

# Beschreibung von Vektormesonen mit Methoden der AdS/CFT-Korrespondenz

Diplomarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades Diplom-Physiker

> vorgelegt von: Uwe Hernandez Acosta

geboren am: 4. Juli 1988 in Merseburg

Institut für Theoretische Physik Fachrichtung Physik Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften der Technischen Universität Dresden

2015

Eingereicht am: 31. März 2015

- 1. Gutachter: Prof. Dr. Burkhard Kämpfer
- 2. Gutachter: Prof. Dr. Dominik Stöckinger

### Kurzdarstellung

Es werden die Spektralfunktionen von Vektormesonen bei endlichen Temperaturen mit Hilfe holographischer Methoden bestimmt und untersucht. Dazu werden Vektorfelder auf einem fünfdimensionalen Anti-de Sitter-Raum mit einem schwarzem Loch betrachtet und deren Wirkung durch das Einbringen eines Dilatons erweitert, wobei diese Erweiterung durch eine konforme Deformation der Metrik geschieht. Für das Profil des Dilatons werden dabei zwei verschiedene ad hoc Ansätze diskutiert, welche der Literatur entnommen sind. Es werden dabei einerseits die Ergebnisse von Colangelo et al. für die Verwendung eines quadratischen Dilatons reproduziert, als auch die Prozedur auf das Dilatonprofil nach Huang und Li angewendet. Durch die Überführung der dabei vorkommenden Bewegungsgleichungen des Vektorfelds im fünfdimensionalen Raum in die Form einer Schrödinger-Gleichung werden ferner Aussagen über das Energiespektrum und das Verhalten der Spektralfunktion gewonnen.

#### Abstract

We study the spectral functions of vector mesons in a medium of finite temperature by means of holographic methods. Thereto we use a vector field defined on a five-dimensional anti-de Sitter-space expand by a black hole, whereby the action of the vector field is enhanced by a dilaton, which is introduced via a conformal deformation of the metric. We study two different shapes of the dilaton, which are obtained from literature. On the one hand we reproduce the results from Colangelo et al., who used a quadratic dilaton and on the other hand we apply the procedure to a dilaton shape from Huang and Li. Furthermore we transform the equations of motion of the vector fields into Schrödinger's equations to evaluate the behaviour of the energy spectrum.

## Inhaltsverzeichnis

1 Einleit	tung		1
2 Grund	llagen		4
2.1	Vekto	rmesonen	4
	2.1.1	Lagrange-Dichte der QCD	4
	2.1.2	Elektromagnetische Wechselwirkung in der QCD	5
	2.1.3	Chirale Symmetrie der QCD	6
	2.1.4	$\rho$ - und $\omega$ -artige Vektormesonen $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	9
2.2	AdS/0	CFT-Korrespondenz	11
	2.2.1	Geometrie des Anti-de Sitter-Raumes	11
	2.2.2	Konforme Feldtheorie	14
	2.2.3	Die Maldacena-Vermutung	15
2.3	Holog	raphische Modelle für Vektormesonen	19
	2.3.1	Grundlegendes Modell	19
	2.3.2	Gebundene Zustände	21
	2.3.3	Hardwall-Modell	23
	2.3.4	Softwall-Modell	24
	2.3.5	Spektralfunktion mit AdS/CFT	26
	2.3.6	Vektormesonen bei endlichen Temperaturen	28
3 Spekt	ralfunkt	ionen	32
3.1	Grund	llagen und Definitionen	32
	3.1.1	Die untersuchten Modelle	32
	3.1.2	Formulierung des Problems	34
3.2	Spekt	ralfunktion im KKSS-Ansatz	38
	3.2.1	Numerische Bestimmung der Spektralfunktion	38

		3.2.2	Analyse der Spektralfunktion	42
	3.3	Spektr	alfunktion im Huang-Ansatz	46
		3.3.1	Numerische Bestimmung der Spektralfunktion	46
		3.3.2	Analyse der Spektralfunktion	49
4 A	Analys	e der So	chrödinger-Form	52
	4.1	Allgem	neine Betrachtung	52
	4.2	Der Sp	pezialfall $T = 0$	55
	4.3	Schröd	inger-Form im KKSS-Ansatz	62
		4.3.1	Das exakte Schrödinger-Potential	62
		4.3.2	Näherung für kleine Temperaturen	67
	4.4	Schröd	linger-Form im Huang-Ansatz	70
		4.4.1	Das exakte Schrödinger-Potential	70
		4.4.2	Näherung für kleine Temperaturen	75
5 Z	lusam	menfass	sung und Ausblick	77
An	hang	5		79
А	Vekt	orfelder	auf Riemann-Räumen	81
	A.1	Skalarf	felder auf Riemann-Räumen	81
	A.2	Beweg	ungsgleichungen	82
	A.3	On-she	ell-Wirkungen	87
В	Vekt	orfelder	im AdS-BH ohne Dilaton	91
С	Begr	iffe der	allgemeinen Relativitätstheorie	94
	C.1	Grund	legende Definitionen	94
	C.2	Christe	offel-Symbole diagonaler Metriken	95
	C.3	Ricci-7	Tensor diagonaler Metriken	96
D	Math	nematisc	che Werkzeuge	99
	D.1	Bessels	sche Differentialgleichung	99
	D.2	Assozii	ierte Laguerre-Polynome	102
	D.3	Regge-	Wheeler-Koordinaten	104
Lite	eratur	verzeich	nnis	107

## 1 Einleitung

Die grundlegende Motivation der Physik ist es, physikalische Phänomene durch ein System an Gleichungen, also durch eine Theorie, so zu modellieren, dass aus möglichst wenigen gemessenen Parametern, möglichst viele weitere Messgrößen bestimmt werden können. Experimentell stellt sich dabei heraus, dass sich alle bekannten physikalischen Phänomene auf vier fundamentale Wechselwirkungen zurückführen lassen: die Gravitation, die elektromagnetische, die starke und die schwache Wechselwirkung.

Eine der am genausten vermessenen Theorien ist dabei das Standardmodell der Teilchenphysik, welches die starke und die elektroschwache Wechselwirkung zusammenfassend beschreibt. Letztere Wechselwirkung lässt sich dabei durch einen Mechanismus der Symmetriebrechung in die elektromagnetische und in die schwache Wechselwirkung aufteilen. Die starke Wechselwirkung wird im Standardmodell der Teilchenphysik beschrieben durch die Quantenchromodynamik (QCD), welche die Dynamik von Quarks und Gluonen charakterisiert. Dabei nimmt die QCD in diesem Zusammenhang insofern eine Sonderstellung im Standardmodell der Teilchenphysik ein, als Quarks und Gluonen nicht als freie Teilchen beobachtet werden können, sondern immer nur in gebundener Form, als Hadronen, auftauchen. Im Rahmen der QCD lassen sich diese Hadronen unter anderem in zwei Kategorien einteilen: Mesonen, welche anschaulich aus einem Quark und einem Antiquark bestehen und Baryonen, welche aus drei Quarks zusammengesetzt sind. Die QCD hat, wie auch die Theorien der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkungen, eine laufende Kopplung, das heißt, die "Stärke der Wechselwirkung" ist abhängig von der Energie. Problematisch für die Beschreibung der Hadronen durch die QCD ist dabei, dass die Kopplung um so größer wird, je kleiner die Energie des betrachteten Systems ist. Damit sind jedoch die pertubativen Methoden, welche zum Beispiel in der Quantenelektrodynamik sehr erfolgreich eingesetzt werden, nur bedingt anwendbar, denn die dabei auftretenden Reihenentwicklungen konvergieren nur für kleine Kopplungen. Für eine adequate Beschreibung der Hadronen durch die QCD sind also auch nichtpertubative Methoden notwendig.

Ein Forschungsschwerpunkt im Rahmen der QCD ist die Thermodynamik stark wechselwirkender Materie, welche experimentell in der Untersuchung von Kollisionen schwerer Ionen zugänglich gemacht wird. Hierbei besteht das Interesse unter anderen darin, zu beschreiben, wie sich Hadronen, insbesondere Vektormesonen, in einem Medium mit endlicher Temperatur verhalten. Dabei liegt die Motivation in der Vermutung, dass sich die Massen und Breiten von beispielsweise Vektormesonen in angeregter Kernmaterie ändern, wobei insbesondere die vermutete Massenänderung bei endlichen Temperaturen eine Möglichkeit zum Verständnis von "Masse" stark wechselwirkender Teilchen unabhängig von Higgs-Mechanismus liefert.

Relativ neue Methoden zur Beschreibung der Eigenschaften von Hadronen in einem Medium sind dabei im Zuge der AdS/CFT-Korrespondenz entwickelt wurden. Hierbei handelt es sich um holographische Modelle, welche Hadronen durch eine fünfdimensionale klassische Gravitationstheorie beschreiben, wobei Temperatureffekte durch singuläre Lösungen in der Gravitationstheorie (schwarze Löcher) in die Modelle eingebracht werden. Ursprünglich bezeichnet die AdS/CFT-Korrespondenz grob gesprochen eine Hypothese über die Äquivalenz einer stark gekoppelten konformen Quantenfeldtheorie und einer Gravitationstheorie. In diesem Sinne lässt sich die Korrespondenz nicht direkt auf die QCD anwenden, da diese keine konforme Symmetrie besitzt. Aufgrund weiterer Untersuchung besteht jedoch die Hoffnung, die betrachtete Gravitationstheorie derart zu erweitern, dass die äquivalente Feldtheorie die Form der QCD erhält.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung dieser Erweiterungen der fünfdimensionalen Gravitationstheorie, wobei im speziellen die Beschreibung von Vektormesonen durch ihre Spektralfunktion betrachtet wird. Ferner werden die dabei in der fünfdimensionalen Gravitationstheorie auftretenden Bewegungsgleichungen auf die Form einer stationären Schrödinger-Gleichung transformiert, um Aussagen über die Möglichkeit und Form eines diskreten Massenspektrums machen zu können. Dabei ist diese Arbeit wie folgt gegliedert.

Im Kapitel 2 sind die Grundlagen der in dieser Arbeit untersuchten Modelle zusammengefasst und Begriffe und Notationen festgehalten. Es werden die grundlegenden Arbeiten zur Beschreibung von Vektormesonen mit holographischen Methoden nachgezeichnet und damit die im weiteren Verlauf verwendeten Verfahren motiviert. Außerdem wird eine Möglichkeit skizziert, wie sich die grundlegenden holographischem Modelle auf den Bereich endlicher Temperaturen erweitern lassen.

