Kosmologie und Astroteilchenphysik

4. Übung am 26.06.2015

Aufgabe 1

Leiten Sie ausgehend von der Gravitationskraft nach Newton

$$F = G_{\mathrm{N}} \frac{Mm}{r^2} \tag{1}$$

die erste Friedmann-Gleichung ohne den Term mit der kosmologischen Konstante her:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi\, G_{\mathrm{N}}\, e}{3} - \frac{k}{R^2} \tag{2}$$

Aufgabe 2

Bei einer Behandlung im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie erhält man die Friedmann-Gleichungen als

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi\, G_{\mathrm{N}}\, e}{3} - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} \qquad \text{und} \tag{3}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi\, G_{\mathrm{N}}}{3}\,(e + 3p). \tag{4}$$

Leiten Sie daraus die Energieerhaltung der folgenden Form her:

$$\dot{e} = -3H(e + p) \tag{5}$$

Aufgabe 3

Als Ausgangspunkt sollen die aus der Vorlesung bekannten Darstellungen der Energiedichte

$$e = \frac{\pi^2}{30}\, T^4\, N(T) \tag{6}$$

und des thermodynamischen Drucks

$$p = \frac{\pi^2}{90}\, T^4\, N(T) \tag{7}$$

dienen. Verdeutlichen Sie, dass der Energieerhaltungssatz (5) die selbe Struktur wie der erste Hauptsatz der Thermodynamik hat. Zeigen Sie dafür,

1. dass $N(T)$ schwach von T abhängt, indem Sie die Entropiedichte sowohl über

$$s = \frac{e+p}{T} \quad \text{für } \mu = 0 \tag{8}$$

als auch über die aus der Thermodynamik bekannten Gleichung

$$s = \frac{\partial p(T,\mu)}{\partial T} \tag{9}$$

ausdrücken und die Ergebnisse vergleichen; und

2. dass $TR =$ konstant gilt, indem Sie sowohl die Gleichungen (6) und (7) in den Energieerhaltungssatz (5) einsetzen, als auch direkt die Gleichung (6) zeitlich ableiten, und die Ergebnisse gleichsetzen.

Aufgabe 4

1. Gehen Sie von folgenden Annahmen aus:
   - In der Strahlungsära gilt $e \gg \Lambda$.
   - Die thermischen Anregungen der leichten Teilchen dominieren.
   - Für die Frühphase ist $k = 0$ repräsentativ.

   Leiten Sie für diese strahlungsdominierte Phase (bei Vernachlässigung der Temperaturabhängigkeit von N nach Aufgabe 2 eine Beziehung zwischen dem Alter des Universums und seiner Temperatur her. Entwickeln Sie passend zu den Annahmen die erste Friedmann-Gleichung (3) und setzen Sie diese zusammen mit den Ausgangsgleichungen für Energiedichte (6) und Druck (7) aus Aufgabe 2 in die Energieerhaltungssatz (5) ein.

2. Wie groß war das Weltalter, als die Temperatur $1\,\text{MeV}$ betrug? Nutzen Sie die folgenden physikalischen Zusammenhänge:
   - Planck-Masse: $M_{\text{Pl}} = G_{\text{N}}^{-1/2} = 1{,}22 \cdot 10^{19}\,\text{GeV}$,
   - wichtiger kernphysikalischer Zusammenhang: $\hbar c = 0{,}197 \cdot 10^{-15}\,\text{GeV}\,\text{m}$ und
   - Lichtgeschwindigkeit: $c = 3 \cdot 10^{8}\,\text{m/s}$.