***Spezialfälle***

a.)

$$m_1 = m_2 \tag{2.140}$$
$$\Rightarrow \vec{v}' = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \tag{2.141}$$

b.)

$$v_2 = -v_1 \tag{2.142}$$
$$\Rightarrow \vec{v}' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 \tag{2.143}$$

c.)

$$m_1 = m_2, v_2 = -v_1 \tag{2.144}$$
$$\Rightarrow \vec{v}' = 0 \tag{2.145}$$
$$\Rightarrow \Delta E = \frac{m_1^2}{2(2m_1)}(2\vec{v}_1)^2 = m_1 v_1^2 \tag{2.146}$$
$$\Leftrightarrow \Delta E = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 \tag{2.147}$$

Die gesamte kinetische Energie ist in Verformungsenergie übergegangen.

## 2.5.2 Zentraler, elastischer Stoß

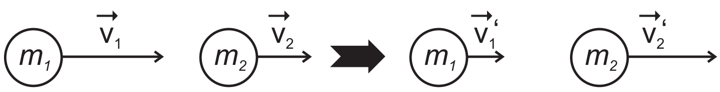



**Abbildung 2.19:** Zentraler, elastischer Stoß.

**Impulserhaltung:**

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \tag{2.148}$$
$$\Leftrightarrow m_1\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_1'\right) = m_2\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_2'\right) \tag{2.149}$$

**Energieerhaltung:**

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2'^2 \tag{2.150}$$

$$\Leftrightarrow m_1\left(\vec{v}_1^2 - \vec{v}_1'^2\right) = m_2\left(\vec{v}_2^2 - \vec{v}_2'^2\right) \tag{2.151}$$

Division von (2.151)/(2.149) ergibt:

$$\frac{(\vec{v}_1^2 - \vec{v}_1'^2)}{(\vec{v}_1 - \vec{v}_1')} = \frac{(\vec{v}_2'^2 - \vec{v}_2^2)}{(\vec{v}_2' - \vec{v}_2)} \tag{2.152}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_1')(\vec{v}_1 + \vec{v}_1')}{(\vec{v}_1 - \vec{v}_1')} = \frac{(\vec{v}_2' - \vec{v}_2)(\vec{v}_2' + \vec{v}_2)}{(\vec{v}_2' - \vec{v}_2)} \tag{2.153}$$

$$\Leftrightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_1' = \vec{v}_2 + \vec{v}_2' \tag{2.154}$$

Eliminieren von $\vec{v}_1'$ oder $\vec{v}_2'$ aus (2.149)

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_2' + \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \tag{2.155}$$

$$\Rightarrow m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_2' - \vec{v}_2 + \vec{v}_1) = m_2\vec{v}_2' - m_2\vec{v}_2 \tag{2.156}$$

$$\Leftrightarrow 2m_1v_1 - m_1\vec{v}_2' - m_1\vec{v}_2 = m_2\vec{v}_2' - m_2\vec{v}_2 \tag{2.157}$$

$$\Leftrightarrow (m_1 + m_2)\vec{v}_2' = 2m_1\vec{v}_1 + (m_2 - m_1)\vec{v}_2 \tag{2.158}$$

$$\Leftrightarrow \vec{v}_2' = \frac{2m_1\vec{v}_1 + (m_2 - m_1)\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{2.159}$$

analog:

$$\vec{v}_1' = \frac{2m_2\vec{v}_2 + (m_1 - m_2)\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \tag{2.160}$$

***Spezialfälle:***

a.)

$$m_1 = m_2, \quad \vec{v}_2 = 0 \tag{2.161}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1' = 0 \text{ und } \vec{v}_2' = \vec{v}_1 \tag{2.162}$$

b.)

$$m_1 \gg m_2, \quad \vec{v}_2 = 0 \tag{2.163}$$
$$\Rightarrow \vec{v}_1' \approx \vec{v}_1 \text{ und } \vec{v}_2' \approx 2\vec{v}_1 \tag{2.164}$$

c.)

$$m_1 \ll m_2, \quad \vec{v}_2 = 0 \tag{2.165}$$
$$\Rightarrow \vec{v}_1' \approx -\vec{v}_1 \text{ und } \vec{v}_2' \approx \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \approx 0 \tag{2.166}$$

d.)