Der Hauptteil gliedert sich in zwei Teile. Im Kapitel 3 sind die in dieser Arbeit untersuchten Modelle definiert, wobei zwei verschiedene Erweiterungen der fünfdimensionalen Gravitationstheorie betrachtet werden. Für diese beiden Modelle werden die Spektralfunktionen berechnet und deren Verhalten unter Änderung der Temperatur analysiert.

Im Kapitel 4 wird die schon angesprochene Schrödinger-Form der auftretenden Bewegungsgleichungen genauer diskutiert. Hierzu werden allgemeine Ausdrücke hergeleitet und anschließend auf die beiden untersuchten Modelle spezialisiert. Begonnen wird mit der Diskussion des Schrödinger-Potentials bei T = 0, wobei in einem allgemeineren Rahmen Voraussetzungen entwickelt werden, für welche die betrachteten Modelle ein diskretes Energiespektrum besitzen. Anschließend werden die Schrödinger-Gleichungen der beiden Modelle bei endlichen Temperaturen betrachtet. Hierbei wird das Verhalten der Schrödinger-Potentiale unter Veränderung der Temperatur untersucht und die damit verbundenen Implikationen für die in diesem Modellen beschriebenen Vektormesonen ausgeführt. Außerdem werden Näherungen für kleine Temperaturen entwickelt und diskutiert, inwieweit sich dabei analytische Ausdrücke für das auftretende diskrete Energiespektrum finden lassen.

## 2 Grundlagen

## 2.1 Vektormesonen

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Diskussion von holographischen Methoden zur Beschreibung von Vektormesonen. Hierzu sollen im folgenden Abschnitt Größen und Notationen zusammengetragen werden, welche im Rahmen der Quantenchromodynamik (QCD), zur Untersuchung von Vektormesonen benötigt werden. Für eine grundlegende Einführung in die QCD sei hierbei auf [13, 30, 39] verweisen.

#### 2.1.1 Lagrange-Dichte der QCD

Im Standardmodell der Teilchenphysik beschreibt die QCD die Dynamik von Quarks und Gluonen bezüglich der starken Wechselwirkung. Experimentell werden sechs unterschiedliche Arten (Flavor) von Quarks beobachtet, welche sich in ihren Massen und ihren Ladungen unterscheiden (vergleiche dazu Tabelle 2.1).

Flavor	<b>u</b> p	$\mathbf{d}$ own	$\mathbf{s}$ trange	$\mathbf{c}$ harm	$\mathbf{b}$ ottom	$\mathbf{t}$ op
$\begin{array}{c} m_f \text{ in MeV} \\ Q_f \text{ in } e \end{array}$	$\begin{vmatrix} 2\\ \frac{2}{3} \end{vmatrix}$	$5 - \frac{1}{3}$	$95 \\ \frac{2}{3}$	$1350 \\ -\frac{1}{3}$	$5300$ $\frac{2}{3}$	$176000 \\ -\frac{1}{3}$

**Tabelle 2.1:** Massen  $m_f$  und Ladungen  $Q_f$  der verschiedenen Quarkflavors, entnommen aus [31].

Die zentrale Größe der QCD ist die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{f} \overline{q}_{f} \left( i \gamma^{\mu} D_{\mu} - m_{f} \right) q_{f} - \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^{8} G_{\mu\nu,\alpha} G^{\mu\nu}{}_{\alpha}$$

Hierbei bezeichnen  $q_f$  die Fermionfelder zum Beschreiben der Quarks und  $G_{\mu\nu,\alpha}$  den Gluonen-Feldstärketensor, welcher gegeben ist durch

$$G_{\mu\nu,\alpha} = \partial_{\mu}G_{\nu,\alpha} - \partial_{\nu}G_{\mu,\alpha} + g\sum_{\beta,\gamma=1}^{8} f_{\alpha\beta\gamma} G_{\mu,\beta}G_{\nu,\gamma},$$

wobei  $G_{\nu,\alpha}$  das Gluonfeld,  $f_{\alpha\beta\gamma}$  die Strukturkonstanten der Farb-SU(3) und g die starke Kopplung bezeichnen. Für jeden Flavor f besitzt das Materiefeld  $q_f$  zusätzlich noch drei Farbkomponenten, welche unter einer lokalen Farb-SU(3) wie folgt transformieren:

$$q_f \longrightarrow q'_f := \exp\left(-i\sum_{\alpha=1}^8 \theta_\alpha(x)\frac{\lambda_\alpha}{2}\right)q_f,$$

wobei  $\lambda_{\alpha}$  die Gell-Mann-Matrizen und  $\theta_{\alpha}(x)$  die lokalen Eichparameter bezeichnen. Die kovariante Ableitung in  $\mathcal{L}_{QCD}$  ist gegeben durch

$$D_{\mu}q_{f} = \partial_{\mu}q_{f} - ig\sum_{\alpha=1}^{8} \frac{\lambda_{\alpha}}{2}G_{\mu,\alpha}q_{f}.$$
(2.1)

#### 2.1.2 Elektromagnetische Wechselwirkung in der QCD

Wie zum Beispiel in [24] erwähnt, können Vektormesonen beschrieben werden als Resonanzen im Strom-Strom-Korrelator

$$\Pi^{\mu\nu}(q) := i \int d^4x \, e^{iqx} \left\langle 0 | \mathcal{T} j^{\mu}_{\mathrm{em}}(x) j^{\nu}_{\mathrm{em}}(0) | 0 \right\rangle,$$

wobei  $j_{em}^{\mu}$  den elektromagnetischen Quarkstrom bezeichnet. Um diesen zu erhalten, ist die elektromagnetische Wechselwirkung in die Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{QCD}$  einzubauen, was durch die Forderung einer zusätzlichen lokalen U(1)-Symmetrie erreicht wird:

$$q_f \to e^{-i\alpha(x)Q} q_f, \tag{2.2}$$

wobei Q den Ladungsoperator bezeichnet, welcher jedem Quarkflavor seine elektrische Ladung zuordnet:  $Qq_f = Q_f q_f$  (vergleiche Tabelle 2.1). Genügt wird dieser Forderung durch eine Erweiterung der kovariante Ableitung 2.1 um einen elektromagnetischen Term:

$$D_{\mu}q_f \to D_{\mu}q_f - iB_{\mu}Qq_f,$$

wobei  $B_{\mu}$  das Photonfeld bezeichnet. Die lokal U(1)-invariante Lagrange-Dichte der QCD hat dann die Form

$$\mathcal{L}_{QCD}^{\text{em}} = \mathcal{L}_{QCD} + \sum_{f} \overline{q}_{f} \gamma^{\mu} B_{\mu} Q q_{f} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Hierbei bezeichnet  $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}B_{\nu} - \partial_{\nu}B_{\mu}$  den elektromagnetischen Feldstärketensor. Der elektromagnetische Quarkstrom  $j_{\text{em}}^{\mu}$  ergibt sich als Noether-Strom zur U(1)-Symmetrie (2.2):

$$j_{\rm em}^{\mu} = \sum_{f} \frac{\partial \mathcal{L}_{QCD}^{em}}{\partial \left(\partial_{\mu} q_{f}\right)} \cdot \left(-iQq_{f}\right) = \sum_{f} \overline{q}_{f} \gamma^{\mu} Q q_{f}$$
(2.3)

Zur Beschreibung von hadronischen Freiheitsgraden (zum Beispiel  $\omega$ - oder  $\rho$ -Mesonen) soll der elektromagnetische Strom (2.3) nicht nach elektrischen Ladungen aufgeteilt werden, sondern nach Flavor-Kombinationen mit bestimmtem Transformationsverhalten, welche der jeweiligen Quarkstrukur Rechnung trägt. Die Unterscheidung der jeweiligen Stromanteile in  $\omega$ - oder  $\rho$ -artige Anregungen kann unter anderem durch ihr Verhalten unter Paritätstransformation erfolgen.

#### 2.1.3 Chirale Symmetrie der QCD

Das in diesem Abschnitt nachgezeichnete Vorgehen ist weitestgehend aus [33] entnommen. Betrachtet man die Massen der einzelnen Quarkflavor aus Tabelle 2.1, so lassen diese bezüglich der  $\rho$ -Mesonenmasse (siehe [31]) folgende Einteilung zu:

leichte Quarks				schwere Quarks
$u(2) \\ d(5) \\ s(95)$	«	$m_{\rho}$ = 775MeV	<	$c(1350) \\ b(5300) \\ t(176000).$

In dieser Arbeit sollen nur die leichten Quarkflavor u und d betrachtet und die schweren sowie das Strange-Quark vernachlässigt werden. Hierbei bietet sich der

Grenzwert verschwindender Quarkmassen  $m_u = m_d = 0$  an, was im Allgemeinen als chiraler Limes bezeichnet wird. Im chiralen Limes besitzt die Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{QCD}$  im SU(2)-Flavor-Sektor folgende Form (hier vorerst ohne den elektromagnetischen Anteil)

$$\mathcal{L}_{QCD}^{\mathrm{ch}} = \sum_{f=u,d} \overline{q}_f \left( \gamma^{\mu} D_{\mu} \right) q_f - \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^8 G_{\mu\nu,\alpha} G^{\mu\nu}{}_{\alpha}.$$

Es ist möglich, die Materiefelder identisch umzuschreiben

$$q = \frac{\mathbb{1}_4 + \gamma_5}{2}q + \frac{\mathbb{1}_4 - \gamma_5}{2}q =: q_R + q_L,$$

wobei  $q_R$  das rechtshändige und  $q_L$  das linkshändige Quarkfeld bezeichnet. Motiviert wird diese Aufteilung durch das chirale Verhalten der jeweiligen Anteile:  $\gamma_5 q_L = -q_L$  beziehungsweise  $\gamma_5 q_R = q_R$ . Ausgedrückt in den Feldern  $q_R$  und  $q_L$ zerfällt die Lagrange-Dichte im chiralen Limes in getrennte Quarkfeldanteile

$$\mathcal{L}_{QCD}^{ch} = \sum_{f=u,d} \left( \overline{q}_{R,f} i \gamma^{\mu} D_{\mu} q_{R,f} + \overline{q}_{L,f} i \gamma^{\mu} D_{\mu} q_{L,f} \right) - \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^{8} G_{\mu\nu,\alpha} G^{\mu\nu}{}_{\alpha}$$

