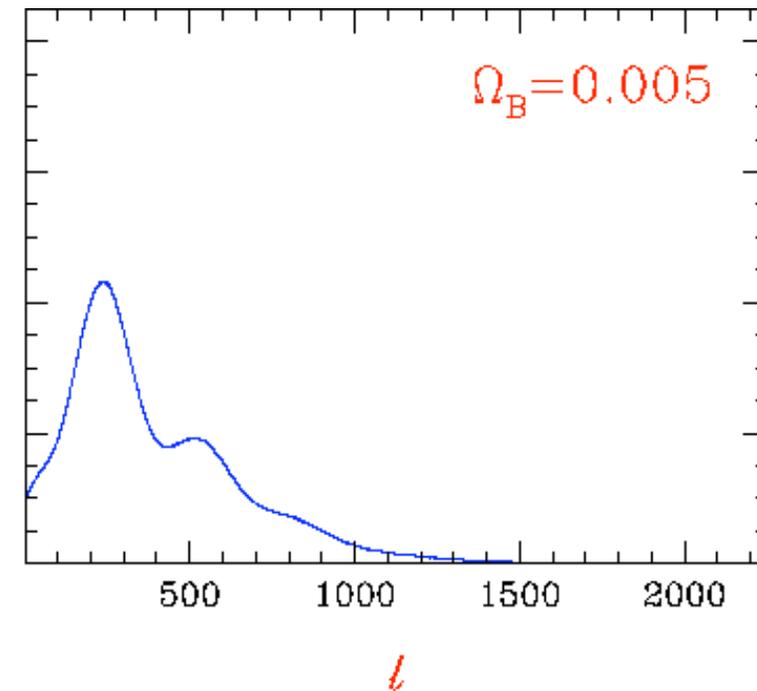


Winkel-Anisotropien transformiert in Drehimpulse:

Beobachtet:



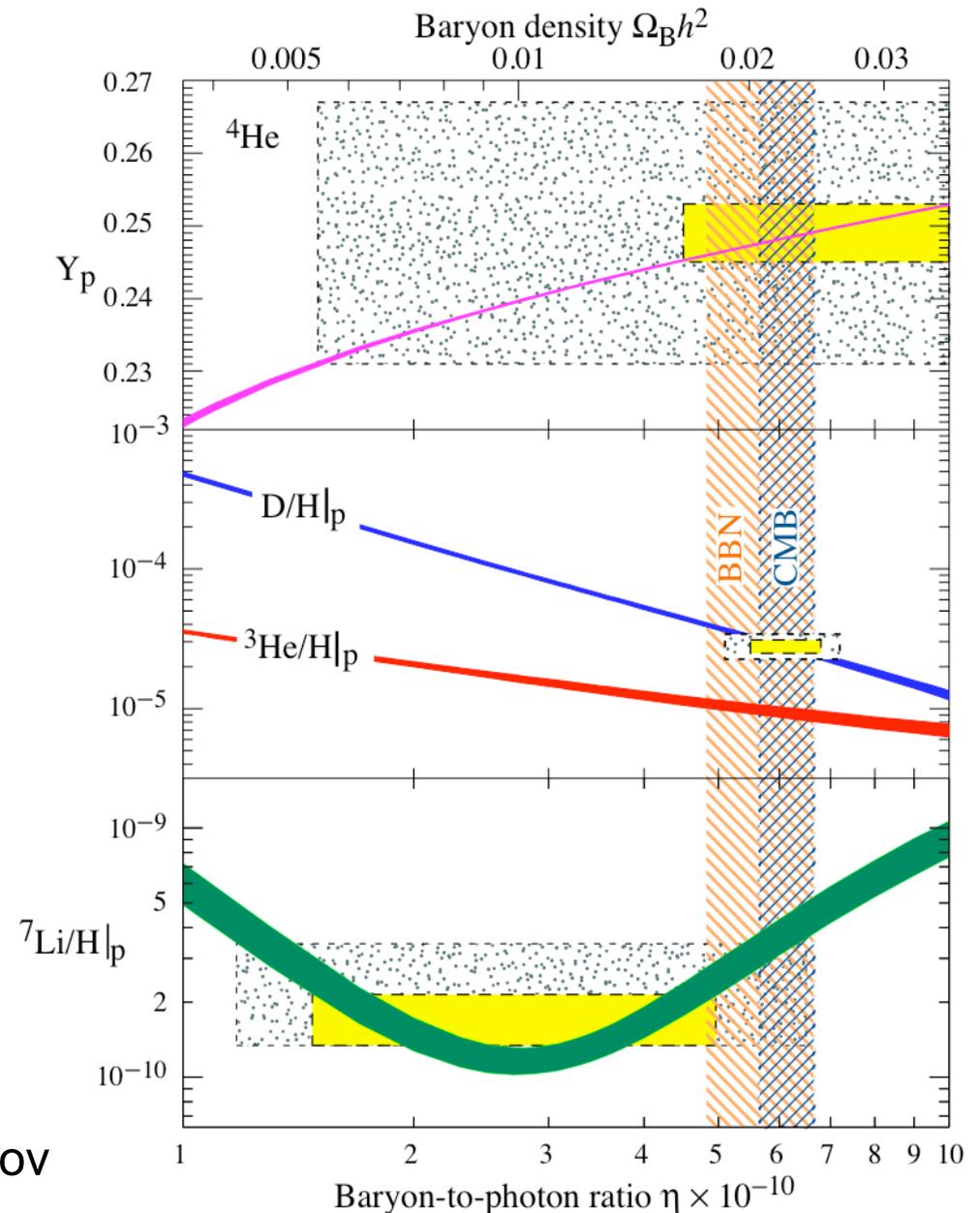
Simuliert (Parameter
Baryondichte Ω_B):