$$m_1 = m_2, \quad \vec{v}_2 = -\vec{v}_1 \tag{2.167}$$
$$\Rightarrow \vec{v}_1' = \vec{v}_2 \text{ und } \vec{v}_2' = \vec{v}_1 \tag{2.168}$$
$$\Leftrightarrow \vec{v}_1' = -\vec{v}_1 \text{ und } \vec{v}_2' = -\vec{v}_2 \tag{2.169}$$

### 2.5.3 Schiefer, zentraler, elastischer Stoß

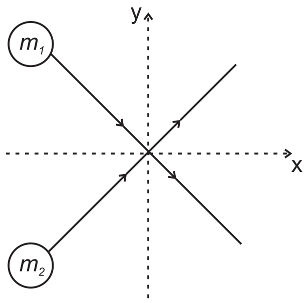



**Abbildung 2.20:** Schiefer, zentraler, elastischer Stoß.

Impulserhaltung gilt für alle Komponenten getrennt.

**Impulserhaltung:**

$$\text{x-Komponente: } m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v_{1x}' + m_2 v_{2x}' \tag{2.170}$$
$$\text{y-Komponente: } m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v_{1y}' + m_2 v_{2y}' \tag{2.171}$$

**Energieerhaltung:**

$$\frac{1}{2} m_1 \left(v_{1x}^2 + v_{1y}^2\right) + \frac{1}{2} m_2 \left(v_{2x}^2 + v_{2y}^2\right) = \frac{1}{2} m_1 \left(v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2\right) + \frac{1}{2} m_2 \left(v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2\right) \tag{2.172}$$

**Lösung des Gleichungssystems:**

Körper 1, Masse $m_1$

$$v'_{1x} = v_{1x} \tag{2.173}$$

$$v'_{1y} = \frac{2m_2 v_{2y} + (m_1 - m_2) v_{1y}}{m_1 + m_2} \tag{2.174}$$

Körper 2, Masse $m_2$

$$v'_{2x} = v_{2x} \tag{2.175}$$

$$v'_{2y} = \frac{2m_1 v_{1y} + (m_2 - m_1) v_{2y}}{m_1 + m_2} \tag{2.176}$$

---

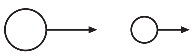
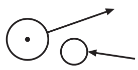
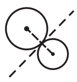
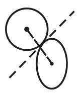
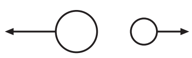
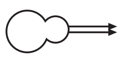
| Stoßart | Bild | Charakteristika |
|---|---|---|
| gerade |  | Die Bahnen beider Schwerpunkte liegen auf einer Geraden. |
| schief |  | Die Bahnen beider Schwerpunkte liegen in einer Ebene und schließen einen Winkel ein. |
| zentral |  | Die Schwerpunkte der Stoßpartner liegen auf der Normalen zur Berührungsebene durch den Berührungspunkt (Stoßnormale) |
| exzentrisch |  | Die Schwerpunkte liegen nicht auf der Stoßnormalen. Es tritt Rotation auf. |
| elastisch |  | Die Summen der kinetischen Energien vor und nach dem Stoß sind gleich. |
| inelastisch |  | Die Summen der kinetischen Energien vor und nach dem Stoß sind verschieden. |
| unelastisch |  | Die Körper bewegen sich nachher mit einer gleichen, gemeinsamen Endgeschwindigkeit weiter. |

**Abbildung 2.21:** Klassifikation der Stoßprozesse.

## 2.6 Drehimpuls $\vec{L}$

Genau wie der Impuls $\vec{p}$ die (Translations-)Bewegungsgröße eines Körpers ist, ist der Drehimpuls $\vec{L}$ die (Rotations-)Bewegungsgröße eines Körpers:

**Definition:**
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
$\vec{L}$ ist ein axialer Vektor dessen Richtung den Drehsinn definiert (wie $\vec{\omega}$ bei der Kreisbewegung).

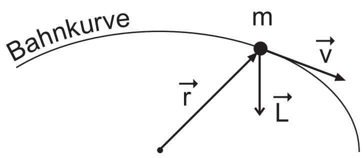



**Abbildung 2.22:** Vektoren des Drehimpulses.

### 2.6.1 Kreisbewegung

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{2.177}$$
$$\Leftrightarrow \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}, (\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{2.178}$$
$$\Leftrightarrow \vec{L} = \vec{r} \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{2.179}$$
$$\Leftrightarrow \vec{L} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{2.180}$$
$$\Leftrightarrow \vec{L} = m((\vec{r}\vec{r})\vec{\omega} - \underbrace{(\vec{r}\vec{\omega})}_{=0, \vec{r} \perp \vec{\omega}} \vec{r}) \tag{2.181}$$
$$\Leftrightarrow \vec{L} = mr^2\vec{\omega} \tag{2.182}$$

### 2.6.2 Drehimpulserhaltung

Analog zum Impulserhaltungssatz. Der Gesamtdrehimpuls eines Systems aus $N$ Massepunkten bleibt erhalten.