Die Aufteilung in rechts- und linkshändige Felder lässt es zu, für beide Anteile separat globale Transformationen zu finden, welche  $\mathcal{L}_{QCD}^{ch}$  invariant lassen:

$$q_{L,f} \longrightarrow \exp\left(-i\theta_L \mathbb{1}_2 - i\sum_{a=1}^3 \theta_{L,a} \frac{\sigma_a}{2}\right) q_{L,f},$$
$$q_{R,f} \longrightarrow \exp\left(-i\theta_R \mathbb{1}_2 - i\sum_{a=1}^3 \theta_{R,a} \frac{\sigma_a}{2}\right) q_{R,f},$$

wobei  $(\theta_L, \theta_{L,a}, \theta_R, \theta_{R,a})$  die unabhängigen Transformationsparameter und  $\sigma_a$  die Pauli-Matrizen bezeichnen. Hierbei handelt es sich also um eine globale  $U(2)_L \times$ 

 $U(2)_R$ -Symmetrie, zu welcher folgende Noether-Ströme, sortiert nach den Transformationsparametern, gefunden werden können:

$$\theta_L: \qquad L^{\mu} := \sum_{f=u,d} \overline{q}_{L,f} \gamma^{\mu} q_{L,f}, \qquad (2.4)$$

$$\theta_{L,a}: \qquad L^{\mu}{}_{a} := \sum_{f=u,d} \overline{q}_{L,f} \gamma^{\mu} \frac{\sigma_{a}}{2} q_{L,f},$$
  
$$\theta_{R}: \qquad R^{\mu} := \sum \overline{q}_{R,f} \gamma^{\mu} q_{R,f}, \qquad (2.5)$$

$$\theta_{R,a}: \qquad R^{\mu} := \sum_{f=u,d} \overline{q}_{R,f} \gamma^{\mu} \frac{\sigma_{a}}{2} q_{R,f}.$$
  
 $\theta_{R,a}: \qquad R^{\mu}{}_{a} := \sum_{f=u,d} \overline{q}_{R,f} \gamma^{\mu} \frac{\sigma_{a}}{2} q_{R,f}.$ 

Klassisch feldtheoretisch, das heißt ohne Quantenfluktuationen, sind die rechtsund linkshändigen Ströme divergenzfrei:  $\partial_{\mu}L^{\mu} = 0$ ,  $\partial_{\mu}L^{\mu}{}_{a} = 0$ ,  $\partial_{\mu}R^{\mu} = 0$ , sowie  $\partial_{\mu}R^{\mu}{}_{a} = 0$ , was sich mit den Euler-Lagrange-Gleichungen für  $q_{L}$  und  $q_{R}$ , welche aus der Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{QCD}^{ch}$  zu gewinnen sind, zeigen lässt.

Motiviert durch das jeweilige Verhalten unter Paritätstransformationen, werden aus obigen Strömen folgende neue Ströme konstruiert:

$$V^{\mu} := R^{\mu} + L^{\mu} = \overline{q}\gamma^{\mu}q \qquad \text{Singlettstrom}, \tag{2.6}$$

$$A^{\mu} := R^{\mu} - L^{\mu} = \overline{q}\gamma^{\mu}\gamma_{5}q \qquad \text{axialer Singlettstrom}, \tag{2.7}$$

$$V^{\mu}_{a} := R^{\mu}_{a} + L^{\mu}_{a} = \overline{q}\gamma^{\mu}\frac{\sigma_{a}}{2}q \qquad \text{Vektorstrom}, \tag{2.7}$$

$$A^{\mu}_{a} := R^{\mu}_{a} - L^{\mu}_{a} = \overline{q}\gamma^{\mu}\gamma_{5}\frac{\sigma_{a}}{2}q \qquad \text{axialer Vektorstrom}, \tag{2.7}$$

welche auch chirale Ströme genannt werden. Bezeichnet  $\mathcal{P}$  den Paritätsoperator, so gilt für diese so konstruierten Ströme:

$$\begin{split} \mathcal{P} V^{\mu}_{\ a}\left(\vec{x},t\right) &= V^{\mu}_{\ a}\left(-\vec{x},t\right), \\ \mathcal{P} V^{\mu}(\vec{x},t) &= V^{\mu}(-\vec{x},t), \\ \mathcal{P} V^{\mu}(\vec{x},t) &= V^{\mu}(-\vec{x},t), \\ \end{split}$$

womit auch die Bezeichnungen Vektorstrom (positive Parität) und axialer Vektorstrom (negative Parität), sowie analog für die Singlettströme, motiviert werden. Man kann zeigen, dass durch die Quantisierung der Felder  $V^{\mu}_{a}$ ,  $A^{\mu}_{a}$ ,  $V^{\mu}$ , diese divergenzfrei bleiben, jedoch die Divergenzfreiheit von  $A^{\mu}$  verletzt ist und damit deren zugehörige  $U(1)_{A}$ -Symmetrie gebrochen wird, was man als Anomalie bezeichnet. Nach der Quantisierung besitzt das betrachtete Zweiquarksystem im chiralen Limes ( $m_u = m_d = 0$ ) also eine globale  $SU(2)_V \times SU(2)_A \times U(1)_V$ -Symmetrie, wobei sich die Indizes an den Gruppen auf den jeweiligen Anteil bezieht, auf welchen die Transformationen wirken. Man beachte noch, dass im Limes gleicher finiter Massen  $m_u = m_d \neq 0$  die  $SU(2)_A$ -Symmetrie explizit gebrochen wird, die  $SU(2)_V \times U(1)_V$ -Symmetrie jedoch weiterhin erhalten bleibt.

Im Folgenden sollen nur noch der Vektorstrom  $V^{\mu}_{\ a}$  und der Singlettstrom  $V^{\mu}$  betrachtet werden.

#### 2.1.4 $\rho$ - und $\omega$ -artige Vektormesonen

Die Bezeichnungen " $\rho$ -artige"- und " $\omega$ -artige" bezieht sich in der vorliegenden Arbeit auf die Quantenzahlen  $I^G(J^{PC}) = 1^+(1^{--})$  für  $\rho$ -artige und  $I^G(J^{PC}) = 0^-(1^{--})$  für  $\omega$ -artige Anregung. Die niedrigsten dieser Anregungen sind  $\rho(770)$  mit einer Masse von  $m_{\rho} = 775,26 \pm 0,25$  MeV und einer Breite von  $\Gamma_{\rho} = 149,1\pm0.8$  MeV sowie  $\omega(782)$  mit einer Masse von  $m_{\omega} = 782,65 \pm 0,12$  MeV und einer Breite von  $\Gamma_{\omega} = 8,49 \pm 0,08$  MeV, wobei diese experimentellen Werte [31] entnommen sind. Beide Mesonen zerfallen unter anderem in Elektron-Positron-Paare mit den Verzweigungsverhältnissen  $(4,72 \pm 0,05) \cdot 10^{-5}$  MeV für das  $\rho(770)$  und  $(7,28 \pm 0,14) \cdot 10^{-5}$  MeV für das  $\omega(782)$ . Damit liefern diese beiden Vektormesonen wichtige Beiträge zum Di-Elektronspektrum, welches experimentell seit 2005 intensiv durch die HADES-Kollaboration untersucht wird.

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, den elektromagnetisches Strom (2.3) im chiralen Limes in chirale Singlett- und chirale Vektor-Anteilen zu zerlegen, um eine Identifikation von  $\omega$ - beziehungsweise  $\rho$ -artigen Vektormesonen zu ermöglichen. Hierzu betrachte man den Ladungsoperator Q im elektromagnetischen Strom (2.3), welcher sich im betrachteten Zweiquarksystem auf folgende Matrix reduziert

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Will man diesen nach einem  $U(1)_V$ -symmetrischen und einem  $SU(2)_V$ -symmetrischen Anteil aufteilen, so ist Q nach den jeweiligen Generatoren zu entwickeln:

$$Q = \sum_{\alpha=0}^{3} Q^{\alpha} \sigma_{\alpha},$$

wobei  $\sigma_{\alpha} = (\mathbb{1}_2, \sigma_a)$  die um die zweidimensionale Einheitsmatrix erweiterten Pauli-Matrizen bezeichnet. Die Koeffizienten  $Q^{\alpha}$  erhält man dabei durch  $Q^{\alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\sigma_{\alpha} Q)$ , womit folgt

$$Q^0 = \frac{1}{6}, \qquad Q^1 = 0, \qquad Q^2 = 0, \qquad Q^3 = \frac{1}{2}.$$

Setzt man diese Entwicklung für Q in den elektromagnetischen Strom (2.3) ein, so zerfällt dieser im betrachteten Zweiquarksystem in zwei Summanden:  $j_{\rm em}^{\mu} = j_{\omega}^{\mu} + j_{\rho}^{\mu}$ mit

$$j_{\rho}^{\mu} = \sum_{f=u,d} \overline{q}_{f} \gamma^{\mu} \frac{1}{2} \sigma_{3} q_{f} = \frac{1}{2} \left( \overline{u} \gamma^{\mu} u - \overline{d} \gamma^{\mu} d \right) = V_{3}^{\mu},$$
$$j_{\omega}^{\mu} = \sum_{f=u,d} \overline{q}_{f} \gamma^{\mu} \frac{1}{6} \sigma_{0} q_{f} = \frac{1}{6} \left( \overline{u} \gamma^{\mu} u + \overline{d} \gamma^{\mu} d \right) = \frac{1}{6} V^{\mu}.$$

Es werden dabei der Anteil  $j^{\mu}_{\rho}$  mit der Beschreibung eines  $\rho$ -artigen, beziehungsweise  $j^{\mu}_{\omega}$  mit der eines  $\omega$ -artigen Vektormesonen identifiziert, da sich diese anteilig im Flavor-Raum wie ein Vektor ( $\rho$ -artig), respektive wie ein Skalar ( $\omega$ -artig) transformieren.

Man erkennt dabei, dass der  $\rho$ -artige elektromagnetische Stromes durch die (a = 3)-Komponente des chiralen Vektorstroms (2.7) und der  $\omega$ -artige Anteil durch den chiralen Singlettstrom (2.6) beschrieben werden.

## 2.2 AdS/CFT-Korrespondenz

Die in der vorliegenden Arbeit beschriebenen holographischen Methoden zur Untersuchung von Vektormesonen haben ihre ursprüngliche Motivation in einer Korrespondenz zwischen einer Supergravitationstheorie auf einem fünfdimensionalen Anti-de Sitter-Raum und einer konformen Feldtheorie auf einem Minkowski-Raum, welcher als Rand des betrachteten fünf-dimensionalen Raumes verstanden werden kann. Diesbezüglich sollen im folgenden Abschnitt einige Grundlagen der verwendeten Korrespondenz zusammengefasst und damit später verwendete Begriffe und Notationen festgehalten werden.

