



**TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN**

**Diplomarbeit
zur Erlangung des wissenschaftlichen Grades
Diplom-Physiker**

Elektromagnetische Felder und Elektronendynamik in der Travelling-Wave Thomsonstreuung

vorgelegt von

Klaus Steiniger

geboren am 24. Dezember 1986 in Karl-Marx-Stadt (jetzt Chemnitz)

Technische Universität Dresden
Institut für Angewandte Physik
2012

1. Gutachter: Prof. Dr. Dr. h. c. Roland Sauerbrey

2. Gutachter: Dr. Michael Bussmann

Abgegeben am

Kurzfassung

Travelling-Wave Thomsonstreuung (TWTS) ist eine neuartige Thomsonstreuungsgeometrie mit großer Strahlungsausbeute pro Puls, bei der ultrakurze Laserpulse mit verkippten Pulsfronten als optische Undulatoren oder lichtgetriebene Freie-Elektronen-Laser für relativistische Elektronenpulse genutzt werden. Auf diese Weise können Röntgenstrahlungspulse mit hohem Kontrast und schmaler Bandbreite erzeugt werden.

Zur Untersuchung der Propagation von TWTS-Pulsen wird in dieser Arbeit ein wellenoptischer, analytischer Formalismus entwickelt, welcher die zeitliche Entwicklung des elektrischen Feldes eines hochintensiven und ultrakurzen Laserpulses mit Dispersionseigenschaften nach Beugung an VLS-Gittern beschreibt. Damit können die durch Dispersion verursachten Veränderungen am Laserpuls bei der Beugung in beliebiger Ordnung numerisch analysiert werden. Das habe ich genutzt, um für zwei Beispiele die TWTS-Pulse zu charakterisieren. Für eines der Beispiele wird anhand der Ergebnisse eine vereinfachte Darstellung des Pulses abgeleitet und die Dynamik eines relativistischen Elektrons bei der Wechselwirkung mit dem Puls und gestreuter Strahlung beschrieben. Daraus werden Schlüsse für die Anwendbarkeit des Schemas als Freie-Elektronen-Laser gezogen.

Abstract

The Travelling-wave Thomson scattering (TWTS) scheme is a novel high-yield Thomson scattering geometry using ultrashort laser pulses with tilted pulse fronts. Combined with relativistic electron bunches this can be utilized as an optical undulator or as an optically driven free electron laser for generation of high-brightness, narrow bandwidth X-Ray pulses.

In order to examine the wave-optical propagation of these TWTS pulses in this work an analytical formalism is developed to calculate the electrical field of a spatio-temporal distorted laser pulse which has been diffracted at a grating of arbitrary periodicity function. I use this to numerically analyse TWTS laser pulses in two examples in terms of their envelope and dispersion properties. For one of the examples I deduce a simplified form of the pulse from the results and derive the equations of motion for a relativistic electron that interacts with the pulse and scattered radiation. Conclusions for the applicability of the scheme as a free electron laser are drawn from this.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	Grundlagen der Beugungstheorie	11
2.1	Elektromagnetische Wellen	11
2.2	Die Helmholtz-Gleichung	12
2.3	Beugung mit Zylinderwellen	13
2.4	Fresnelnäherung des Beugungsintegrals	18
3	Propagation gaußscher Laserpulse	21
3.1	Dispersionsfreie Propagation	22
3.2	Dispersionsarten an Laserpulsen	24
3.3	Propagation mit Dispersion	28
3.4	Beugung Gaußscher Laserpulse am Strichgitter mit beliebig variablen Linienabständen	29
3.5	Verallgemeinerung auf den Dreidimensionalen Fall	35
3.6	Numerische Berechnung der Eigenschaften Gaußscher Laserpulse . .	36
4	Travelling-Wave Thomsonstreuung (TWTS)	43
4.1	Grundlagen der Thomsonstreuung	43
4.2	Das Prinzip der Travelling-Wave Thomsonstreuung	46
4.3	Anforderungen an den Laserpuls	50
4.4	Simulationen von TWTS-Pulsen	53
4.4.1	Ermittlung der Vorkompensation für die Simulation	53
4.4.2	Leistungsfähigkeit der VLS-Gitter für große Interaktionswinkel	59
4.4.3	Pulseigenschaften in einer Kleinwinkelanordnung	61
5	Bewegung eines Elektrons in einem idealisierten TWTS Laserpuls	69
5.1	Elektronenbewegung im Laser- und Strahlungsfeld	69
5.2	Energieabgabe der Elektronen ans Feld	76
5.3	Die 1D-Bewegungsgleichungen des Elektrons	77
6	Zusammenfassung und Ausblick	81
	Literaturverzeichnis	83

1

Einleitung

Untersuchungen zum Aufbau der Materie auf atomaren Skalen spielen eine zentrale Rolle in der aktuellen Forschung. Die Vergabe des Nobelpreises für Studien zur dreidimensionalen Struktur und Funktion der Ribosomen im Jahr 2009 [1] spiegelt das wider. Für solche Analysen benötigt man Licht mit einer Wellenlänge die kleiner ist als die Ausdehnung des untersuchten Objekts. Im Fall der Ribosomen liegt diese im Röntgenbereich auf der Größenordnung von 10 nm.

Strahlung dieser Wellenlänge wird konventionell an Elektronenbeschleunigern wie PETRA III am DESY [2], ESRF [3], LCLS [4] und SPring-8 [5] produziert. In diesen werden Elektronen in synchronisierten elektrischen Wechselfeldern beschleunigt und in statischen Magnetfeldern auf einer geschlossenen Umlaufbahn gehalten.

Die für Experimente genutzte Synchrotronstrahlung wird in Undulatoren oder Wiggeln erzeugt [6]. Undulatoren und Wiggler sind periodische Anordnungen von Magneten in deren Feld das Elektron beim Durchflug oszilliert und somit Strahlung emittiert. Die so erzeugten Strahlungspulse zeichnen sich durch eine hohe Intensität in einem kleinen Fokusbereich aus, bei einem hohen Maß an Polarisierung, geringer Bandbreite, kleiner Winkeldivergenz sowie kleiner Quellgröße. Diese sehr guten Eigenschaften ermöglichen eine große Vielfalt von Anwendungsmöglichkeiten in den Materialwissenschaften [7, 8], der Chemie [9, 10] und Physik [11, 12].

Ein Makel der Anlagen ist ihre Größe von mehreren Fußballfeldern. Maschinen dieser Ausmaße benötigen eine umfangreiche Infrastruktur, wodurch ihr Betrieb kostenintensiv ist. Ihre Anzahl ist daher begrenzt und verglichen mit der Nachfrage zu klein.

Eine Aussicht auf mehr Forschungsmöglichkeiten bieten unter anderem Thomsonstrahlungsquellen. Sie erzeugen auf der Fläche eines Tennisfeldes intensive Röntgenpulse unter Benutzung eines Hochintensitätslaser. Ein Elektronenpuls wechselwirkt dabei mit dem ultrakurzen Puls des Lasers, wobei die Elektronen in dessen Feld oszillieren und wie im Undulator Strahlung emittieren [13, 14], s. Abbildung 1.1. Die Wellenlänge der gestreuten Strahlung entspricht dabei der um den Lorentzfaktor γ^2 der Elektronen verkürzten Laserwellenlänge. Auf diese Weise ist es möglich Wellenlängen der gestreuten Strahlung im ultravioletten oder sogar Röntgenbereich zu erzielen [15, 16]. Die Elektronen werden entweder von kleineren Linearbeschleunigern [17, 18] oder mittels Laser-Wakefield Beschleunigung [19–24] bereitgestellt.

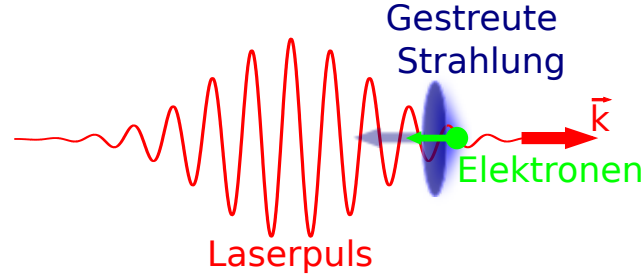


Abbildung 1.1: Bei der frontalen Thomsonstreuung wird ein Laserpuls (von links) an einem entgegengesetzt propagierenden Elektronenpuls (von rechts) gestreut. Die Elektronen oszillieren dabei im Feld des Lasers und erzeugen Strahlung. Diese wird fast ausschließlich in Flugrichtung der Elektronen emittiert.

Die maximale Wechselwirkungslänge zwischen Laser und Elektronen hat bei der Thomsonstreuung einen starken Einfluss auf die Qualität der gestreuten Strahlung. Lange Interaktionsstrecken steigern deren Intensität und verringern die Bandbreite. Aufgrund der Defokussierung des Lasers ist die Interaktionslänge jedoch auf die Rayleighlänge beschränkt. Für einen auf $15\,\mu\text{m}$ fokussierten Puls mit $800\,\text{nm}$ Wellenlänge beträgt diese nur einen Millimeter.

Die in dieser Arbeit untersuchte Travelling-Wave Thomsonstreuung (TWTS) überwindet diese Limitierung durch die Rayleighlänge, indem die Pulsfront des Laser wie in Abbildung 1.2 verkippt wird. Auf diese Weise können Interaktionslängen von einigen Zentimetern bis zu Metern erreicht werden. Das bedeutet Wechselwirkung zwischen Elektronen und Laserpuls über viele Laserwellenlängen (bzw. Undulatorperioden) und führt gegebenenfalls zu einem optischen SASE-FEL.

Das zur Verkipfung der Pulsfront genutzte optische Gitter verursacht jedoch eine Reihe von Dispersionen, welche die Eigenschaften des Pulses während der Propagation zum Interaktionsgebiet modifizieren.

In dieser Arbeit entwickle ich eine dreidimensionale, wellenoptische Theorie zur Berechnung des elektrischen Feldes von Laserpulsen, welche am Strichgitter mit beliebig variablen Strichabstand gebeugt wurden. Aufbauend auf dieser neuartigen Methode ist es erstmals möglich, die zeitliche Entwicklung der am Gitter gebeugten Pulse inklusive aller ihrer Dispersionen in beliebiger Ordnung zu untersuchen. Das ist ein Fortschritt gegenüber einer vorherigen Arbeit [25], in welcher zur Charakterisierung der TWTS-Pulse der Kostenbauder-Formalismus [26] erweitert wurde, um Dispersionen zweiter Ordnung zu berücksichtigen. Die hier entwickelte Theorie dient daher auch zur Verifikation der im Kostenbauder-Formalismus ermittelten Ergebnisse. Sie bietet außerdem den Vorteil, dass sie im Gegensatz zum Kostenbauder-Formalismus nicht auf gaußsche Laserpulse beschränkt ist, sondern

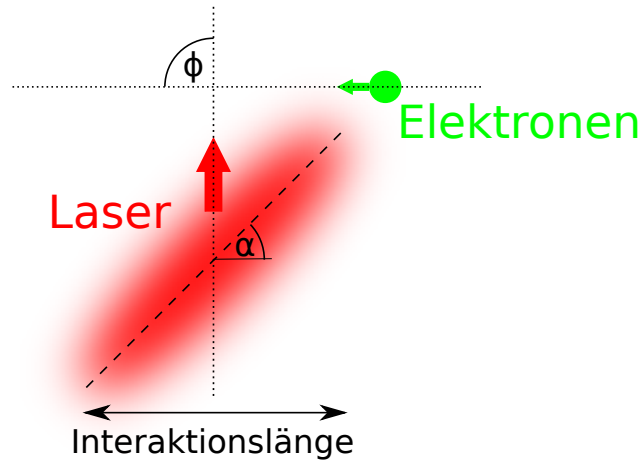


Abbildung 1.2: Schema der Travelling-Wave Thomsonstreuung: Zwischen Laser- und Elektronenpropagationsrichtung liegt der Winkel ϕ . Der Laserpuls besitzt eine Pulsfrontverkipfung um den Winkel α , die so gewählt ist, dass im weiteren zeitlichen Verlauf die Elektronen entlang ihrer Trajektorie über die gesamte Interaktionslänge mit dem Puls überlappen. Somit interagiert jeder Bereich des Lasers mit den Elektronen.

auch andere Pulsformen betrachtet werden können. Des Weiteren ist ihre Unabhängigkeit von einer spezifischen Gitterfunktion nützlich um die Leistungsfähigkeit verschiedener VLS-Gitter zu untersuchen und sie kann daher auch zum Design derer genutzt werden. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird sie für Simulationen zur Analyse der Pulseigenschaften entlang der Trajektorie eines relativistischen Elektronenpulses genutzt. Mit der Kenntnis der genauen Pulseigenschaften konnte ich eine vereinfachte Darstellung des Pulses für den Fall kleiner Interaktionswinkel ableiten und die Dynamik eines relativistischen Elektrons im Feld eines TWTS-Pulses beschreiben.

Die Arbeit beginnt mit der Formulierung der Beugungstheorie für Laserpulse auf Basis von Zylinderwellen in Kapitel 2. Darauf aufbauend wird in Kapitel 3 erstmals die Form eines zweidimensionalen gaußschen Laserpulses ermittelt und die bekannten Relationen zur Veränderung der dispersiven Eigenschaften abgeleitet. Die für Travelling-Wave Thomsonstreuung wichtige Berechnung von am Gitter mit beliebigen Strichabstand gebeugten Pulsen wird ebenfalls in diesem Kapitel gezeigt. Auf Grundlage dieser bisher nicht da gewesenen analytischen Lösung zur Beugung am Gitter werden in Kapitel 4 die Eigenschaften eines TWTS Pulses für ausgewählte Beispiele untersucht. Für eines der Beispiele werden in Kapitel 5 die Bewegungsgleichungen des Elektrons in den Feldern von Strahlung und Laser aufgestellt. Die

1 Einleitung

Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung der wesentlichen Ergebnisse.

2

Grundlagen der Beugungstheorie

In diesem Kapitel werden die mathematischen Grundlagen der Beugungstheorie erläutert. Ausgehend von den Maxwell-Gleichungen wird die skalare Beschreibung des elektrischen Feldes eingeführt und im Fourierraum die Propagation eines Laserpulses im Rayleigh-Sommerfeld-Formalismus dargelegt. Dieses Kapitel dient als Grundlage für die Beschreibung von Propagation und Beugung gaußscher Laserpulse im nächsten Kapitel.

2.1 Elektromagnetische Wellen

Die mikroskopischen Maxwell-Gleichungen beschreiben den Zusammenhang zwischen dem magnetischen Feld \mathbf{B} und dem elektrischen Feld \mathbf{E} aufgrund von Ladungen ρ und durch deren Bewegung verursachte Ströme \mathbf{j} im Vakuum

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

wobei ϵ_0 die skalare Permittivität des Vakuums und μ_0 die Vakuumpermeabilität ist.

Durch Anwenden von $\nabla \times$ auf Gleichung (2.3) lässt sich eine Wellengleichung für das elektrische Feld im Vakuum ohne freie Ladungen und äußere Ströme ableiten.

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \Leftrightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \\ \stackrel{(2.1),(2.4)}{\Leftrightarrow} -\nabla^2 \mathbf{E} &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Dadurch ergibt sich der Zusammenhang $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ für die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Die Wellengleichung für eine elektrische Welle ist also

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 . \quad (2.5)$$

2.2 Die Helmholtz-Gleichung

Um eine Lösung der Wellengleichung (2.5) zu finden, hilft es eine Transformation in den Fourierraum durchzuführen:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\Omega t} dt , \quad (2.6)$$

mit der Rücktransformation

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \Omega) e^{i\Omega t} d\Omega , \quad (2.7)$$

dabei ist $\Omega = 2\pi\nu$ die Kreisfrequenz und ν die Frequenz des elektrischen Feldes. Einsetzen von (2.7) in (2.5) liefert die Helmholtz-Gleichung für das elektrische Feld in homogenen, isotropen und nicht-magnetischen Medien im Fourierraum

$$\left[\nabla^2 + \frac{\Omega^2}{c^2} \right] \mathbf{E}(\mathbf{r}, \Omega) = 0 . \quad (2.8)$$

Diese Differentialgleichung gilt für jede Komponente von \mathbf{E} und koppelt keine der Komponenten miteinander. Daher wird das elektrische Feld in diesem vereinfachten Fall als eine Kombination aus einem skalaren Feld mit einem Polarisationsvektor \mathbf{e}_P geschrieben.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \Omega) = E(\mathbf{r}, \Omega) \mathbf{e}_P$$

Eine wichtige Lösung der Helmholtz-Gleichung ist die Kugelwelle

$$E(r, \Omega) \propto \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (2.9)$$

mit $k^2 := \Omega^2/c^2$, $r = \|\mathbf{r}\|$. Physikalisch relevant ist dabei nur der Realteil. Daher gilt die Konvention, dass für auslaufende Wellen immer $\Omega > 0$ ist und somit einlaufende Wellen mit einem positiven Vorzeichen im Exponenten von (2.9) korrespondieren.

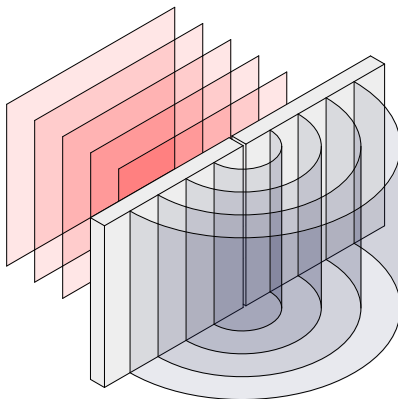


Abbildung 2.1: Eine eingehende harmonische Welle wird an einem Spalt gebeugt. Die ausgehende Beugungswelle hat die Form einer Zylinderwelle. Dargestellt sind die Ebenen gleicher Phase.

2.3 Beugung mit Zylinderwellen

In diesem Abschnitt wird eine Theorie entwickelt, welche die Berechnung an einer Apertur gebeugter Laserpulse ermöglicht. Sie ist die Basis für die Ermittlung der Feldverteilung am Gitter gebeugter Pulse.

Die hier vorgestellte Technik geht von der bekannten Feldverteilung an der beugenden Optik aus und propagiert eine Zylinderwelle von jedem Punkt in der Aperturebene, s. Abbildung 2.1. Bei der Verwendung von Zylinderwellen vernachlässigt man Beugungseffekte in der Ebene entlang der Schlitze. Weil aber die Länge der Striche groß ist gegenüber der Wellenlänge des Pulses bleibt die Pulsstruktur in dieser Ebene erhalten. Die wesentlichen Veränderungen finden in der Ebene senkrecht zu den Gitterstrichen statt, denn hier überlagern sich die ausgehenden Zylinderwellen von jedem Strich. Typische Beugungseffekte wie höhere Beugungsordnungen am Doppelspalt werden in diesem Formalismus also korrekt beschrieben.

Der Aufbau der Theorie beginnt bei der zweiten Greenschen Identität. Wie im Folgenden zu sehen ist, ermöglicht diese die Berechnung des komplexen elektrischen Feldes U an einem beliebigen Raumpunkt anhand der Werte des Feldes und dessen erster Ableitung auf einer Schale um diesen Beobachtungspunkt. Das bekannte Feld auf der Schale wird mittels einer Funktion G zum Beobachtungspunkt propagiert. Als Ansatz für G werden Zylinderwellen verwendet. Die Verbindung von U zum reellen elektrischen Feld E besteht über

$$E = \text{Re}[U].$$

Die zweite Greensche Identität lautet: Für zwei Funktionen U und G welche in

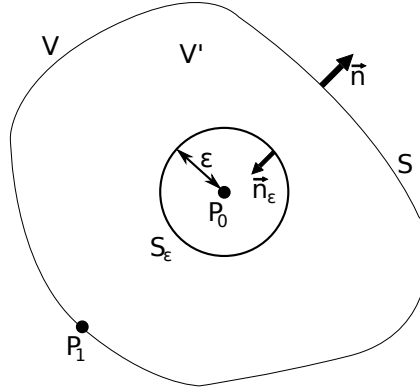


Abbildung 2.2: Zeigt das Gebiet auf welches die greensche Identität angewendet wird. V ist die gesamte von S umrandete Fläche während V' die von S und S_ϵ umrandete Fläche ist. Der Rand S_ϵ begrenzt außerdem den um den Beobachtungspunkt \mathbf{P}_0 ausgesparten Bereich. Der Ausgangspunkt \mathbf{P}_1 der transportierten Anregung liegt auf dem Rand S .

einem Gebiet $V \subset \mathbb{R}^n$ definiert sind gilt der Zusammenhang [27]

$$\int_V \left(U \nabla^2 G - G \nabla^2 U \right) dV = \int_{\partial V} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds, \quad (2.10)$$

wobei $\partial U / \partial n = \nabla U \cdot \mathbf{n}$ die Ableitung von U in Richtung des Flächenelements ds ist. Im Folgenden soll U der komplexen Darstellung des elektrischen Feldes und G einer geeigneten greenschen Funktion der Helmholtz-Gleichung (2.8) entsprechen [28]. Wie in Abbildung 2.2 dargestellt, ist der Beobachtungspunkt \mathbf{P}_0 innerhalb des Gebiets V . Ausgehend von Punkten \mathbf{P}_1 , welche auf dem Rand S des Gebiets liegen, wird das Feld U vom Rand mit Zylinderwellen G zum Beobachtungspunkt transportiert. Die präzise Form von G ist eine Hankel-Funktion zweiter Art [29]

$$G(\mathbf{P}_1) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr_{01}),$$

mit $r_{01} = \|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0\|$ dem Verbindungsvektor zwischen \mathbf{P}_1 und \mathbf{P}_0 . Da an die Funktionen die Bedingung der stetigen Differenzierbarkeit im gesamten Gebiet V gestellt wird, muss der Punkt \mathbf{P}_0 , an dem G nicht stetig ist, durch eine ϵ -Umgebung ausgespart werden. Der Rand $\partial V'$ von V' setzt sich somit aus den Flächen S und S_ϵ zusammen. Nun erfüllen U und G die Helmholtz-Gleichung im Integrationsgebiet, dadurch wird die linke Seite der Identität Null. Es verbleibt

$$-\int_{S_\epsilon} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = \int_S \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds. \quad (2.11)$$

Ziel ist es, $U(\mathbf{P}_0)$ durch die Werte von U auf dem Rand S abzuschätzen. Dazu wird die linke Seite im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ betrachtet. Außerdem wird verwendet, dass sich alle Punkte auf dem Rand S_ε ausgehend vom Punkt \mathbf{P}_0 durch Angabe von ε und einem Winkel θ (Polarkoordinaten) erreichen lassen.