Alternative Informationsquelle: Die leichten Elemente ^2H , $^{3,4}\text{He}$, $^{6,7}\text{Li}$

- Messung der Häufigkeit Y von Elementen in der interstellaren Materie oder in alten Sternen = BBN
- Vergleich mit $\eta \propto \Omega_B$ aus dem Mikrowellen-Hintergrund = CMB
- Diese beiden Informationsquellen liefern konsistente Ergebnisse!

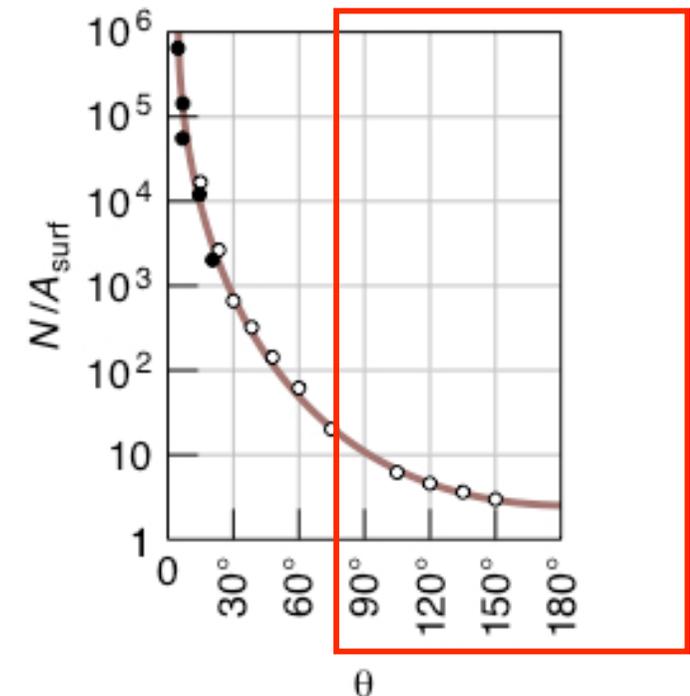
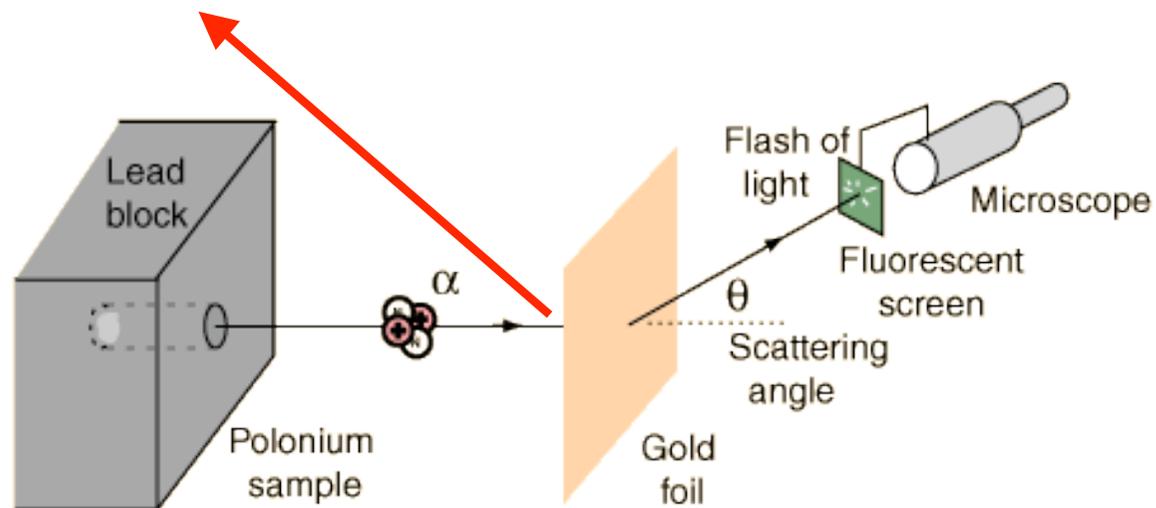
<http://pdg.lbl.gov>