#### 2.2.1 Geometrie des Anti-de Sitter-Raumes

Es folgen nun allgemeine geometrische Aussagen über einen (d + 1)-dimensionalen Anti-de Sitter-Raum, das heißt, einer Raumzeit, deren Metrik sich intrinsisch mit Hilfe der Einstein-Gleichungen und den Bedingungen maximale Symmetrie und von einer konstanter negativer Skalarkrümmung herleiten lässt. Diesbezüglich sei auf [20] verweisen, wobei die folgenden Ausführungen [4] und dem Anhang in [7] entnommen sind.

Für diese Arbeit ausreichend ist eine Definition des Anti-de Sitter-Raumes als Einbettung in einen (d + 2)-dimensionalen flachen Raum mit der Signatur (2,d). Hierbei ist die Signatur (m, d - m) eines Riemann-Raumes definiert durch die Anzahl m der positiven Eigenwerte der Metrik. Diesen umgebenen Raum kann man sich als einen (d + 1)-dimensionalen Minkowski-Raum, erweitert um eine zusätzlichen Zeitkoordinate, vorstellen. Die Metrik dieses (d + 2)-dimensionalen Raumes ist dabei gegeben durch das Linienelement

$$ds_{d+2}^2 = dX_{-1}^2 + dX_0^2 - dX_1^2 \dots - dX_d^2.$$

Als Einbettung in einen solchen Raum soll der Anti-de Sitter-Raum folgendermaßen definiert werden:

$$AdS_{d+1} := \left\{ (X_{-1}, X_0, X_1, \dots, X_d) \in \mathbb{R}^{d+2} | X_{-1}^2 + X_0^2 - X_1^2 \dots - X_d^2 = R^2 \right\},\$$

wobei R eine reelle Konstante, die Skalierungskonstante, bezeichnet. Für diesen  $AdS_{d+1}$  lassen sich globale Koordinaten  $(\tau, \rho, \Omega_1, \ldots, \Omega_d)$  finden:

$$X_{-1} = R \frac{\sin \tau}{\cos \rho}, \quad X_0 = R \frac{\cos \tau}{\cos \rho}, \quad X_i = R \Omega_i \tan \rho,$$

für welche die Bedingungen  $0 \le \rho < \frac{\pi}{2}, -\pi < \tau \le \pi$ , sowie  $\sum_{i=1}^{d} \Omega_i = 1$  gelten, die der Definition des  $AdS_{d+1}$  als Einbettung Rechnung tragen. In diesen Koordinaten ergibt sich somit folgende globale Metrik für den  $AdS_{d+1}$ :

$$ds_{AdS}^{2} = \frac{R^{2}}{\cos^{2}\tau} \left( d\tau^{2} - d\rho^{2} - \sin^{2}\rho \sum_{1}^{d} d\Omega_{i}^{2} \right).$$

Für die Korrespondenz von entscheidender Bedeutung sind jedoch nicht diese globalen Koordinaten, in welcher die Metrik des  $AdS_{d+1}$  der Einbettung nicht explizit, sondern durch Zusatzbedingungen, Rechnung trägt. Man geht vielmehr über zu den sogenannten Poincare-Koordinaten, welche folgendermaßen definiert sind

$$x^{i} := \frac{RX_{i}}{X_{-1} - X_{d}}, \quad x^{0} := \frac{RX_{0}}{X_{-1} - X_{d}}, \quad z = \frac{R^{2}}{X_{-1} - X_{d}},$$

wobei z auch als holographische Koordinate bezeichnet wird. In diesen Koordinaten teilt sich der  $AdS_{d+1}$  in zwei disjunkte Teile auf: z < 0 und z > 0. Die Grenze dieser beiden Teile bei z = 0 wird auch Rand des  $AdS_{d+1}$  genannt und besitzt selbst die geometrische Struktur eines *d*-dimensionalen Minkowski-Raumes, wobei  $t := x^0$  die Zeitkoordinate bezeichnet. Mit der Rücktransformation von Poincareauf Einbettungskoordinaten

$$X_{-1} = \frac{1}{2z} \left( z^2 + R^2 + \sum_{i=1}^d (x^i)^2 - t^2 \right),$$
  

$$X_0 = \frac{Rt}{z},$$
  

$$X_i = \frac{Rx^i}{z},$$
  

$$X_{-1} = \frac{1}{2z} \left( z^2 - R^2 + \sum_{i=1}^d (x^i)^2 - t^2 \right)$$

wird die Metrik des  $AdS_{d+1}$  für den Teil mit z > 0 durch die Metrik des umgebenen Raums induziert, womit sich folgendes Linienelement ergibt:

$$ds_{AdS}^2 = \frac{R^2}{z^2} \left( dt^2 - \sum_{i=1}^{d-1} (x^i)^2 - dz^2 \right).$$
(2.8)

Im Folgenden soll nur noch der Teil des eingebetteten  $AdS_{d+1}$  betrachtet werden, für welchen in Poincare-Koordinaten z > 0 gilt, wobei dieser Teil kurz als Anti-de Sitter-Raum bezeichnet wird. Auch die Metrik (2.8) wird, vor allem im Fall d = 4, kurz als AdS-Metrik bezeichnet.

Zentrale Bedeutung für die Korrespondenz besitzen die Transformationen im Antide Sitter-Raum, welche die AdS-Metrik invariant lassen. Diese werden Isometrien genannt und bilden eine Gruppe, welche sich für den AdS aus den Transformationen im umgebenen (d + 2)-dimensionalen Raum bestimmen lässt, die den AdS als Einbettung invariant lassen. Es zeigt sich, dass diese Isometrien des AdS die Gruppe SO(2,d-1) bilden.

Wie schon angesprochen, bildet der AdS eine Raumzeit, das heißt, die Metrik (2.8) ist Lösung der Einsteinschen Vakuum-Feldgleichung, welche für beliebige d gegeben sind durch

$$\mathcal{R}_{MN} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{MN} = \frac{1}{2}\Lambda g_{MN} \tag{2.9}$$

mit  $M, N = 0, \ldots, d$ , wobei  $x^M = x^{\mu}$  für  $M = \mu = 0, 1, \ldots, d-1$  die Minkowski-Koordinaten und  $x^d = z$  die holographische Koordinate bezeichnen. Hierbei ist  $\Lambda$ die kosmologische Konstante,  $\mathcal{R} = g^{MN} \mathcal{R}_{MN}$  der Ricci-Skalar und

$$\mathcal{R}_{MN} = \partial_L \Gamma^L_{\ MN} - \partial_N \Gamma^L_{\ ML} + \Gamma^S_{\ MN} \Gamma^L_{\ SL} - \Gamma^S_{\ ML} \Gamma^L_{\ SN}$$

der Ricci-Tensor, wobei die Christoffel-Symbole gegeben sind durch

$$\Gamma^{S}_{\ MN} = \frac{g^{SL}}{2} \left( \partial_{N} g_{ML} + \partial_{M} g_{NL} - \partial_{L} g_{MN} \right).$$

Setzt man die AdS-Metrik ein, so folgt nach einiger Rechnung:

$$\mathcal{R}_{MN} = \frac{d}{R^2} g_{MN},$$

womit aus den Einsteingleichungen (2.9) für die kosmologische Konstante des AdS folgt

$$\Lambda = -\frac{d\left(d-1\right)}{R^2}.$$

In der vorliegenden Arbeit wird dabei vor allem der Fall d = 4 verwendet, womit sich  $\Lambda = -\frac{12}{R^2}$  ergibt.

#### 2.2.2 Konforme Feldtheorie

Den zweiten Teil der AdS/CFT-Korrespondenz bilden konforme Feldtheorien (conformal field theories, kurz CFT), welche im folgenden Abschnitt kurz referiert werden sollen, wobei für eine fundierte Einführung auf [16] verweisen sei. Sei  $\eta_{\mu\nu}$  die Metrik des vierdimensionalen Minkowski-Raumes, für welche in dieser

Arbeit folgende Konvention verwendet wird  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
(2.10)

so bezeichnet  $ds^2 := \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$  das zugehörige Quadrat des infinitesimalen Linienelements. Eine Transformation  $A : x^{\mu} \to x'^{\mu}$  auf diesem Minkowski-Raum heißt konform, falls gilt:

$$ds^{\prime 2} = \Omega^2(x)ds^2 \tag{2.11}$$

mit einer nichtverschwindenden Funktion  $\Omega(x)$ , welche auch als konformer Faktor bezeichnet wird.

Die naheliegensten konformen Transformationen auf dem Minkowski-Raum ergeben sich für  $\Omega \equiv 1$ , da es dabei um genau jene Transformationen handelt, welche die Metrik invariant lassen. Diese sind gegeben als Elemente der Poincaré-Gruppe

(L)  $x^{\mu} \to x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$  (Lorentz-Transformation), (T)  $x^{\mu} \to x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$  (Translation). Die einfachste konforme Transformation, welche sich nicht durch Poincaré-Transformationen erzeugen lässt, ergibt sich für  $\Omega \equiv \lambda$  mit einer beliebigen Konstanten  $\lambda \neq 0$ 

(S) 
$$x^{\mu} \to x^{\prime \mu} = \lambda x^{\mu}$$
 (Skalierung).

Es gibt nun noch eine weitere konforme Transformation, welche sich nicht durch die obigen Transformationen erzeugen lässt:

(I) 
$$x^{\mu} \to x^{\prime \mu} = \frac{x^{\mu}}{x^2}$$
 (Inversion),

die sich jedoch nur für  $x^{\mu}$  definieren lässt, für welche  $x^2 \neq 0$  gilt, das heißt, welche nicht auf dem Lichtkegel liegen. Man beachte noch, dass die Inversion, im Gegensatz zu den anderen angegebenen konformen Transformationen, eine diskrete Transformation ist. Um aus der Inversion eine kontinuierliche konforme Transformation zu konstruieren, stellt man sie einer Translation voran, gefolgt von einer weiteren Inversion, womit sich folgende Transformation ergibt:

(Sp) 
$$x^{\mu} \to x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} + x^2 a^{\mu}}{1 + 2x^{\mu} a_{\mu} + x^2 a^2}$$
 (spez. konf. Transformation).

Es lässt sich zeigen, dass jede Transformation, für welche Gleichung (2.11) gilt, durch die obigen kontinuierlichen konformen Transformationen  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{Sp}$ erzeugt werden kann. Betrachtet man nun die Generatoren der obigen kontinuierlichen Transformation, so stellt sich heraus, dass die konforme Gruppe des Minkowski-Raumes mit der Metrik (2.10) gegeben ist durch eine SO(2,4).

