

# Kosmologie und Astroteilchenphysik

## 2. Übung am 03.05.2017

### Aufgabe 1

Wie groß sind Rotationsenergie und abgestrahlte Leistung eines Pulsars mit zweifacher Sonnenmasse und einem Radius von 8 km, wenn die Rotationsperiode von  $\tau = 1,2$  ms jedes Jahr um  $\Delta\tau = 10^{-5}\tau$  zunimmt? Die Sonnenmasse beträgt  $M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30}$  kg.

### Aufgabe 2

- Berechnen Sie den Gravitationsdruck  $p_G(R_0)$  beim Radius  $R_0$  einer homogenen Kugel, wenn die Dichte  $\rho$  vom Kugelrand ( $r = R_0$ ) aus exponentiell abfällt, sodass

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } r \leq R_0 \\ \rho_0 \cdot \exp[-(r - R_0)/a] & \text{für } r \geq R_0 \end{cases}$$

gilt.

- Wie groß ist der Gravitationsdruck auf der Sonnenoberfläche  $p_G(R_0)$ , wenn der Photosphärenrand  $R_0 = 6,957 \cdot 10^5$  km, die Dichte dort  $\rho(R_0) = 3 \cdot 10^{-5}$  kg/m<sup>3</sup> und der Parameter  $a = 100$  km beträgt?

### Aufgabe 3

- Leiten Sie den Gravitationsdruck im Zentrum einer homogenen Kugel

$$p_G = \int_{p(r=0)}^{p(r=R)} dp = \frac{3}{8} \frac{G_N \cdot M^2}{\pi R^4} \quad (1)$$

her.

- Stellen Sie eine Zustandgleichung für nicht-entartete Materie im Sterninneren auf, indem Sie die Materie in guter Näherung als ideales Gas ansehen und  $\mu m_H$  die mittlere Masse der Gasmoleküle ist, wobei  $\mu$  für die mittlere Masse der Teilchen in Einheiten der Masse der H-Atome steht.
- Wie lautet die Zustandgleichung für entartete Materie, wenn für die Fermi-Energie  $E_F \geq k_B T$  gilt? Führen Sie dazu eine kritische Dichte  $\rho_c$  ein, bei welcher der mittlere Abstand der Protonen auf die Compton-Wellenlänge der Elektronen gesunken ist! Hinweis: Zur Vereinfachung soll hier die Fermi-Energie als

$$E_F \approx \frac{\hbar^2}{m_e d^2}$$

angenommen werden.

- Berechnen Sie die Chandrasekhar-Grenze  $M_c = M(\rho_c)$ , indem Sie den Gravitationsdruck

$$p_G = \frac{3}{8} \frac{M^2 \cdot G_N}{\pi R^4}$$

gleich dem Gasdruck aus der Zustandsgleichung für entartete Materie setzen. Nehmen Sie an, dass die mittlere Kernmasse  $\mu m_p \approx 1,3m_p$  ist.

## Aufgabe 4

- Berechnen Sie die kinetische Energie, die ein Stein mit  $m = 1$  kg erreicht, wenn er aus einer Höhe von 1 m auf einen Neutronenstern fallen gelassen wird. Nehmen Sie dafür an, dass der Neutronenstern einen Radius von 10 km und die Masse der Sonne von  $M_\odot = 1,989 \cdot 10^{30}$  kg hat!
- Berechnen Sie diese Energie zum Vergleich für die Erde ( $R_E = 6371$  km,  $M_E = 5,974 \cdot 10^{24}$  kg), den Mond ( $R_M = 1738$  km,  $M_M = 7,349 \cdot 10^{22}$  kg) und die Sonne ( $R_\odot = 6,957 \cdot 10^5$  km).

## Aufgabe 5

Wie schnell kann ein Neutronenstern rotieren, bevor für ein Materieteilchen auf seinem Äquator die Zentrifugalkraft größer als die anziehende Gravitationskraft wird, wenn seine Masse  $M = 2M_\odot$  mit  $M_\odot = 1,989 \cdot 10^{30}$  kg und sein Radius  $R = 10^4$  m ist? Geben Sie die Kreisfrequenz, die Rotationsfrequenz und die Rotationsperiode an.