ART	Übung Allgemeine Relativitätstheorie Johannes Knaute johannes.knaute@t-online.de	1

Die folgenden Übungen entstammen überwiegend aus:

S. M. Carroll: *Spacetime and Geometry - An Introduction to General Relativity*, Addison Wesley (2004). (Man möge einfach danach suchen und findet auch ein pdf davon:-) Dieses ist neben dem in der Vorlesung verwendeten Buch

H. Stephani: *Relativity - An introduction to special and general relativity*, Cambridge University Press (2004) (oder die deutsche Version davon) eine ausgezeichnete Ergänzung zum Vorlesungsstoff und Standardwerk. (Mit noch weitreichenderem Stoff und einer modernen Darstellung. Zudem wird auf die mathematischen Grundlagen wesentlich sauberer eingegangen.) Alle Literaturangaben in diesen Übungen beziehen sich auf diese Bücher.

Die späteren Aufgaben können u.U. etwas umfangreicher werden. Wer aber ART lernen will, hat dabei Gelegenheit interessante Problemstellungen zu lösen und gleichzeitig schon einmal kleine Rechnungen in Maple/Mathematica etc. vorzunehmen. Vor allem für Tensorrechnungen ist das nützlich. Hilfreich kann es dann auch sein Fachliteratur, also Forschungsartikel, zu den einzelnen Themen zu Rate zu ziehen.

Wenn Interesse besteht, kann ich auch noch ein "Midterm Exam" und "Final Exam" mitgeben. Da kann man sich noch an weiteren Aufgaben ausprobieren:-)

Die englisch formulierten Aufgaben sind aus Carroll und die deutschen beziehen sich auf Stephani. Letztere sind teilweise als Vorlesungsergänzung oder Vertiefung gedacht und sind insb. auch zur Prüfungsvorbereitung geeignet.

Wer einen "Schein" bzw. Prüfungszulassung o.ä. brauch, sollte mindestens 12 der englisch formulierten Aufgaben aus mindestens 5 verschiedenen Übungen erledigen.

Spezielle Relativitätstheorie und Tensoren

`Reading: Carroll, Chapter 1`

Aufgabe 1

Imagine that space (not spacetime) is actually a finite box, or in more sophisticated terms, a three-torus, of size L. By this we mean that there is a coordinate system $x^\mu = (t, x, y, z)$ such that every point with coordinates (t, x, y, z) is identified with every point with coordinates $(t, x + L, y, z)$, $(t, x, y + L, z)$, and $(t, x, y, z + L)$. Note that the time coordinate is the same. Now consider two observers; observer A is at rest in this coordinate system (constant spatial coordinates), while observer B moves in the x-direction with constant velocity v. A and B begin at the same event, and while A remains still, B moves once around the universe and comes back to intersect the worldline of A without ever having to accelerate (since the universe is periodic). What are the relative proper times experienced in this interval by A and B? Is this consistent with your understanding of Lorentz invariance?

Aufgabe 2

Projection effects can trick you into thinking that an astrophysical object is moving "superluminally". Consider a quasar that ejects gas with speed v at an angle θ w.r.t. the line of sight of the observer. Projected onto the sky, the gas appears to travel perpendicular to the line of sight with angular speed v_{app}/D, where D is the distance to the quasar and v_{app} is the apparent speed. Derive an expression for v_{app} in terms of v and θ. Show that, for appropriate values of v and θ, v_{app} can be greater than 1.

Aufgabe 3

In Euclidean three-space, let p be the point with coordinates $(x, y, z) = (1, 0, -1)$. Consider the following curve that pass through p:

$$x^i(\lambda) = (\lambda, (\lambda - 1)^2, -\lambda). \tag{1}$$

(a) Calculate the components of the tangent vectors to this curve at p in the coordinate basis $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$.
(b) Let $f = x^2 + y^2 - yz$. Calculate $df/d\lambda$.