#### 2.2.3 Die Maldacena-Vermutung

Die AdS/CFT-Korrespondenz ist in ihrer grundlegenden Form eine Hypothese, welche zwei Theorien der Physik verbindet, die dem ersten Anschein nach nichts miteinander zutun haben. Auf der einen Seite betrachtet man eine Superstringtheorie auf einem zehndimensionalen gekrümmten Raum und auf der anderen Seite eine Quantenfeldtheorie auf einem vierdimensionalen Minkowski-Raum. Auf diese beiden Seiten genauer einzugehen, würde den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen, weshalb an dieser Stelle nur auf die grundlegenden Ideen der Korrespondenz und auf die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Aspekte eingegangen wird. Für eine Einführung in die Stringtheorie sei dabei auf [5] verwiesen, was auch als Grundlage der folgenden Ausführung dient. Ferner sei noch auf die Übersichtsartikel [1, 12, 32] verwiesen, in denen die AdS/CFT-Korrespondenz genauer dargelegt ist.

Erstmals wurde die Korrespondenz in [27] vorgestellt, wobei die beiden angesprochenen Seiten folgendermaßen spezifiziert werden:

• Auf der Seite der Quantenfeldtheorie betrachte man eine supersymmetrische Yang-Mills-Theorie auf einem vierdimensionalen Minkowski-Raum mit der Eichgruppe SU(N) und  $\mathcal{N} = 4$  Superladungen. Diese ist eine konforme Feldtheorie und besitzt eine Kopplung  $g_{\rm YM}$ . Die effektive Kopplung einer solchen Theorie ist hierbei

$$\lambda := g_{\rm YM}^2 N,$$

welche auch als 't Hooft-Kopplung bezeichnet wird. Hierbei sei angemerkt, dass diese effektive Kopplung unabhängig von einer Energieskala ist. Die Ursache hierfür liegt im Verschwinden der  $\beta$ -Funktion, was im Fall von konformen Feldtheorien aus der Skalenfreiheit folgt.

• Auf der anderen Seite betrachte man eine Typ-IIB-Superstringtheorie, formuliert auf einem  $AdS_5 \times S_5$ . Dabei bezeichnet  $AdS_5$  den in Abschnitt 2.2.1 vorgestellten Anti-de Sitter-Raum im Fall d = 4 und  $S_5$  eine fünfdimensionale Sphäre, wobei beide Teile die gleiche Skalierungskonstante R besitzen. Die betrachtete Stringtheorie besitzt hierbei eine dimensionslose Kopplung  $g_s$ und eine dimensionsbehaftete Längenskala  $l_s$ , wobei sich Letztere als typische Länge eines Strings interpretieren lässt.

Die zentrale (starke) Hypothese der AdS/CFT-Korrespondenz ist dabei, dass eine Typ-IIB-Superstringtheorie auf einem  $AdS_5 \times S_5$  äquivalent ist zu einer ( $\mathcal{N} = 4$ )-Super-Yang-Mills-Theorie auf einem vierdimensionalen Minkowski-Raum, wobei die Parameter der jeweiligen Theorien folgendermaßen miteinander identifiziert werden

$$g_{\rm YM}^2 = 4\pi g_s,\tag{2.12}$$

$$\frac{R}{l_s} = \sqrt[4]{g_{\rm YM}^2 N} = \sqrt[4]{\lambda}.$$
(2.13)

In dieser Form der Korrespondenz sind jedoch schwierig Berechnungen anzustellen, da gezeigt werden kann, dass sich für einen Grenzwert kleiner Kopplung in der Quantenfeldtheorie, die korrespondierende Stringtheorie vor einem stark gekrümmten Hintergrund formuliert werden muss. Ist umgekehrt die Geometrie der Stringtheorie nur schwach gekrümmt, was eine störungstheoretische Behandlung ermöglicht, so ist die korrespondierende Quantenfeldtheorie stark gekoppelt.

In [27] wird deshalb die Hypothese abgeschwächt, wobei die Äquivalenz der beiden Theorien für  $N \to \infty$  und  $g_{\rm YM} \to 0$  mit  $\lambda = const.$  (t' Hooft-Limes) gefordert wird. In diesem Grenzfall tragen in der Quantenfeldtheorie nur noch planere Diagramme zu den Observablen bei, das heißt solche Feynman-Diagramme, welche sich in die Ebene zeichnen lassen, ohne dass sich ihre Linien schneiden. Mit Gleichung (2.12) folgt auf der Seite der Stringtheorie  $g_s \to 0$ , falls  $g_{\rm YM} \to 0$ , wobei  $\frac{R}{l_s}$  unverändert bleibt. Das heißt im 't Hooft-Limes der Quantenfeldtheorie reduziert sich die Beschreibung der Strings auf eine klassische Theorie ohne Quantenfluktuationen.

Weiter betrachtet man den Grenzfall einer stark gekoppelten Quantenfeldtheorie, das heißt  $\lambda \to \infty$ . Damit wird auf der Seite der Stringtheorie  $l_s \to 0$  impliziert, was sich aus Gleichung (2.13) ablesen lässt. Die Strings reduzieren sich also auf punktförmige Objekte, und die Stringtheorie degeneriert zu einer klassischen Feldtheorie. Zusammenfassend lässt sich die (schwache) Hypothese der AdS/CFT-Korrespondenz formulieren als die Äquivalenz einer klassischen Feldtheorie auf einem  $AdS_5$  zu einer Quantenfeldtheorie im starken t'Hooft-Limes.

Für praktische Rechnungen wurden in [17, 38] Hilfsmittel bereitgestellt, welche sich unter dem Begriff "Operator/Feld-Dualität" zusammenfassen lassen. Hierbei besitzt jeder Operator  $\mathcal{O}$  in der Quantenfeldtheorie ein korrespondierendes klassisches Feld  $\phi$  auf dem AdS, wobei die Korrespondenz formuliert wird durch

$$\left\langle \exp\left(i\int\phi_0\mathcal{O}\right)\right\rangle = \exp\left(iS_5^{\text{on-shell}}\left[\phi(x,z)\right]\right)\Big|_{z\to 0}.$$
 (2.14)

Auf der linken Seite von Gleichung (2.14) steht dabei das erzeugende Funktional der Quantenfeldtheorie, wobei  $\varphi_0$  die externe Quelle des Operators  $\mathcal{O}$  bezeichnet. Das Feld  $\phi_0$  ist hierbei durch  $\phi_0(x) = \lim_{z\to 0} \phi(x,z)$  mit dem klassischen Feld  $\phi$  im AdS verbunden.

Im Rahmen der Anwendung auf die QCD auf der Seite der Quantenfeldtheorie

wird im folgenden Abschnitt 2.3 genauer auf die Operator/Feld-Korrespondenz und insbesondere auf die Verwendung von Gleichung (2.14) eingegangen.

#### 2.3 Holographische Modelle für Vektormesonen

Unser Ziel ist es, die AdS/CFT-Korrespondenz auf die starke Wechselwirkung, also insbesondere auf die QCD, anzuwenden. Die Problematik dabei besteht jedoch darin, dass die QCD eine laufende Kopplung besitzt und somit keine konforme Feldtheorie ist. Dies führt vor allem dazu, dass die Anzahlen der Freiheitsgrade einer möglichen Gravitationstheorie auf dem AdS und der QCD als Randtheorie nicht mehr übereinstimmen und somit die ursprüngliche Operator-Feld-Dualität als solche nicht mehr funktioniert. Im folgenden Abschnitt soll diese Problematik genauer gefasst und Lösungsmöglichkeiten vorgestellt werden.

#### 2.3.1 Grundlegendes Modell

In der vorliegenden Arbeit sollen Vektormesonen und insbesondere ihre Spektralfunktion untersucht werden. Die Spektralfunktion eines Teilchens, welches allgemein einem Operator-Feld  $\mathcal{O}(x)$  auf dem Minkowski-Raum zugeordnet wird, ist definiert durch

$$\rho(\omega) = \operatorname{Im}\left(G_R(\omega)\right),\,$$

wobei  $\omega$  die Energie des Teilchens und  $G_R$  die retardierte Green-Funktion zum Operator  $\mathcal{O}$  im Impulsraum bezeichnet. Letztere lässt sich über ein erzeugendes Funktional definieren

$$G_R(\omega) = \frac{\delta^2}{\delta V^0(-\omega)\delta V^0(\omega)} \left\langle \exp\left(i\int V^0\mathcal{O}\right)\right\rangle.$$
(2.15)

Hierbei bezeichnet  $V^0(\omega)$  die äußere Quelle des Operators  $\mathcal{O}$  im Ruhesystem des Teilchens, also für den Viererimpuls  $p^{\mu} = (-\omega, 0, 0, 0)$ .

Der Ansatz der Operator-Feld-Dualität besteht in der Reinterpretation der Quelle  $V^0(x)$ , nun im Ortsraum, als Randprojektion eines sogenannten Bulk-Feldes V(x,z), welches auf einem  $AdS_5$  definiert ist. Die Eigenschaften von V(x,z) werden dabei durch eine Wirkung  $S_5$  bestimmt und durch folgende Bedingungen fixiert:

- Die Wirkung  $S_5$  ist in den natürlichen Einheiten mit  $\hbar = c = 1$  dimensionslos und ein Lorentz-Skalar.
- Die Quelle des Operators  $\mathcal{O}$  ist eine Randprojektion des Bulk-Feldes:

$$\lim_{z \to 0} V(x,z) = V^0(x).$$
(2.16)

- Das Bulk-Feld V(x,z) transformiert sich so unter Lorentz-, wie auch unter Eichtransformationen, dass der Term  $V^0\mathcal{O}$  im erzeugenden Funktional ein Skalar ist.
- In der Wirkung  $S_5$  sollen vorerst nur bilineare Terme in V(x,z) und dessen erster Ableitung auftreten.

Zur Beschreibung eines  $\omega$ -artigen Vektormesons wird nach Abschnitt 2.1.4 auf der Operatorseite der U(1)-Vektorstrom  $\mathcal{O} = \bar{q}\gamma^{\mu}q$  angesetzt, womit sich für das zugehörige Bulk-Feld V(x,z) folgende Eigenschaften ergeben:

- Da sich  $\bar{q}\gamma^{\mu}q$  unter Lorentz-Transformationen wie ein Vierervektor transformiert, muss es sich beim Bulk-Feld um ein Vektorfeld  $V_M(x,z)$  mit  $M = 0, \ldots, 3, z$  auf dem  $AdS_5$  handeln, dessen Minkowski-Komponenten sich wie ein Vierervektor transformieren. Man beachte, dass die Komponente  $V_z$  dieses Bulk-Feldes im Laufe der Rechnung "weggeeicht" werden kann.
- Da es sich bei der Größe  $\bar{q}\gamma^{\mu}q$  um einen erhaltenen U(1)-Strom handelt, muss sich  $V_M(x,z)$  wie ein U(1)-Eichfeld transformieren.

