

Kosmologie und Astroteilchenphysik

2. Übung am 15.05.2015

Aufgabe 1

Wie groß sind Rotationsenergie und abgestrahlte Leistung eines Pulsars mit zweifacher Sonnenmasse und einem Radius von 8 km, wenn die Rotationsperiode von $\tau = 1,2$ ms jedes Jahr um $\Delta\tau = 10^{-5}\tau$ zunimmt? Die Sonnenmasse beträgt $M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg.

Aufgabe 2

- Berechnen Sie den Gravitationsdruck $p_G(R_0)$ beim Radius R_0 einer homogenen Kugel, wenn die Dichte ρ vom Kugelrand ($r = R_0$) aus exponentiell abfällt, sodass

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } r \leq R_0 \\ \rho_0 \cdot \exp[-(r - R_0)/a] & \text{für } r \geq R_0 \end{cases}$$

gilt.

- Wie groß ist der Gravitationsdruck auf der Sonnenoberfläche $p_G(R_0)$, wenn der Photosphärenrand $R_0 = 6,957 \cdot 10^5$ km, die Dichte dort $\rho(R_0) = 3 \cdot 10^{-5}$ kg/m³ und der Parameter $a = 100$ km beträgt?

Aufgabe 3

- Leiten Sie den Gravitationsdruck im Zentrum einer homogenen Kugel

$$p_G = \int_{p(r=0)}^{p(r=R)} dp = \frac{3}{8} \frac{G_N \cdot M^2}{\pi R^4} \quad (1)$$

her.

- Stellen Sie eine Zustandsgleichung für nicht-entartete Materie im Sterninneren auf, indem Sie die Materie in guter Näherung als ideales Gas ansehen und μm_H die mittlere Masse der Gasmoleküle ist, wobei μ für die mittlere Masse der Teilchen in Einheiten der Masse der H-Atome steht.
- Wie lautet die Zustandsgleichung für entartete Materie, wenn für die Fermi-Energie $E_F \geq k_B T$ gilt? Führen Sie dazu eine kritische Dichte ρ_c ein, bei welcher der mittlere Abstand der Protonen auf die Compton-Wellenlänge der Elektronen gesunken ist! Hinweis: Zur Vereinfachung soll hier die Fermi-Energie als

$$E_F \approx \frac{\hbar^2}{m_e d^2}$$

angenommen werden.

- Berechnen Sie die Chandrasekhar-Grenze $M_c = M(\rho_c)$, indem Sie den Gravitationsdruck

$$p_G = \frac{3}{8} \frac{M^2 \cdot G_N}{\pi R^4}$$

gleich dem Gasdruck aus der Zustandsgleichung für entartete Materie setzen. Nehmen Sie an, dass die mittlere Kernmasse $\mu m_p \approx 1,3m_p$ ist.

Aufgabe 4

- Berechnen Sie die kinetische Energie, die ein Stein mit $m = 1$ kg erreicht, wenn er aus einer Höhe von 1 m auf einen Neutronenstern fallen gelassen wird. Nehmen Sie dafür an, dass der Neutronenstern einen Radius von 10 km und die Masse der Sonne von $M_\odot = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg hat!
- Berechnen Sie diese Energie zum Vergleich für die Erde ($R_E = 6371$ km, $M_E = 5,974 \cdot 10^{24}$ kg), den Mond ($R_M = 1738$ km, $M_M = 7,349 \cdot 10^{22}$ kg) und die Sonne ($R_\odot = 6,957 \cdot 10^5$ km).

Aufgabe 5

Wie schnell kann ein Neutronenstern rotieren, bevor für ein Materieteilchen auf seinem Äquator die Zentrifugalkraft größer als die anziehende Gravitationskraft wird, wenn seine Masse $M = 2M_\odot$ mit $M_\odot = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg und sein Radius $R = 10^4$ m ist? Geben Sie die Kreisfrequenz, die Rotationsfrequenz und die Rotationsperiode an.