Rutherford-Streuung (Coulomb-Feld)

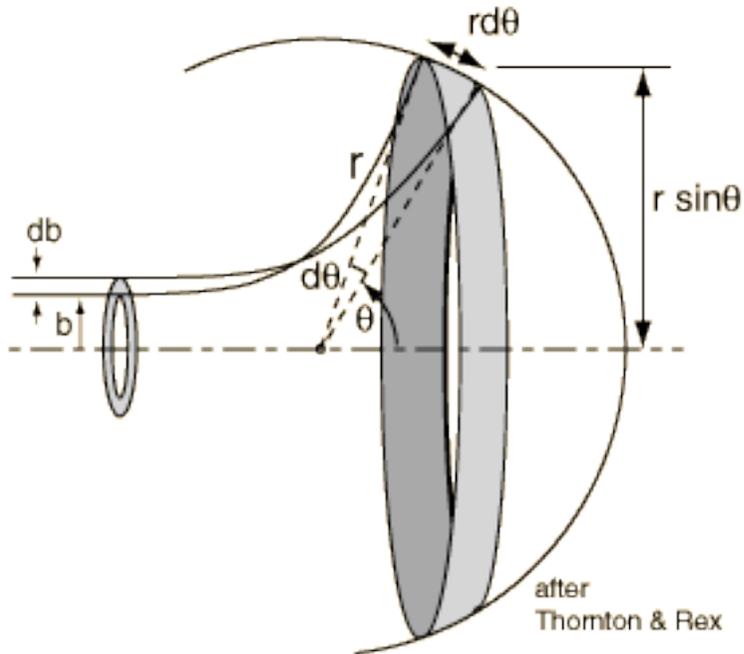
- Experiment 1909 in Manchester: Hans Geiger und Ernest Marsden
- Interpretation durch Ernest Rutherford
- Überraschende Ergebnisse bei Rückwärtsstreuung

Rückwärtsstreuung



<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu>

Die Rutherford-Streuformel



- Streuparameter b
= Abstand Projektil-Target, projiziert senkrecht zur Einschussrichtung
- Streuwinkel θ
- Coulomb-Potenzial

$$V(r) = \frac{Z_{\text{Projektil}} Z_{\text{Target}} e^2}{r} = \frac{\text{konst.}}{r}$$

- Ergebnis (Rutherford-Streuformel):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_{\text{Projektil}} Z_{\text{Target}} e^2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