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \text{konst.} \tag{2.183}$$

Aus dem 2. Newtonschen Axiom folgt, dass eine Kraft $\vec{F}$ aufgewendet werden muß um den Impuls $\vec{p}$ zu ändern.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{2.184}$$

analoges gilt für den Drehimpuls.

### 2.6.3 Drehmoment

Um den Drehimpuls zu ändern muss ein Drehmoment $\vec{M}$ aufgewendet werden.

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{2.185}$$

einsetzen:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) \tag{2.186}$$

$$\Leftrightarrow \vec{M} = \underbrace{\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{=\vec{v}} \times \vec{p}}_{=0,\vec{v}\|\vec{p}} + \vec{r} \times \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{=\vec{F}} \tag{2.187}$$

$$\Leftrightarrow \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{2.188}$$

### 2.6.4 Arbeit bei Drehbewegungen

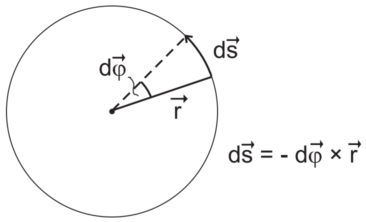



**Abbildung 2.23:** Arbeit bei der Drehbewegung.

$$dW = \vec{F} d\vec{s} \tag{2.189}$$

$$\Rightarrow W = \int_{s_0}^{s_1} \vec{F}(s) d\vec{s} \tag{2.190}$$

$$\Leftrightarrow W = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \vec{F}(\varphi)(d\vec{\varphi} \times \vec{r}) \tag{2.191}$$

$$\Leftrightarrow W = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left(\vec{r} \times \vec{F}(\varphi)\right) d\vec{\varphi} \tag{2.192}$$

$$\Leftrightarrow W = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \vec{M}(\varphi) d\vec{\varphi} \tag{2.193}$$

$$\Rightarrow W = \vec{M}(\vec{\varphi}_1 - \vec{\varphi}_0), \text{da } \vec{M} \text{ unabhängig von } \varphi \tag{2.194}$$

### 2.6.5 Leistung bei Drehbewegungen

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{M} \vec{\varphi} = \vec{M} \vec{\omega} \tag{2.195}$$

### 2.6.6 Energie bei Drehbewegungen

$$E_{\text{kin}}^{\text{rot}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 \tag{2.196}$$

**Tabelle 2.1:** Analogien zwischen Translation und Rotation.

| Translation | | Rotation | |
|---|---|---|---|
| **Größe, Formelzeichen** | **Einheit** | **Größe, Formelzeichen** | **Einheit** |
| Weg<br>$\vec{s}$, $d\vec{s}$ | m | Winkel<br>$\vec{\varphi}$, $d\vec{\varphi}$ | rad=1 |
| Geschwindigkeit<br>$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$ | m/s | Winkelgeschwindigkeit<br>$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ | rad/s = 1/s |
| Beschleunigung<br>$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2}$ | m/s$^2$ | Winkelbeschleunigung<br>$\vec{\alpha} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$ | rad/s$^2$ =1/s$^2$ |
| Masse<br>$m$ | kg | Massenträgheitsmoment<br>$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$ | kg m$^2$ |
| Kraft<br>$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ | kg m /s$^2$ = N | Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$<br>$\vec{M} = J\vec{\alpha} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ | Nm |
| Impuls<br>$\vec{p} = m\vec{v}$ | kg m/s = Ns | Drehimpuls<br>$\vec{L} = J\vec{\omega}$ | kg m$^2$/s = Nms |
| Arbeit<br>$dW = \vec{F} d\vec{s}$ | Nm = J = Ws | Arbeit<br>$dW = \vec{M} d\vec{\varphi}$ | Nm = J = Ws |
| kinetische Energie<br>$E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{trans}} = \frac{1}{2} m\vec{v}^2$ | J | kinetische Energie<br>$E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} J\vec{\omega}^2$ | J |
| Leistung<br>$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\vec{v}$ | W = J/s | Leistung<br>$P = \frac{dW}{dt} = \vec{M}\vec{\omega}$ | W = J/s |