Aufgabe 4

Imagine we have a tensor $X^{\mu\nu}$ and a vector V^μ, with coordinates

$$X^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad V^\mu = (-1, 2, 0, -2). \tag{2}$$

Find the components of:
(a) $X^\mu{}_\nu$
(b) $X^{(\mu\nu)}$
(c) $X^\lambda{}_\lambda$
(d) $V_\mu X^{\mu\nu}$

Aufgabe 5

Beschreiben Sie, wie man aus dem metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ bzw. ds^2 den Winkel zwischen zwei (infinitesimalen) Vektoren in beliebigen Räumen bestimmen kann.

Aufgabe 6

Using the tensor transformation law applied to $F_{\mu\nu}$, show how the electric and magnetic field 3-vectors $\vec{E}$ and $\vec{B}$ transform under a
(a) rotation about the y-axis,
(b) boost along the z-axis.

Koordinatentrafos, Christoffel-Symbole und Geodätengleichung

`Reading: Carroll, Chapter 2`

Aufgabe 7

`Reading: Carroll, Chapter 2.3`

Verify the following claims made about the commutator of two vector fields: linearity, Leibniz rule, component formula, transformation as vector field.

Aufgabe 8

Prolate spheroidal coordinates can be used to simplify the Kepler problem in celestial mechanics. They are related to the usual cartesian coordinates (x, y, z) of Euclidean three-space by

$$x = \sinh\chi \sin\theta \cos\phi, \tag{3}$$
$$y = \sinh\chi \sin\theta \sin\phi, \tag{4}$$
$$z = \cosh\chi \cos\theta. \tag{5}$$

Restrict your attention to the plane $y = 0$ and answer the following questions.

(a) What is the coordinate transformation matrix $\partial x^\mu / \partial x^{\nu'}$ relating (x, z) to (χ, θ)?

(b) What does the line element ds^2 look like in prolate spheroidal coordinates?

`Reading: Carroll, Chapter 3`

Aufgabe 9

Überzeugen Sie sich von der Symmetrie der Christoffel-Symbole in den unteren Indizes (durch explizite Rechnung), d.h. $\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = \Gamma^\nu_{\beta\alpha}$. Wie viele freie Komponenten hat das Christoffel-Symbol in n Dimensionen? Wieso gilt folgende Symmetrisierung: $g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = \frac{1}{2}(g_{\alpha\gamma,\beta} + g_{\beta\gamma,\alpha})\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$?

Aufgabe 10

Imagine we have a diagonal metric $g_{\mu\nu}$. Show that the Christoffel symbols are given by

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0 \tag{6}$$
$$\Gamma^\lambda_{\mu\mu} = -\frac{1}{2}(g_{\lambda\lambda})^{-1}\partial_\lambda g_{\mu\mu} \tag{7}$$
$$\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} = \partial_\mu \left(\ln\sqrt{|g_{\lambda\lambda}|}\right) \tag{8}$$
$$\Gamma^\lambda_{\lambda\lambda} = \partial_\lambda \left(\ln\sqrt{|g_{\lambda\lambda}|}\right). \tag{9}$$

In these expressions, $\mu \neq \nu \neq \lambda$, and repeated indices are *not* summed over.

Aufgabe 11

Berechnen Sie die Christoffel-Symbole einer Kugelfläche mit Metrik $ds^2 = r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$

($r = \text{const}$). Stellen Sie dazu die Euler-Lagrange Gleichungen für eine sinnvolle Lagrangefunktion auf und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Geodätengleichung. Daraus können die Christoffel-Symbole abgelesen werden. Kontrollieren Sie das Ergebnis mit den Definitionsgleichungen der Symbole. Zeigen Sie, dass es sich bei den Lösungen der Geodätengleichung um Großkreise handelt.

Aufgabe 12
Gewinnen Sie die Geodätengleichung durch Extremisierung einer Wirkung.