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \left[U(\varepsilon, \theta) \cdot \frac{\partial G(\varepsilon)}{\partial r} \right. \\
 &\quad \left. - G(\varepsilon) \cdot \frac{\partial U(\varepsilon, \theta)}{\partial r} \right] (-1)\varepsilon d\theta \\
 &\approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-1) \int_0^{2\pi} \left[U(\mathbf{P}_0) \cdot \frac{\partial G(\varepsilon)}{\partial r} \right. \\
 &\quad \left. - G(\varepsilon) \cdot \frac{\partial U(\mathbf{P}_0)}{\partial r} \right] \varepsilon d\theta \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-1) 2\pi \varepsilon \left[U(\mathbf{P}_0) \frac{\partial G(\varepsilon)}{\partial r} - G(\varepsilon) \frac{\partial U(\mathbf{P}_0)}{\partial r} \right] \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

Die Ableitung von G ist [30]

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial G(\varepsilon)}{\partial r} &= \frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial r} H_0^{(2)}(kr) \Big|_{r=\varepsilon} \\
 &= -k \frac{i}{4} H_1^{(2)}(kr) \Big|_{r=\varepsilon}. \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

Diese und G selbst können weiter abgeschätzt werden für $\varepsilon \rightarrow 0$ mit [30]

$$H_0^{(2)}(k\varepsilon) \approx -i \frac{2}{\pi} \ln(k\varepsilon) \quad (2.14)$$

$$H_1^{(2)}(k\varepsilon) \approx i \frac{1}{\pi} \frac{2}{k\varepsilon}. \quad (2.15)$$

Einsetzen von G , (2.13), (2.14) und (2.15) in (2.12) ergibt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-U(\mathbf{P}_0) + \varepsilon \ln(k\varepsilon) \frac{\partial U(\mathbf{P}_0)}{\partial r} \right] = -U(\mathbf{P}_0). \quad (2.16)$$

Weil U , als physikalisches Feld, an der Stelle \mathbf{P}_0 stetig differenzierbar ist, verschwindet der rechte Term bei Bildung des Grenzwertes. Danach folgt aus Gleichung (2.11)

$$U(\mathbf{P}_0) = \int_S \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds. \quad (2.17)$$

Um Formel (2.17) auf Beugung an einer Blende anwenden zu können, muss die geschlossene Fläche S noch zweckmäßig gewählt werden. Eine geeignete Wahl ist die Zusammensetzung aus zwei Kurvenstücken S_1 und S_2 wie sie in Abbildung 2.3

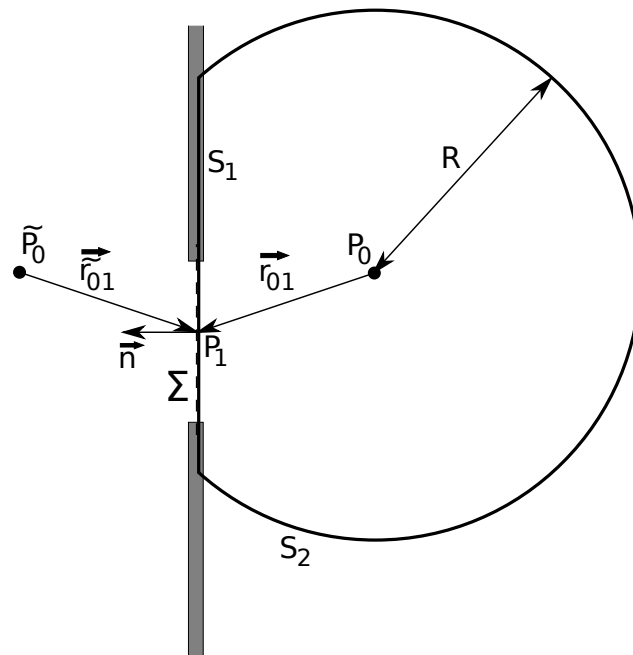


Abbildung 2.3: Wahl der geschlossenen Fläche $S = S_1 + S_2$ um mit (2.17) das Feld am Beobachtungspunkt P_0 aus den Werten am Punkt P_1 zu bestimmen. Σ bezeichnet den Bereich der Blendenöffnung auf S_1 und \tilde{P}_0 bzw. $\vec{r}_{\tilde{0}1}$ sind die an S_1 gespiegelten Punkte von P_0 bzw. r_{01} .

zu sehen ist. Der Beitrag von S_2 ist genauer zu untersuchen. Die Vermutung ist, dass er für große R verschwindet. Näherungen für G und dessen Ableitung (2.13) im Falle $R \rightarrow \infty$ sind [30]

$$G(R) \approx \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} e^{-i(kR - \pi/4)} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial G(R)}{\partial n} \approx -k \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} e^{-i(kR - 3\pi/4)} = -ikG(R). \quad (2.19)$$

Das Integral über S_2 wird zu

$$\int G(R) \left[-ikU(R, \theta) - \frac{\partial U(R, \theta)}{\partial n} \right] \sqrt{R} \sqrt{R} d\theta.$$

Weil $|G\sqrt{R}|$ konstant ist auf S_2 , verschwindet das Integral nur wenn

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \cdot \left(ikU(R, \theta) + \frac{\partial U(R, \theta)}{\partial n} \right) = 0 \quad (2.20)$$

gilt. Das ist die für den Zylinderwellenansatz modifizierte *Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung* und ist für alle Wellen, die mindestens wie Zylinderwellen (2.18) abfallen, erfüllt. Vor allem bei der Anwendung auf gaußsche Laserpulse ist (2.20) erfüllt und das Integral über S_2 liefert keinen Beitrag. Das Integral (2.17) reduziert sich zu

$$U(\mathbf{P}_0) = \int_{S_1} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds. \quad (2.21)$$

Wenn nun zum Feld am Punkt \mathbf{P}_0 nur der Bereich der Blendenöffnung Σ beitragen soll, muss außerhalb der Öffnung U und seine Ableitung verschwinden. Einfach anzunehmen, dass die Größen in der Blende verschwinden ist nicht richtig, denn wenn ein Feld und dessen Ableitung auf einem Stück einer geschlossenen Kurve verschwindet, dann verschwindet es im gesamten von der Kurve berandeten Gebiet [31]. Dieses Problem kann umgangen werden, indem man in der greenschen Funktion annimmt, dass es auch eine reflektierte Welle gibt, (s. [32]): Diese verursacht am gespiegelten Punkt $\tilde{\mathbf{P}}_0$, s. Abb. 2.3, ebenfalls ein Feld. Die greensche Funktion geht unter dieser Annahme über in

$$G(\mathbf{P}_1) \rightarrow \mathcal{G}(\mathbf{P}_1) := \frac{i}{4} \left[H_0^{(2)}(kr_{01}) - H_0^{(2)}(k\tilde{r}_{01}) \right]. \quad (2.22)$$

Diese greensche Funktion verschwindet auf der Blende, denn dort gilt $r_{01} = \tilde{r}_{01}$ und somit muss in (2.21) die Ableitung des Feldes U nicht mehr definiert werden. Die

Ableitung auf S_1 ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{P}_1)}{\partial n} &= -k \frac{i}{4} \left[H_1^{(2)}(kr_{01}) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_{r_{01}}) - H_1^{(2)}(k\tilde{r}_{01}) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_{\tilde{r}_{01}}) \right] \\ &= -2k \frac{i}{4} H_1^{(2)}(kr_{01}) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_{r_{01}}) \\ &\approx \sqrt{\frac{k}{2\pi r_{01}}} e^{-i(kr_{01} - \pi/4)} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_{r_{01}}),\end{aligned}\quad (2.23)$$

wobei die Näherung für $r_{01} \gg c/\Omega$ eingesetzt wurde. Unter der Randbedingung, dass U in der Blende verschwindet und im Bereich der Blendenöffnung Σ als ungestört betrachtet werden kann (keine durch Wechselwirkung mit der Blende verursachten Felder Am Rand der Öffnung), erhält man mittels (2.23) und (2.22) aus (2.21) das *Rayleigh-Sommerfeld Beugungsintegral* für Zylinderwellen

$$U(P_0, \Omega) = \sqrt{\frac{\Omega}{2\pi c}} e^{i\pi/4} \int_{\Sigma} U(P_1, \Omega) \cdot e^{-i\frac{\Omega}{c} r_{01} \frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_{r_{01}})}{\sqrt{r_{01}}}} ds. \quad (2.24)$$

2.4 Fresnelnäherung des Beugungsintegrals

Für eine Geometrie wie in Abb. 2.4, mit einem ebenen Schirm in einem Abstand z von der Blende, ist der $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_{r_{01}})$ in (2.24) gegeben durch

$$\cos \theta = \frac{z}{r_{01}}. \quad (2.25)$$

Außerdem ist

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2}. \quad (2.26)$$

Die *Fresnelnäherung* beruht auf zwei verschiedenen Näherungen von r_{01} in (2.24). Die Erste betrifft r_{01} im Exponenten. Die Wurzel wird entwickelt für große z bis zum zweiten Glied. Das ist ausreichend, solange der Beobachtungswinkel $\theta = \arctan(x - \xi)/z \ll 1$ ist.

$$r_{01} \approx z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - \xi}{z} \right)^2 \right] \quad (2.27)$$

Die Zweite betrifft $1/r_{01}^{3/2}$ (entstanden durch Einsetzen von (2.25)) und wird mit $1/z^{3/2}$ angenähert.

Zusammenfassend folgt unter den Voraussetzungen einer Beobachtungsentfernung z groß gegenüber der Wellenlänge, Erfüllung der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung für das eingehende Feld U und kleiner Beobachtungswinkel

$$U(x, z, \Omega) = \sqrt{\frac{\Omega}{2\pi c}} \frac{e^{-i(\frac{\Omega}{c} z - \pi/4)}}{\sqrt{z}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \Omega) \cdot e^{-i\frac{\Omega}{2cz}(x-\xi)^2} d\xi, \quad (2.28)$$

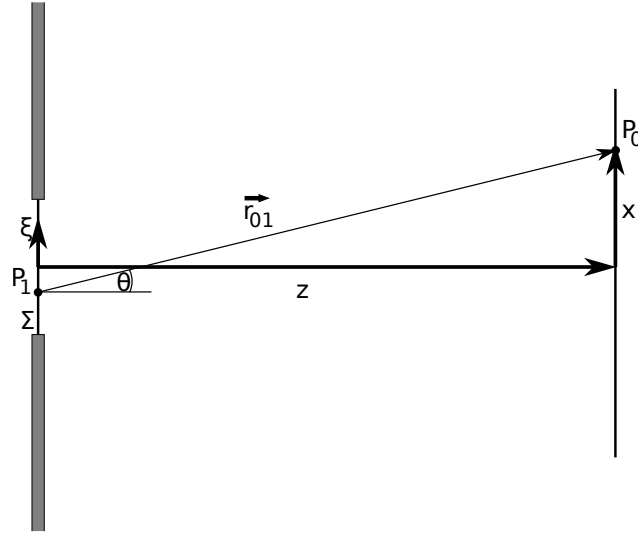


Abbildung 2.4: Anordnung von Blende und ebenen Schirm wie sie für die *Fresnelnäherung* (Beobachtungswinkel $\theta \ll 1$) angenommen wird.

wobei $U(\xi, \Omega)$ außerhalb der Blendenöffnung verschwindet. Die Formel beschreibt im wesentlichen die Propagation einer ebenen Welle der Frequenz Ω ($\exp(-iz\Omega/c)$) deren Amplitude $U(\xi, \Omega)$ mit zunehmender Entfernung z vom Gitter um den Faktor \sqrt{z} abgeschwächt wird. Zusätzlich erhält jede Elementarwelle eine parabolische Krümmung der Phasenfront oder anders gesagt, mit zunehmenden Beobachtungswinkel θ erhält eine Elementarwelle einen Phasenversatz der Größe $\frac{\Omega}{c}(x - \xi) \tan \theta$. Das tatsächliche Feld am Ort \mathbf{P}_0 ist dann die Überlagerung aller von der Blendenöffnung ausgehenden Elementarwellen.

3

Propagation gaußscher Laserpulse

In diesem Kapitel wird ausgehend von einem einfachen Gauß-Puls der Einfluss von Dispersionen auf die Form des Pulses behandelt. Die im letzten Kapitel entwickelte Beugungstheorie bildet hierfür die Grundlage. Darauf aufbauend bestimme ich die Feldverteilung eines Pulses mit Dispersionseigenschaften, welcher am Gitter mit beliebig variablem Strichabstand gebeugt wird. Dies ist die Arbeitsgrundlage der im nächsten Kapitel durchgeführten Berechnung und Analyse der Laserpulse wie sie in der Travelling-Wave Thomsonstreuung vorkommen.

Ein gaußscher Laserpuls beschreibt die Intensitätsverteilung eines Laserpulses mittels Gauß-Kurven. Wesentlichen sind ein gaußverteiltes Spektrum ϵ und eine gaußverteilte Intensität $u(\xi)$ in transversaler Richtung ξ .

Das Spektrum

$$\epsilon(\Omega - \Omega_0) = e^{-\frac{(\Omega - \Omega_0)^2}{2\sigma_\Omega^2}} \quad (3.1)$$

beschreibt welchen Beitrag einzelne Kreisfrequenzen Ω zum gesamten Strahl leisten. Es ist zentriert um die Kreisfrequenz $\Omega_0 = 2\pi/\lambda_0$, welche mit der Zentralwellenlänge λ_0 des Lasers verknüpft ist. Die Standardabweichung σ_Ω des Spektrums bestimmt die minimale Pulsdauer τ die ein Gauß-Strahl haben kann:

$$\sigma_\Omega = \frac{\sqrt{2}}{\tau}. \quad (\text{Pulsdauer-Bandbreitenprodukt}) \quad (3.2)$$

Die Pulsdauer τ beschreibt die Zeit, nach welcher das Feld eines vorbeifliegenden Pulses vom Maximum auf das 1/e-fache abgefallen ist. Für die longitudinale Intensitätsverteilung entspricht dies der doppelten Standardabweichung.

Die Pulsbreite w_0 beschreibt die Entfernung vom Zentrum des Pulses, nach welcher die transversale Feldverteilung auf den 1/e-ten Teil abgefallen ist:

$$u(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{w_0^2}}. \quad (3.3)$$

Die transversale Intensitätsverteilung besitzt demnach eine Standardabweichung von $w_0/2$.

3.1 Dispersionsfreie Propagation

Ein in z -Richtung propagierender Gauß-Puls als Lösung der Helmholtz-Gleichung kann anhand des Beugungsintegrals in Fresnelnäherung (2.28) gewonnen werden. Dazu setzt man $U(\xi, \Omega) = \epsilon(\Omega - \Omega_0) \cdot u(\xi)$ als die bekannte Feldverteilung an einer unendlich ausgedehnten Blende in (2.28) ein.

$$\begin{aligned}
 U_{\text{Gauss}}(x, z, \Omega) &= \sqrt{\frac{\Omega}{2\pi c}} \frac{e^{-i(\frac{\Omega}{c}z - \pi/4)}}{\sqrt{z}} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\Omega - \Omega_0) \cdot e^{-\frac{\xi^2}{w_0^2}} \cdot e^{-i\frac{\Omega}{2cz}(x-\xi)^2} d\xi \\
 &= \sqrt{\frac{\Omega}{2\pi c}} \frac{e^{-i(\frac{\Omega}{c}z - \pi/4)}}{\sqrt{z}} \epsilon(\Omega - \Omega_0) \sqrt{\frac{cz}{\Omega}} \sqrt{\frac{w_0}{w(z)}} e^{-i\pi/4} \times \\
 &\quad \times e^{i\frac{1}{2} \arctan \frac{z}{z_R}} \cdot e^{-i\frac{\Omega}{c} \frac{x^2}{2R(z)} - \frac{x^2}{w^2(z)}} \sqrt{2\pi} \\
 &= \epsilon(\Omega - \Omega_0) \sqrt{\frac{w_0}{w(z)}} e^{-\frac{x^2}{w^2(z)}} e^{-i\frac{\Omega}{c}z - i\frac{\Omega}{c} \frac{x^2}{2R(z)} + i\frac{1}{2} \arctan \frac{z}{z_R}} \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

Gleichung (3.4) beschreibt das komplexe Feld eines in z -Richtung propagierenden gaußschen Laserpulses im Fourierraum. Ein Beispiel für die räumliche Energieverteilung der Zentralwellenlänge eines Gauß-Pulses ist in in Abbildung 3.1 dargestellt.

Folgende Bezeichnungen wurden eingeführt:

- $z_R = w_0^2 \Omega_0 / 2c = \pi w_0^2 / \lambda_0$ ist die *Rayleighlänge* des Laserpulses. Auf dieser Entfernung vom Fokus hat sich die Breite w_0 des Lasers um einen Faktor $\sqrt{2}$ vergrößert.
- $w^2(z) = w_0^2 [1 + (z/z_R)^2]$ ist die Breite des Lasers als Funktion der Entfernung z vom Fokus. In einem Abstand $x = w(z)$ von der z -Achse ist die Feldstärke auf den 1/e-ten Teil abgefallen. Für den Zusammenhang zum FWHM (volle Halbwertsbreite) des transversalen Intensitätsprofil gilt $w_{\text{FWHM,I}} = \sqrt{2 \ln 2} w$.
- $R(z) = z [1 + (z_R/z)^2]$ ist der Krümmungsradius der Phasenfronten. Dieser ist unendlich im Fokus und daher $\exp[-i\Omega x^2 / 2cR(0)] = 1$.

Zu erwähnen ist noch, dass $\Omega = \Omega_0$ in z_R genähert wurde.

Mittels der Fourierrücktransformation (2.7) erhält man das komplexe Feld im

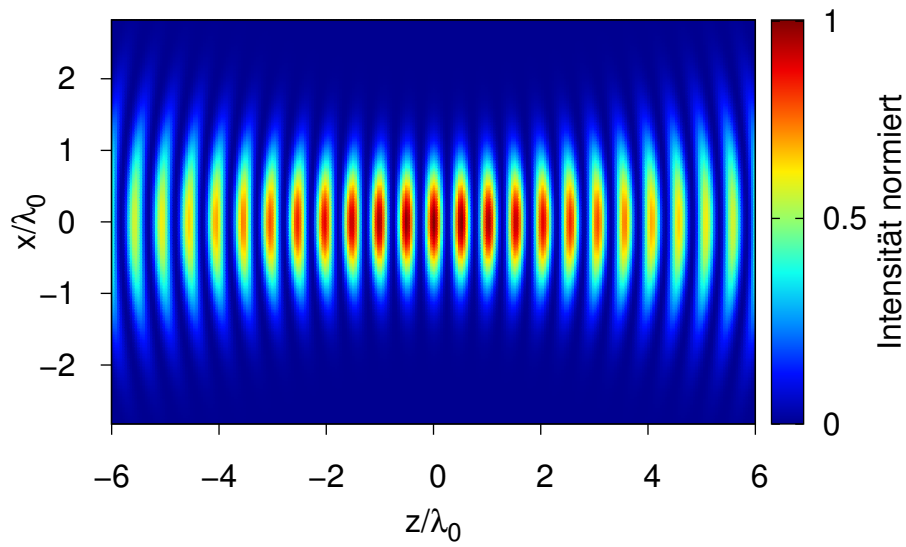


Abbildung 3.1: In z -Richtung propagierender Gauß-Strahl in der Umgebung des Brennpunktes $z = 0$. Dargestellt ist die Energiedichte $\text{Re}[U_{\text{Gauss}}(x, z, \Omega_0)]^2$ für die Zentralfrequenz $\Omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$. In der Entfernung einer Rayleighlänge $z_R = 4\lambda_0$ besitzt der Strahl bereits eine deutliche Verbreiterung und Krümmung der Phasenfronten.

Realraum

$$U_{\text{Gauss}}(x, z, t) = \sqrt{\frac{w_0}{w(z)}} e^{-\frac{x^2}{w^2(z)}} e^{-\frac{\left(z - ct + \frac{x^2}{2R(z)}\right)^2}{c^2 \tau^2}} \times \quad (3.5)$$

$$\times e^{-i \frac{\Omega_0}{c} \left(z - ct + \frac{x^2}{2R(z)}\right)} e^{i \frac{1}{2} \arctan \frac{z}{z_R}}$$

Betrachtet man den zeitlichen Verlauf der Amplitude $|U|$ im Brennpunkt, so ist τ die Zeit in der das Feld vom Maximum auf den 1/e-ten Teil abfällt. Die Beziehung zum FWHM der Intensität ist ¹

$$\tau_{\text{FWHM,I}} = \sqrt{2 \ln 2} \tau.$$

3.2 Dispersionsarten an Laserpulsen

In diesem Abschnitt sollen die wichtigsten Dispersionsarten in Bezug auf Travelling-Wave Thomsonstreuung (TWTS) erläutert werden. Eine ausführliche Behandlung aller Erste-Ordnung-Dispersionen findet sich in [33].

Dispersion ist ganz allgemein die Abhängigkeit von Pulseigenschaften wie beispielsweise die Propagationsrichtung oder die Phasengeschwindigkeit von der Frequenz Ω . Wie im Folgenden gezeigt wird, sind die verschiedenen Dispersionsarten nicht unabhängig voneinander.

Bei den für TWTS wichtigsten Dispersionsformen handelt es sich um:

1. Pulsfrontverkipfung (PFT, von engl. pulse-front tilt)
2. Winkeldispersion (AD, von engl. angular dispersion)
3. Räumliche Dispersion (SD, von engl. spatial dispersion)
4. Dispersion der Gruppenlaufzeit (GDD, von engl. group delay dispersion)

Die Effekte Pulsfrontverkipfung, Winkeldispersion und räumliche Dispersion sind in Abbildung 3.2 visualisiert.

zu 1. Pulsfrontverkipfung (PFT)

Bei dieser Dispersion ist der Bereich größter Intensität verkippt gegenüber den Phasenfronten, d. h. er ist nicht senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Pulsfrontverkipfung entsteht zum Beispiel am Gitter, wenn Ein- und Ausfallwinkel verschieden sind. In Abb. 3.2 ist der Verkipfungswinkel α .

¹Spricht man über die Pulsdauer eines real existierenden Lasers ist üblicherweise $\tau_{\text{FWHM,I}}$ gemeint. In dieser Arbeit wird Pulsdauer jedoch für τ verwendet.



$$\sin \psi_{\text{out}}(\Omega) = \frac{2\pi c}{\Omega d_0} + \sin \psi_{\text{in}} \quad (3.6)$$

$$AD := \left. \frac{d\theta_{\text{out}}}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0}. \quad (3.7)$$

$$\theta_{\text{out}} \approx AD \cdot (\Omega - \Omega_0).$$

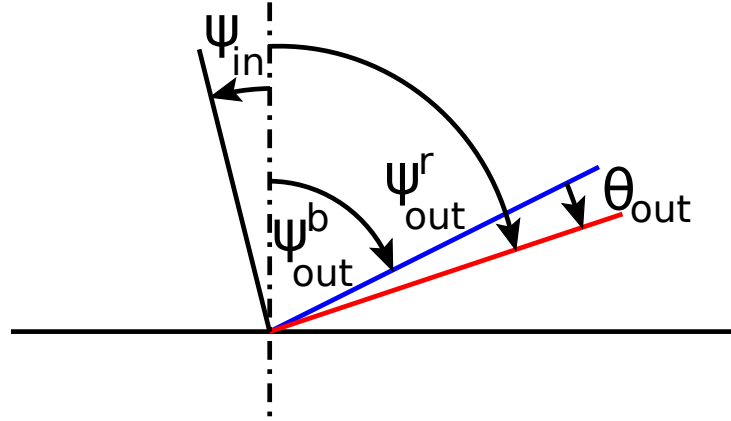


Abbildung 3.3: Beugung am Gitter mit unterschiedlichen Austrittswinkeln für blaue (b) und rote (r) Lichtstrahlen.

Am Gitter findet man mit Hilfe der Gittergleichung (3.6)

$$\begin{aligned}
 AD_{\text{Gitter}} &= \left. \frac{d\theta_{\text{out}}}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0} \\
 &= \left. \frac{d\psi_{\text{out}}}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0} \\
 &= \left[\frac{d \sin \psi_{\text{out}}}{d\Omega} \cdot \left(\frac{d \sin \psi_{\text{out}}}{d\psi_{\text{out}}} \right)^{-1} \right]_{\Omega=\Omega_0} \\
 &= -\frac{1}{\cos \psi_{\text{out}}(\Omega_0)} \frac{\sin \psi_{\text{out}}(\Omega_0) - \sin \psi_{\text{in}}}{\Omega_0}. \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

Winkeldispersion verursacht immer auch eine Pulsfrontverkipfung. Das erkennt man zum Beispiel anhand eines vereinfachten Pulses der ausgehend von der Darstellung im Fourierraum fourierrücktransformiert wird:

$$\left| FT^{-1} \left\{ e^{-\frac{(\Omega-\Omega_0)^2 \tau^2}{4}} e^{-i\frac{\Omega}{c}z} e^{-i\frac{\Omega_0}{c}AD(\Omega-\Omega_0)x} \right\} \right| \propto e^{-\frac{(z+AD\Omega_0 x-ct)^2}{c^2 \tau^2}}.$$

Der Bereich größter Intensität ist für feste Zeit t in Abhängigkeit vom Abstand x des Beobachtungspunktes zur z -Achse um $z_0(x) = -AD\Omega_0 x$ in Propagationsrichtung versetzt. Dabei ist der Versatz für positive x in die positive z -Richtung. Für den Winkel der Pulsfrontverkipfung α gilt:

$$\tan \alpha = \frac{dz_0(x)}{dx} = -\Omega_0 \left. \frac{d\theta_{\text{out}}}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0}. \tag{3.9}$$

Entsprechend ist der Winkel am Gitter

$$\tan \alpha = \frac{\sin \psi_{\text{out}}(\Omega_0) - \sin \psi_{\text{in}}}{\cos \psi_{\text{out}}(\Omega_0)}.$$

zu 3. Räumliche Dispersion (SD)

Räumliche Dispersion ist die Aufspaltung der einzelnen Farben entlang der transversalen Achse x . Jede Farbe hat ihr Intensitätsmaximum an einer anderen Stelle $x = x_0(\Omega)$. Dies tritt zum Beispiel als eine Folge von Winkeldispersion auf, nachdem der Laserpuls ein Stück propagiert ist. Quantitativ ist

$$SD = \left. \frac{dx_0}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0}. \quad (3.10)$$

Die Entwicklung von $x = x_0(\Omega)$ bis zur ersten Ordnung ist somit

$$x_0(\Omega) = SD \cdot (\Omega - \Omega_0).$$

Räumliche Dispersion hat zwei Wirkungen auf die Form des Pulses. Wegen des Auseinanderlaufens der Farben folgt zum einen eine Verbreiterung und zum anderen eine Verlängerung des Pulses. Letzteres weil lokal das Spektrum ausgedünnt wird und nach dem Pulsdauer-Bandbreitenprodukt (3.2) dementsprechend die Pulsdauer größer werden muss. Anhand der Fourierrücktransformation eines Pulses mit SD wird das ersichtlich

$$\left| FT^{-1} \left\{ e^{-\frac{(\Omega-\Omega_0)^2 \tau^2}{4}} e^{-\frac{[x-SD(\Omega-\Omega_0)]^2}{w_0^2}} e^{-i\frac{\Omega}{c}z} \right\} \right| \propto e^{-\frac{(z-ct)^2}{c^2 \left(\tau^2 + 4 \frac{SD^2}{w_0^2} \right)}} e^{-\frac{x^2}{w_0'^2 + 4 \frac{SD^2}{\tau^2}}}.$$

Die Pulsdauer ändert sich mit vorhandener SD zu

$$\tau'^2 = \tau^2 + 4 \frac{SD^2}{w_0^2} \quad (3.11)$$

und die Breite des Pulses vergrößert sich zu

$$w_0'^2 = w_0^2 + 4 \frac{SD^2}{\tau^2}. \quad (3.12)$$

zu 4. Dispersion der Gruppenlaufzeit (GDD)

Hierbei handelt sich um eine Aufspaltung der Farben entlang der Ausbreitungsrichtung. Beobachtet man an einem festen Ort den vorbeifliegenden Puls, so ist die Frequenz eine Funktion der Zeit. Mit anderen Worten: die vorhandenen Frequenzen im Puls sind nicht mehr phasengleich sondern gegeneinander verschoben. Somit ist

die Phase einer Farbe abhängig von deren Frequenz. Ein Laserpuls im Fourierraum mit GDD hat die Form

$$U(\Omega) = |U(\Omega)| \cdot e^{-i\varphi(\Omega)}.$$

Die Dispersion der Gruppenlaufzeit ist dann definiert als

$$GDD = \left. \frac{d^2\varphi}{d\Omega^2} \right|_{\Omega=\Omega_0}. \quad (3.13)$$

Die räumliche Aufspaltung der Frequenzen verlängert den Puls ebenfalls. Aus der Fourierrücktransformation eines Pulses mit GDD

$$\left| FT^{-1} \left\{ e^{-\frac{(\Omega-\Omega_0)^2\tau^2}{4}} e^{-i\frac{GDD}{2}(\Omega-\Omega_0)^2} e^{-i\frac{\Omega}{c}z} \right\} \right| \propto e^{-\frac{(z-ct)^2}{c^2(\tau^2 + 4\frac{GDD^2}{\tau^2})}}$$

folgt

$$\tau'^2 = \tau^2 + 4\frac{GDD^2}{\tau^2}. \quad (3.14)$$

3.3 Propagation mit Dispersion

Wie bereits am Beispiel von Winkeldispersion und Pulsfrontverkipfung gezeigt, beeinflussen sich Dispersionen gegenseitig. Dieses Zusammenspiel wird hier genauer untersucht.