Eine Wirkung, welche obige Bedingungen erfüllt, ist gegeben durch

$$S_5 = -\frac{1}{k_V} \int d^5 x \frac{\sqrt{g}}{4} g^{MM'} g^{NN'} F_{MN} F_{M'N'}, \qquad (2.17)$$

wobei  $F_{MN} = \partial_M V_N - \partial_N V_M$  den Feldstärketensor und  $g_{MN}$  die Metrik (2.8) des  $AdS_5$  bezeichnet. Im Anhang A.2 wird das Reduzieren der geometrischen kovarianten Ableitung auf gewöhnliche partielle Ableitungen in  $F_{MN}$  auf Riemann-Räumen gezeigt, womit dies auch für den Spezialfall des  $AdS_5$  gilt. Die Konstante  $k_V$  ist so zu wählen, dass  $S_5$  in den natürlichen Einheiten dimensionslos wird.

#### 2.3.2 Gebundene Zustände

Bevor genauer auf die Spektralfunktion der Vektormesonen eingegangen wird, sollen in diesem Abschnitt einige Eigenschaften der obigen Beschreibung durch Bulk-Felder nachgezeichnet werden. Die zentrale Frage wird dabei sein, ob mit dem naiven Ansatz der Wirkung (2.17) aus Abschnitt 2.3.1, gebundene Zustände aus Quarks und Gluonen auf dem Rand des  $AdS_5$ , also insbesondere Vektormesonen beschreibbar sind.

Dazu wird als erstes die Bewegungsgleichung des Bulk-Feldes  $V_M$  benötigt. Diese ergibt sich infolge des Verschwindens der erste Variation der Wirkung (2.17) als:

$$0 = e^{A(z)} \eta^{LM} \eta^{KN} \left( -\left(\partial_K \ln\left(\frac{z}{L}\right)\right) F_{MN} + \partial_K F_{MN} \right).$$
(2.18)

Man vergleiche dazu die allgemeine Betrachtung von Vektorfeldern auf Riemann-Räumen im Anhang A.2, wobei zu beachten ist, dass sich die hier verwendete AdS-Metrik als Spezialfall einer konform-flachen Metrik (A.4) mit  $B(z) = -\ln\left(\frac{z}{R}\right)$ ergibt.

Ziel ist es nun, die Gleichung (2.18) in die Form einer Schrödinger-Gleichung zu überführen, um an dieser Eigenschaften für das Bulk-Feld abzulesen. Da man Vektorteilchen auf dem Rand des AdS beschreiben will, sind die Freiheitsgrade der Bulk-Felder zu verringern: ein Vektorfeld auf dem  $AdS_5$  besitzt fünf Freiheitsgrade, wobei ein massives Vektorteilchen im Minkowski-Raum nur drei Freiheitsgrade besitzt. Zu dieser Verringerung werden folgende Eichfixierungen für  $V_M$  verwendet:

$$V_z = 0$$
 (Strahlungseichung im  $AdS_5$ ), (2.19)

$$\eta^{MN}\partial_M V_N = 0$$
 (fünfdimensionale Lorentz-Eichung). (2.20)

Um diese Eichungen einzustellen, wird ausgenutzt, dass es sich bei den verwendeten Bulk-Feldern um U(1)-Eichfelder handelt. Setzt man die Eichungen (2.19) und (2.20) in Gleichung (2.18) ein, so folgt für die verbleibenden Komponenten  $V_{\mu}$  des Bulk-Feldes

$$0 = \eta^{\mu\nu} \left[ -\frac{\partial_z V_\mu}{z} - \eta^{\tau\lambda} \partial_\tau \partial_\lambda V_\mu + \partial_z^2 V_\mu \right], \qquad (2.21)$$

wobei  $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  die gewöhnliche vierdimensionale Minkowski-Metrik bezeichnet.

Da das Vektorfeld  $V_M$  auf dem Rand des AdS ein freies Teilchen beschreiben soll, bietet sich folgender Ansatz an:

$$V_{\mu}(x,z) \sim e^{ip_{\nu}x^{\nu}} \varepsilon_{\mu}(p)\phi(z), \qquad (2.22)$$

wobei p den Vierimpuls des Teilchens auf dem Rand und  $\varepsilon_{\mu}(p)$  dessen Polarisationsvektor bezeichnen. Für letzteren gilt aufgrund der Lorentz-Eichung (2.20) für alle p

$$p^{\mu}\varepsilon_{\mu}(p) = 0,$$

was gerade bedeutet, dass nur transversale Vektorfelder betrachtet werden.

Die Beschreibung des Vektorfeldes  $V_M$  reduziert sich also auf eine skalare Funktion  $\phi(z)$ . Setzt man obigen Ansatz nun in die Bewegungsgleichung (2.21) ein, so folgt:

$$-\partial_z^2 \phi(z) + \frac{\partial_z \phi(z)}{z} - m^2 \phi(z) = 0, \qquad (2.23)$$

wobei  $m^2 := p^{\nu} p_{\nu}$  als Quadrat der invarianten Masse des zu beschreibenden Teilchens auf dem Rand interpretiert wird.

Zur weiteren Evaluation wird folgender Ansatz verwendet:  $\phi(z) = e^{\frac{\ln z}{2}}\psi(z)$ . Damit erhält die Bewegungsgleichung (2.23) die Form einer stationären Schrödinger-Gleichung:

$$-\partial_z^2 \psi(z) + U(z)\psi(z) = m^2 \psi(z) \tag{2.24}$$

mit dem Potential  $U(z) = \frac{3}{4z^2}$ . Als Lösung dieser Gleichung ergibt sich dabei

$$\psi(z) = a\sqrt{z}\mathcal{J}_1(mz) + b\sqrt{z}\mathcal{Y}_1(mz), \qquad (2.25)$$

wobei  $\mathcal{J}_1(x)$  und  $\mathcal{Y}_1(x)$  die Bessel-Funktionen erster und zweiter Gattung, sowie *a* und *b* die Integrationskonstanten bezeichnen. Es sei diesbezüglich auf den Anhang D.1 verwiesen. An dieser Stelle ist schon ersichtlich, dass dies eine Lösung für jedes beliebige  $m^2$  ergibt und sich somit kein diskretes Massenspektrum einstellt. Das eigentliche Vektorfeld  $V_{\mu}(x,z)$  ergibt sich damit zu

$$V_{\mu}(x,z) = e^{ip_{\nu}x^{\nu}}\varepsilon_{\mu}(p)e^{\frac{\mathrm{in}\,z}{2}}\psi(z),$$

wobei  $\psi$  Lösung der Gleichung (2.24) ist. Insbesondere sind für  $V_{\mu}$  nur genau dann diskrete Zustände möglich, wenn für  $\psi$  Lösungen mit diskreten Werten für mexistieren. Letzteres ist jedoch nur dann der Fall, wenn das angegebene Potential U(z) ein lokales Minimum besitzt. Dies ist hier nicht gegeben, womit mit der obigen Wirkung (2.17) keine Beschreibung von Vektormesonen möglich ist.

In den folgenden Abschnitten werden Ansätze nachgezeichnet, welche auf der Basis der Schrödinger-Form der Bewegungsgleichung des Vektorfeldes  $V_M$  in den Eichungen (2.19) und (2.20) ein diskretes Massenspektrum erzeugen und damit eine Beschreibung von Vektormesonen ermöglichen.

#### 2.3.3 Hardwall-Modell

Wie man im Abschnitt 2.3.2 gesehen hat, lässt sich die Problematik des kontinuierlichen Massenspektrums der Vektorfelder auf dem  $AdS_5$  darauf reduzieren, dass für das Potential in der Schrödinger-Form der Bewegungsgleichung gilt  $U(z) \sim \frac{1}{z^2}$ , womit dieses für  $z \to \infty$  verschwindet. Ein Ansatz von [36] beziehungsweise [14] war, dieses Verschwinden mit Hilfe eines Cutoffs zu verhindern. Man beschränkt also das Intervall für die holographische Koordinate  $0 \le z \le z_{HW} < \infty$ , was einer Art Potentialtopf-Modell entspricht. Die dimensionsbehaftete Konstante  $z_{HW}$  muss hierbei durch experimentelle Daten fixiert werden und führt damit eine Skala in das Modell ein. Weiter fordert man, dass die Ränder des Potentialtopfs unendlich hoch sind, und somit die Felder für  $z \ge z_{HW}$  identisch verschwinden:

$$\psi(z) = 0$$
 für alle  $z \ge z_{HW}$ .

Aufgrund der Beschränkung des Potentials durch eine "harte Wand" werden solche Modelle auch Hardwall-Modelle genannt.

Innerhalb des Potentialtopfes, das heißt für  $0 < z < z_{HW}$  ergibt sich die Lösung (2.25), hierbei jedoch erweitert um eine zusätzliche Bedingung:

$$0 \stackrel{!}{=} \psi(z_{HW}). \tag{2.26}$$

Mit der Lösung (2.25) ist diese Bedingung äquivalent zu  $\mathcal{J}_1(mz_{HW}) = 0$ , wobei zu beachten ist, dass Nullstellen von  $\mathcal{J}_1$  auch Nullstellen von  $\mathcal{Y}_1$  sind. Bezeichnet  $j_{1,n}$  die *n*-te Nullstelle von  $\mathcal{J}_1(x)$  so kann man folgende Massengleichung aus der Bedingung (2.26) folgern:

$$m_n = \frac{j_{1,n}}{z_{HW}}.$$

Es kann ferner gezeigt werden, dass  $j_{1,n} \sim n$  für große n gilt, wobei für weitere Ausführungen auf den Anhang D.1 verwiesen sei. Hier wird die Zahl n als radiale Quantenzahl betrachtet, wobei im Hardwall-Modell die radialen Anregungen linear mit n skalieren:  $m_n \sim n$ .

#### 2.3.4 Softwall-Modell

Eine verbesserte Methode zum "Erzeugen" von diskreten Zuständen wurde in [23] eingeführt. Hierbei wird das Intervall für die holographische Koordinate nicht beschränkt, das heißt man formuliert das Modell für  $0 < z < \infty$ . Es wird stattdessen die Wirkung (2.17) durch einen Faktor  $e^{-c^2z^2}$  ergänzt, womit sich folgende Wirkung ergibt:

$$S_5 = -\frac{1}{k_V} \int d^5 x \frac{\sqrt{g}}{4} e^{-c^2 z^2} g^{MM'} g^{NN'} F_{MN} F_{M'N'}, \qquad (2.27)$$

wobei c eine noch zu fixierende dimensionsbehaftete Konstante des Modells bezeichnet, ähnlich dem Cutoff  $z_{HW}$  im Hardwall-Modell. Die Funktion  $\varphi(z) = c^2 z^2$ wird auch Dilaton genannt und spielt im Verlauf der vorliegenden Arbeit noch eine tragende Rolle.