Aufgabe 13
Beweise folgende nützliche Formeln:

$$g_{ij,k} = g_{im}\Gamma^m_{jk} + g_{jm}\Gamma^m_{ik} \tag{10}$$

$$g \equiv \det(g_{ij}) \quad \Rightarrow \quad \left(\ln\sqrt{-g}\right)_{,i} = \Gamma^j_{ij} \tag{11}$$

ART	Übung Allgemeine Relativitätstheorie Johannes Knaute johannes.knaute@t-online.de	3

Krümmung und Tensoren

`Reading: Carroll, Chapter 3; Stephani, Kapitel 3-6`

Aufgabe 14
Consider a 2-sphere with coordinates (θ, ϕ) and metric

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2. \tag{12}$$

(a) Show that lines of constant longitude ($\phi = \text{const}$) are geodesics, and that the only line of constant latitude ($\theta = \text{const}$) that is a geodesic is the equator ($\theta = \pi/2$).

(b) Take a vector with components $V^\mu = (1, 0)$ and parallel-transport it once around a circle of constant latitude. What are the components of the resulting vector, as a function of θ?

Aufgabe 15
You are familiar with the operations of gradient ($\vec{\nabla}\phi$), divergence ($\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$) and curl ($\vec{\nabla}\times\vec{V}$) in ordinary vector analysis in three-dimensional Euclidean space. Using covariant derivatives, derive formulae for these operations in spherical polar coordinates $\{r, \theta, \phi\}$ defined by

$$x = r\sin\theta\cos\phi \tag{13}$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi \tag{14}$$
$$z = r\cos\theta \tag{15}$$

Compare your results to those in Jackson (1999) or an equivalent text. Are they identical? Should they be?

Aufgabe 16
Finde eine allgemeine Formel für die Anzahl der freien Komponenten des Krümmungstensors in N Dimensionen. Was ergibt sich speziell für $N = 1, 2, 3, 4$?

Aufgabe 17
Welche allgemeine Struktur hat der Krümmungstensor für eine Kugeloberfläche und Zylinder?

Aufgabe 18
Gewinne den Krümmungstensor aus der Parallelverschiebung eines Verktors entlang der Seiten eines infinitesimalen Parallelogramms. (Man spricht von Fernparallelismus, wenn das Ergebnis wegunabhängig ist, genau dann wenn der so definierte Krümmungstensor verschwindet.)

Aufgabe 19
Beschreibe, wie man ein lokal ebenes (geodätisches) Koordinatensystem einführen kann.

Aufgabe 20
Was sind Tensordichten und Pseudotensoren? Wie transformiert sich speziell das Levi-Civita-Symbol?

Aufgabe 21
Gewinne (geschickt) die kovariante Ableitung eines kovarianten Vektors $B_{\mu;\nu}$ aus der Definition der kovarianten Ableitung eines kontravarianten Vektors $B^{\mu}{}_{;\nu}$.

ART	Übung Allgemeine Relativitätstheorie Johannes Knaute johannes.knaute@t-online.de	4

Schwarzschild-Lösung

`Reading: Carroll, Chapter 5; Stephani, Kapitel 10`

Aufgabe 22

Berechne die Schwarzschild-Lösung. Vollziehe dazu die Rechnungen in Stephani, Kapitel 10.1 und 10.2 nach. Das ist sehr aufwendig aber wenigstens einmal im Leben sollte man das von Hand gemacht haben:-) Man kann dabei das Vorgehen, angefangen mit einer Metrik und das Aufstellen der Einsteinschen Feldgleichungen für diesen einfachsten Fall gut nachvollziehen.

Aufgabe 23

Consider a particle (not necessarily on a geodesic) that has fallen inside the event horizon, $r < 2GM$. Use the ordinary Schwarzschild coordinates (t, r, θ, ϕ). Show that the radial coordinate must decrease at a minimum rate given by

$$\left|\frac{dr}{d\tau}\right| \geq \sqrt{\frac{2GM}{r} - 1}. \qquad (16)$$

Calculate the maximum lifetime for a particle along a trajectory from $r = 2GM$ to $r = 0$. Express this in seconds for a black hole with mass measured in solar masses. Show that this maximum proper time is achieved by falling freely with $E \to 0$.

Aufgabe 24

Consider a comoving observer sitting at constant spatial coordinates (r_*, θ_*, ϕ_*), around a Schwarzschild black hole of mass M. The observer drops a beacon into the black hole (straight down, along a radial trajectory). The beacon emits radiation at a constant wavelength λ_{em} (in the beacon rest frame).