Ein Puls, der Winkeldispersion AD , räumliche Dispersion SD und Dispersion der Gruppenlaufzeit GDD aufweist, wird mit Hilfe des Beugungsintegrals in Fresnelnäherung (2.28) um eine Strecke z propagiert. Dieses Vorgehen ist analog zur Ableitung des gaußschen Pulses zu Beginn dieses Kapitels.

$$U(\xi, \Omega) = \epsilon(\Omega - \Omega_0) \cdot e^{-\frac{[\xi - SD_0(\Omega - \Omega_0)]^2}{w_0^2}} \cdot e^{-i\frac{\Omega_0}{c}AD(\Omega - \Omega_0)x} \cdot e^{-i\frac{GDD_0(\Omega - \Omega_0)^2}{2}}$$

wird zu

$$\begin{aligned} U(x, z, \Omega) = & \epsilon(\Omega - \Omega_0) \sqrt{\frac{w_0}{w(z)}} \times \\ & \times e^{-\frac{[x - (SD_0 + ADz)(\Omega - \Omega_0)]^2}{w^2(z)}} e^{-i\frac{\Omega}{c}z - i\frac{\Omega}{c}\frac{[x - (SD_0 + ADz)(\Omega - \Omega_0)]^2}{2R(z)}} \times \\ & \times e^{-i\frac{\Omega_0}{c}AD(\Omega - \Omega_0)x - i(\frac{GDD_0}{2} - \frac{\Omega_0}{2c}AD^2z)(\Omega - \Omega_0)^2 + i\frac{1}{2}\arctan\frac{z}{z_R}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Vergleicht man die beiden Ausdrücke, so erkennt man, dass Winkeldispersion eine ggf. vorhandene räumliche Dispersion durch Auseinanderlaufen der Farben über die Strecke z vergrößert:

$$SD(z) = SD_0 + ADz.$$

Infolge der unterschiedlichen Propagationsrichtungen der Farben, ist deren projizierte Geschwindigkeit in die Ausbreitungsrichtung des Pulses ebenfalls unterschiedlich. Daher verursacht die Winkeldispersion ein Auseinanderlaufen der Farben in die longitudinale Richtung. Sie besitzt somit einen Beitrag zur GDD, welcher mit der zurückgelegten Wegstrecke z des Pulses skaliert.

$$GDD(z) = GDD_0 - \frac{\Omega_0}{c} AD^2 z.$$

Mittels einer Fourierrücktransformation wird das Zusammenwirken der Dispersionen auf die zeitliche Struktur des Pulses deutlich

$$\left| FT^{-1}\{U\} \right| \propto e^{-\frac{x^2}{w'^2(z)}} e^{-\frac{\left[z + \Omega_0 ADx + \frac{8cSD(z)GDD(z)}{w^2(z)\tau'^2(z)} x - ct \right]^2}{c^2 T^2(z)}}. \quad (3.16)$$

Diese wurde unter der Annahme einer Propagation um die Strecke z klein gegenüber der Rayleighlänge z_R durchgeführt. Dadurch wird ein Einfluss durch die Krümmung der Phasenfronten unterdrückt.

Im Detail wird die von z abhängige Breite des Laserpulses $w(z)$ zusätzlich durch räumliche Dispersion variiert

$$w'^2(z) = w^2(z) + 4 \frac{SD^2(z)}{\tau^2}. \quad (3.17)$$

Des Weiteren ist die Pulsdauer T wegen SD und GDD länger geworden

$$T^2(z) = \tau'^2(z) + 4 \frac{GDD^2(z)}{\tau'^2(z)} = \tau^2 + 4 \frac{SD^2(z)}{w^2(z)} + 4 \frac{GDD^2(z)}{\tau^2 + 4 \frac{SD^2(z)}{w^2(z)}}. \quad (3.18)$$

Außerdem wird durch die Kombination von GDD und SD eine Pulsfrontverkipfung erzeugt, welche unabhängig zu der von Winkeldispersion verursachten ist.

$$z_0(x) = -\Omega_0 ADx - \frac{8cSD(z)GDD(z)}{w^2(z)\tau'^2(z)} x$$

Eine Pulsfrontverkipfung durch SD und GDD lässt sich beispielsweise generieren, indem man einen Puls mit vorhandener räumlicher Dispersion ein Medium mit frequenzabhängiger Lichtgeschwindigkeit passieren lässt (s. Abbildung 3.4).

3.4 Beugung Gaußscher Laserpulse am Strichgitter mit beliebig variablen Linienabständen

Im Folgenden entwickle ich eine analytische Feldbeschreibung für einen am Gitter gebeugten Laserpuls. Dies ist die Grundlage zur Ermittlung der Lasereigenschaften in der Travelling-Wave Thomsonstreuung

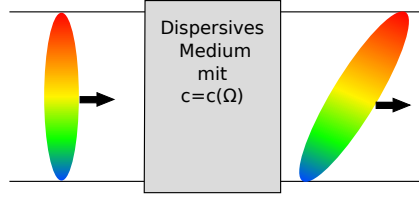


Abbildung 3.4: Ein Puls mit räumlicher Dispersion erfährt in einem normal dispersiven Medium eine Pulsfrontverkipfung aufgrund der verschiedenen Phasengeschwindigkeiten für die einzelnen Farben.

Ausgangspunkt für die Rechnung ist das Rayleigh-Sommerfeld Beugungsintegral (2.24). Die Fresnelnäherung ist hier nicht passend, weil auch Beugung unter großen Winkeln in höhere Beugungsordnungen berücksichtigt werden soll. Am Gitter ist der gebeugte Puls zusammengesetzt aus den ausgehenden Wellen von jedem Strich:

$$U_{\text{Gitter}}(x, z, \Omega) = \sum_{\text{Striche}} \sqrt{\frac{\Omega}{2\pi c}} e^{i\pi/4} \times \int_{\text{Strich}} U(\xi, \Omega) \cdot e^{-i\frac{\Omega}{c} \sqrt{z^2 + (x-\xi)^2}} \frac{z}{[z^2 + (x-\xi)^2]^{3/4}} d\xi. \quad (3.19)$$

Zur Näherung wird angenommen, dass sich das eingehende Feld $U(\xi, \Omega)$ über die Breite eines Striches sowohl in der Amplitude als auch in der Phase nicht ändert. Dies ist äquivalent zur Annahme, dass der Strich nur infinitesimal breit ist (vgl. Abbildung 2.4 auf Seite 19 mit $\Sigma \rightarrow 0$).

$$U(\xi, \Omega) = U_{\text{in}}(\xi, \Omega) \cdot g \cdot \delta(\xi - \xi_k),$$

wobei g der Breite eines Striches und ξ_k der absoluten Position des Striches entspricht. Würde man eine endliche Ausdehnung des Striches berücksichtigen, hätte dies lediglich zur Folge, dass die höheren Beugungsordnungen gegenüber der nullten Ordnung deutlich abgeschwächt werden. Die wesentlichen Dispersionseffekte werden in dieser Näherung jedoch korrekt wiedergegeben.

Für ein regelmäßiges Strichgitter, dessen Mitte die Position $\xi = 0$ hat, ist die Folge der ξ_k bestimmt durch

$$\xi_k = k \cdot d,$$

wobei d der Strichabstand ist. Das weitere Vorgehen ist aber unabhängig von der Wahl der ξ_k . Daher kann das Endergebnis auf beliebige Gittertypen angewendet werden.

Formel (3.19) geht damit über in

$$U_{\text{Gitter}}(x, z, \Omega) = z \sqrt{\frac{\Omega}{2\pi c}} e^{i\pi/4} g \sum_{k=-\ell}^{\ell} U_{\text{in}}(\xi_k, \Omega) \frac{e^{-i\frac{\Omega}{c}[z^2+(x-\xi_k)^2]^{1/2}}}{[z^2+(x-\xi_k)^2]^{3/4}}. \quad (3.20)$$

Das eingehende Feld U_{in} soll ein gaußscher Puls mit AD, SD und GDD sein, welcher unter einem Eingangswinkel ψ_{in} auf das Gitter auftrifft. Abbildung 3.5 zeigt die Ausgangssituation und gibt einen Überblick über die verwendeten Koordinatensysteme in den nächsten Schritten.

Die Ableitung beginnt mit einem gaußschen Puls welcher sich im Koordinatensystem (x'', z'') in die z'' -Richtung bewegt

$$\begin{aligned} U''(x'', z'', \Omega) = & \epsilon(\Omega - \Omega_0) \sqrt{\frac{w_0}{w(z'')}} \times \\ & \times e^{-[x'' - SD \cdot (\Omega - \Omega_0)]^2 \left[\frac{1}{w^2(z'')} + i \frac{\Omega_0}{2cR(z'')} \right]} e^{-i\frac{\Omega}{c}z''} \times \\ & \times e^{-i\frac{\Omega_0}{c}AD \cdot (\Omega - \Omega_0)x'' - i\frac{GDD_0}{2} \cdot (\Omega - \Omega_0)^2 + i\frac{1}{2} \arctan \frac{z''}{z_R}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

In diesem System befindet sich der Fokuspunkt an der Stelle $z'' = 0$. Um den Fokus auf eine Entfernung L vom Gitter zu setzen wird eine Transformation in ein System (x', z') durchgeführt. In diesem werden die Richtungen der Achsen des alten Koordinatensystems (x'', z'') beibehalten, aber der Ursprung um die Strecke L auf der z'' -Achse verschoben.

$$U'(x', z', \Omega) = U''(x', z' - L, \Omega)$$

Das Gitter befindet sich an der Stelle $z' = 0$. Schräger Einfall auf das Gitter wird durch eine Koordinatendrehung um den Einfallswinkel in die Gitterebene (ξ, z) berücksichtigt (ξ ist kollinear zu x):

$$\begin{aligned} U(\xi, z, \Omega) &= U'(\xi \cos \psi_{\text{in}} + z \sin \psi_{\text{in}}, -\xi \sin \psi_{\text{in}} + z \cos \psi_{\text{in}}, \Omega) \\ &= U''(\xi \cos \psi_{\text{in}} + z \sin \psi_{\text{in}}, -\xi \sin \psi_{\text{in}} + z \cos \psi_{\text{in}} - L, \Omega). \end{aligned}$$

Die verwendeten Transformationen sind zusammengefasst

$$U'' \xrightarrow[\text{um } L]{\text{Translation}} U' \xrightarrow[\text{um } \psi_{\text{in}}]{\text{Rotation}} U.$$

$U(\xi, z, \Omega)$ ist nun ein Gauß-Puls der unter dem Winkel ψ_{in} auf das Gitter in der ξ -Ebene auftrifft und in der Entfernung L vom Gitter fokussiert. In Formel (3.20) ist damit

$$\begin{aligned} U_{\text{in}}(\xi_k, \Omega) &= U(\xi_k, 0, \Omega) \\ &= U''(\xi_k \cos \psi_{\text{in}}, -\xi_k \sin \psi_{\text{in}} - L, \Omega). \end{aligned} \quad (3.22)$$

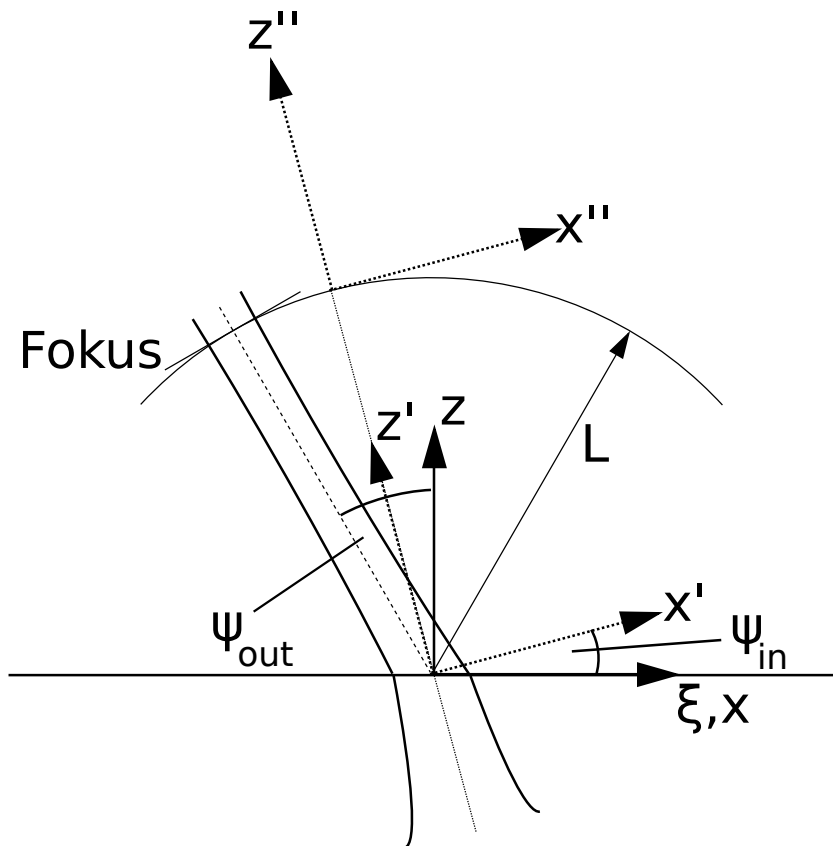


Abbildung 3.5: Übersicht über die verwendeten Bezugssysteme bei Beugung am Gitter. Der Puls fliegt unter einem Winkel ψ_{in} im Laborsystem (x, z) auf das Gitter. Dort wird er unter einem Winkel ψ_{out} gebeugt und fokussiert in einer Entfernung L vom Gitter. Die Beschreibung des eingehenden Pulses beginnt im Text mit einem dispersionsbehafteten Gauß-Puls (3.15) im Koordinatensystem (x'', z'') . Zum Verschieben der Fokusposition des Pulses in eine Entfernung L vom Gitter wird in ein System (x', z') entlang der z'' -Achse translatiert. Die Anwendung des Beugungsintegrals (2.24) erfordert eine weitere Transformation ins Laborsystem (x, z) mittels einer Rotation um den Eingangswinkel ψ_{in} . Die Koordinatenachsen von ξ und x sind kollinear.

Die Zahl der Striche, $2\ell + 1$, muss so gewählt werden, dass der gesamte Puls erfasst wird. Dabei ist auch zu beachten, dass der Rechenaufwand so gering wie möglich ist, um eine schnelle Auswertung am Computer zu gewährleisten. Für den Fall des Strichgitters wird angenommen, dass der Puls transversal in einem Abstand von ungefähr drei Standardabweichungen $\sigma_{\text{Feld}} = w/\sqrt{2}$ vom Pulszentrum auf Null abfällt. Der gesamte Puls ist somit $6\sigma_{\text{Feld}}$ breit. Da der Puls unter einem Winkel auf das Gitter trifft, muss die Breite noch in die Gitterebene projiziert werden. Berücksichtigt man außerdem, dass die Breite des Pulses eine Funktion des Abstands zum Fokus ist, $w = w(-L)$, erhält man für die Zahl der nötigen Gitterstriche ℓ

$$\ell = \frac{1}{2} \left(\frac{6w(-L)}{\sqrt{2}d} \cos \psi_{\text{in}} - 1 \right), \quad (3.23)$$

wobei auf ganze Zahlen ℓ aufgerundet wird.

Das zeitabhängige Feld gewinnt man durch Fourierrücktransformation von (3.20), in welches das nach (3.22) transformierte Feld (3.21) eingesetzt wird:

$$\begin{aligned} U_{\text{Gitter}}(x, z, t) = & z \sqrt{\frac{1}{2\pi c}} g e^{i\frac{\pi}{4}} \times \\ & \times \sum_{k=-\ell}^{\ell} \sqrt{\frac{w_0}{w(-\xi_k \sin \psi_{\text{in}} - L)}} e^{i\frac{1}{2} \arctan \frac{-\xi_k \sin \psi_{\text{in}} - L}{z_R}} \times \\ & \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega e^{i\Omega t} \sqrt{\Omega} \frac{e^{-i\frac{\Omega}{c} [z^2 + (x - \xi_k)^2]^{1/2}}}{[z^2 + (x - \xi_k)^2]^{3/4}} \times \\ & \times \epsilon(\Omega - \Omega_0) e^{-[\xi_k \cos \psi_{\text{in}} - SD \cdot (\Omega - \Omega_0)]^2 q(-\xi_k \sin \psi_{\text{in}} - L)} \times \\ & \times e^{-i\frac{\Omega}{c} (-\xi_k \sin \psi_{\text{in}} - L + AD \cdot (\Omega - \Omega_0) \xi_k \cos \psi_{\text{in}})} e^{-i\frac{GDD_0}{2} \cdot (\Omega - \Omega_0)^2}, \end{aligned}$$

mit

$$q(s) = \frac{1}{w^2(s)} + i \frac{\Omega_0}{2cR(s)}. \quad (3.24)$$

Zur Berechnung des Integrals wird $\sqrt{\Omega}$ an der Stelle Ω_0 entwickelt.

$$\sqrt{\Omega} \approx \sqrt{\Omega_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(\Omega - \Omega_0)}{\Omega_0} - \frac{1}{8} \left(\frac{\Omega - \Omega_0}{\Omega_0} \right)^2 \right)$$

Da für Ultrakurzpulslaser ungefähr

$$\frac{\Omega - \Omega_0}{\Omega_0} \lesssim 0.05,$$

ist, kann der dritte Term in der Entwicklung der Wurzel vernachlässigt werden und die Berechnung des Integrals ergibt

$$\begin{aligned}
 U_{\text{Gitter}}(x, z, t) = & z \sqrt{\frac{\Omega_0}{8\pi^2 c}} g e^{i\frac{\pi}{4}} \times \\
 & \times \sum_{k=-\ell}^{\ell} \frac{e^{-i\frac{\Omega_0}{c} \left([z^2 + (x - \xi_k)^2]^{1/2} - ct - \xi_k \sin \psi_{\text{in}} - L \right)}}{[z^2 + (x - \xi_k)^2]^{3/4}} \times \\
 & \times \sqrt{\frac{w_0}{w(-\xi_k \sin \psi_{\text{in}} - L)}} e^{i\frac{1}{2} \arctan \frac{-\xi_k \sin \psi_{\text{in}} - L}{z_R}} \times \\
 & \times e^{-(\xi_k \cos \psi_{\text{in}})^2 q(-\xi_k \sin \psi_{\text{in}} - L)} \times \\
 & \times \frac{e^{\frac{b_k^2(x, z, t)}{4a_k}}}{\sqrt{a_k}} \left(1 + \frac{b_k(x, z, t)}{4\Omega_0 a_k} \right). \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

Dabei werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$a_k = \frac{\tau^2}{4} + SD^2 q(-\xi_k \sin \psi_{\text{in}} - L) + i \frac{GDD}{2}, \tag{3.26a}$$

$$\begin{aligned}
 b_k(x, z, t) = & 2 \xi_k \cos(\psi_{\text{in}}) SD q(-\xi_k \sin \psi_{\text{in}} - L) \\
 & - i \left(\frac{-\xi_k \sin \psi_{\text{in}} - L}{c} - t + \frac{1}{c} [z^2 + (x - \xi_k)^2]^{1/2} \right. \\
 & \left. + \frac{\Omega_0}{c} AD \xi_k \cos \psi_{\text{in}} \right). \tag{3.26b}
 \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen sind das analytische Ergebnis der Beugung eines Laserpulses am Gitter mit den beliebigen Strichpositionen ξ_k . Die von einem einzelnen Strich ausgehende Welle wird durch die Parameter a_k und b_k beschrieben. Dabei ist $\sqrt{|a_k|}$ die Dauer eines Pulses von einem einzelnen Gitterstrich. In b_k ist ein Term für Propagation $\propto z - ct$ als auch für das transversale Verhalten $\propto -x^2$ enthalten. Der veränderliche Teil der Einhüllenden wird daher bestimmt durch die Terme

$$\frac{e^{\frac{\text{Re}[b_k^2 a_k^*]}{4|a_k|^2}}}{[z^2 + (x - \xi_k)^2]^{3/4}}.$$

Ein Großteil der konstanten Vorfaktoren in (3.25) legen die Amplitude und Phase des ausgehenden Pulses auf die entsprechenden Werte des Eingangspulses am Ort des Gitterstrichs fest. Sie verbinden so die Eigenschaften des ausgehenden Pulses mit denen des eingehenden. Die Phase besitzt zwei wesentliche Beiträge, zum einen

$$e^{\frac{\text{Im}[b_k^2 a_k^*]}{4|a_k|^2}},$$

und zum anderen

$$e^{-i \frac{\Omega_0}{c} \left([z^2 + (x - \xi_k)^2]^{1/2} - ct - \xi_k \sin \psi_{\text{in}} - L \right)}.$$

Beide zusammen legen beispielsweise die parabolische Krümmung der Phasenfronten fest. Allerdings ist der ausgehende Puls ein zusammengesetztes Objekt aus der Überlagerung aller Einzelpulse von vielen Gitterstrichen. Daher können die Eigenschaften des gebeugten Pulses nicht direkt am analytischen Ergebnis abgelesen werden. Die Eigenschaften des Gesamtpulses müssen deswegen aus Simulationen ermittelt werden, welche die große Summe in (3.25) numerisch berechnen. Siehe dazu Abschnitt 3.6.

3.5 Verallgemeinerung auf den Dreidimensionalen Fall

In Kapitel 2 wurden bei der Ableitung des Beugungsformalismus als Ansatz für den Transport der Anregung von der Blende zum Beobachtungspunkt Zylinderwellen gewählt. Nutzt man stattdessen Kugelwellen $\frac{\exp(-ikr)}{r}$ wobei $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ ist, erhält man für das Beugungsintegral in Fresnelnäherung

$$U(x, y, z, \Omega) = i \frac{\Omega}{2\pi c} \frac{e^{-i \frac{\Omega}{c} z}}{\sqrt{z}} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta, \Omega) \cdot e^{-i \frac{\Omega}{2cz} [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]} d\xi d\eta, \quad (3.27)$$

wobei Σ der gesamte zweidimensional Bereich der Blendenöffnung ist. Einsetzen einer gaußschen Intensitätsverteilung in ξ und η für $U(\xi, \eta, \Omega)$ ergibt den Gauß-Puls in drei Dimensionen

$$\begin{aligned} U_{\text{Gauss}}(x, y, z, \Omega) &= \epsilon(\Omega - \Omega_0) e^{-i \frac{\Omega}{c} z} \times \\ &\times \sqrt{\frac{w_{0,x}}{w_x(z)}} e^{-\frac{x^2}{w_x^2(z)}} e^{-i \frac{\Omega}{c} \frac{x^2}{2R_x(z)} + i \frac{1}{2} \arctan \frac{z}{z_{R,x}}} \times \\ &\times \sqrt{\frac{w_{0,y}}{w_y(z)}} e^{-\frac{y^2}{w_y^2(z)}} e^{-i \frac{\Omega}{c} \frac{y^2}{2R_y(z)} + i \frac{1}{2} \arctan \frac{z}{z_{R,y}}}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Dabei ist $z_{R,i} = \pi w_{0,i}^2 / \lambda_0$ die Rayleighlänge. Sie ist abhängig von den Breiten $w_{0,x}$ und $w_{0,y}$, welche unterschiedlich sein können. Der Krümmungsradius $R_i(z)$ und die Breite $w_i(z)$ haben dieselbe funktionelle Form wie in der Erklärung zu Gleichung (3.4) nur mit der zur Dimension angepassten Rayleighlänge.

Diese Lösung für den dreidimensionalen Gauß-Puls zeigt, dass die Einhüllende und der von der transversalen Koordinate abhängige Phasenterm in den Dimensionen getrennt behandelbar sind.