Aus dem Verschwinden der ersten Variation obiger Wirkung ergibt sich folgende Bewegungsgleichung für  $V_M$ :

$$0 = e^{A(z)} \eta^{LM} \eta^{KN} \left[ -\partial_K \left( \ln \left( \frac{z}{L} \right) + c^2 z^2 \right) F_{MN} + \partial_K F_{MN} \right]$$

und unter Anwendung der Eichungen (2.19) und (2.20)

$$0 = \eta^{\mu\nu} \left[ -\left(\frac{1}{z} + 2c^2 z\right) \partial_z V_\mu - \eta^{\tau\lambda} \partial_\tau \partial_\lambda V_\mu + \partial_z^2 V_\mu \right].$$
(2.28)

Da auch hier das Ziel ist, freie Vektorteilchen auf dem Rand zu beschreiben, wird wieder der Ansatz (2.22) verfolgt, womit sich folgende Differentialgleichung für die noch zu bestimmende Funktion  $\phi(z)$  ergibt:

$$-\partial_z^2 \phi(z) + \left(\frac{1}{z} + 2c^2 z\right) \partial_z \phi(z) - m^2 \phi(z) = 0.$$
(2.29)

Um die Gleichung (2.29) wieder in eine Schrödinger-Form zu überführen, verwendet man den Ansatz:  $\phi(z) = e^{\frac{1}{2} \left( \ln \frac{z}{R} + c^2 z^2 \right)} \psi(z)$ , womit sich folgende Schrödinger-Gleichung ergibt:

$$-\partial_z^2 \psi(z) + U(z)\psi(z) = m^2 \psi(z), \qquad (2.30)$$

wobei das Potential U(z) diesmal gegeben ist durch

$$U(z) = \frac{3}{4z^2} + c^4 z^2.$$
(2.31)

Eine Lösung dieser Schrödinger-Gleichung ergibt sich dabei als

$$\psi(z) = a \left( cz \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{c^2 z^2}{2}} L_n^1(c^2 z^2) + b \left( cz \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{c^2 z^2}{2}} \mathcal{U}\left( -\frac{m^2}{4c^2} + 1, 0, c^2 z^2 \right), \quad (2.32)$$

wobei  $L_n^l(x)$  die assoziierten Laguerre-Polynome,  $\mathcal{U}(-n, l+1, x)$  die Kummer-Funktion zweiter Gattung, sowie *a* und *b* die Integrationskonstanten bezeichnen. Hierbei gilt für die Moden-Zahl  $n = \frac{m^2}{4c^2} - 1$ . Für weitere Ausführungen sei diesbezüglich auf den Anhang D.2 verwiesen.

Da die Moden-Zahl n der assoziierten Laguerre-Polynome nur natürliche Werte annehmen kann, ergibt sich für die Lösung (2.32) folgende radiales Anregungsspektrum:

$$m_n^2 = 4c^2 \left( n + 1 \right), \tag{2.33}$$

womit ein diskretes Teilchenspektrum mit  $m_n^2 \sim n$ erzeugt wird.

Die Konstante c wird zum Beispiel durch den Vergleich mit den experimentellen

Mode $n$	0	1	2
$(m_{\omega})_n$ in MeV	782	1420	1650

**Tabelle 2.2:** Experimentelle Werte der Massen der ersten drei Moden des  $\omega$ -Mesons, entnommen aus [31].

Werten der Massen der zu beschreibenden  $\omega$ -Mesonen fixiert. Hierzu sind in Tabelle 2.2 die experimentell beobachteten Massen der ersten drei Moden des  $\omega$ -Mesons angegeben. Den Arbeiten [8, 9] folgend wird in der vorliegenden Arbeit die Konstante c nur an den Grundzustand des  $\omega$ -Mesons, also der Fall n = 0, gefittet, wobei sich mit Gleichung (2.33) ergibt

$$c = \frac{(m_{\omega})_0}{2} = 391 \,\mathrm{MeV}.$$
 (2.34)

Eine weitere Möglichkeit die Konstante c zu fixieren, ist das lineare Fitten der Werte aus Tabelle 2.2 mit Hilfe von Gleichung (2.33) als Regressionsfunktion. Dabei ergibt sich ein Wert von c = 478 MeV, wobei sich damit aus Gleichung (2.33) nicht der korrekte Wert für die Grundzustandsenergie des  $\omega$ -Mesons ergibt, weshalb im weiteren Verlauf dieser Arbeit der Wert (2.34) verwendet wird.

#### 2.3.5 Spektralfunktion mit AdS/CFT

In diesem Abschnitt soll die Bestimmung der Spektralfunktion von Vektormesonen mit Hilfe des im Abschnitt 2.3.4 vorgestellten Softwall-Modells exemplarisch skizziert werden. Die grundlegende Verbindung zwischen den klassischen Feldern auf dem AdS und der retardierten Green-Funktion (2.15) ist hierbei gegeben durch die Operator-Feld-Dualität, spezifiziert durch den Ansatz (2.14). Letzterer ist im obigen Modell gegeben durch

$$G_R(\omega) = \frac{\delta^2 \left\langle \exp\left(i \int V_0 \mathcal{O}\right) \right\rangle}{\delta V_0(-\omega) \delta V_0(\omega)} = \frac{\delta^2 \exp\left(i S_5^{\text{on-shell}} \left[V(x,z)\right]\right)}{\delta V_0(-\omega) \delta V_0(\omega)} \bigg|_{z \to 0}.$$

Aufgrund der Forderung, dass  $S_5$  nur bilineare Terme in den Bulk-Feldern enthalten soll und die Quellen  $V^0$  nach der Funktionalableitung identisch Null gesetzt werden, reduziert sich die Exponentialfunktion im letzten Ausdruck auf  $iS_5^{\text{on-shell}}$ :

$$G_R(\omega) = \frac{\delta^2 \left( i S_5^{\text{on-shell}} \left[ V(x,z) \right] \right)}{\delta V_0(-\omega) \delta V_0(\omega)} \bigg|_{z \to 0}.$$
(2.35)

Die On-Shell-Wirkung  $S^{\text{on-shell}}$  ergibt sich durch das Einsetzen der Bewegungsgleichung für  $V_M$  in die Wirkung  $S_5$ . Ziel ist dabei das Reduzieren der Wirkung auf Terme, welche nur noch auf den Randpunkten des z-Intervalls auszuwerten sind. Im Folgenden soll exemplarisch das Softwall-Modell aus dem Abschnitt 2.3.4 betrachtet werden, womit sich die On-Shell-Wirkung ergibt als

$$S_5^{\text{on-shell}} = \frac{R}{2k_V} \frac{e^{-c^2 z^2}}{z} \int d^4 x \, \eta^{\mu\nu} V_\mu \partial_z V_\nu \Big|_{z \to 0}^{z \to \infty}.$$
 (2.36)

Man vergleiche dazu den Anhang A.3, wobei sich das Softwall-Modell als Spezialfall einer konform flachen Metrik mit  $B(z) = -\ln\left(\frac{z}{R}\right) - c^2 z^2$  ergibt.

Problematisch an der obigen Gleichung ist, dass  $S_5$  und damit auch  $S_5^{\text{on-shell}}$ Funktionale der vollen Bulk-Felder  $V_M$  sind und somit bei der Funktionalableitung Terme der Form  $\frac{\delta V}{\delta V^0}$  auftreten. Um dem aus dem Weg zu gehen, werden  $V_M(x,z)$ und dessen Randprojektion verbunden durch den Bulk-to-Boundary-Propagator K(p,z), welcher durch folgenden Ansatz definiert wird:

$$V_M(x,z) = \int d^4 p \, e^{ipx} K(p,z) V_M^0(p), \qquad (2.37)$$

wobei  $V_M^0(p)$  gerade die Randprojektion von  $V_M$  im Impulsraum bezeichnet. Setzt man dies in die Wirkung (2.36), so folgt

$$S^{\text{on-shell}} = \frac{R}{2k_V} \int d^4x \, \int d^4p \, \int d^4p' \, e^{ix(p+p')} \eta^{\mu\nu} V^0_\mu(p) V^0_\nu(p') \frac{K(p,z)\partial_z K(p',z)}{z} \bigg|_{z\to 0}$$
$$= \frac{R}{2k_V} \int d^4p \, \int d^4p' \, \delta^4(p+p') \, \eta^{\mu\nu} V^0_\mu(p) V^0_\nu(p') \frac{K(p,z)\partial_z K(p',z)}{z} \bigg|_{z\to 0},$$

wobei  $\delta^4(\ldots)$  die vierdimensionale Diracsche Deltadistribution bezeichnet. Außerdem fällt der obere Grenzübergang in z weg, da  $\frac{e^{-c^2z^2}}{z} \to 0$  falls  $z \to \infty$ . Mit dem Bulk-to-Boundary-Propagator ergibt sich die On-Shell-Wirkung als

$$S^{\text{on-shell}} = \frac{R}{2k_V} \int d^4p \, \eta^{\mu\nu} V^0_\mu(p) V^0_\nu(-p) \frac{K(p,z)\partial_z K(-p,z)}{z} \bigg|_{z \to 0}$$

welche nun als Funktional von  $V^0(p)$  aufgefasst werden kann. Setzt man dies in den Witten-Ansatz (2.35) ein, so folgt im Schwerpunktsystem

$$G_R(\omega) = \frac{R}{2k_V} K(\omega, z) \frac{\partial_z K(-\omega, z)}{z} \bigg|_{z \to 0}$$

Die Bestimmung der retardierten Green-Funktion reduziert sich also auf die Bestimmung des Bulk-to-Boundary-Propagators. Um für letzteren eine Bestimmungsgleichung zu erhalten, setzt man den Ansatz (2.37) in die Bewegungsgleichung (2.28) für  $V_M$  ein.

Zur Fixierung der Konstante  $\frac{R}{k_V}$  sei auf [11] und [23] verwiesen, wobei sich im Softwall-Modell

$$\frac{R}{k_V} = \frac{N_c}{12\pi^2} \tag{2.38}$$

ergibt. Hierbei bezeichnet  $N_c$  die Anzahl der Farbladungen.