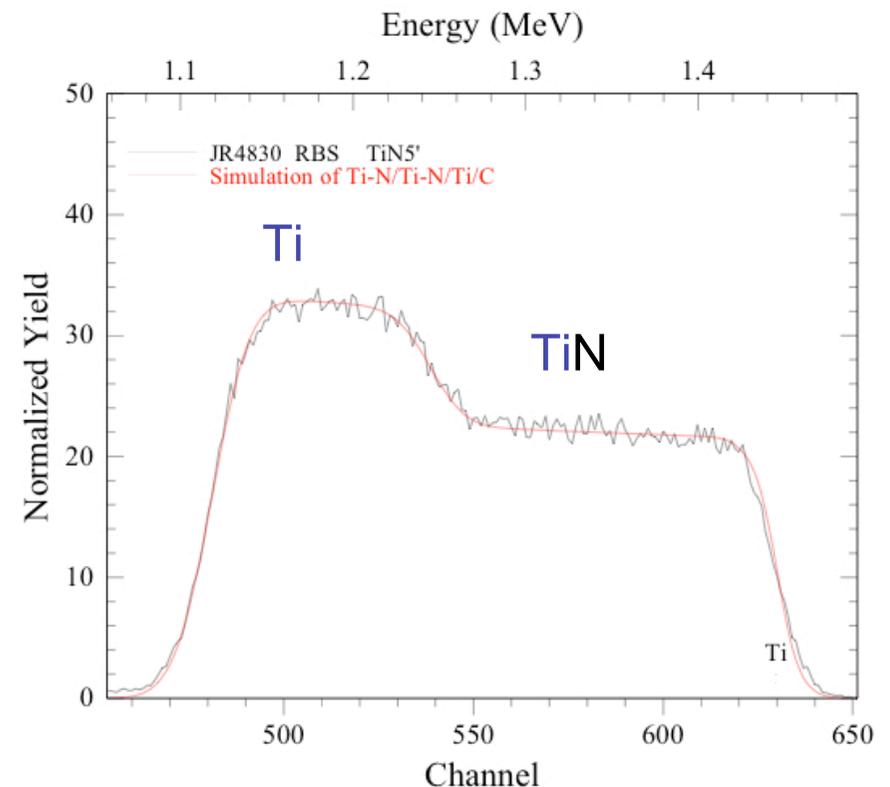
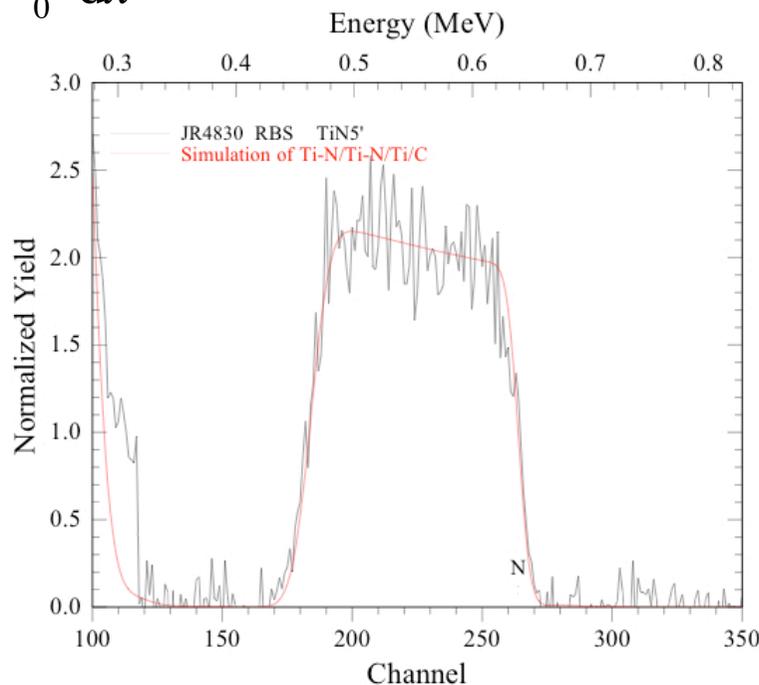
Praktische Anwendung der Rutherford-Streuformel

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_{\text{Projektil}} Z_{\text{Target}} e^2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

Energieverlust (ausgenutzt für Tiefenprofil):

$$E(x) = E_0 - \int_0^x \frac{dE}{dx}(E) dx$$

- Rutherford backscattering (RBS):
Bestimmung der Zusammensetzung einer Probe durch Ladungszahl Z_{target} , mit Energie- und dadurch Tiefenauflösung E
- Beispiel: Untersuchung einer TiN - Probe (A. Vomiero, LNL Legnaro/Italien)



Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung

Differenzieller Wirkungsquerschnitt: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{in } d\Omega \text{ gestreuter Teilchenstrom pro Streuzentrum}}{\text{einfallende Teilchenstromdichte}}$

Quantenmechanik: Stromdichte $\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi)$

Kräftefreier Fall, $V(r)=0$: Einfallende Stromdichte \vec{j}_i

$$u'' + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)u = 0 \quad \text{mit} \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E > 0$$

Allgemeine Lösung: Sphärische Hankelfunktionen

Reduktion (NORM. bei $r \rightarrow 0$) **Besselfunktionen j_ℓ**

$$\psi_\ell^m(\vec{k}, \vec{r}) = A \cdot j_\ell(\vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot Y_\ell^m(\theta, \phi) \quad \text{Orthonormalsystem}$$

Jede Linearkombination ist Eigenfunktion:

$$\psi(k, r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} a_{\ell m} \cdot j_\ell(kr) \cdot Y_\ell^m(\theta, \phi)$$

$$\psi(k, r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} a_{\ell m} \cdot j_{\ell}(kr) \cdot Y_{\ell}^m(\theta, \phi)$$

Insbesondere:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \sqrt{4\pi} \sqrt{\ell(\ell+1)} i^{\ell} \cdot j_{\ell}(kr) \cdot Y_{\ell}^m(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} 2(\ell+1) i^{\ell} \cdot j_{\ell}(kr) \cdot P_{\ell}(\cos\theta)$$

Ebene Welle $Ae^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = Ae^{ikz}$

Ebene Welle:

- ist Eigenfunktion zum freien Hamiltonian
- enthält Anteile zu allen Drehimpulsen mit Gewichten $\ell(\ell+1)$
- Drehimpulse stehen senkrecht auf der Einfallsrichtung

$$\bar{z} = \frac{\vec{k} \cdot \vec{r}}{|\vec{k}|} \quad (m=0)$$

⇒ einfallender Strom:

$$\begin{aligned} j_i &= \frac{i\hbar}{2m} |A|^2 \left(e^{ikz} (-ik) e^{-ikz} - e^{-ikz} (ik) e^{ikz} \right) \\ &= \frac{\hbar k}{m} |A|^2 = v |A|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 j_i &= \frac{i\hbar}{2m} |A|^2 \left(e^{ikz} (-ik) e^{-ikz} - e^{-ikz} (ik) e^{ikz} \right) \\
 &= \frac{\hbar k}{m} |A|^2 = v |A|^2
 \end{aligned}$$

$[A^2] = \text{cm}^{-3}$ Teilchen pro Volumen

$[j] = \text{s}^{-1} \text{cm}^{-2}$ Teilchen(strom) pro Zeit durch Fläche

mit $\sin \alpha = \frac{1}{2i} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$ und $i^\ell = e^{i\ell \frac{\pi}{2}}$

und $j_\ell(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{kr} \cos(kr - (\ell + 1) \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{kr} \sin(kr - \ell \frac{\pi}{2})$

folgt:

$$\begin{aligned}
 e^{ikz} &\rightarrow \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) e^{i\ell \frac{\pi}{2}} \frac{e^{i(kr - \ell \frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr - \ell \frac{\pi}{2})}}{2ikr} P_\ell(\cos \theta) \\
 &= \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr} P_\ell(\cos \theta)
 \end{aligned}$$

Dies entspricht der Darstellung der ebenen Welle als Überlagerung einlaufender (e^{-ikr}) und auslaufender (e^{ikr}) Kugelwellen (Huygensches Prinzip).

Nach Sommerfeld ist die Wirkung eines Streuzentrums, dass es eine auslaufende Kugelwelle überlagert.

$$\psi_{sc}(k, r, \theta, \phi) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} A \cdot f(\theta, \phi) \cdot \frac{e^{ikr}}{r}$$

$f(\theta, \phi)$: winkelabhängige Modulation, sogenannte Streuamplitude

$$\begin{aligned} \psi_f(k, r, \theta, \phi) &= \psi_i(k, r, \theta, \phi) + \psi_{sc}(k, r, \theta, \phi) \\ &= A \left(e^{ikz} + f(\theta, \phi) \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \right) \end{aligned}$$

Winkelabhängiger Strom (θ, ϕ) bei konstantem Abstand r :

$$\vec{j}_{sc} = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi_{sc} \vec{\nabla} \psi_{sc}^* - \psi_{sc}^* \vec{\nabla} \psi_{sc} \right)$$

wobei $\vec{\nabla} \rightarrow d/dr$ und $\psi_{sc} = A \cdot f(\theta, \phi) \cdot g(r)$, $g(r) = e^{ikr}/r$

$$\Rightarrow j_{sc} = \frac{i\hbar}{2m} |A|^2 |f(\theta, \phi)|^2 \left(g(r) \frac{d}{dr} g^*(r) - g^*(r) \frac{d}{dr} g(r) \right)$$

$$\Rightarrow j_{sc} = \frac{i\hbar}{2m} |A|^2 |f(\theta, \phi)|^2 \left(g(r) \frac{d}{dr} g^*(r) - g^*(r) \frac{d}{dr} g(r) \right)$$

Berechnung von B :

$$\frac{d}{dr} g(r) = \frac{1}{r^2} (ikr e^{ikr} - e^{ikr}) = \frac{ikr - 1}{r^2} g(r)$$

$$\frac{d}{dr} g^*(r) = \frac{-1}{r^2} (ikr e^{-ikr} + e^{-ikr}) = \frac{-ikr - 1}{r^2} g^*(r)$$

$$\Rightarrow B = |g(r)|^2 \left(\frac{-ikr - 1}{r^2} - \frac{ikr - 1}{r^2} \right) = -\frac{2ikr}{r^2}$$

$$\Rightarrow j_{sc} = \frac{\hbar k}{mr^2} |A|^2 |f(\theta, \phi)|^2 = v |A|^2 \frac{|f(\theta, \phi)|^2}{r^2}$$

Gestreute
Teilchenstromdichte

Teilchenstrom im Raumwinkelelement $d\Omega$ und differenzieller Wirkungsquerschnitt:

$$I_{sc} = j_{sc} \frac{r^2 d\Omega}{d\Omega} = v |A|^2 |f(\theta, \phi)|^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{I_{sc}}{j_i} = |f(\theta, \phi)|^2$$

Im folgenden Beschränkung auf rotationssymmetrische Systeme, also $f(\theta, \varphi) \rightarrow f(\theta)$
 (d.h. keine Behandlung von Polarisation!)