Das wird nun auf das Ergebnis des letzten Abschnittes angewendet. Der am Gitter gebeugte TWTS-Puls soll in der y-Ebene fokussiert werden. Dazu wird die zweidimensionale Lösung (3.20) mit der y-Lösung des dreidimensionalen Gauß-Pulses

Parameter	Formelzeichen	Wert
Wellenlänge	λ_0	$0.8 \mu\text{m}$
Entfernung vom Gitter	L	1 m
Breite	w_0	1.5 cm
Pulsdauer	τ_0	30 fs
Eingangswinkel	ψ_{in}	0°
Ausgangswinkel	ψ_{out}	15°
Winkeldispersion	AD	0 s
Räumliche Dispersion	SD	$0 \text{ m}^*\text{s}$
Dispersion der Gruppenlaufzeit	GDD	0 s^2

Tabelle 3.1: Verwendete Laserparameter für das Beispiel zur Bestimmung der Vorkompensation für räumliche Dispersion SD und Dispersion der Gruppenlaufzeit GDD .

multipliziert. Mittels einer anschließenden inversen Fouriertransformation erhält man das dreidimensionale Ergebnis für Beugung eines Gauß-Pulses am Gitter.

$$U_{\text{Gitter}}(x, y, z, t) = U_{\text{Gitter}}(x, z, t) \sqrt{\frac{w_{y,0}}{w_y(z)}} e^{-y^2 q_y(z-L)} e^{+i \frac{1}{2} \arctan \frac{z-L}{z_{R,y}}} \quad (3.29)$$

Die Fokusposition der y -Dimension liegt in einer Ebene in der Entfernung L parallel zum Gitter. Der Breite und Krümmungsradius zusammenfassende Parameter $q_y(s)$ entspricht $q(s)$ von Formel (3.24) mit den passenden y -Werten.

3.6 Numerische Berechnung der Eigenschaften Gaußscher Laserpulse

Wie in der Diskussion zur analytischen Lösung der Beugung gaußscher Laserpulse am Gitter (3.25) bereits erläutert, sind die Eigenschaften des gebeugten Pulses nicht mehr einfach aus der analytischen Lösung abzulesen. Man kennt jedoch die Feldverteilung für ein gewähltes Szenario zu allen Zeiten über den gesamten Raum, weil man die Lösung numerisch auswerten kann. Ein Beispiel für die räumliche Intensitätsverteilung zu einem festen Zeitpunkt eines in die erste Ordnung gebeugten Pulses ist in Abbildung 3.6 dargestellt. Anhand der berechenbaren Feldwerte lassen sich mit grundlegenden Mitteln aus der Statistik zur Parameterschätzung [34] Eigenschaften des gebeugten Pulses ermitteln.

Die in diesem Abschnitt gezeigten Beispielfelder sind mit den Laserparametern aus Tabelle 3.1 berechnet worden.

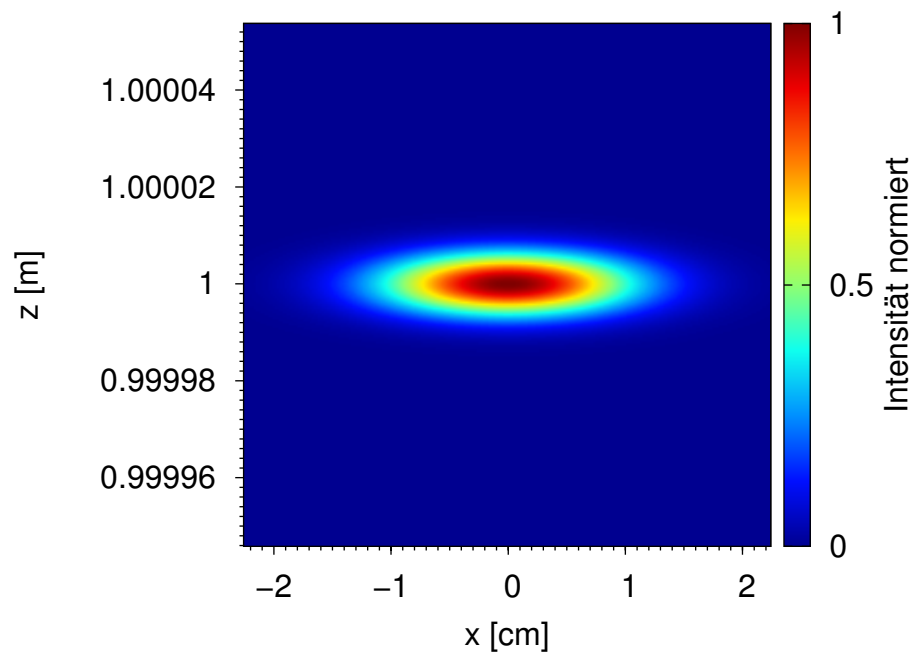


Abbildung 3.6: Zeigt ein Simulationsbeispiel eines am Gitter transmittierten gaußschen Laserpulses in einer Entfernung $L = 1$ m vom Gitter. Dieser breitet sich in z -Richtung aus.

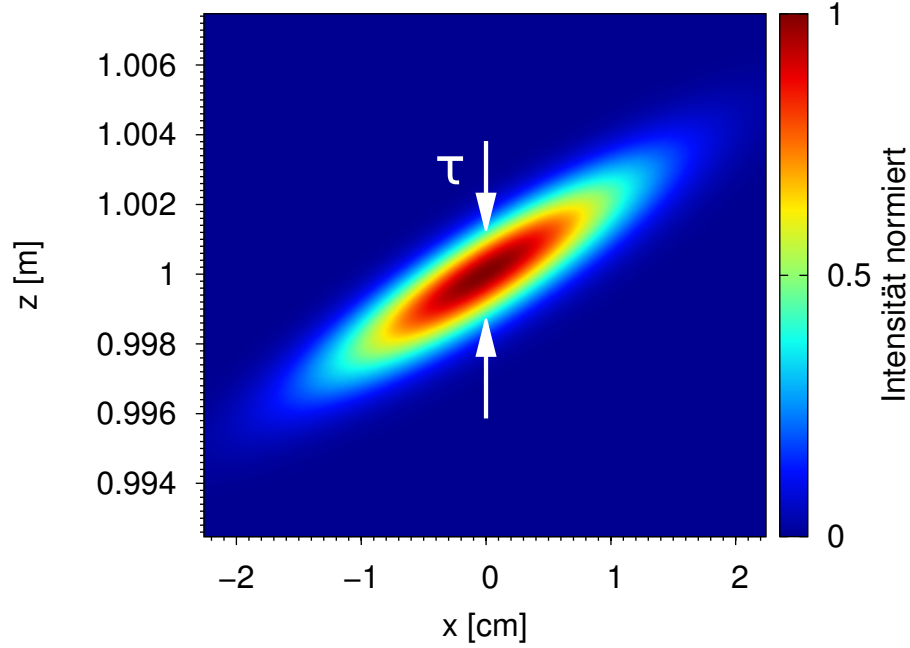


Abbildung 3.7: Am Gitter gebeugter Laserpuls mit einer Pulsfrontverkipfung um 30° . Die Pulsdauer ist die Breite des Pulses in die Propagationsrichtung z .

Pulsdauer τ

Entsprechend Formel (3.5) ist die Pulsdauer τ als die Zeit definiert, nach der die Feldstärke auf den $1/e$ -ten Teil abgefallen ist. Die Intensität ist nach der Zeit τ auf das $1/e^2$ -fache abgefallen. Somit entspricht die Pulsdauer der doppelten Standardabweichung der longitudinalen Intensitätsverteilung. Wie in Abbildung 3.7 gezeigt, wird für propagierende Pulse diese Breite der Feldverteilung in Ausbreitungsrichtung genommen. Die eigentliche Bestimmung ist eine numerische Berechnung der doppelten Standardabweichung der Intensitätsverteilung:

$$\tau = 2\sigma_1 = 2\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1^2}$$

mit

$$\alpha_1 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t |E(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |E(t)|^2 dt},$$

$$\alpha_2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |E(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |E(t)|^2 dt}.$$

Räumliche Dispersion (SD)

Die räumliche Dispersion wird im Fourierraum bestimmt. Dort äußert sie sich durch eine Verkipfung der Intensitätsverteilung in der x - Ω -Ebene (s. Abbildung 3.8). Der Tangens des Verkipfungswinkels β entspricht dem Anstieg einer Geraden $x_0(\Omega)$ durch die Punkte größter Intensität und ist somit identisch zum SD -Parameter (siehe Formel (3.10)). Der Anstieg dieser Geraden kann durch lineare Regression an die Punkte

$$x_0(\Omega) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^* |E(x^*, \Omega)|^2 dx^*}{\int_{-\infty}^{+\infty} |E(x^*, \Omega)|^2 dx^*}$$

(vgl. α_1 von oben) ermittelt werden.

Dispersion der Gruppenlaufzeit (GDD)

Die Definition als zweite Ableitung der Phase des Feldes im Fourierraum legt die Anwendung einer Näherungsformel für die zweite Ableitung nahe. Die Phase $\varphi(\Omega)$ ist in Simulationen jedoch nicht direkt zugänglich, weil die Feldwerte als Kombination von imaginär- und Realteil gespeichert werden. Daher müsste die Näherungsformel der Ableitung auf

$$\varphi = \arctan \frac{\text{Im} E}{\text{Re} E}$$

angewendet werden. Die Phase kann jedoch stark veränderlich sein, so dass die \arctan -Funktion häufig in der Phase von $+\pi$ nach $-\pi$ springt. Eine Anwendung der Ableitungsformel ist unter diesen Bedingungen nicht möglich, weil die Unstetigkeit in der Phase falsche Ergebnisse zur Folge hätte.

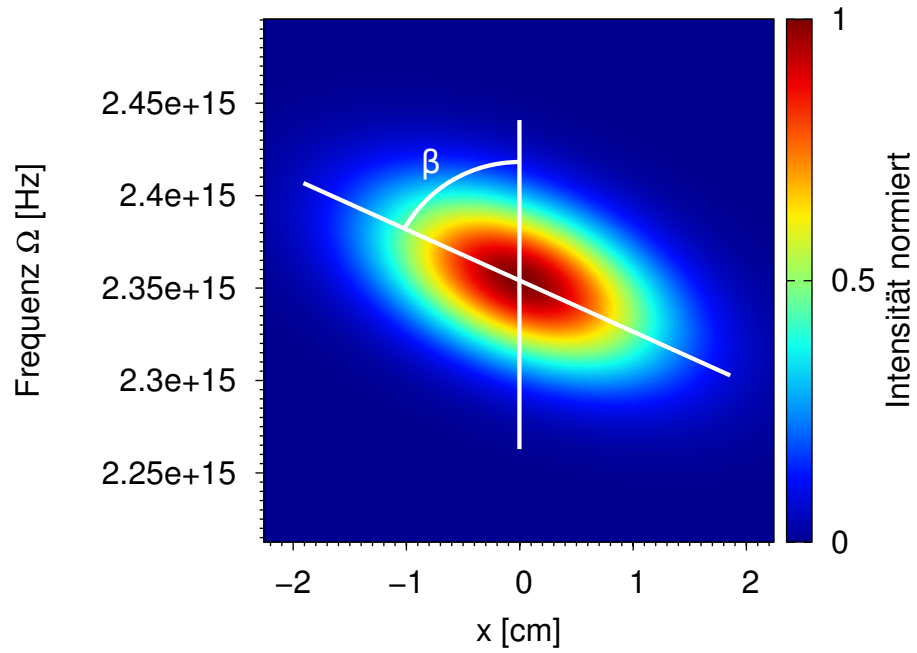


Abbildung 3.8: Spektrale Intensitätsverteilung eines Laserpulses mit räumlicher Dispersion. Aufgetragen ist die Intensität (Farbe) in Abhängigkeit von der transversalen Komponente x und der Frequenz. Räumliche Dispersion schlägt sich in der Verkipfung der Verteilung nieder. Das bedeutet, dass nur ein Teil des gesamten Spektrums an jeder Stelle x im Puls vertreten ist. Der $\tan \beta$ entspricht dem Anstieg $dx_0/d\Omega$ und ist somit die räumlichen Dispersion SD (vgl. (3.10)).

Eine Linearkombination von Sinus- und Kosinusableitungen vereinfacht die Berechnung:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \sin \varphi}{d\Omega^2} &= -\sin \varphi \left(\frac{d\varphi}{d\Omega} \right)^2 + \cos \varphi \frac{d^2 \varphi}{d\Omega^2} \\ \frac{d^2 \cos \varphi}{d\Omega^2} &= -\cos \varphi \left(\frac{d\varphi}{d\Omega} \right)^2 - \sin \varphi \frac{d^2 \varphi}{d\Omega^2}.\end{aligned}$$

Mittels Multiplizieren der ersten Gleichung mit $\cos \varphi$, der zweiten mit $(-\sin \varphi)$ und anschließenden Addieren der Gleichungen erhält man

$$\frac{d^2 \varphi}{d\Omega^2} = \cos \varphi \frac{d^2 \sin \varphi}{d\Omega^2} - \sin \varphi \frac{d^2 \cos \varphi}{d\Omega^2}. \quad (3.30)$$

Für den Sinus und Kosinus der Phase gelten die Relationen

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= \frac{\operatorname{Im} E}{\operatorname{Abs} E} \\ \cos \varphi &= \frac{\operatorname{Re} E}{\operatorname{Abs} E}.\end{aligned}$$

Benutzt man für die zweite Ableitung die Näherungsformel

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2},$$

mit einer kleinen Schrittweite h ($\frac{h}{x} \ll 1$), ist die Berechnung der GDD (3.30) möglich.

4

Travelling-Wave Thomsonstreuung

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Thomsonstreuung erläutert und wie man deren Limitierungen in Intensität und Bandbreite der gestreuten Strahlung bei Verwendung von ultrakurzen und hochintensiven Laserpulsen im Konzept der Travelling-Wave Thomsonstreuung überwinden kann. Dafür wird auf die im letzten Kapitel gelegten Grundlagen der Propagation und Dispersion gaußscher Pulse zurückgegriffen.

Die Charakterisierung der TWTS Pulse wird mit wellenoptischen Simulationen auf Grundlage der in Abschnitt 3.4 abgeleiteten Formel für Beugung am Gitter durchgeführt.

Die so gewonnenen Informationen über die TWTS Pulse werden dann im nächsten Kapitel genutzt um die Dynamik eines Elektrons während der Streuung in einem näherungsweise gültigen, modellierten Laserfeld nachzuvollziehen.

4.1 Grundlagen der Thomsonstreuung

Schema der frontalen Thomsonstreuung

Bei der Thomsonstreuung werden ein Elektronenpuls und ein Laserpuls aufeinander geschossen und im Fokus des Lasers zum Überlapp gebracht. Die Elektronen oszillieren dabei im Feld des Lasers und emittieren elektromagnetische Strahlung [35], s. auch Abb. 4.1.

Die Wellenlänge der gestreuten Strahlung ist dabei gleich der Wellenlänge des Lasers, welche aber aufgrund der relativistischen Bewegung der Elektronen zweifach dopplerverschoben ist. Zweifach, denn zum einen erscheint die Laserwellenlänge im Elektronensystem aufgrund der Bewegung zur Quelle verkürzt. Zum anderen bewegen sich die Elektronen mit einer relativistischen Geschwindigkeit auf den Beobachter zu, so dass deren emittierte Strahlung dem Beobachter verkürzt erscheint. Genauer gilt für die gestreute Strahlung im Laborsystem [13]:

$$\lambda_{\text{sc}} = \lambda_0 \frac{(1 + a_0^2/2)}{(1 + \beta_0)^2 \gamma^2}, \quad (4.1)$$

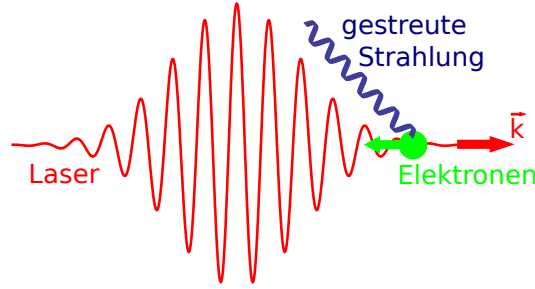


Abbildung 4.1: Frontale Thomsonstreuung: Ein Elektronenpuls wird mit einem in die entgegengesetzte Richtung propagierenden Laserpuls zum Überlapp gebracht. Dabei oszillieren die Elektronen im Feld des Lasers und emittieren Strahlung.

mit der Wellenlänge des Lasers λ_0 , die auf die Lichtgeschwindigkeit skalierte Geschwindigkeit der Elektronen β_0 , dem Lorentzfaktor der Elektronen $\gamma = [1 - \beta_0^2]^{-1/2}$ und der dimensionslosen Intensität des Lasers a_0 . Der Laserstärkeparameter

$$a_0^2 = \frac{e^2}{4\pi^2 m_e^2 c^5} \frac{2I\lambda_0^2}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\lambda_0^2}{0.511^2} \frac{E_0^2}{10^{12} \text{V}^2}$$

ist abhängig von dem Betrag der Ladung des Elektrons e , der Elektronenmasse m_0 , Lichtgeschwindigkeit c , Permittivität des Vakuums ε_0 , Laserwellenlänge λ_0 und der über eine Wellenlänge gemittelten Spitzenintensität des Laser $I = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2$, mit der Amplitude E_0 des Laserfeldes. Der Wert von a_0 sagt etwas über die zu erwartende Elektronendynamik aus. Für $a_0 \approx 1$ gewinnt das Elektron während der Beschleunigung im Laserfeld kinetische Energie in der Größe seiner Ruhemasse. Seine transversale Geschwindigkeit ist dann relativistisch und somit ist die Kraft infolge des magnetischen Feldes vergleichbar mit der durch das elektrische Feld hervorgerufenen. Das verändert die Bewegung des Elektrons signifikant. Es oszilliert nun nicht mehr einfach im elektrischen Feld des Lasers, sondern erfährt auch eine in der Richtung alternierende Beschleunigung entlang seiner Flugrichtung. Das hat ebenfalls einen Einfluss auf das Spektrum der gestreuten Intensität (s. Beginn nächster Abschnitt).

Weitere Eigenschaften des gestreuten Strahlungspulses sind:

- Die Breite des Spektrums skaliert mit der Anzahl der durchlaufenen Laserperioden n_{osc} [13]: $\frac{\Delta\Omega}{\Omega} = \frac{1}{n_{\text{osc}}}$.
- Die Dauer der Strahlungspulses wird bestimmt durch die Dauer des Elektronenpulses [36].
- Die Intensität des gestreuten Pulses ist proportional zur Laserintensität a_0^2 und ebenfalls zur Anzahl der durchlaufenen Laserperioden [13].

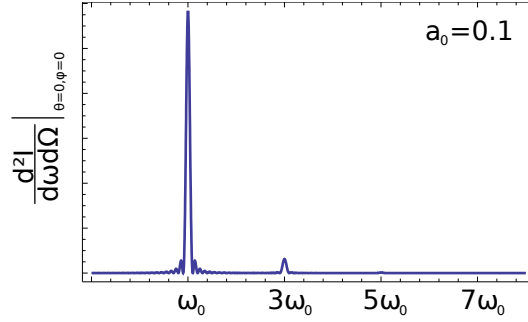


Abbildung 4.2: Spektrale Energiedichte eines gestreuten Pulses bei der Thomsonstreuung von Elektronen an einem Laserpuls niedriger Intensität ($a_0 \ll 1$). Horizontal ist die gestreute Frequenz in Einheiten der Grundfrequenz (vgl. Formel (4.1)) aufgetragen, vertikal die abgestrahlte Intensität in Flugrichtung der Elektronen.

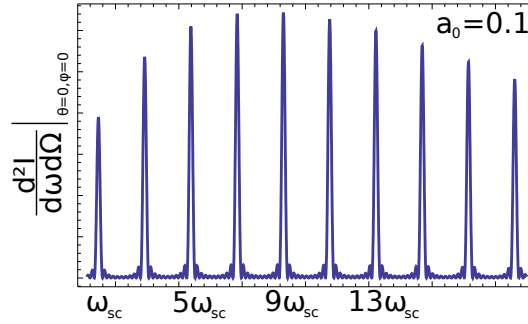


Abbildung 4.3: Spektrale Energiedichte eines gestreuten Pulses bei der Thomsonstreuung bei hohen Laserintensitäten. Für $a_0 > 1$ verteilt sich die Energie deutlich über eine Vielzahl von Oberschwingungen.

Ein Spektrum für einen gestreuten Puls bei geringer Intensität ($a_0 = 0.1 \ll 1$) ist in Abbildung 4.2 dargestellt.

Limitierungen der Thomsonstreuung

Möchte man die abgestrahlte Gesamtenergie des gestreuten Pulses steigern, kann man in der frontalen Geometrie entweder die Laserintensität oder die Laserpulsdauer erhöhen. Ersteres führt zu einer anharmonischen Bewegung der Elektronen und somit zu einer Verbreiterung des Spektrums und einer Verteilung der Intensität über viele Harmonische, siehe Abb. 4.3.

Zweiteres ist beschränkt durch die Rayleighlänge des Lasers. Außerhalb derer ist die Intensität des Lasers um mindestens die Hälfte abgefallen und daher ist die

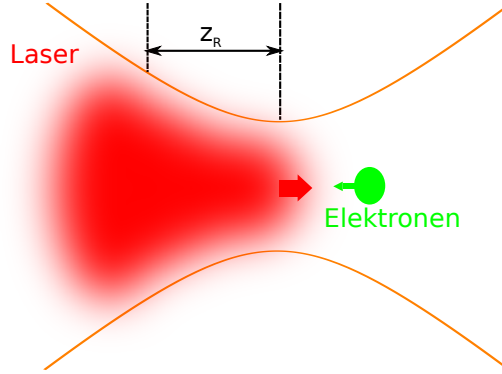


Abbildung 4.4: Ein langer Puls erreicht nur in einem kleinen Raumgebiet um den Fokus seine maximale Intensität. Für Thomsonstreuung mit langen Laserpulsen wird dadurch das Spektrum der gestreuten Strahlung verbreitert.

abgestrahlte Wellenlänge der Elektronen eine andere, was zur Verbreiterung des Strahlungsspektrums führt. Wie in Abb. 4.4 dargestellt, wird außerdem Laserenergie vergeudet, weil kein vollständiger Überlapp zwischen Elektronen und Laserpuls gegeben ist.

4.2 Das Prinzip der Travelling-Wave Thomsonstreuung

Die im letzten Abschnitt genannten Limitierungen der Thomsonstreuung können in der Travelling-Wave Thomsonstreuung überwunden werden. In diesem Schema wird die Pulsfront des Lasers verkippt und der Fokus nicht punktförmig eingestellt, sondern entlang einer Linie gebildet, wie es in Abbildung 4.5 und 4.6 dargestellt ist. Diese Brennnlinie verläuft gerade entlang der Elektronentrajektorie. Auf diese Weise ist es möglich die Energie eines Hochintensitätslasers auf einen größeren Raum-bereich zu verteilen, so dass die Intensität am Ort der Elektronen reduziert ist. Beispielsweise reduziert sich das a_0 eines Laser mit einem $15\text{ }\mu\text{m}$ großen Fokus von $a_0 = 5$ auf $a_0 = 0.16$, wenn die Breite des Laser auf 15 mm vergrößert wird. Weil die Interaktionslänge in TWTS dann aber auch 15 mm beträgt, kann dieselbe Energiedichte der gestreuten Strahlung wie bei der frontalen Thomsonstreuung erreicht werden, diese ist jedoch wegen $a_0 \ll 1$ fast ausschließlich bei der Grundfrequenz konzentriert.

Die Verkipfung kann anhand eines optischen Gitters realisiert werden. Ist am Gitter $\psi_{\text{out}} > \psi_{\text{in}}$, z. B. durch Nutzung des in die erste Ordnung gebeugten Pulses,

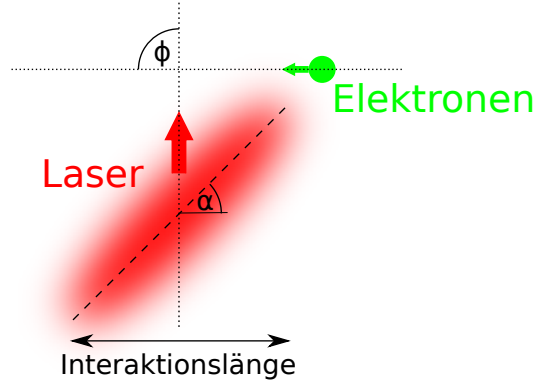


Abbildung 4.5: Prinzip der Travelling-Wave Thomsonstreuung. Die Pulsfront des Lasers wird um einen Winkel α verkippt, damit die unter einem Winkel ϕ kreuzenden Elektronen über die gesamte Laserbreite Überlapp mit dem Laserpuls haben.

dann gilt für die Pulsfrontverkipfung

$$\alpha = \psi_{\text{out}} - \psi_{\text{in}}.$$

Die Wellenlänge der gestreuten Strahlung hängt nun vom Interaktionswinkel ϕ ab und ist nach [14]

$$\lambda_{\text{sc}} = \lambda_0 \frac{(1 + a_0^2/2)}{2\gamma^2 (1 - \beta_0 \cos \phi)}. \quad (4.2)$$

Der Winkel α , um den die Laserpulsfront verkippt werden muss, folgt aus einer geometrischen Überlegung. Wäre die Einhüllende nicht verkippt, so gäbe es, wie in Abbildung 4.7, zwischen den Elektronen und der Einhüllenden nach kurzer Zeit t einen Abstand $d(t)$, der den Geschwindigkeitsunterschied zwischen Elektronen und Laser widerspiegelt.