(a) Calculate the coordinate speed dr/dt of the beacon, as a function of r.

(b) Calculate the proper speed of the beacon. That is, imagine there is a comoving observer at fixed r, with a locally inertial coordinate system st up as the beacon passes by, and calculate the speed as measured by the comoving observer. What is it at $r = 2GM$?

(c) Calculate the time t_{obs}, measured by the observer at r_*, as a function of the radius r_{em} at which the radiation was emitted.

(d) Calculate the time t_{obs} at which a beam emitted by the beacon at radius r_{em} will be observed at r_*.

(e) Show that at late times, the redshift grows exponentially: $\lambda_{obs}/\lambda em \sim e^{t_{obs}/T}$. Give an expression for the time constant T in terms of the black hole mass$M$.

Aufgabe 25

Studieren Sie experimentelle Test bzw. physikalische Auswirkungen der Schwarzschildmetrik: Planetenbewegung und Periheldrehung, Lichtablenkung an der Sonne, Rotverschiebung, Laufzeitverzögerung

ART	Übung Allgemeine Relativitätstheorie Johannes Knaute johannes.knaute@t-online.de	5

Physik in gekrümmten Räumen und TOV-Gleichungen

`Reading: Carroll, Chapter 5; Stephani, Kapitel 8 & 11`

Aufgabe 26

Consider a perfect fluid in a static circularly symmetric $(2+1)$-dimensional spacetime, equivalently, a cylindrical configuration in $(3+1)$ dimensions with perfect rotational symmetry.

(a) Derive the analogue of the Tolman-Oppenheimer-Volkov (TOV) equation for $(2+1)$ dimensions.

(b) Show that the vacuum solution can be written as

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{1}{1-8GM}dr^2 + r^2 d\theta^2. \tag{17}$$

Here M is aconstant.

(c) Show that anothe way to write the same solution is

$$ds^2 = -d\tau^2 + d\xi^2 + \xi^2 d\phi^2, \tag{18}$$

where $\phi \in [0, 2\pi(1-8GM)^{1/2}]$.

(d) Solve the $(2+1)$ TOV equation for a constant density star. Find $p(r)$ and solve for the metric.

(e) Solve the $(2+1)$ TOV equation for a star with equation of state $p = \kappa\rho^{3/2}$. Find $p(r)$ and solve for the metric.

(f) Find the mass $M(R) = \int_0^{2\pi}\int_0^R \rho dr d\theta$ and the proper mass $\bar{M} = \int_0^{2\pi}\int_0^R \rho\sqrt{-g} dr d\theta$ for the solutions in parts (d) and (e).

BEMERKUNG: Wenn man sich einen sinnvollen Metrikansatz überlegt hat, lohnt es sich hier ein Computeralgebrasystem (z.B. MAPLE) zum aufstellen des Einsteintensors zu verwenden. (e) und (f) sind für eine polytrope Zustandsgleichung nur schwer analytisch zu lösen. Man kann diese aber numerisch lösen. Ein Plot mit einer (einigermaßen) typischen Lösung genügt dann.

Aufgabe 27

Wie sehen die Maxwell-Gleichungen in gekrümmten Räumen aus? Zeigen Sie, dass sich Lichtstrahlen entlang Nullgeodäten bewegen (geometrische Optik).

Aufgabe 28

Stellen Sie die Einsteinschen Feldgleichungen durch Extremierung der Hilbertwirkung auf.

Aufgabe 29

Wie sieht der Energie-Impuls Tensor für einen Massenpunkt aus? Zeigen Sie anhand der Energieerhaltung, dass sich die Materie entlang einer Geodäten bewegt.

ART	Übung Allgemeine Relativitätstheorie Johannes Knaute johannes.knaute@t-online.de	6

Rotierende Kerr Schwarze Löcher

`Reading: Carroll, Chapter 6`

Aufgabe 30

Consider the orbits of massless particles, with affine parameter λ, in the equatorial plane of a Kerr black hole.