Entwicklung der Streuamplitude:

$$f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a_{\ell}}{2ik} P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$\Rightarrow \psi_f(k, r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(\cos \theta) \left((2\ell + 1) e^{i\ell\pi/2} \frac{e^{i(kr - \ell\pi/2)} - e^{-i(kr - \ell\pi/2)}}{2ikr} + \frac{a_{\ell}}{2ikr} e^{ikr} \right)$$

Andererseits (Anschlussbedingungen am Potenzialrand)

$$\Rightarrow \psi_f(k, r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(\cos \theta) \left((2\ell + 1) e^{i\ell\pi/2} \frac{e^{i(kr - \ell\pi/2 + 2\delta_{\ell})} - e^{-i(kr - \ell\pi/2)}}{2ikr} \right)$$

mit der PHASENVERSCHIEBUNG $2\delta_{\ell}$

Koeffizientenvergleich:

$$(2\ell + 1) + a_{\ell} = (2\ell + 1)e^{2i\delta_{\ell}} \Rightarrow a_{\ell} = (2\ell + 1)(e^{2i\delta_{\ell}} - 1)$$

Streuamplitude:
$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) (e^{2i\delta_{\ell}} - 1) P_{\ell}(\cos \theta)$$

Wirkungsquerschnitt:
$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= |f(\theta)|^2 \\ &= \frac{1}{4k^2} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) (e^{2i\delta_{\ell}} - 1) P_{\ell}(\cos \theta) \right|^2 \\ &= \frac{1}{4k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{\ell'=0}^{\infty} (2\ell + 1)(2\ell' + 1) (e^{2i\delta_{\ell}} - 1)(e^{2i\delta_{\ell'}} - 1) P_{\ell} P_{\ell'} \end{aligned}$$

Dies ist eine kohärente Überlagerung von Partialwellen.

mit
$$\int_{-1}^1 dx P_{\ell}(x) P_{\ell'}(x) = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell\ell'}$$

$$\begin{aligned} e^{2i\delta_{\ell}} - 1 &= e^{i\delta_{\ell}} (e^{i\delta_{\ell}} - e^{-i\delta_{\ell}}) \\ &= 2ie^{i\delta_{\ell}} \sin^2 \delta_{\ell} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_{sc} = \frac{\pi}{k^2} \sum (2\ell + 1) |e^{2i\delta_{\ell}} - 1|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sum (2\ell + 1) \sin^2 \delta_{\ell}$$

Asymptotische Lösung, potenzialfreier Fall $V(r) = 0$:

$$\left\{ v_\ell'' + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) v_\ell = 0 \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E \right\}$$

$$v_\ell = r \cdot j_\ell(kr) = \sqrt{\frac{\pi r}{2k}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sin\left(kr - \frac{\pi}{2} \ell\right)$$

Asymptotische Lösung, mit Potenzial $V(r)$:

$$\left\{ \begin{aligned} u_\ell'' + \left(k^2 - U(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) u_\ell &= 0 \\ k^2 &= \frac{2m}{\hbar^2} E \quad U(r) = \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \end{aligned} \right\}$$

$$u_\ell \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sin\left(kr - \frac{\pi}{2} \ell + \delta_\ell\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty (v_\ell u_\ell'' - u_\ell v_\ell'') dr = \int_0^\infty (v_\ell U(r) u_\ell) dr$$

$$\text{mit } \int_0^\infty (v_\ell u_\ell'' - u_\ell v_\ell'') dr = [v_\ell u_\ell' - u_\ell v_\ell'] - \int_0^\infty (v_\ell' u_\ell' - u_\ell' v_\ell') dr$$