Dieser Abstand wächst, je weiter sich die Elektronen vom Zentrum des Lasers wegbewegen. Dies geschieht mit der Geschwindigkeit v_{\perp} . In dem Dreieck, welches $ct - d(t)$ und $x_{\text{el}}(t) = v_{\perp} t$ aufspannen, muss die Einhüllende des Laserpulses entlang der Hypotenuse verlaufen, damit zu allen Zeiten Überlapp gegeben ist. Dementspre-

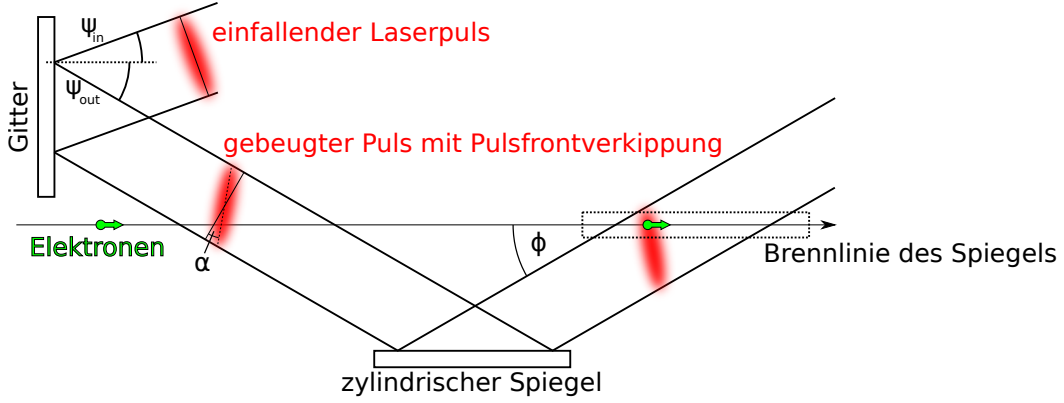


Abbildung 4.6: Möglicher Aufbau für TWTS bei kleinen Interaktionswinkeln ϕ . Der Laserpuls erhält bei der Beugung am Gitter eine Pulsfrontverkipfung um den Winkel α und wird anschließend an einem zylindrischen Spiegel in der Höhe auf die Elektronentrajektorie fokussiert

chend lautet die Bedingung an den Winkel α

$$\begin{aligned} \tan \alpha &\stackrel{!}{=} \frac{ct - d(t)}{x_{\text{el}}(t)} \\ &= \frac{c - v_{\parallel}}{v_{\perp}} \\ &= \frac{1 - \beta_0 \cos \phi}{\beta_0 \sin \phi} \\ \Rightarrow \quad \alpha &\stackrel{\beta_0 \approx 1}{\simeq} \phi/2, \end{aligned}$$

wobei v_{\parallel} die Geschwindigkeit der Elektronen in Ausbreitungsrichtung des Lasers ist. Soll nun ψ_{out} als variable Größe in TWTS beibehalten werden, folgt für den Einfallswinkel auf das Gitter

$$\psi_{\text{in}} = \psi_{\text{out}} - \phi/2.$$

Die Abhängigkeit der gestreuten Wellenlänge von der variablen Amplitude a_0 des Lasers (s. Gleichung (4.2)) stellt kein großes Problem dar. Diese verändert sich zwar während der Interaktion durch Ansteigen und Abfallen des Laserfeldes, weil aber insgesamt bei TWTS $a_0 \ll 1$ gelten soll, ist die Variation in der gestreuten Wellenlänge klein.

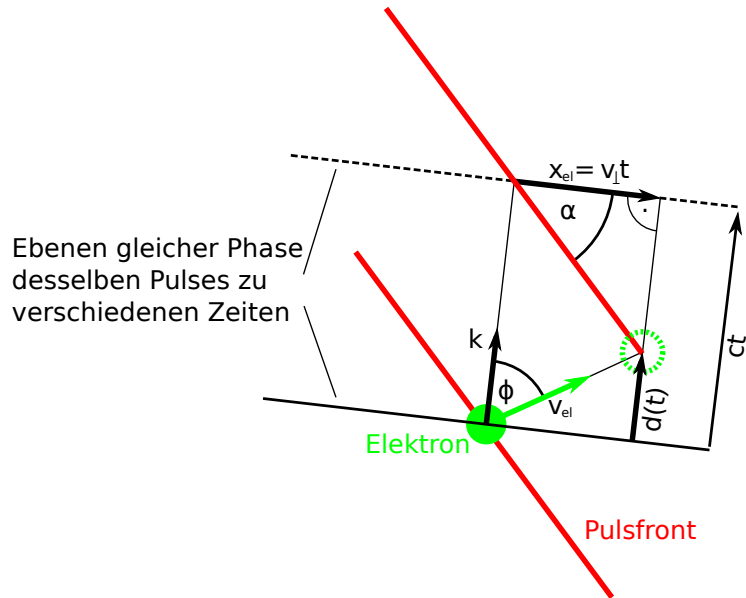


Abbildung 4.7: Bestimmung des Winkels α : Während sich die Elektronen in der Zeit t um die Strecke $v_{el}t$ bewegen, legt die Phase des Pulses die Strecke ct zurück. Die Projektion der zurückgelegten Strecke der Elektronen in Richtung der Ausbreitungsrichtung der Phase ist $d(t)$. Die entsprechende Projektion senkrecht dazu ist $v_{\perp}t$. Die Einhüllende des Lasers ist rot gekennzeichnet. Damit die Einhüllende zu allen Zeiten mit den Elektronen überlappt muss der Verkipfungswinkel α die Bedingung $\tan \alpha = \frac{ct-d(t)}{v_{\perp}t}$ erfüllen.

4.3 Anforderungen an den Laserpuls

Die Abhängigkeit der gestreuten Frequenz von der Intensität und der treibenden Frequenz bei der Thomsonstreuung legen die wesentlichen Anforderungen an den Laserpuls fest: entlang der Elektronentrajektorie müssen Laserfrequenz und Intensität möglichst konstant gehalten werden.

Beide Anforderungen laufen darauf hinaus, dass durch Winkeldispersion am Gitter verursachte räumliche Dispersion (SD) und Dispersion der Gruppenlaufzeit (GDD) lokal, d. h. am Ort der Elektronen, verschwinden müssen.

Beide Bedingungen müssen zum einen erfüllt sein, um einer Verbreiterung des abgestrahlten Spektrums durch variierende Laserfrequenz während der Interaktion vorzubeugen und zum anderen um eine Verringerung der Energiedichte aufgrund von Pulsverlängerung zu verhindern.

Für genau einen Punkt in Zeit und Raum lassen sich SD und GDD exakt kompensieren, indem man Veränderungen am Kompressor des Lasers vornimmt¹. Dann entspricht die Dispersion am Ort der Elektronen nur der durch Propagation von diesem Punkt aufgenommenen Dispersion, siehe Abb. 4.8.

Im folgenden wähle ich für diesen Punkt den Moment, indem sich die Elektronen im Zentrum des Pulses befinden.

Um nun die von diesem Punkt aus aufgenommene Dispersion am Ort des Elektrons aufzuheben, kann man kein normales Gitter verwenden, sondern benötigt ein VLS (engl. varied-line spacing) Gitter. Das heißt, der Abstand zwischen den Gitterstrichen darf nicht gleichmäßig sein. Wie in [25] gezeigt, erzielt TWTS bereits eine gute Dispersionskompensation für ein quadratisches Anwachsen des Strichabstandes. Das bedeutet für die Anwendung der Beugungsformel (3.25), dass die Folge der Gitterstrichpositionen

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= \xi_k + d_0 + d_1 \xi_k^2, & \xi_0 &= 0 \\ & & k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

lautet. Das quadratische Anwachsen des Strichabstandes hat nun eine fokussierende Wirkung des Gitters auf den Strahl zur Folge. Dieser Effekt zusammen mit der eingestellten räumlichen Dispersion verursacht eine Winkeldispersion, welche linear abhängig von der transversalen Koordinate x ist [37, S. 146]. Diese wird genutzt, um die Pulseigenschaften punktuell zu beeinflussen, so dass am Ort der Elektronen keine SD und GDD vorhanden sind.

¹Die hier angesprochenen Veränderungen am Kompressor beziehen sich auf den Abstand der verwendeten Gitter im Kompressor. Die so eingestellten Dispersionen, die durch nicht ausgeglichene, bereits vorhandene Dispersionen im Laserpuls hervorgerufen werden, wirken sich in gleicher Weise auf den gesamten Puls aus. Die im nächsten Absatz besprochenen VLS-Gitter verändern die Eigenschaften für jeden Punkt im Puls individuell.

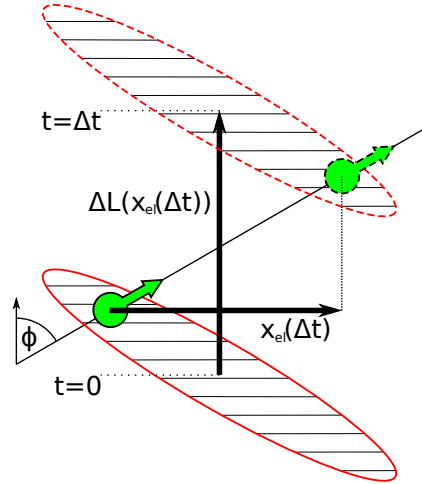


Abbildung 4.8: Stellt die Propagationsdistanzen von Elektronenpuls und Laser während der Wechselwirkung dar. Ist der Laser für einen Punkt in Zeit und Raum vorkompensiert, dann ist die Dispersion des Pulses am Ort der Elektronen bestimmt durch die Propagationsdistanz ΔL des Lasers. Haben die Elektronen zum Zurücklegen der Strecke x_{el} die Zeit Δt benötigt, so ist $\Delta L = c\Delta t = x_{\text{el}}/\beta_0 \sin \phi$.

Die durch den variablen Strichabstand verursachte x -abhängige Winkeldispersion ist dagegen klein, weil in der Praxis d_1 klein ist [38].

Eine über den Puls variierende Winkeldispersion verursacht jedoch auch eine quadratische Biegung der Pulsfront. Nimmt man beispielsweise den Ort größter Intensität bei vorhandener Winkeldispersion von Abschnitt 3.1 auf Seite 26: $z_0(x) = -AD\Omega_0 x$ und setzt dort einen linearen Ansatz für die Winkeldispersion ein, $AD(x) = AD_0 + AD_1 x$, ist das Zentrum des Pulses mit zunehmenden x um $AD_1 x^2$ versetzt. Diese Krümmung verringert die Dauer des Überlapps zwischen Elektronen und Laserpuls und damit auch die Interaktionslänge. Mit einem zusätzlichen VLS Gitter kann man auch das vorkompensieren [25].

Einen Ausdruck für das quadratische Element d_1 in der Folge der Gitterstrichpositionen (4.3) kann abgeleitet werden, indem man die Bedingung für verschwindende räumliche Dispersion entlang der Elektronentrajektorie $x_{\text{el}}(t)$ formuliert:

$$SD(x, L)|_{x=x_{\text{el}}(t)} = SD_0 + AD(x_{\text{el}}(t)) [L(x_{\text{el}}(t)) + \Delta L(x_{\text{el}}(t))] \stackrel{!}{=} 0, \quad (4.4)$$

wobei SD_0 die Vorkompensation ist und $L(x_{\text{el}}(t))$ der Abstand des Zentrums des Pulses vom Gitter, wenn die Elektronen am Ort $x_{\text{el}}(t)$ sind. Der Laufwegunterschied $\Delta L(x)$ berücksichtigt, dass der linke und der rechte Rand unterschiedliche Wegstrecken nach der Beugung zurücklegen, siehe Abb. 4.9. Insgesamt berücksichtigt die

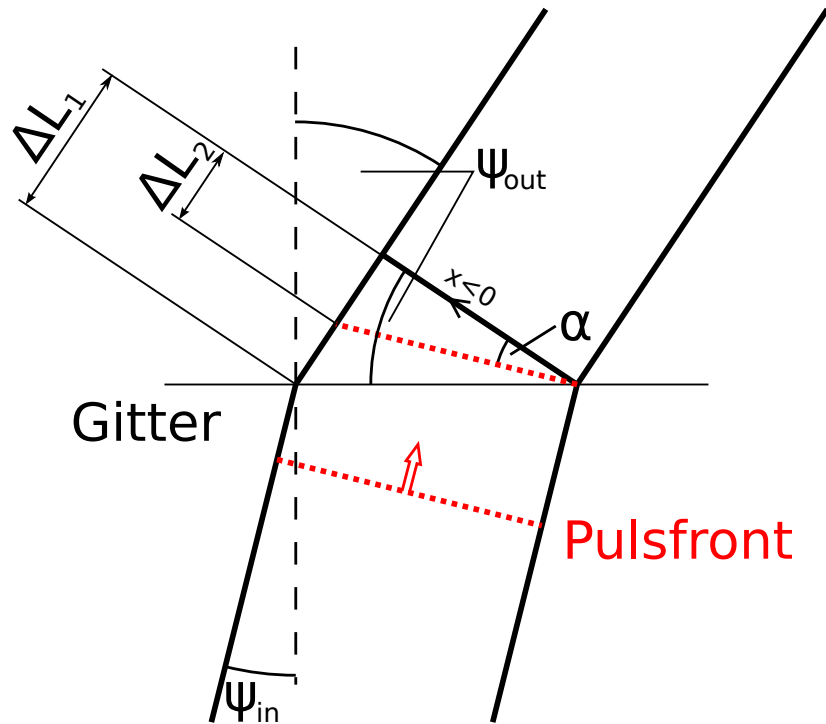


Abbildung 4.9: Zeigt den Zusammenhang von Pulsfront, Phasenfront und Propagationsrichtung an einem Transmissionsgitter. Die Pulsfront (rot) ist nach der Beugung um einen Winkel α gegenüber der Phasenfront verkippt. Bei der Beugung legen unterschiedliche Bereiche des Pulses verschiedene Wegstrecken zurück. Die Wegdifferenz zwischen dem linken und dem rechten Rand ist $\Delta L = \Delta L_1 - \Delta L_2$. Somit ist $\Delta L(x) = -x (\tan \psi_{out} - \tan \alpha)$.

Gleichung, dass die SD am Ort der Elektronen hervorgerufen wird durch am Gitter aufgenommene Winkeldispersion sowie unterschiedliche Distanzen von verschiedenen Bereichen des Pulses zurückgelegt werden. Die Vorkompensation SD_0 wird so gewählt, dass sie genau die räumliche Dispersion $AD_0 L(0)$ aufhebt, d. h. wenn sich die Elektronen im Zentrum des Pulses befinden wird es keine räumliche Dispersion geben.

Die weitere Berechnung ist in [37] gezeigt. Der dort hergeleitete Ausdruck für AD_1 ist proportional zu d_1 und somit kann durch einsetzen in (4.4) d_1 zu

$$d_1 = -\frac{\lambda_0 \cos \psi_{\text{out}} \cdot [\tan(\pi/2 - \phi) + \tan \psi_{\text{out}}]}{2 L_0^2 \tan^2 \phi/2}$$

bestimmt werden.

4.4 Simulationen von TWTS-Pulsen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass der Laser bei der Travelling-Wave Thomsonstreuung tatsächlich die Anforderungen, zumindest hinreichend, erfüllt. Dazu habe ich ein C++ Programm entwickelt, welches die Ausbreitung eines gaußschen Laserpuls nach Beugung am Gitter anhand der Beugungsformel für das Gitter (3.25) simuliert. Mit Hilfe der in Abschnitt 3.6 gezeigten Verfahren können damit die Eigenschaften der gebeugten Pulse für beliebige VLS-Gitter, Winkel und Propagationsdistanzen bestimmt werden. Die folgenden Resultate wurden mit dieser Software berechnet.

4.4.1 Ermittlung der Vorkompensation für die Simulation

Damit am Interaktionspunkt die Pulsdauer des Lasers optimal ist, muss die Vorkompensation für räumliche Dispersion und Dispersion der Gruppenlaufzeit richtig bestimmt werden. Die in Kapitel 3 angegebenen Relationen dienen nur als Anhaltspunkt für die optimalen Werte. An einem Beispiel mit den Parametern entsprechend Tabelle 4.1 wird in diesem Abschnitt die Ermittlung der Vorkompensation erläutert.

Zuerst wird die Vorkompensation für räumliche Dispersion bestimmt. Dazu wird in drei aufeinander folgenden Schritten die SD am Interaktionspunkt L ermittelt und dann der entgegengesetzte Wert für SD in die Simulationsparameter eingesetzt. Die Ergebnisse dieses Vorgehens sind in Tabelle 4.2 zusammengefasst. In Abbildung 4.10 ist jeweils ein Spektrum vor und nach dem Iterationsprozess gezeigt. Wie bereits in Abschnitt 3.6 erläutert, entspricht eine Verkipfung im Spektrum einer vorhandenen räumlichen Dispersion. Diese verschwindet nach der Iteration.

Parameter	Formelzeichen	Wert
Wellenlänge	λ_0	$0.8 \mu\text{m}$
Entfernung vom Gitter	L	1 m
Breite	w_0	1.5 cm
Pulsdauer	τ_0	30 fs
Eingangswinkel	ψ_{in}	0°
Ausgangswinkel	ψ_{out}	22.5°
Winkeldispersion	AD	0 s
Räumliche Dispersion	SD	$0 \text{ m}^*\text{s}$
Dispersion der Gruppenlaufzeit	GDD	0 s^2

Tabelle 4.1: Verwendete Laserparameter für das Beispiel zur Bestimmung der Vorkompensation für räumliche Dispersion SD und Dispersion der Gruppenlaufzeit GDD .

Schritt	Vorkompensation [$10^{-16} \text{ m}^*\text{s}$]	ermittelter Wert [$10^{-16} \text{ m}^*\text{s}$]
0	0	-1.89978
1	1.89978	-0.13788
2	2.03766	- 0.04143
3	2.07909	-0.01385

Tabelle 4.2: Zeigt die Ergebnisse zur Vorkompensation der räumlichen Dispersion nach drei Iterationsschritten. Die SD am Interaktionspunkt ist nur noch ungefähr 1/100 so groß wie zu Beginn.

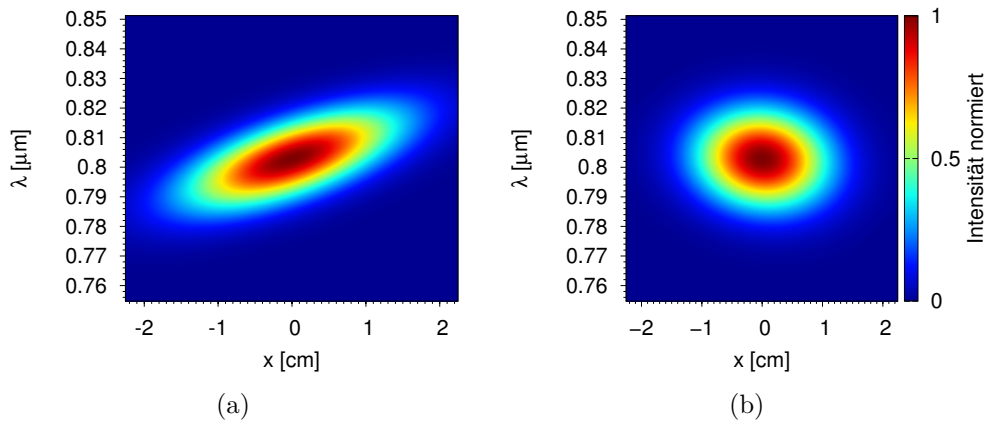


Abbildung 4.10: Zeigt die räumliche Dispersion am Interaktionspunkt anhand der spektralen Intensitätsverteilung. An der horizontalen Achse ist die Wellenlänge aufgetragen und an der vertikalen die Koordinatenachse senkrecht zur Ausbreitungsrichtung x . Eine Verkippung im Spektrum bedeutet, dass nur ein Ausschnitt des Spektrums an jedem Ort x des Pulses vorhanden ist und dessen Zentralwellenlänge somit über den Ort variiert. Mit anderen Worten: Das Spektrum ist räumlich aufgeteilt. Abbildung 4.10a zeigt das Spektrum vor der Kompensation. Nach der Kompensation ist keine räumliche Dispersion mehr vorhanden, Abb. 4.10b.

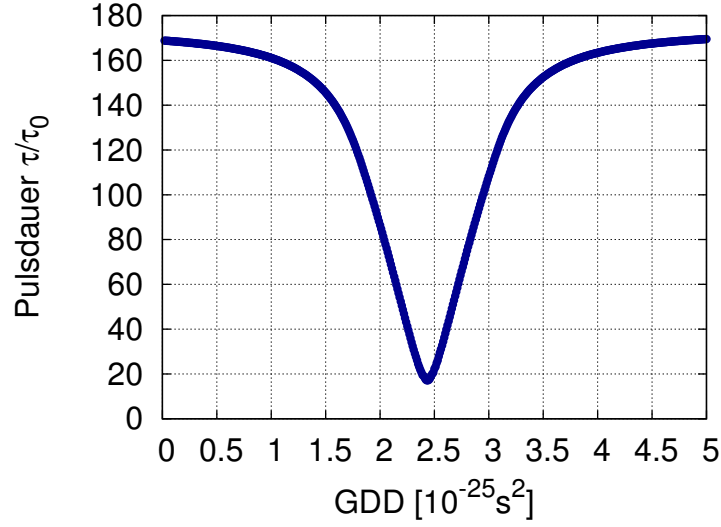


Abbildung 4.11: Ergebnis eines Parametersuchlaufs über die Vorkompensation der Dispersion der Gruppenlaufzeit GDD . Beim Minimum der Pulsdauer ist auch der optimale Wert der GDD . Dass das Minimum nicht bei 1 liegt, ist auf Third-Order-Dispersion zurückzuführen (s. Text).

Danach folgt die Bestimmung der GDD -Vorkompensation mittels eines Parametersuchlaufs über verschiedene Werte von GDD . Dazu werden die zu jedem GDD -Wert gehörenden Pulsdauern τ berechnet. Der optimale Wert für die Vorkompensation ist der zur niedrigsten Pulsdauer gehörende. In Abbildung 4.11 ist das Ergebnis einer solchen Rechnung gezeigt. Der erreichte Wert für die Pulsdauer ist ungefähr 18 mal größer als der durch das Pulsdauer-Bandbreitenprodukt minimal mögliche Wert.

Diese Verlängerung des Pulses ist bei sonst gleichen Parametern kleiner für kleinere Winkel und größer für größere Winkel. Das lässt darauf schließen, dass dies ein durch Dispersion verursachter Effekt ist. Bestätigt wird dies in Abbildung 4.12 durch den Phasenversatz den die Frequenzen in diesem Beispiel zueinander besitzen. Im Gegensatz dazu weisen die Phasen eines am Gitter transmittierten Pulses diesen Versatz nicht auf. Gezielte Tests wurden durchgeführt um festzustellen, ob es sich tatsächlich um eine physikalische Eigenschaft der hier gerechneten Gauß-Strahlen oder eine Auswirkung numerischer Fehler handelt.

- Ausbreitungsgeschwindigkeit und Ausgangswinkel nach Beugung am Gitter für die Farben mit der Wellenlänge 450, 650 und 850 nm anhand von nanose-

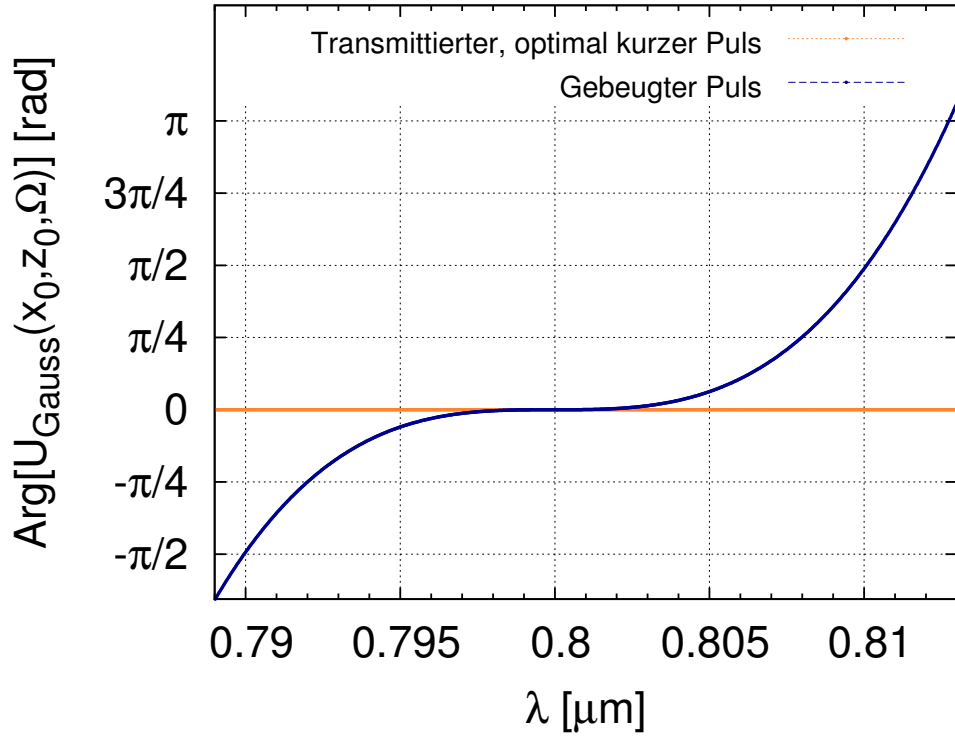


Abbildung 4.12: Wellenlängenabhängiger Phasenversatz eines am Gitter gebeugten vorkompensierten Pulses (blau) und eines transmittierten Pulses (orange). Der transmittierte Puls erhält keine Dispersion. Daher entsteht auch keine Verzögerung zwischen den Phasen. Der gebeugte Puls erhält durch Beugung am Gitter eine Phasenverzögerung $\propto (\lambda - \lambda_0)^3$.

kundenlangen Pulsen.

→ Resultat: Der Ausgangswinkel stimmt mit dem durch die geometrische Optik mittels $\sin \psi_{\text{out}} = \lambda/d$ vorhergesagten überein. Die Lichtgeschwindigkeit entspricht c .

- Bestimmung der Pulsdauer eines lediglich reflektierten Pulses für die Ausgangswinkel $\psi_{\text{out}} = 0^\circ$ und 20° .