(a) Show that

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = \frac{\Sigma^2}{\rho^4}\left[E - LW_+(r)\right]\left[E - LW_-(r)\right], \tag{19}$$

where $\Sigma^2 = (r^2+a^2)^2 - a^2\Delta(r)\sin^2\theta$, E and L are the conserved energy and angular momentum, and you have to find expressions for $W_\pm(r)$.

(b) Using this result, and assuming that $\Sigma^2 > 0$ everywhere, show that the orbit of a photon in the equatorial plane cannot have a turning point inside the outer event horizon r_+. This means that ingoing light rays cannot escape once they cross r_+, so it really is an event horizon.

Aufgabe 31

Consider a Kerr black hole with an accretion disk of negligible mass in the equatorial plane. Assume that particles in the disk follow geodesics (that is, ignore any pressure support). Now suppose that the disk contains some iron atoms that are being excited by a source of radiation. When the iron atoms de-excite they emit radiation with a known frequency ν_0 (which in practice is in the x-ray regime), as measured in their rest frame. Suppose we detect this radiation far from the black hole (and assume that we also lie in the equatorial plane). What is the observed frequency of photons emitted from either edge of the disk, and from the center of the disk? Consider cases where the disk and the black hole are rotating in the same and in the opposite directions. Can we use these measurements to determine the mass and angular momentum of the black hole?

BEMERKUNG: Man malt sich am besten erst einmal auf was gemeint ist, um die Situation in dieser ausschweifenden Aufgabe besser zu verstehen.

ART	Übung Allgemeine Relativitätstheorie Johannes Knaute johannes.knaute@t-online.de	7

Gravitationswellen

```
Reading: Carroll, Chapter 7; Stephani, Kapitel 15;
         arXiv:gr-qc/0501041; arXiv:0709.4682
```

<u>Aufgabe 32</u>
Consider the metric

$$ds^2 = -(dudv + dvdu) + a^2(u)dx^2 + b^2(u)dy^2, \tag{20}$$

where a and b are unspecified functions of u. For appropriate functions a and b, this represents an *exact* gravitational plane wave.

(a) Calculate the Christoffel symbols and Riemann tensor for this metric.
(b) Use Einstein's equation in vacuum to derive equations obeyed by $a(u)$ and $b(u)$.
(c) Show that an exact solution can be found, in which both a and b are determined in terms of an *arbitrary* function $f(u)$.

BEMERKUNG: Auch hier kann die Verwendung eines Computeralgebrasystems viel Arbeit ersparen.

<u>Aufgabe 33</u>
Two objects of mass M have a head-on collision at event $(0, 0, 0, 0)$. In the distant past, $t \to -\infty$, the masses started at $x \to \pm\infty$ with zero velocity.

(a) Using Newtonian theory, show that $x(t) = \pm(9Mt^2/8)^{1/3}$.
(b) For what separations is the Newtonian approximation reasonable?
(c) Calculate $h^{TT}_{xx}(t)$ at $(x, y, z) = (0, R, 0)$.

Kosmologie

`Reading: Carroll, Chapter 8; Stephani, Kapitel 25-26`

Aufgabe 34 (angular diameter distance - redshift relation)
In a flat spacetime, objects of a fixed physical size subtend smaller and smaller angles as they are further and further away; in an expanding universe this is not necessarily so. Consider the angular size $\theta(z)$ of an object of physical size L at redshift z. In a matter-dominated flat universe, at which redshift is $\theta(z)/L$ a minimum? If all galaxies are at least 10 kpc across (and always have been), what is the minimum angular size of a galaxy in such a universe? Express your result both in terms of H_0, and plugging in $H_0 \approx 70\,\mathrm{km/s/Mpc}$.

Aufgabe 35
Suppose that the universe started out in a state of equipartition at the Planck time (so that the energy density in matter and radiation are of order the Planck density, and the temporal and spatial curvature radii are of order the Planck length). Neglecting any spatial inhomogeneity, calculate how long a positively curved universe will last, and how old a negatively curved universe would be when the temperature reaches 3 K. How old would a flat universe be by the time the expansion rate slows to $H_0 = 70\,\mathrm{km\,s^{-1}Mpc^{-1}}$?