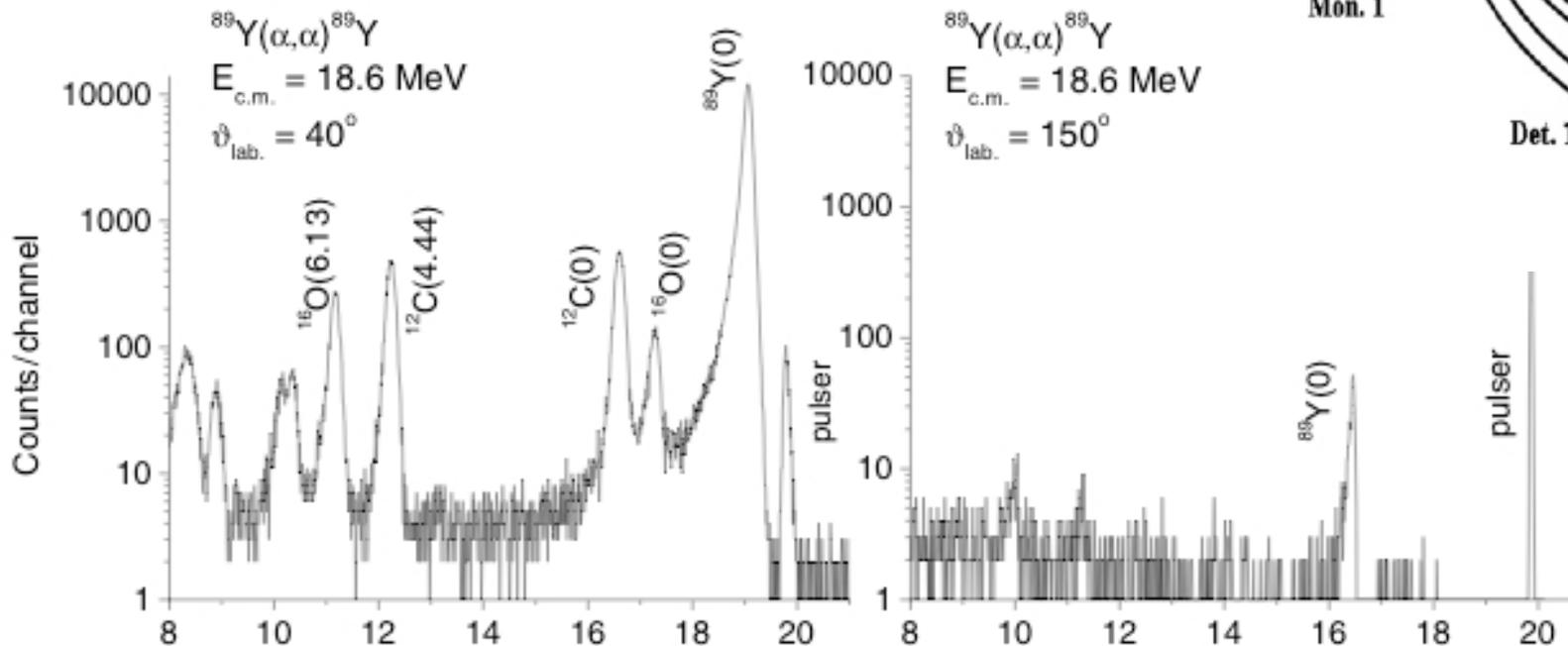
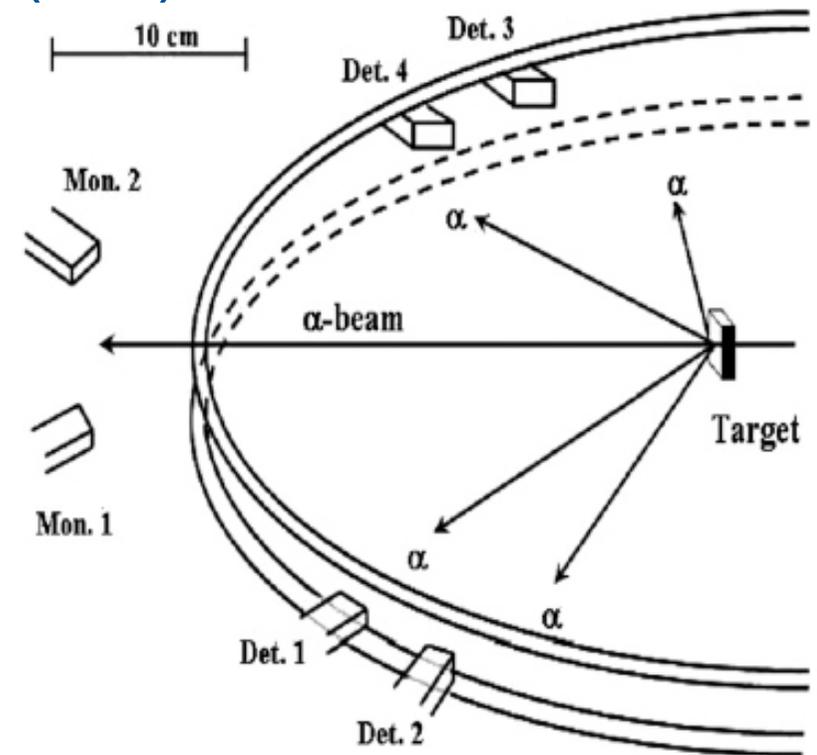
$$\int_0^\infty (v_\ell u_\ell'' - u_\ell v_\ell'') dr = \sin \delta_\ell$$

$$\Rightarrow \sin \delta_\ell = - \int_0^\infty dr \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} kr J_{\ell+\frac{1}{2}}(kr) U(r) u_\ell(r) \right)$$

Anwendung der Potenzialstreuung: $^{89}\text{Y}(\alpha, \alpha)^{89}\text{Y}$

- Experimente zur elastischen Streuung an astrophysikalisch besonders interessanten Kernen

G. Kiss et al., J. Phys. G 35, 014037 (2008)



Anwendung der Potenzialstreuung: $^{89}\text{Y}(\alpha, \alpha)^{89}\text{Y}$

- Verschiedene Formen des Potentials können an den elastischen Streudaten getestet werden.