→ Resultat: In beiden Fällen ist die Abweichung von $\tau/\tau_0 = 1$ kleiner als 10^{-3} .

Die wesentlichen physikalischen Aspekte werden also durch das Programm korrekt wiedergegeben.

Ein Verhalten des Phasenversatzes proportional zu $(\lambda - \lambda_0)^3$ deutet auf eine Dispersion dritter Ordnung hin, welche nach der Kompensation von SD und GDD bestehen bleibt. Demnach besitzt die Taylorentwicklung der Phase φ des komplexen Feldes $U(x, z, \Omega)$ einen nicht verschwindenden dritten Term

$$\frac{1}{6} \frac{\partial^3 \varphi(x, z, \Omega)}{\partial \Omega^3} \bigg|_{\Omega=\Omega_0} (\Omega - \Omega_0)^3 \neq 0$$

Dieser Einfluss wird im Kostenbauder-Formalismus nicht berücksichtigt und ist daher in den bisher geleisteten Arbeiten nicht in Erscheinung getreten. In [39] ist ein Ausdruck für Dispersion dritter Ordnung (Third-Order-Dispersion, TOD) hergeleitet. Die wesentlichen Abhängigkeiten sind

$$\frac{\partial^3 \varphi(x, z, \Omega)}{\partial \Omega^3} \propto \frac{L c}{d^2 \Omega^4 \cos^2[\psi_{\text{out}}(\Omega) - \psi_{\text{out}}(\Omega_0)]}.$$

TOD wird also relevant für große Propagationsdistanzen L , kleine Strichabstände d des Gitters, stark unterschiedliche Ausgangswinkel $\psi_{\text{out}}(\Omega)$ für die einzelnen Farben und sehr breitbandige Pulse $(\Omega - \Omega_0)/\Omega_0 \gtrsim 2\%$ im optischen Bereich. Aufgrund der kubischen Abhängigkeit zur Bandbreite werden im verbleibenden Teil der Arbeit die Simulationen mit einer Pulsdauer von $\tau = 120$ fs durchgeführt, dies vermeidet von vornherein Effekte aufgrund Dispersionen dritter Ordnung und höher. An heute betriebenen Lasern wird TOD dagegen routinemäßig kompensiert [40] und somit stellt dieser bisher nicht beachtete Effekt kein grundlegendes Problem für TWTS dar.

Parameter	Formelzeichen	Wert
Wellenlänge	λ_0	$0.8 \mu\text{m}$
Entfernung vom Gitter	L	0.25 m
Breite	w_0	1.5 cm
Pulsdauer	τ_0	120 fs
Eingangswinkel	ψ_{in}	0°
Ausgangswinkel	ψ_{out}	-22.5°
Winkeldispersion	AD	0 s
Räumliche Dispersion (normales Gitter)	SD	$4.7615 \cdot 10^{-17} \text{ m/s}$
Räumliche Dispersion (VLS-Gitter)	SD	$4.7521 \cdot 10^{-17} \text{ m/s}$
Dispersion der Gruppenlaufzeit (beide Gittertypen)	GDD	$0.61 \cdot 10^{-25} \text{ s}^2$

Tabelle 4.3: Verwendete Laserparameter in einem Szenario mit großem Interaktionswinkel $\phi = 45^\circ$. In dieser Konfiguration ist die Verlängerung des Pulses während der Interaktion mit den Elektronen bereits signifikant, so dass ein VLS-Gitter benötigt wird um Dispersion zu kompensieren.

4.4.2 Leistungsfähigkeit der VLS-Gitter für große Interaktionswinkel

Maßgeblich für eine hohe Streueffizienz ist eine größtmögliche Laseramplitude entlang der Elektronentrajektorie². Diese wird deutlich verringert wenn sich die Pulsdauer um ein Vielfaches verlängert, weil bei gleichbleibender Gesamtenergie im Puls die Energiedichte verringert wird (Auseinanderlaufen des Wellenpakets). Ziel ist es, durch Verwendung eines VLS-Gitters die Variation der Pulsdauer möglichst gering zu halten. Für die folgenden Resultate beachte man Abbildung 4.13 zu den verwendeten Koordinaten.

Die verwendeten Laserparameter für diese Simulation sind in Tabelle 4.3 dargestellt. Abbildung 4.14 zeigt die Veränderung der Pulsdauer entlang der Elektronentrajektorie $x_{\text{el}}(t)$ für einen Interaktionswinkel $\phi = 45^\circ$ und einer Pulsbreite

²In dieser Arbeit ist mit der Elektronentrajektorie eine Gerade im Laborsystem gemeint, welche den Laser unter dem Interaktionswinkel ϕ kreuzt.

$$x_{\text{el}}(t) = \beta_x ct \qquad z_{\text{el}}(t) = \beta_z ct,$$

wobei β_x und β_z vom Interaktionswinkel und dem Ausgangswinkel des Lasers am Gitter bestimmt werden und die absolute Geschwindigkeit der Elektronen $\beta \approx 1$ ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinden sich die Elektronen im Zentrum des Laserpulses $x = 0$. Siehe auch Abbildung 4.13.

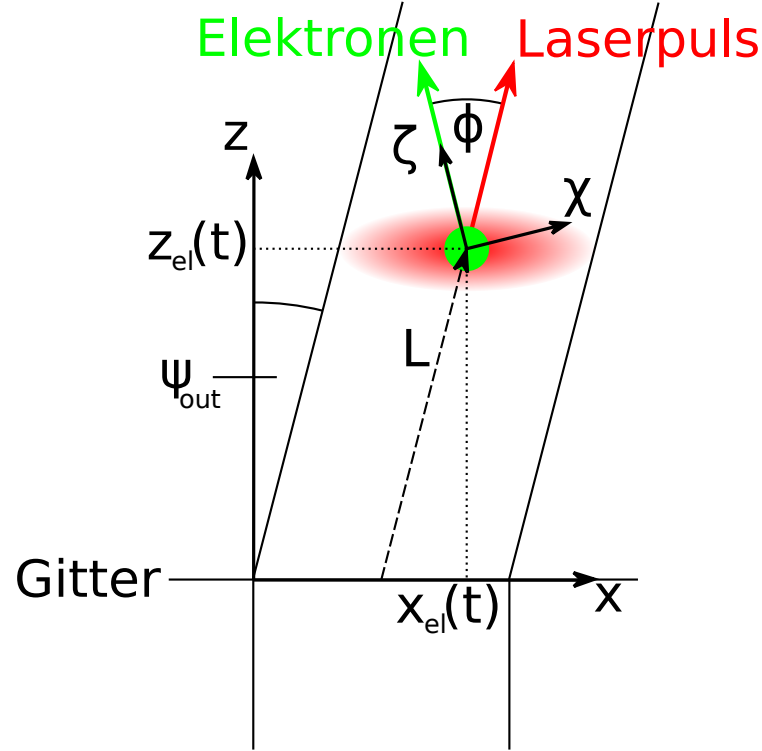


Abbildung 4.13: Gibt eine Übersicht über die Verwendeten Koordinatensysteme in den Simulationen. Der Laser wurde am Transmissionsgitter um den Winkel ψ_{out} gebeugt. Die Elektronen propagieren unter dem Interaktionswinkel ϕ relativ zum Laserpuls. Zur Bestimmung der Pulseigenschaften aus Sicht der Elektronen wird ein Koordinatensystem (χ, ζ) gewählt, indem sich diese in ζ -Richtung bewegen. In einer Entfernung L vom Gitter befindet sich der Interaktionspunkt an dem die Elektronen im Zentrum des Pulses sind. Die Laborkoordinate x ist an seiner Stelle Null, so dass im Laborsystem (x, z) die Koordinaten des Interaktionspunktes $\mathbf{L} = (0, L \cdot \cos \psi_{\text{out}})$ sind. Die Trajektorie der Elektronen wird im Laborsystem (x, z) beschrieben durch $\mathbf{r}(t) = (x_{\text{el}}(t), z_{\text{el}}(t))$.

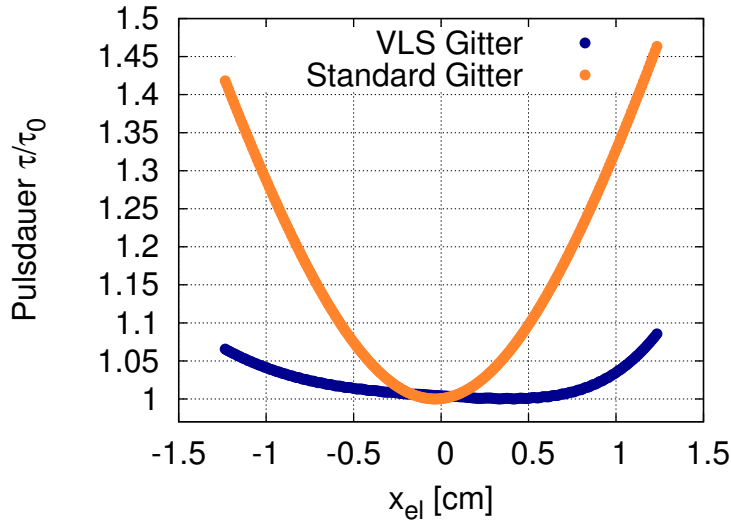


Abbildung 4.14: Lokale Pulsdauer τ (normiert auf die fourierlimitierte Pulsdauer τ_0) am Ort des Elektronenpulses $x_{el}(t)$ bei Benutzung eines normalen Gitters und eines VLS-Gitters. Die Berechnungen wurden für einen 120 fs, 800 nm Puls in einer Entfernung von 25 cm vom Gitter und einem Interaktionswinkel von $\phi = 45^\circ$ durchgeführt.

$w_0 = 1.5$ cm (Standardabweichung des Feldes ist $\sigma_{x,0} = 1.06$ cm). In diesem Beispiel ist für ein normales Gitter in einer Entfernung von einer Standardabweichung $\sigma_{x,0}$ der Elektronen vom Interaktionspunkt der Puls an deren Position um ein Drittel verlängert $\tau = 1.36\tau_0$. Bei Verwendung eines VLS-Gitters reduziert sich die Streckung des Pulses auf $\tau = 1.04\tau_0$.

Dieses Beispiel zeigt, dass VLS-Gitter bei großen Interaktionswinkeln die mögliche Interaktionslänge erheblich verbessern, weil die Pulsdauer über einen großen Zeitraum der Wechselwirkung nahezu konstant gehalten wird. Es sollte darauf aufmerksam gemacht werden, dass diese Ergebnisse ohne eine Optimierung des Ausgangswinkels am Gitter und der Propagationsdistanz auf gute Wertepaare erzielt wurden und noch große Potentiale zur weiteren Verbesserung bei Optimierung bestehen.

4.4.3 Pulseigenschaften in einer Kleinwinkelanordnung

Für die Anwendung von TWTS als Freie-Elektronen-Laser sind lange Interaktionsstrecken über viele Laserperioden notwendig. Diese erreicht man vor allem bei kleinen Interaktionswinkeln ϕ , denn die Wechselwirkungslänge $L_{\text{int}} = w_0 / \sin \phi$ ist

Parameter	Formelzeichen	Wert
Wellenlänge	λ_0	$0.8 \mu\text{m}$
Entfernung vom Gitter	L	1.5 m
Breite	w_0	1.5 cm
Pulsdauer	τ_0	120 fs
Eingangswinkel	ψ_{in}	0°
Ausgangswinkel	ψ_{out}	3°
Winkeldispersion	AD	0 s
Räumliche Dispersion	SD	$3.3429 \cdot 10^{-17} \text{ m/s}$
Dispersion der Gruppenlaufzeit	GDD	$5.83 \cdot 10^{-27} \text{ s}^2$

Tabelle 4.4: Verwendete Laserparameter in einem Szenario mit kleinem Interaktionswinkel $\phi = 6^\circ$. Dies entspricht einer Konfiguration in der TWTS als Freie-Elektronen-Laser genutzt wird.

umgekehrt proportional dazu.

Die Verlängerung eines Pulses mit einer Pulsfrontverkipfung α nach Propagation um eine Strecke L [41]

$$\frac{\tau^2}{\tau_0^2} = 1 + \frac{L^2 \lambda_0^2 \tan^4(\alpha)}{\pi^2 (c\tau_0)^4}$$

ist für solch eine Konfiguration wegen $\tan^4(\alpha) = \tan^4(\phi/2)$ klein. Daher ist für kleine Interaktionswinkel ein VLS-Gitter nicht nötig und die folgenden Berechnungen wurden an einem normalen Gitter durchgeführt. Die Simulationsparameter sind in Tabelle 4.4 zusammengefasst.

Zentral für die Nutzung von TWTS als FEL ist die Frage, wie der Puls aus Sicht der Elektronen aussieht. Dazu werden die Eigenschaften des Pulses in einem Koordinatensystem (χ, ζ) bestimmt, indem der Elektronenpuls in die ζ -Richtung propagiert, s. Abbildung 4.13.

Ein Elektron an der Stelle $\chi = 0$, $\zeta = \beta ct \approx ct$ durchkreuzt den Laser und erfährt dabei ein gaußförmiges Ansteigen und Abklingen der Laserfeldamplitude mit einer Standardabweichung $\sigma = 0.53 \text{ cm}$ (FWHM = 1.25 cm), s. Abb. 4.15. Dort ist die Position des Elektrons in Laborkoordinaten (x parallel zum Gitter) angegeben. Die auf der Strecke des FWHM durchlaufenen Laseroszillationen sollten möglichst viele sein, damit eine FEL-Instabilität entsteht und es zum exponentiellen Anwachsen der Strahlungsfeldamplitude kommt. Für eine Abschätzung dieser Zahl benötigt man sowohl die Wellenlänge des Lasers $\lambda = \lambda_0/(1 - \beta_0 \cos \phi) = 146.04 \mu\text{m}$, welche aufgrund der unterschiedlichen Propagationsrichtungen zwischen Laser und Elektronen verlängert ist, als auch die Zeit t in der ein Elektron das FWHM durchläuft: $t = \text{FWHM}/v_x = 0.0125 \text{ m}/c\beta_0 \sin(\phi - \psi_{\text{out}}) \approx 0.79 \text{ ns}$. Zusammen mit der aus der Wellenlänge berechneten Periodendauer $T = \lambda/c = 0.49 \text{ ps}$ ergibt sich die Zahl der

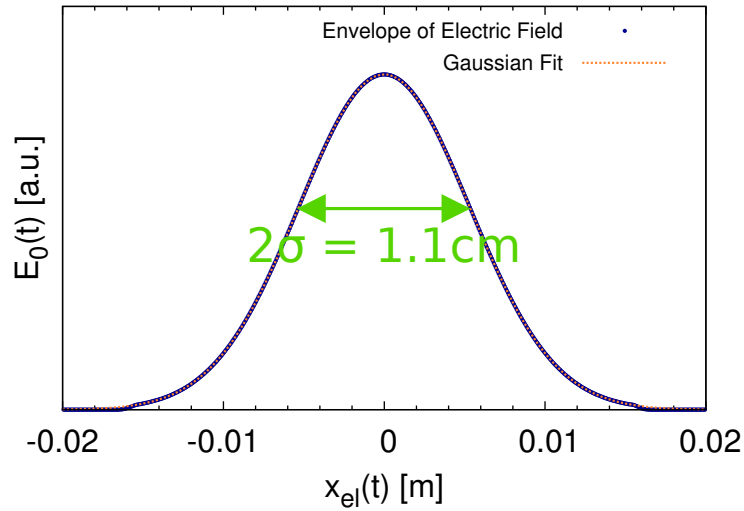


Abbildung 4.15: Änderung der Amplitude des Laserfeldes aus Sicht der Elektronen (blau). Die Elektronenposition $x_{\text{el}}(t)$ ist im Laborsystem angegeben. Der Interaktionspunkt (Elektronen befinden sich im Zentrum des Laserpulses) ist an $x_{\text{el}} = 0$. Ein Fit mit einer Gauß-Kurve (orange) zeigt eine sehr gute Übereinstimmung. Die Breite des Pulses als zweifache Standardabweichung des Fits beträgt $2\sigma = 1.1 \text{ cm}$ (FWHM = 1.25 cm). Dies bedeutet eine Interaktionslänge entlang der Propagationsrichtung der Elektronen von $L_{\text{int},2\sigma} = 21 \text{ cm}$ ($L_{\text{int,FWHM}} = 23.9 \text{ cm}$).

Oszillationen zu

$$n_{\text{osc}} = \frac{t}{T} = 1633.$$

Zum Vergleich: Für den European XFEL gibt das DESY rund 2000 Undulatorperioden entlang der gesamten Elektronenbahn an, welche ungefähr 3 km lang ist. An dieser Stelle zeigt sich, dass TWTS kompakte, über den Interaktionswinkel ϕ skalierbare Undulatoren bereitstellt.

Eine weiteres Resultat dieser Berechnung ist die Verifikation der Annahme im Kostenbauder-Formalismus, dass der am Gitter gebeugte Puls eine gaußsche Form besitzt.

Die Ausdehnung des Pulses transversal zur Flugrichtung der Elektronen ist relevant für die mögliche Breite des verwendeten Elektronenstrahls. In Abbildung 4.16 ist diese in Abhängigkeit von der Elektronen- x -position im Laborsystem $x_{\text{el}}(t)$ in Form von σ_{trans} dargestellt. Dabei ist σ_{trans} die Standardabweichung des Feldes in χ -Richtung und damit ein Maß für die Breite des Laserpulses, welche abhängig vom Zeitpunkt der Interaktion ist. In der behandelten Konfiguration vergrößert sich σ_{trans} um 2.68 Promille, in einer Entfernung $x_{\text{el}}(t) = \text{FWHM}/2 = 0.624 \text{ cm}$ vom Interaktionspunkt. Das heißt, für die Dauer der Interaktion in der die Amplitude von der Hälfte auf das Maximum ansteigt und dann wieder auf die Hälfte abfällt, ändert sich die Pulsbreite um ungefähr $\frac{1}{4}$ Prozent. In guter Näherung ist sie also entlang der Elektronentrajektorie konstant.

Von entscheidender Bedeutung für die Anwendung von TWTS als optischer SASE-FEL ist die spektrale Zusammensetzung des Pulses für Elektronen an verschiedenen Stellen im Elektronenbunch. Das Laserfeld sollte im Idealfall für alle Elektronen einer ebenen Welle mit gleicher Wellenlänge entsprechen. In Abbildung 4.17 ist der wesentliche Teil des Spektrums gezeigt. Der Beitrag einzelner Frequenzen entspricht dem Absolutbetrag der Fourierkoeffizienten c_n aus einer diskreten Fourier Transformation des elektrischen Feldes entlang der Elektronentrajektorie. Einen nennenswerten Beitrag liefert nur der Bereich um die Wellenlänge $\lambda = 146 \mu\text{m}$. Alle anderen Wellenlängen, auch außerhalb des dargestellten Bereichs, haben dagegen einen verschwindenden Anteil. Die Bandbreite des Spektrums beträgt $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0.5\%$. Dies ist kleiner als die Laserbandbreite $\frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} = 1.2\%$, weil die Pulsdauer im Elektronensystem aufgrund der nicht kollinearen Bewegung zum Laserpuls länger ist. Zusätzlich ist in der Abbildung ein zweites Spektrum für ein Elektron gezeigt, welches transversal zur Flugrichtung um $100 \mu\text{m}$ vom Zentrum des Elektronenpulses versetzt ist, somit ist $\chi = 100 \mu\text{m}$ und $\zeta \approx ct$. Beide Spektren sind nahezu identisch und daher sind beide Elektronen zu allen Zeiten derselben Grundwellenlänge ausgesetzt. Das ist wichtig für die Abstrahlung der Elektronen, denn eine andere Wellenlänge würde nach (4.2) eine andere abgestrahlte Wellenlänge zur Folge haben und somit eine kohärente Überlagerung der gestreuten Strahlung verhindern.

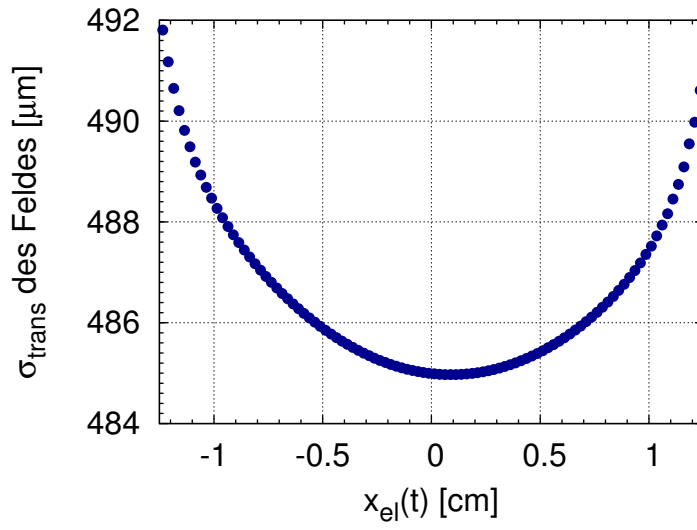


Abbildung 4.16: Änderung der Breite des Laserpulses $\sigma_{\text{transversal}}$, berechnet transversal zur Flugrichtung der Elektronen. In einer Entfernung $x_{el} = 0.624$ cm vom Interaktionspunkt ist die Amplitude des Feldes auf die Hälfte abgefallen (vgl. Abbildung 4.15). Die Breite an dieser Stelle beträgt $\sigma_{\text{trans}} = 486.3 \mu\text{m}$.

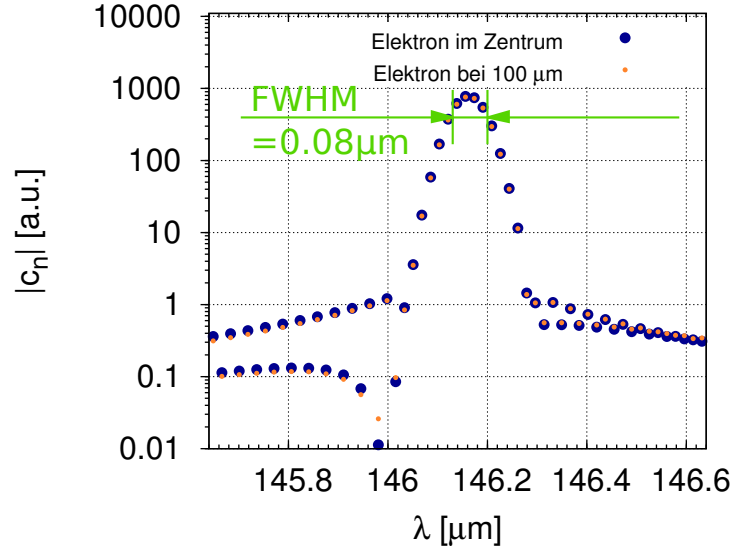


Abbildung 4.17: Zeigt das Spektrum des Laserfeldes entlang der Elektronentrajektorie. Der Beitrag einzelner Frequenzen entspricht dem Absolutbetrag der Fourierkoeffizienten c_n einer schnellen Fourier Transformation (FFT). Die Wellenlänge mit dem größten Beitrag liegt bei $\lambda = 146.16 \mu\text{m}$. Dies ist die Laserwellenlänge verlängert durch die fast kollineare Bewegung der Elektronen unter dem Interaktionswinkel ϕ . Die Bandbreite des Spektrums gegeben als volle Breite bei halber Höhe (FWHM) ist $0.8 \mu\text{m}$. Dies entspricht $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0.5\%$ und ist weniger als halb so groß wie die Bandbreite des Lasers. Das Spektrum ist außerdem für ein zweites Elektron gezeigt, welches transversal zur Flugrichtung um $100 \mu\text{m}$ vom Zentrum des Elektronenpulses versetzt ist.

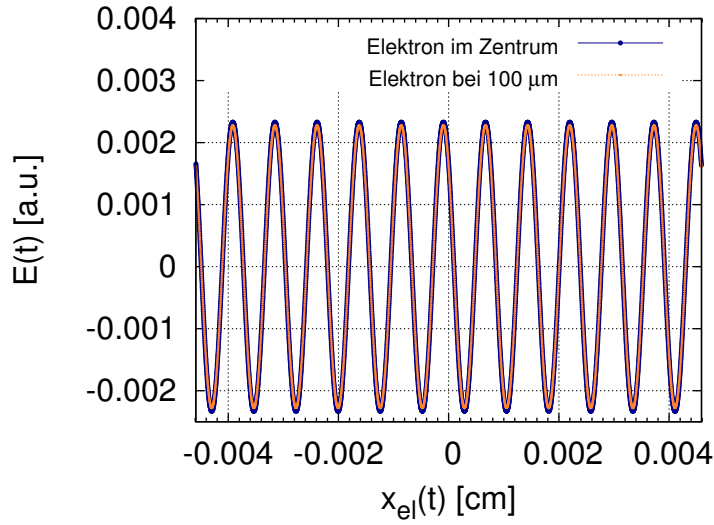


Abbildung 4.18: Harmonische Oszillation des elektrischen Feldes welchem die Elektronen um den Interaktionspunkt $x_{el} = 0$ ausgesetzt sind. Blau für ein Elektron im Zentrum des Elektronenpulses. Orange für ein dazu um $100 \mu\text{m}$ transversal zur Flugrichtung versetztes.

Abbildung 4.18 bestätigt noch einmal, dass beide Elektronen in Amplitude und Wellenlänge einem nahezu identischen elektrischen Feld unterworfen sind.

Abschließend lässt sich sagen, dass in der hier besprochenen Kleinwinkelanordnung die Anforderungen an einen TWTS-Laserpuls erreicht werden um als SASE-FEL funktionieren zu können. Ein TWTS-Puls stellt eine lange Interaktionsstrecke zur Verfügung, auf welcher sich die Grundwellenlänge für alle Elektronen infolge von Dispersion nicht ändert. Das ist ein großer Fortschritt gegenüber der frontalen Thomsonstreuung, deren Interaktionslänge durch Defokussierung und der Forderung $a_0 \ll 1$ im Fokus (keine Erzeugung von Harmonischen) begrenzt ist und konnte im Rahmen dieser Arbeit das erste Mal auf Basis wellenoptischer Methoden gezeigt werden.

5

Bewegung eines Elektrons in einem idealisierten Travelling-Wave Thomsonstreuung Laserpuls in Anwesenheit eines externen Feldes

Im letzten Kapitel wurde gezeigt, dass ein relativistisches Elektron den Laserpuls in der Travelling-Wave Thomsonstreuung bei kleinen Interaktionswinkeln als eine monochromatische Welle mit gaußscher Einhüllenden erfährt. In diesem Kapitel werden nun die Bewegungsgleichungen eines einzelnen Elektrons unter diesen Bedingungen abgeleitet.

Die Herangehensweise ist dabei analog zum eindimensionalen magnetischen Undulator [42–44]. Im Gegensatz dazu ist hier der Laser der Undulator. Darüber hinaus muss berücksichtigt werden, dass Elektron, Laser und Strahlung nicht in dieselbe Richtung propagieren.

5.1 Elektronenbewegung im Laser- und Strahlungsfeld

Zur Beschreibung des elektrischen Feldes entlang der Elektronenbahn wird zunächst von einem dispersionsfreien Gauß-Puls ausgegangen, mit nicht veränderlicher Breite w_0 in die transversale Richtung, einer Pulsdauer τ und einer Pulsfrontverkipfung um den Winkel $\phi/2$. Der Winkel ϕ besteht in der Interaktion zwischen der Elektronenflugrichtung und der Ausbreitungsrichtung des Lasers. Diesen Puls erhält man aus dem allgemeinen gaußschen Laserpuls (3.28) von Seite 35 indem man die Rayleighlänge gegen unendlich gehen lässt.

$$E_u(x, y, z, t) = E_0 e^{i\Omega_0 t} e^{-i\frac{\Omega_0}{c}z} e^{-x^2/w_0^2} e^{-y^2/w_{y,0}^2} e^{-\frac{[z - ct - x \tan(\phi/2)]^2}{c^2 \tau^2}}$$

Hierbei wurde schon die Fourierrücktransformation ausgeführt und die Pulsfrontverkipfung berücksichtigt.

Nun wird das Bezugssystem in ein auf das Elektron bezogenes per Drehung gewechselt. Wie in Abbildung 5.1 dargestellt, trägt dieses die Koordinaten (χ, ζ) und das Elektron bewegt sich in die ζ -Richtung.

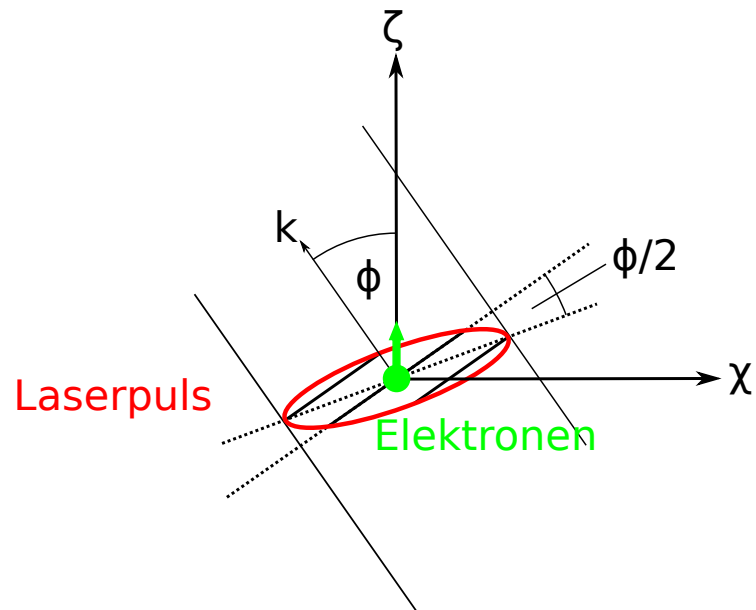


Abbildung 5.1: Zeigt das verwendete Koordinatensystem für die Berechnung der Elektronenbewegung im Laserfeld. Zwischen der Ausbreitungsrichtung des Lasers und des Elektrons gibt es einen Winkel ϕ . Die Laserpulsfront ist um einen Winkel $\phi/2$ verkippt.

$$\begin{aligned}
 E_u(\chi, y, \zeta, t) &= E_0 e^{i\Omega_0 t} e^{-i\frac{\Omega_0}{c}(\zeta \cos \phi - \chi \sin \phi)} e^{-\frac{(\chi \cos \phi + \zeta \sin \phi)^2}{w_0^2}} e^{-y^2/w_{y,0}^2} \\
 &\quad e^{-\frac{[\zeta \cos \phi - \chi \sin \phi - c t - (\chi \cos \phi + \zeta \sin \phi) \tan(\phi/2)]^2}{c^2 \tau^2}} \\
 &= e^{i\Omega_0 t} \alpha_u(\mathbf{r}, t) \\
 &= e^{i\Omega_0 t} |\alpha_u(\mathbf{r}, t)| e^{-i\Phi_u(\mathbf{r})}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dabei ist $\exp(i\Omega_0 t)$ die Oszillation des Feldes mit der Laserfrequenz Ω_0 und $\alpha_u(\mathbf{r}, t)$ die komplexe Einhüllende mit der Phase $\Phi_u = \frac{\Omega_0}{c}(\zeta \cos \phi - \chi \sin \phi)$. Vergleicht man dieses Feld mit dem eines magnetischen Undulators, so bestehen zwei Unterschiede. Zum einen nimmt das elektrische Feld des Lasers zum Zentrum zu, im Gegensatz zum magnetischen Feld, welches zu den Magneten hin zunimmt. Im magnetischen Undulator verursacht das eine Fokussierung des Elektronenstrahls aufgrund der ponderomotiven Kraft. Im Falle des Laserundulators werden die Elektronen aber auseinander gedrückt. Dieser Effekt kann innerhalb einer mehrdimensionalen Theorie genauer untersucht werden, geht aber über die Diplomarbeit hinaus. Der zweite Unterschied besteht in der Propagation der Elektronen quer zu den Phasenfronten des Lasers. Dies verursacht eine Überlagerung der Strahlung mehrerer Elektronen nicht in deren Ausbreitungsrichtung, sondern unter einem Winkel ϕ_{sc} dazu. Dies ist eine Folge der variierenden Undulatorfeldphase senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Elektronen. Deren Strahlung kann sich nur senkrecht zu den Ebenen gleicher Undulatorphase kohärent Überlagern, welche aber quer zur Ausbreitungsrichtung der Elektronen liegen. Der Ausgangswinkel ϕ_{sc} ist aber kleiner als ϕ aufgrund der Lorentzkontraktion der Wellenlänge des Lasers und Lorentzinvarianz der Phase.

Das Elektrische Feld kann man aus einem passenden Vektorpotential A_u mittels

$$E_u(\chi, y, \zeta, t) = -\frac{\partial}{\partial t} A_u(\chi, y, \zeta, t) \tag{5.2}$$

gewinnen¹. Unter der Voraussetzung, dass über eine Zeitdauer von einer Periode die Änderung von α_u klein gegenüber seinem Absolutwert ist,

$$\left| \frac{1}{\Omega_0} \frac{\dot{\alpha}_u}{\alpha_u} \right| \ll 1 \quad (\text{slowly-varying envelope approximation}),$$

findet man für das Potential

$$A_u(\chi, y, \zeta, t) = \frac{i}{\Omega_0} e^{i\Omega_0 t} |\alpha_u(\mathbf{r}, t)| e^{-i\Phi_u(\mathbf{r})} \tag{5.3}$$

¹Diese Gleichung ist in Coulomb-Eichung ($\nabla \mathbf{A} = 0$), mit dem skalaren Potential $\Phi = 0$, weil das Laserfeld als Strahlungsfeld angesehen wird und nicht durch Quellen und Ströme verursacht.

Die Beschränkung auf langsam veränderliche Einhüllende stellt bei TWTS kein Problem dar, da sehr lange Interaktionslängen über viele Wellenlängen gerade das Ziel sind.

Das Potential des Strahlungsfeldes hat die Form

$$A_r(\chi, y, \zeta, t) = i \frac{|\alpha_r(\mathbf{r}, t)|}{\Omega_r} e^{-i(\Phi_r(\mathbf{r}) - \Omega_r t)}, \quad (5.4)$$

mit der komplexen Einhüllenden $\alpha_r = |\alpha_r(\mathbf{r}, t)| \exp[-i\Phi_r(\mathbf{r})]$. Da hier die Bewegung eines einzelnen Elektrons und keines Kollektivs untersucht wird, gibt es keine signifikante Änderung der Strahlungsfeldamplitude. Diese wird daher als konstant angesehen (*small-signal gain regime*). Die Phase Φ_r ist

$$\Phi_r(\mathbf{r}) = \frac{\Omega_r}{c} (-\chi \sin \phi_{sc} + \zeta \cos \phi_{sc}),$$

mit dem Ausgangswinkel ϕ_{sc} der Strahlung.

Die Berechnung der Bewegung der Elektronen im kombinierten Feld von Laser und Strahlung beginnt bei der Hamiltonfunktion eines relativistischen Elektrons im Feld von Laser und Strahlung [35]

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sqrt{[\mathbf{p} - q(A_r + A_u) \mathbf{e}_y]^2 c^2 + m^2 c^4}$$

mit dem kanonischen Impuls \mathbf{p} und der Ladung q des Teilchens. Die Felder möglicher umgebender Elektronen wurden dabei vernachlässigt (skalares Potential $\Phi = 0$). Zunächst wird die zeitliche Änderung des kanonischen Impulses in y -Richtung berechnet.

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{q}{\gamma m} [p_y - q(A_r + A_u)] \frac{\partial A_u}{\partial y}$$

Dabei wurde $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = E = \gamma m c^2$ genutzt. Da der Elektronenpuls bei TWTS zu fester Zeit ungefähr die gleiche Amplitude des Lasers sehen soll, um Abstrahlung mit der selben Wellenlänge zu gewährleisten, muss der Laserdurchmesser groß gegen den Durchmesser des Elektronenpakets gewählt werden. Das heißt auch, dass die Änderung der Einhüllenden in y -Richtung über das Gebiet der Elektronenverteilung klein ist. Insgesamt gilt daher $\dot{p}_y \approx 0$. Der kanonische Impulse in y -Richtung ist also konstant und es folgt aus $p_y = \text{konst.} = \gamma m c \beta_y + q(A_r + A_u) \stackrel{!}{=} 0$

$$\beta_y = -\frac{q}{\gamma m c} (A_r + A_u). \quad (5.5)$$

Die Bedingung, dass p_y verschwindet, ergibt sich aus den Anfangsbedingungen $\beta_y = 0$ und $A_k = 0$ für $t \rightarrow -\infty$.

Für die Berechnung von β_χ aus

$$\dot{p}_\chi = -\frac{\partial H}{\partial \chi} = \frac{q}{\gamma m} [p_y - q(A_r + A_u)] \frac{\partial A_u}{\partial \chi}$$

wird in $\partial A_u / \partial \chi$ wieder die slowly-varying envelope approximation verwendet und nur Ableitungen der Phase berücksichtigt.

$$\begin{aligned} \dot{p}_\chi = \frac{q^2}{\gamma m} \left[\frac{\sin \phi}{c} \left(\frac{|\alpha_u|^2}{\Omega_0} \sin(\Phi_u - \Omega_0 t) \cos(\Phi_u - \Omega_0 t) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{|\alpha_r| |\alpha_u|}{\Omega_r} \sin(\Phi_r - \Omega_r t) \cos(\Phi_u - \Omega_0 t) \right) \right. \\ \left. + \frac{\sin \phi_{sc}}{c} \left(\frac{|\alpha_u| |\alpha_r|}{\Omega_0} \sin(\Phi_u - \Omega_0 t) \cos(\Phi_r - \Omega_r t) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{|\alpha_r|^2}{\Omega_r} \sin(\Phi_r - \Omega_r t) \cos(\Phi_r - \Omega_r t) \right) \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

Hierbei wurde mit den Realteilen der Felder gerechnet. Dieser Ausdruck muss nun zeitlich integriert werden. Am Beispiel der zweiten Zeile soll dies gezeigt werden. Nach Anwenden von $\sin x \cdot \cos y = (\sin(x - y) + \sin(x + y))/2$ auf die zweite Zeile erhält man für die zeitliche Integration des resultierenden ersten Terms

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int dt \frac{|\alpha_r| |\alpha_u|}{\gamma \Omega_r} \sin \left[\underbrace{(k_r \cos \phi_{sc} - k_u \cos \phi)}_{=: k_\zeta} \zeta - \underbrace{(k_r \sin \phi_{sc} - k_u \sin \phi)}_{=: k_\chi} \chi - (k_r - k_u) ct \right] \\ \approx \frac{1}{2} \frac{|\alpha_r| |\alpha_u|}{\gamma_0 \Omega_r} \int dt \sin \left[\underbrace{k_\zeta \zeta - k_\chi \chi - (k_r - k_u) ct}_{=: f(t)} \right] \end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt die Vernachlässigung der Zeitableitung der Einhüllenden bei partieller Integration genutzt wurde. Außerdem ist $k_r = \Omega_r/c$ und $k_u = \Omega_0/c$. Zur Berechnung des Integrals wird f für eine große Elektronenenergie γ und kleine Interaktionswinkel ϕ genähert. Das heißt, die gestreute Wellenlängen λ_{sc} ist deutlich kleiner als die Laserwellenlänge ($k_r \gg k_u$) und der Streuwinkel ϕ_{sc} ist wesentlich kleiner als eins.

$$\begin{aligned} f &= k_\zeta \dot{\zeta} - k_\chi \dot{\chi} - (k_r - k_u) c \\ &= \left(\frac{k_r \cos \phi_{sc} - k_u \cos \phi}{k_r - k_u} \cdot \frac{\dot{\zeta}}{c} - \frac{k_r \sin \phi_{sc} - k_u \sin \phi}{k_r - k_u} \cdot \frac{\dot{\chi}}{c} - 1 \right) \cdot (k_r - k_u) c \\ &\stackrel{k_u \ll k_r}{\approx} \left(+ \cos \phi_{sc} \frac{\dot{\zeta}}{c} - \sin \phi_{sc} \frac{\dot{\chi}}{c} - 1 \right) \cdot (k_r - k_u) c \\ &\stackrel{\phi_{sc} \ll 1,}{\approx} \stackrel{\dot{\zeta}/c \approx \beta_0}{\approx} (\beta_0 \cos \phi_{sc} - 1) \cdot (k_r - k_u) c \end{aligned}$$

Anwenden der Kettenregel und Ausnutzen der Näherung für \dot{f} führt auf

$$\begin{aligned} \int dt \sin[f(t)] &= \int \frac{df}{\dot{f}} \sin f \\ &= -\frac{\cos f}{\dot{f}} \\ &= -\frac{1}{(\beta_0 \cos \phi_{sc} - 1) \cdot (k_r - k_u) c} \cdot \cos[k_\zeta \zeta - k_\chi \chi - (k_r - k_u) ct] . \end{aligned}$$

Durch analoges Vorgehen bei den anderen Termen von Gleichung (5.6) ergibt sich somit

$$\begin{aligned} p_\chi &= -\frac{q^2}{2\gamma_0 mc^3} \left\{ \frac{|\alpha_u|^2 \sin \phi \cos[2\Phi_u - 2k_u ct]}{2k_u^2 \beta_0 \cos \phi - 1} + \frac{|\alpha_r|^2 \sin \phi_{sc} \cos[2\Phi_r - 2k_r ct]}{2k_r^2 \beta_0 \cos \phi_{sc} - 1} \right. \\ &\quad - \frac{|\alpha_u| |\alpha_r|}{\beta_0 \cos \phi_{sc} - 1} \left[\left(\frac{\sin \phi_{sc}}{k_u} - \frac{\sin \phi}{k_r} \right) \frac{\cos[k_\zeta \zeta - k_\chi \chi - (k_r - k_u) ct]}{k_r - k_u} \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{\sin \phi_{sc}}{k_u} + \frac{\sin \phi}{k_r} \right) \frac{\cos[k'_\zeta \zeta - k'_\chi \chi - (k_r + k_u) ct]}{k_r + k_u} \right] \right\} , \end{aligned} \quad (5.7)$$

mit den Wellenzahlen

$$k'_\zeta = k_r \cos \phi_{sc} + k_u \cos \phi , \quad k'_\chi = k_r \sin \phi_{sc} + k_u \sin \phi .$$

Physikalisch beschreiben die Wellenzahlen k'_ζ, k'_χ bzw. k_ζ, k_χ Oszillationsbewegungen der Elektronen im superponierten Feld von Laser und Strahlung.

In der Praxis wird die Intensität der erzeugten Strahlung wesentlich geringer als die des treibenden Lasers sein ($|\alpha_r| \ll |\alpha_u|$). Daher wird der zweite Term, welcher proportional zu $|\alpha_r|^2$ ist, im Folgenden nicht weiter berücksichtigt. Außerdem wird wieder genutzt, dass die gestreute Wellenlänge wesentlich kürzer ist als die des Lasers sowie der Interaktionswinkel und Streuwinkel klein sind. Daher können die Beiträge proportional zur Kombination von Laser- und Strahlungsfeld $|\alpha_u| |\alpha_r|$ ebenfalls gegenüber dem Laserfeldterm $|\alpha_u|^2$ vernachlässigt werden. Die Elektronenposition wird daher allein durch den ersten Teil approximiert.

$$\begin{aligned} p_\chi &\approx -\frac{q^2}{2\gamma_0 mc^3} \frac{|\alpha_u|^2 \sin \phi \cos[2\Phi_u - 2k_u ct]}{2k_u^2 \beta_0 \cos \phi - 1} \\ &= \frac{mc}{4\gamma_0} a_u^2 \sin \phi \frac{\cos[2\Phi_u - 2k_u ct]}{\beta_0 \cos \phi - 1} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Die Dimensionslose Größe $a = q |\alpha| / m k c^2$ stellt die normierte Amplitude der Felder dar. Wie bei der Thomsonstreuung bedeutet $a_u \approx 1$, dass die Elektronenbewegung

im Feld des Lasers anharmonisch wird und somit höhere Harmonische abgestrahlt werden. Schließlich ist

$$\beta_\chi = \frac{p_\chi}{\gamma mc} = \frac{a_u^2}{4\gamma\gamma_0} \sin \phi \frac{\cos[2\Phi_u - 2k_u ct]}{\beta_0 \cos \phi - 1} \quad (5.9)$$

Die Berechnung von β_ζ ist vereinfacht durch den Zusammenhang zwischen γ und β . Ausgehend von $\gamma^2 = 1/(1 - \beta^2)$ ist

$$\begin{aligned} \beta_\zeta &= \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2} - \beta_y^2 - \beta_\chi^2} \\ &\stackrel{\gamma \gg 1}{\approx} 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{1}{2}\beta_y^2 - \frac{1}{2}\beta_\chi^2. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von (5.9) und (5.5) folgt

$$\beta_\zeta = 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{1}{2} \left[\frac{q}{\gamma mc} (A_r + A_u) \right]^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{q^2}{2\gamma\gamma_0 m^2 c^4} \right]^2 \left\{ \dots \right\}^2.$$

Hier kann der letzte Term, welcher ungefähr proportional zu γ_0^4 ist, gegenüber dem Vorletzten vernachlässigt werden. Auflösen des mittleren Terms mit den reellen Feldern liefert

$$\begin{aligned} \beta_\zeta &= 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(a_u^2 + a_r^2 - a_u^2 \cos[2\Phi_u - 2k_u ct] - a_r^2 \cos[2\Phi_r - 2k_r ct] \right) \right. \\ &\quad \left. + a_u a_r \sin[\Phi_u - k_u ct] \sin[\Phi_r - k_r ct] \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Zunächst kann wieder der oszillierende Term proportional zu a_r^2 gegenüber a_u^2 vernachlässigt werden. An dieser Stelle kann man bereits erkennen welcher Term einen substantiellen Beitrag zum abgestrahlten Feld liefern wird. Da Abstrahlung einen Energieverlust und somit eine Verlangsamung der Elektronen bedeutet, wird es der Term sein, welcher sich über viele Undulatorperioden nicht oder nur kaum ändert. Ein solcher Anteil ist im Produktterm proportional zu a_u und a_r enthalten. Dieser kann in zwei unabhängige Oszillationen aufgespalten werden, welche jeweils eine Phase

$$\theta_- := k_\zeta \zeta - k_\chi \chi - (k_r - k_u) ct \quad \text{bzw.} \quad \theta_+ := k'_\zeta \zeta - k'_\chi \chi - (k_r + k_u) ct \quad (5.11)$$

haben. Kann von einem Elektron eine der beiden Phasen stationär gehalten werden, ändert sich die entsprechende Schwingungsamplitude nicht oder nur sehr langsam. Aus der Forderung einer unveränderlichen Phase ($\dot{\theta}_\mp = 0$) erhält man eine Bedingung an β_0 . Verwendet man zum Beispiel als Ansatz ein Elektron mit einer

Geschwindigkeit β_0 ($\zeta \approx c\beta_0 t$) welches den Laser im Zentrum $\chi \approx 0$ passiert, ergibt sich

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \frac{k_r \mp k_u}{k_r \left(1 - \frac{\phi_{sc}^2}{2}\right) \mp k_u \left(1 - \frac{\phi^2}{2}\right)} \\ &= \frac{k_r \mp k_u}{k_r \mp k_u \pm k_u \frac{\phi^2}{2} \mp k_r \frac{\phi_{sc}^2}{2}}\end{aligned}$$

Setzt man nun die bekannten Relationen $k_r \approx \gamma^2 \phi^2 k_u$ und $\phi_{sc} \approx 1/\gamma^2 \phi$ (s. [37]) in den letzten Term des Nenners ein, folgt

$$\beta_0 = \frac{k_r \mp k_u}{k_r \mp k_u \pm \frac{k_u}{2} \left(\phi^2 - \frac{1}{\gamma^2}\right)}. \quad (5.12)$$

Weil die abgestrahlte Wellenlänge aufgrund des relativistischen Dopplereffekts wesentlich kürzer ist als die des Lasers, gilt $\gamma^2 \phi^2 \gg 1$. Daher haben die Elektronen nur eine physikalisch mögliche Geschwindigkeit für die Oszillation mit der Phase θ_- . Denn sonst wäre $\beta_0 > 1$.

Nach Zusammenfassen aller konstanten und langsam oszillierenden Terme in (5.10) zu β_0 , bleibt

$$\beta_\zeta = \beta_0 + \frac{a_u^2}{2\gamma^2} \cos[2\Phi_u - 2k_u ct]. \quad (5.13)$$

An diesem Ergebnis erkennt man bereits, dass die Energie der Elektronen vor der Interaktion nicht unabhängig vom verwendeten Laser ist. Sie muss so gewählt werden, dass die Resonanzbedingung (5.12) erfüllt wird. Denn sonst oszillieren die Elektronen im Feld des Lasers, ohne dass im Mittel ein Energieübertrag ans Strahlungsfeld stattfindet. Dies wird nur erreicht wenn die Resonanzbedingung erfüllt ist und es somit eine langsam veränderliche Komponente in der Elektronenbewegung gibt, welche ein Merkmal für Energieübertrag ans Strahlungsfeld ist.

5.2 Energieabgabe der Elektronen ans Feld

Die nun bekannten Relationen für die Bewegung des Elektrons werden benötigt um den Energieverlust der Elektronen im Strahlungs- und Undulatorfeld zu berechnen. Das ist eine wichtige Größe, denn der Energieverlust der Elektronen entspricht auch dem Energiegewinn des Strahlungsfeldes. Aus der Lorentzkraft $\dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt} \gamma mc \boldsymbol{\beta} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ kann man eine allgemeine Gleichung für die Energieänderung eines Teilchens der Ladung q und Masse m in den elektromagnetischen Feldern \mathbf{E} und \mathbf{B} gewinnen.

$$\dot{\gamma} = \frac{q}{mc} \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}. \quad (5.14)$$

Weil im magnetischen Feld keine Arbeit verrichtet wird, liefert es keinen Beitrag zur Energieänderung. Für den hier vorliegenden Fall linear polarisierter Felder reduziert sich diese Gleichung auf

$$\dot{\gamma} = \frac{q}{mc} (E_r + E_u) \beta_y. \quad (5.15)$$

Einsetzen der Felder (5.3) und (5.4) mittels (5.2) und der Lösung für die Geschwindigkeit (5.5) ergibt

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} = -\frac{1}{\gamma} \Big\{ & a_u^2 k_u c \cdot \sin [\Phi_u - k_u ct] \cos [\Phi_u - k_u ct] \\ & + a_r a_u k_u c \cdot \cos [\Phi_u - k_u ct] \sin [\Phi_r - k_r ct] \\ & + a_r a_u k_r c \cdot \sin [\Phi_u - k_u ct] \cos [\Phi_r - k_r ct] \\ & + a_r^2 k_r c \cdot \sin [\Phi_r - k_r ct] \cos [\Phi_r - k_r ct] \Big\}. \end{aligned}$$

Aus den selben Gründen wie vorher wird der Term proportional zu a_r^2 gegenüber dem Term mit a_u^2 vernachlässigt. Außerdem, wird in den gemischten Strahlungs- und Undulatorfeldtermen wieder wegen des Dopplereffekts der Term proportional zu k_u gegenüber dem proportional zu k_r vernachlässigt. Die verbleibenden zwei Terme lassen sich wieder unterscheiden in einen mit schnell veränderlicher Phase ($\propto a_u^2$), welcher über die gesamte Interaktionsdauer oszilliert, und einen mit langsam veränderlicher bzw. stationärer Phase ($\propto a_r a_u k_r$). Stationär wird die Phase, wenn die Elektronen die Bedingung (5.12) erfüllen. In diesem Fall findet kein Austausch von Energie zwischen dem Strahlungsfeld und den Elektronen statt. Betrachtet man nur die langsame Oszillation, so werden die Elektronen, welche die Bedingung erfüllen, weder beschleunigt noch abgebremst. Sie befinden sich in Resonanz mit der ponderomotiven Welle. Diese hat die Phase θ_- (s. Gleichung (5.11)) und ist gerade dadurch ausgezeichnet, dass Elektronen die mit ihr in Phase sind, keinen Energie ans Strahlungsfeld übertragen.