G. Kiss et al., J. Phys. G 35, 014037 (2008)

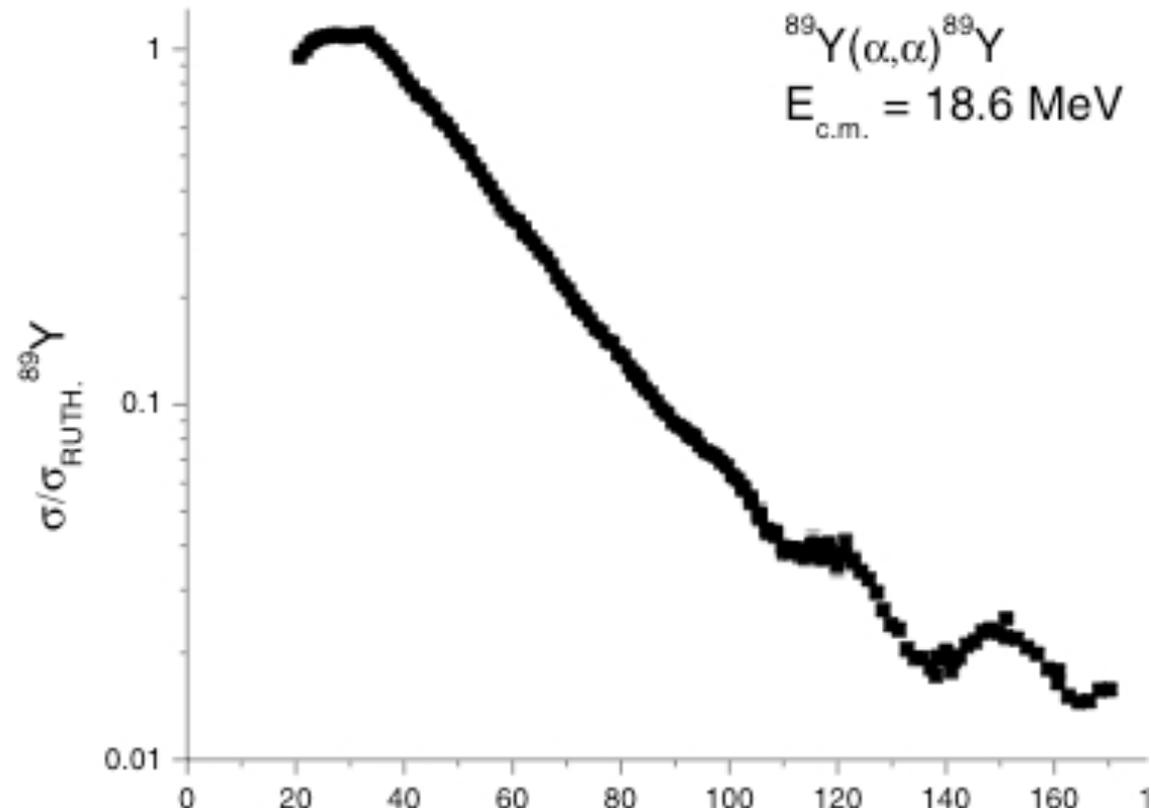
Schrödinger-Gleichung:

$$u_\ell'' + \left(k^2 - U(r) - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2}\right)u_\ell = 0$$

mit Potenzial $U(r)$:

$$U(r) = \frac{Z_{\text{Projektil}} Z_{\text{Target}} e^2}{r} + V(r) + iW(r)$$

Coulomb (Rutherford- Streuung)	elastische Streuung	Kern- reak- tionen
Kernpotenzial		



1. Vorlesung, 08.04.2008

- Starke Wechselwirkung, Ladungsunabhängigkeit, Einführung des Isospins
- Eigenschaften der Nukleonen: Masse und Lebensdauer
- Kinematik nichtrelativistisch

2. Vorlesung, 15.04.2008

- Kinematik relativistisch
- Das Deuteron

3. Vorlesung, 22.04.2008

- Das Deuteron im elektromagnetischen Feld
- Reziprozitätssatz (*detailed balance theorem*)
- Synthese und Photodissoziation des Deuterons
- Astrophysikalisches: Bedeutung des Deuterons im Urknall

4. Vorlesung, heute

- Rutherford-Streuung
- Optisches Modell, elastische Streuung

5. Vorlesung, nächste Woche

- Resonanzen

Folien im Internet: <http://www.fzd.de/db/Cms?pOid=26617>