Für eine hohe Ausbeute an Strahlung ist letztendlich nur ein über viele Undulatorperioden konstanter Energieübertrag der Elektronen interessant. Daher wird im Folgenden nur noch auf den dritten Term eingegangen (*resonance approximation*).

Zusammenfassend ist nun

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} = -\frac{1}{\gamma} a_r a_u k_r c \cdot \sin [k_u (-\chi \sin \phi_{sc} + \zeta \cos \phi_{sc}) - k_u ct] \times \\ \times \cos [k_r (-\chi \sin \phi + \zeta \cos \phi) - k_r ct]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

5.3 Die 1D-Bewegungsgleichungen des Elektrons

Ausgehend von Gleichung (5.16) werden nun die vollständigen Bewegungsgleichungen des Elektrons abgeleitet.

Die Unbekannten χ und ζ in Gleichung (5.16) können mit Hilfe der Gleichungen (5.9) und (5.13) ermittelt werden.

$$\begin{aligned}\chi &= \int c \, dt \, \beta_\chi \\ &\approx \frac{a_u^2}{4\gamma_0^2} \frac{\sin \phi}{(\beta_0 \cos \phi - 1)} \int c \, dt \, \cos [2k_u \beta_0 c t \cos \phi - 2k_u c t] \\ \chi &= \frac{a_u^2}{4\gamma_0^2} \frac{\sin \phi}{(\beta_0 \cos \phi - 1)^2} \frac{\sin [2k_u c (\beta_0 \cos \phi - 1) t]}{2k_u} \\ \zeta &= \int c \, dt \left(\beta_0 + \frac{a_u^2}{2\gamma^2} \cos [2\Phi_u - 2k_u c t] \right) \\ &\approx \beta_0 c t + \frac{a_u^2}{2\gamma_0^2} \int c \, dt \, \cos [2k_u c (\beta_0 c t \cos \phi - 1) t] \\ \zeta &= \beta_0 c t + \frac{a_u^2}{2\gamma_0^2} \frac{\sin [2k_u c (\beta_0 \cos \phi - 1) t]}{2k_u (\beta_0 \cos \phi - 1)}\end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Lösungen für χ und ζ in (5.16) und anwenden der Identität (s. [30])

$$e^{ia \sin b} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imb} J_m(a),$$

für die Bessel-Funktion $J_m(x)$, erhält man

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= -\frac{1}{\gamma} a_r a_u k_r c \cdot \frac{1}{4i} \left\{ e^{i\theta} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} e^{i(m-n)\nu} \left[J_{m-1}(k'_\zeta \rho) J_n(k'_\chi \sigma) - J_m(k_\zeta \rho) J_n(k_\chi \sigma) \right] - \right. \\ &\quad \left. - e^{-i\theta} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} e^{-i(m-n)\nu} \left[J_{m-1}(k'_\zeta \rho) J_n(k'_\chi \sigma) - J_m(k_\zeta \rho) J_n(k_\chi \sigma) \right] \right\}. \quad (5.17)\end{aligned}$$

Dabei wurden die folgenden Bezeichnungen benutzt:

$$\begin{aligned}\theta(t) &= k_\zeta \beta_0 c t - (k_r - k_u) c t, & \nu(t) &= 2k_u c (\beta_0 \cos \phi - 1) t, \\ \rho &= \frac{a_u^2}{4\gamma_0^2 k_u (\beta_0 \cos \phi - 1)}, & \sigma &= \frac{a_u^2 \sin \phi}{8\gamma_0^2 k_u (\beta_0 \cos \phi - 1)^2}.\end{aligned}$$

Gleichung (5.17) zeigt nun den Energieübertrag der Elektronen für alle emittierten Wellenlängen mit den Wellenzahlen $k = (1 - 2(m - n))k_r$. Der Beitrag jeder Mode wird durch die Bessel-Funktionen bestimmt. Die Größen ρ und σ stellen einen Ort

dar, an dem die Bessel-Funktion ausgewertet wird. Dieser lässt sich mit den bisher angenommenen Näherungen für kleine Interaktionswinkel ϕ und relativistische Elektronen (z. Bsp. $\phi = 6^\circ$ und $\gamma = 10$) abschätzen. Für eine normierte Laserintensität $a_u = 0.1$ erhält man in diesem Beispiel $k'_\zeta \rho = -0.01$, $k'_\chi \sigma = 3 \cdot 10^{-5}$, $k_\zeta \rho = 5 \cdot 10^{-4}$, und $k_\chi \sigma = 0$. Sie sind also alle nahe Null, und weil alle Bessel-Funktionen $J_l(x)$ mit $l \neq 0$ eine Nullstelle an $x = 0$ haben, ist für die Summe über n nur der nullte Summand relevant. Für m hingegen sind es die Ordnungen 0 und 1. Allerdings hat die Mode $m = 1$, $n = 0$ eine Phase $\theta + \nu = [\beta_0 k_r \cos \phi_{sc} + \beta_0 k_u \cos \phi - (k_r + k_u)] ct$. Bestimmt man damit die Resonanzgeschwindigkeit β_0 aus der Bedingung einer stationären Phase, $\frac{d}{dt}(\theta + \nu) = 0$, entspricht das gerade der “+” Variante in (5.12). Diese ist jedoch unphysikalisch, weil β_0 dann größer als eins ist. Daher reicht die Behandlung der Grundmode $m = 0$, $n = 0$.

Prinzipiell werden höhere Ordnungen hervorgerufen durch longitudinale und transversale Schwingungen der Elektronen bei höheren Frequenzen.

Eine Entwicklung von β_0 aus (5.13) in Bessel-Funktionen zeigt die longitudinalen Schwingungen:

$$\begin{aligned} \beta_0 = 1 - \frac{1}{2\gamma^2} & \left[1 + \frac{1}{2} (a_u^2 + a_r^2) - \right. \\ & - a_u a_r \frac{1}{4} \left\{ e^{i\theta} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} e^{i(m-n)b} [J_{m-1}(k'_\zeta \rho) J_n(k'_\chi \sigma) - J_m(k_\zeta \rho) J_n(k_\chi \sigma)] + \right. \\ & \left. \left. + e^{-i\theta} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} e^{-i(m-n)b} [J_{m-1}(k'_\zeta \rho) J_n(k'_\chi \sigma) - J_m(k_\zeta \rho) J_n(k_\chi \sigma)] \right\} \right]. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man für β_0 ebenfalls nur die Grundmode $m = n = 0$ und setzt den resultierenden Ausdruck in die Zeitableitung der Phase θ ein, erhält man die Bewegungsgleichung eines Elektrons im Feld von Laser und gestreuter Strahlung in der Travelling-Wave Thomsonstreuung:

$$\dot{\theta} = -(k_r - k_u)c + k_\zeta c \left\{ 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \left[1 + \frac{a_u^2}{2} + \frac{a_r^2}{2} - \frac{a_u a_r}{2} f_c \cos \theta \right] \right\}, \quad (5.18)$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{a_r a_u k_r c}{2\gamma} \cdot f_c \sin \theta, \quad (5.19)$$

$$f_c = J_{-1}(k'_\zeta \rho) J_0(k'_\chi \sigma) - J_0(k_\zeta \rho) J_0(k_\chi \sigma). \quad (5.20)$$

Die Phase θ entspricht dem Ort des Elektrons relativ zur ponderomotiven Welle. Der Energieübertrag oszilliert mit θ , d. h. abhängig von ihrer Position nehmen die Elektronen Energie auf oder geben sie ab. Da der Energiegewinn positiv ist wenn θ

negativ ist, werden die Elektronen immer zur ponderomotiven Welle hin beschleunigt. Daher pendeln die Elektronen um eine Ruhelage, welche die ponderomotive Welle ist.

Vergleicht man die hier abgeleiteten Bewegungsgleichungen mit denen eines Elektrons im magnetischen Undulator, so gibt es nur einen Unterschied im konstanten Faktor f_c . Im magnetischen Undulator ist $f_c = J_0(\kappa) - J_1(\kappa)$, mit $\kappa = a_u^2/2(1 + a_u^2)$. Dieser Unterschied wird durch Propagation der Elektronen quer zu den Phasenfronten des Lasers verursacht. Wichtig ist daher die Erkenntnis, dass die Propagation schräg zur Phase des Undulators keinen Unterschied in der qualitativen Beschreibung der Elektronendynamik verursacht, sondern die Struktur der Bewegungsgleichungen dieselbe ist.

Ein exponentielles Anwachsen der Strahlungsfeldamplitude, wie im klassischen FEL, könnte nur in einer selbstkonsistenten Lösung der Bewegungs- und Maxwell-Gleichungen für ein ganzes Kollektiv von Elektronen beobachtet werden. Bei dieser wird das Strahlungsfeld auch nicht mehr als konstant und klein gegenüber des Laserfeldes betrachtet, sondern mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen aus der Elektronenbewegung berechnet.

6

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit habe ich die zeitliche Entwicklung der elektrodynamischen Felder eines ultrakurzen, hochintensiven Laserpulses mit verkippter Pulsfront untersucht, wie er in der Travelling-Wave Thomsonstreuung auftritt.

Dazu wurde zum ersten Mal eine dreidimensionale, wellenoptische Beschreibung für die Feldverteilung an einem VLS-Gitter gebeugter Laserpulse entwickelt. Diese ist nicht beschränkt auf ein bestimmtes VLS-Gitter, sondern anwendbar auf Gitter mit beliebig variierendem Strichabstand. Damit ist es möglich, die durch Dispersion verursachten Veränderungen des Laserpulses zu identifizieren und zu charakterisieren.

Darauf aufbauend habe ich gezeigt, dass ein Laserpuls bei der Travelling-Wave Thomsonstreuung (TWTS) bei kleinen Interaktionswinkeln lokal, am Ort der Elektronen, als eine harmonische Welle mit gaußscher Einhüllenden beschreibbar ist. Als eine direkte Konsequenz dessen wird die Abstrahlung der Elektronen bei TWTS und geringen Laserintensitäten $a_0 \ll 1$ nahezu monochromatisch sein.

Die unter diesen Voraussetzungen abgeleiteten Bewegungsgleichungen eines Elektrons in den Feldern von Laser und gestreuter Strahlung haben bis auf veränderte Faktoren die selbe Form wie in einem magnetischen Undulator. Das zusammen mit der im Beispiel gezeigten Interaktionslänge von über 1500 Wellenlängen eröffnet prinzipiell die Möglichkeit eines kompakten, optischen SASE-Freie-Elektronen-Laser im Schema der Travelling-Wave Thomsonstreuung, dessen abgestrahlte Wellenlänge über den Interaktionswinkel ϕ einstellbar ist.

Diese Arbeit steht am Beginn weiterer Untersuchungen. Die Rückwirkung des Strahlungsfeldes auf den Elektronenpuls kann sowohl analytisch als auch in 3D-Simulationen studiert werden. Darüber hinaus müssen verbleibende Dispersionen höherer Ordnungen charakterisiert und Kompensationsmöglichkeiten gefunden werden, wie beispielsweise bei der Third-Order-Dispersion. Des Weiteren kann die Anordnung für bestimmte Kombinationen von Ein- und Ausfallwinkeln am Gitter in Verbindung mit der Propagationsdistanz vom Gitter optimiert werden um Dispersion

höherer Ordnung schon von vornherein zu vermeiden.

Travelling-Wave Thomsonstreuung hat nach den Ergebnissen dieser Arbeit das Potential zu einer kompakten und leistungsfähigen Strahlungsquelle, deren Stärke die Einstellbarkeit über den Interaktionswinkel ist. Der zu großen Synchrotrons vergleichbar winzige Platzbedarf und der damit verbundenen geringeren Kosten gibt die Möglichkeit zu einer bedeutenden Erweiterung der Forschungslandschaft mit Anwendungen im Bereich der Strukturanalyse, bei Pump-Probe Experimenten und bildgebenden Verfahren wie sie in den Materialwissenschaften und medizinischer Forschung eingesetzt werden.

Literaturverzeichnis

- [1] Yonath, A. E. Nobel Lecture — Hibernating Bears, Antibiotics and the Evolving Ribosome (2009). URL http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/chemistry/laureates/2009/.
- [2] Hasylab. Machine Parameters PETRA III (Design Values) (2012). URL http://hasylab.desy.de/facilities/petra_iii/machine/parameters/index_eng.html.
- [3] European Synchrotron Radiation Facility (ESRF). Parameters – ESRF (2012). URL <http://www.esrf.eu/Accelerators/Performance/Parameters>.
- [4] SLAC National Accelerator Laboratory, Menlo Park, CA. Lcls faq (2012). URL https://slacportal.slac.stanford.edu/sites/lclscore_public/Accelerator_Physics_Published_Documents/LCLS-parameters.pdf.
- [5] Japan Synchrotron Radiation Research Institute (JASRI). Accelerators – SPring-8 Web Site (2012). URL <http://www.spring8.or.jp/en/facilities/accelerators/>.
- [6] Clarke, J. A. *The Science and Technology of Undulators and Wigglers* (Oxford University Press, 2004). URL <http://www.oxfordscholarship.com/10.1093/acprof:oso/9780198508557.001.0001/acprof-9780198508557>.
- [7] Marquardt, H. *et al.* The effect of crystallite size and stress condition on the equation of state of nanocrystalline MgO. *Journal of Applied Physics* **110**, 113512 (2011). URL <http://link.aip.org/link/?JAP/110/113512/1>.
- [8] Beerlink, A. *et al.* X-ray propagation imaging of a lipid bilayer in solution. *Soft Matter* **8**, 4595–4601 (2012). URL <http://dx.doi.org/10.1039/C2SM00032F>.
- [9] Moeser, B. *et al.* Nuclear Inelastic Scattering and Mössbauer Spectroscopy as Local Probes for Ligand Binding Modes and Electronic Properties in Proteins: Vibrational Behavior of a Ferriheme Center inside a β -Barrel Protein. *Journal of the American Chemical Society* **134**, 4216–4228 (2012). URL <http://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/ja210067t>. <http://pubs.acs.org/doi/pdf/10.1021/ja210067t>.

- [10] Mak, A. N.-S., Bradley, P., Cernadas, R. A., Bogdanove, A. J. & Stoddard, B. L. The Crystal Structure of TAL Effector PthXo1 Bound to Its DNA Target. *Science* **335**, 716–719 (2012). URL <http://www.sciencemag.org/content/335/6069/716.abstract>. <http://www.sciencemag.org/content/335/6069/716.full.pdf>.
- [11] Cho, B. I. *et al.* Electronic Structure of Warm Dense Copper Studied by Ultrafast X-Ray Absorption Spectroscopy. *Phys. Rev. Lett.* **106**, 167601 (2011). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.167601>.
- [12] Zhang, Y. *et al.* Nodal superconducting-gap structure in ferropnictide superconductor $\text{BaFe}_2(\text{As}_{0.7}\text{P}_{0.3})_2$. *Nat Phys* **8**, 371–375 (2012). URL <http://dx.doi.org/10.1038/nphys2248>.
- [13] Esarey, E., Ride, S. K. & Sprangle, P. Nonlinear Thomson scattering of intense laser pulses from beams and plasmas. *Phys. Rev. E* **48**, 3003–3021 (1993). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.48.3003>.
- [14] Ride, S. K., Esarey, E. & Baine, M. Thomson scattering of intense lasers from electron beams at arbitrary interaction angles. *Phys. Rev. E* **52**, 5425–5442 (1995). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.52.5425>.
- [15] Schoenlein, R. W. *et al.* Femtosecond X-ray Pulses at 0.4 Å Generated by 90° Thomson Scattering: A Tool for Probing the Structural Dynamics of Materials. *Science* **274**, 236–238 (1996). URL <http://www.sciencemag.org/content/274/5285/236.abstract>. <http://www.sciencemag.org/content/274/5285/236.full.pdf>.
- [16] Chen, S.-y., Maksimchuk, A. & Umstadter, D. Experimental observation of relativistic nonlinear thomson scattering. *Nature* **396**, 653–655 (1998). URL <http://dx.doi.org/10.1038/25303>.
- [17] Sage, G. P. L. *et al.* RF photoinjector development for a short-pulse, hard x-ray Thomson scattering source. *AIP Conference Proceedings* **569**, 391–404 (2001). URL <http://link.aip.org/link/?APC/569/391/1>.
- [18] Janssen, D. *et al.* First operation of a superconducting RF-gun. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* **507**, 314 – 317 (2003). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900203009367>.
- [19] Tajima, T. & Dawson, J. M. Laser electron accelerator. *Phys. Rev. Lett.* **43**, 267–270 (1979). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.43.267>.

- [20] Faure, J. *et al.* A laser-plasma accelerator producing monoenergetic electron beams. *Nature* **431**, 541–544 (2004). URL <http://dx.doi.org/10.1038/nature02963>.
- [21] Geddes, C. G. R. *et al.* High-quality electron beams from a laser wakefield accelerator using plasma-channel guiding. *Nature* **431**, 538–541 (2004). URL <http://dx.doi.org/10.1038/nature02900>.
- [22] Mangles, S. P. D. *et al.* Monoenergetic beams of relativistic electrons from intense laser-plasma interactions. *Nature* **431**, 535–538 (2004). URL <http://dx.doi.org/10.1038/nature02939>.
- [23] Leemans, W. P. *et al.* GeV electron beams from a centimetre-scale accelerator. *Nature Physics* **2**, 696–699 (2006). URL <http://dx.doi.org/10.1038/nphys418>.
- [24] Esarey, E., Schroeder, C. B. & Leemans, W. P. Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators. *Rev. Mod. Phys.* **81**, 1229–1285 (2009). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.1229>.
- [25] Debus, A. *et al.* Traveling-wave Thomson scattering and optical undulators for high-yield EUV and X-ray sources. *Applied Physics B: Lasers and Optics* **100**, 61–76 (2010). URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00340-010-3990-1>.
- [26] Kostenbauder, A. Ray-pulse matrices: a rational treatment for dispersive optical systems. *IEEE Journal of Quantum Electronics* **26**, 1148–1157 (1990).
- [27] Weisstein, E. W. Green’s identities. URL <http://mathworld.wolfram.com/GreensIdentities.html>. From MathWorld—A Wolfram Web Resource.
- [28] Kirchhoff, G. & Hensel, K. *Vorlesungen über mathematische Optik*. Vorlesungen über mathematische Physik (B. G. Teubner, 1891). URL <http://books.google.de/books?id=SmQSAAAAIAAJ>.
- [29] Arfken, G. B. & Weber, H. J. *Mathematical Methods for Physicists* (Harcourt/Academic Press, 2001), fifth edn.
- [30] Abramowitz, M. & Stegun, I. A. *Pocketbook of mathematical functions* (Verlag Harri Deutsch - Thun - Frankfurt/Main, 1984).
- [31] Goodman, J. W. *Introduction to Fourier Optics* (Roberts & Company Publishers, 2005), third edn.

- [32] Rubinowicz, A. Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugungserscheinungen. *Annalen der Physik* **358**, 257–278 (1917). URL <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19173581202>.
- [33] Akturk, S., Gu, X., Gabolde, P. & Trebino, R. The general theory of first-order spatio-temporal distortions of gaussian pulses and beams. *Opt. Express* **13**, 8642–8661 (2005). URL <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-13-21-8642>.
- [34] Nakamura, K. & Particle Data Group. Review of particle physics. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **37**, 075021 (2010). URL <http://pdg.lbl.gov>. See Statistics Review in the Mathematical Tools section.
- [35] Jackson, J. D. *Classical Electrodynamics Third Edition* (Wiley, 1998), third edn. URL <http://www.worldcat.org/isbn/047130932X>.
- [36] Sprangle, P., Ting, A., Esarey, E. & Fisher, A. Tunable, short pulse hard x-rays from a compact laser synchrotron source. *J. Appl. Phys.* **72**, 5032 (1992). URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.352031>.
- [37] Debus, A. *Brilliant radiation sources by laser-plasma accelerators and optical undulators*. Ph.D. thesis, Technische Universität Dresden (2011).
- [38] Debus, A. persönliches gespräch (2012).
- [39] Weiner, A. M. *Ultrafast Optics* (John Wiley & Sons, Inc., 2009).
- [40] Rhee, J.-K., Sosnowski, T. S., Norris, T. B., Arns, J. A. & Colburn, W. S. Chirped-pulse amplification of 85-fs pulses at 250 khz with third-order dispersion compensation by use of holographic transmission gratings. *Opt. Lett.* **19**, 1550–1552 (1994). URL <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-19-19-1550>.
- [41] Martinez, O. E. Pulse Distortions in tilted pulse schemes for ultrashort pulses. *Optics Communications* **59**, 229–232 (1986).
- [42] Murphy, J. & Pellegrini, C. Introduction to the physics of the free electron laser. In Month, M. & Turner, S. (eds.) *Frontiers of Particle Beams*, vol. 296 of *Lecture Notes in Physics*, 163–219 (Springer Berlin / Heidelberg, 1988). URL <http://dx.doi.org/10.1007/BFb0031494>. 10.1007/BFb0031494.
- [43] Saldin, E. L., Schneidmiller, E. A. & Jurkov, M. V. *The physics of free electron lasers : an introduction* (DESY, Hamburg, 1994).
- [44] Reiche, S. *Numerical Studies for a Single Pass High Gain Free-Electron Laser*. Ph.D. thesis, Universität Hamburg, Hamburg (1999).

Danksagung

Es ist geschafft! Doch selbstverständlich wäre diese Arbeit in ihrer Form nicht ohne die Unterstützung von Kollegen und Freunden zustande gekommen.

Für die Möglichkeit zur Anfertigung der Diplomarbeit in diesem spannenden Forschungsgebiet möchte ich Professor Sauerbrey besonders danken.

Professor Schramm danke ich für die herzliche Aufnahme in die Arbeitsgruppe Laser-Teilchenbeschleunigung.

Ein ganz besonderer Dank geht auch an meinen Betreuer Michael Bussmann, der mit unerschöpflichem Einsatz immer für seine Studenten da ist und vieles als seine Pflicht ansieht, wovon längst nicht alles selbstverständlich ist. Darüber hinaus ist er wie ein guter Fahrlehrer, der immer das Wesentliche im Blick und noch eine Auge für die Sehenswürdigkeiten hat.

Viele Stunden habe ich mit Alexander Debus zugebracht, dem Erfinder des Themengebiets meiner Arbeit, einem passionierten und geduldigen Betreuer sowie unermüdlichen Korrekturleser. Du hattest immer eine Antwort auf meine Fragen und auch wenn ich an mir selbst gezweifelt habe, hast du noch Licht am Ende des Tunnels gesehen. Etwas Besseres hätte mir nicht passieren können! VIELEN DANK ALEX!

Ein großer Dank gilt auch meinen Mitbewohnern im Büro – Richard Pausch für die Hilfe bei den vielen kleinen Dingen, die irgendwie doch ewig dauern und fürs Gedanken sortieren und René Widera vor allem für die Parallelisierung des Codes (“Das muss noch schneller!” :-D). Ebenso haben beigetragen: Axel Hübl, Malte Zacharias, Omid Zarini, Leon Buikstra, Heiko Burau, Thomas Kluge, Anton Helm, Nils Stiller, Jurjen Couperus und Florian Kroll. Vielen Dank!

Mit dieser Arbeit endet nun leider auch mein Studium. Es war eine unglaubliche Zeit, in der ich viele Freunde gewonnen habe, welche diesen Abschnitt meines Lebens einzigartig und unvergesslich gemacht haben. Im Speziellen und stellvertretend für den gesamten Physikerstammtisch möchte ich Thomas Buchheim, Sebastian Molatta und Roland Wuchrer danken.

Sehr viel verdanke ich meinen Eltern Ulrich und Margot Steiniger, welche mich über mein gesamtes Studium hinweg unterstützten und zu keiner Zeit Einfluss auf meine Entwicklung nahmen.

Ein ganz besonderes Dankeschön geht an meine Freundin Gesine Richter, die mir in den letzten Wochen Vieles abgenommen hat und es immer wieder schafft mir mit kleinen Dingen ein Lächeln auf die Lippen zu zaubern. Ich liebe Dich! Zum Schluss möchte ich auch meinem Sohn Theodor danken, der in den letzten Wochen die Nächte so schön durchschlief und uns damit diese anstrengende Zeit sehr erleichterte.

Euch allen ein herzliches DANKESCHÖN!

Selbstständigkeitserklärung

Mit Abgabe dieser Diplomarbeit versichere ich, dass ich meine Arbeit selbständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Leistungen anderer nicht als meine eigenen ausgegeben habe.

Klaus Steiniger

Dresden, 28. November 2012