#### 2.3.6 Vektormesonen bei endlichen Temperaturen

Die grundlegende Idee besteht darin, den AdS um ein schwarzes Loch zu erweitern. Letzteres besitzt nach [6, 19] eine Thermodynamik, also insbesondere eine endliche Temperatur. Der Ansatz ist, diese Temperatur als Temperatur der Randtheorie zu interpretieren. Es wird also die Temperaturabhängigkeit der Randtheorie durch die Thermodynamik des schwarzen Lochs im AdS beschrieben.

Das schwarze Loch wird derart in den AdS eingefügt, dass sich die Singularität in der Metrik nur für einen Wert der holographischen Koordinate z (die Position des Ereignishorizonts) ausbildet. Dies geschieht also in Analogie zur Schwarzschild-Lösung, bei der sich die Position des kugelsymmetrischen Ereignishorizonts allein durch die radiale Koordinate angeben lässt. Da dieses schwarze Loch die holographische Koordinate beschränkt, spricht man hierbei auch von einer Black-Brane, was im folgenden synonym verwendet wird. Für Grundlagen der Thermodynamik von schwarzen Löchern im AdS sei auf [21] verwiesen, wo auch auf den Unterschied zwischen Schwarzschild-Lösung und schwarzem Loch im AdS eingegangen wird. Für die Black-Brane im AdS wird hier folgender Ansatz verfolgt:

$$g_{MN}dx^{N}dx^{M} = e^{2A} \left( f \cdot dt^{2} - \sum_{i=1}^{3} \left( dx^{i} \right)^{2} - \frac{dz^{2}}{f} \right), \qquad (2.39)$$

wobei A = A(z) den konformen Faktor und  $f = f(z; z_h)$  die Blackness-Funktion bezeichnet. Letztere beschreibt dabei die Eigenschaften der eingefügten Black-Brane, wobei die Position des Ereignishorizontes mit  $z_h$  bezeichnet wird. An die Blackness-Funktion werden folgende Forderungen gestellt

$$f(z = z_h; z_h) = 0 \qquad \text{für alle } z_h, \tag{2.40}$$

$$f(z=0;z_h) = 1 \qquad \text{für alle } z_h, \tag{2.41}$$

$$\lim_{z_h \to \infty} f(z; z_h) = 1 \qquad \text{für alle } z. \tag{2.42}$$

Die erste dieser Eigenschaften von f(z) definiert die Position  $z_h$  des Ereignishorizontes. Sollte die Blackness-Funktion hierbei mehrere Nullstellen besitzen, so wird  $z_h$  als der kleinste reelle positive Wert für z definiert, für welchen die Nullstellenbedingung erfüllt ist. Die zweite Eigenschaft stellt sicher, dass beim Übergang vom AdS zur Randtheorie, also für  $z \to 0$ , keine geometrischen Effekte der Black-Brane auftreten. Die letzte der Bedingungen trägt der Vorstellung Rechnung, dass beim Verschieben des Horizontes nach  $+\infty$  die Black-Brane keinen Einfluss mehr auf die Raumgeometrie besitzt, also ein AdS mit der Metrik (2.8) entsteht.

Der  $AdS_5$  ist zwar Lösung der Einsteinschen Feldgleichung, jedoch ist nicht sichergestellt, dass dies auch für den AdS erweitert um die Black-Brane gilt. In diesem Zusammenhang sind die funktionalen Ausdrücke für A und f im Folgenden durch die Einsteinschen Feldgleichungen (2.9) festzulegen. Setzt man hierfür den Ansatz (2.39) in Gleichung (2.9) ein, so folgt

$$0 = \partial_z^2 A - \left(\partial_z A\right)^2, \tag{2.43}$$

$$0 = 3\left(\partial_z A\right)\left(\partial_z f\right) + \partial_z^2 f,\tag{2.44}$$

$$0 = 12f\partial_z^2 A - \partial_z^2 f + Ae^{2A}.$$
(2.45)

Aus der Gleichung (2.43) ergibt sich  $A(z) = -\ln(z + C_1) + C_2$ . Aufgrund der Invarianz unter Reskalierung der Koordinaten lässt sich  $C_1 = 0$  wählen. Für die Konstante  $C_2$  wertet man Gleichung (2.45) für z = 0 aus und beachtet dabei die Bedingung (2.41) an f(z). Damit ergibt sich dann  $e^{2C_2} = -\frac{12}{A}$ , was nach Abschnitt 2.2.1 gerade der AdS-Skala  $R^2$  entspricht.

Zur Bestimmung von f(z) setze man die gerade gefundene Lösung in Gleichung (2.44) ein. Die Lösung der so entstehenden Gleichung ergibt sich dabei als  $f(z) = \tilde{C}_1 - \tilde{C}_2 z^4$ . Die Konstante  $\tilde{C}_1$  folgt dabei aus der Forderung (2.41) zu  $\tilde{C}_1 = 1$  und die Konstante  $\tilde{C}_2$  ergibt sich aus der Forderung (2.40) zu  $\tilde{C}_2 = \frac{1}{z_h^4}$ . Zusammenfassend ergibt sich also aus dem Ansatz (2.39) unter den Vorrausset-

zungen (2.40) und (2.41):

$$A(z) = -\ln\left(\frac{z}{L}\right),\tag{2.46}$$

$$f(z) = 1 - \left(\frac{z}{z_h}\right)^4. \tag{2.47}$$

Es sei noch anzumerken, dass der hierbei gefundene Ausdruck für f(z) die Bedingung (2.42) erfüllt. Im Folgenden wird ein Raum, welcher durch die Metrik (2.39) mit den Funktionen (2.46) und (2.47) beschrieben wird, kurz AdS-BH genannt. Die Temperatur eines schwarzen Lochs ist im Allgemeinen gegeben durch die Hawking-Temperatur

$$T = \frac{\kappa}{2\pi},$$

wobei  $\kappa$  die Oberflächengravitation des schwarzen Lochs auf dem Ereignishorizont bezeichnet. Diese ergibt sich im vorliegenden Fall als

$$\kappa = -\frac{\partial_z g_{tt}}{2\sqrt{-g_{tt} \cdot g_{zz}}} \bigg|_{z=z_h} = -\frac{2f\partial_z A + \partial_z f}{2} \bigg|_{z=z_h} = -\frac{\partial_z f}{2} \bigg|_{z=z_h},$$

womit für die Hawking-Temperatur der Black-Brane folgt

$$T = -\frac{\partial_z f}{4\pi}\Big|_{z=z_h} = \frac{1}{\pi z_h}.$$
(2.48)

Die Idee zur holographischen Beschreibung von Hadronen in einem Medium mit endlicher Temperatur T ist, Modelle, wie sie im Abschnitt 2.3 vorgestellt wurden, vor dem Hintergrund des oben eingeführten AdS-BH zu betrachten. Im Softwall-Modell-Ansatz wurde dies erstmals in [8, 29] für Glueballs, sowie in [15] für Vektormesonen verfolgt. Es sei diesbezüglich auch auf [9], sowie [10] verwiesen, wo noch andere AdS-BH-Hintergründe betrachtet werden.

In den zitierten Arbeiten wurde für das Softwall-Modell im AdS-BH die Wirkung (2.27) betrachtet, wobei die AdS-Metrik durch die Metrik (2.39) zu ersetzen ist. Durch Gleichung (2.48) ist diese Wirkung über die Metrik dann temperaturabhängig. Es lassen sich damit für endliche Temperaturen Spektralfunktionen, wie im Abschnitt 2.3.5 und Schrödinger-Potentiale, wie beispielsweise im Abschnitt 2.3.4, bestimmen. Dies soll im folgendem Kapitel in einem allgemeineren Rahmen genauer diskutiert werden.
# 3 Spektralfunktionen

Im folgenden Kapitel wird die Idee aus [23] zur Erzeugung eines diskreten Massenspektrums im Fall finiter Temperaturen diskutiert. Motiviert durch [9] ist hierbei der Ansatz den AdS-BH durch ein ad hoc eingeführtes Dilatonprofil konform zu deformieren, um so zu Modellen zu gelangen, welche Vektormesonen bei endlichen Temperaturen beschreiben. Hierbei soll das Vorgehen zur Bestimmung der Spektralfunktion, welches in Abschnitt 2.3.5 vorgestellt wurde, angewendet und für die verschiedene Dilatonansätze diskutiert werden. Die Spektralfunktionen werden dabei numerisch bestimmt und die Positionen der auftretenden Peaks für verschiedene Temperaturen untersucht.

# 3.1 Grundlagen und Definitionen

#### 3.1.1 Die untersuchten Modelle

Da die in der vorliegenden Arbeit untersuchten Vektormesonen als Probeteilchen in einem Medium finiter Temperatur betrachtet werden, "leben" die nach dem Abschnitt 2.3 zur Beschreibung verwendeten Vektorfelder vor dem Hintergrund eines AdS-BH. Hierbei wird also die gravitative Wechselwirkung der Vektorfelder mit dem Raum vernachlässigt. Die vorausgesetzte Wirkung besitzt folgende Form:

$$S = -\frac{1}{4k_V} \int d^5x \sqrt{g} g^{MM'} g^{NN'} F_{MN} F_{M'N'}, \qquad (3.1)$$

wobei  $F_{MN} = \partial_M V_N - \partial_N V_M$  den Feldstärketensor und  $(g_{MN})$  die AdS-BH-Metrik (2.39) mit den Ausdrücken (2.46) und (2.47) bezeichnet. Im Anhang B wird gezeigt, dass sich trotz der Beschränkung der holographischen Koordinate durch eine Black-Brane kein diskretes Massenspektrum einstellt. Motiviert durch das im Abschnitt 2.3.4 vorgestellte Softwall-Modell, wird folgender Ansatz verfolgt

$$g_{MN} \to e^{2\varphi(z)} g_{MN}. \tag{3.2}$$

Hierbei bezeichnet  $\varphi(z)$  das Dilatonprofil, oder kurz das Dilaton, welches parametrisch auch von einer oder mehreren dimensionsbehafteten Konstanten abhängt. Obige konforme Deformation der AdS-BH-Metrik erzeugt den Hintergrund, vor welchem für verschiedene  $\varphi(z)$  die Vektorfelder  $V_M$  untersucht werden.

Wie schon im Abschnitt 2.3.2 erläutert, wird für die Vektorfelder im Folgenden die Eichfixierung

$$V_z = 0$$
 (Strahlungseichung im AdS-BH) (3.3)

verwendet. Ferner wird vorausgesetzt, dass die betrachteten Vektorfelder eine gewisse Regularität auf dem Rand des AdS-BH besitzen:

$$\lim_{|x|\to\infty} V_M(x,z) = 0 \qquad \text{für alle } z.$$

Es werden die Ansätze vorgestellt, welche für das Dilaton profil  $\varphi(z)$  gemacht werden.

### KKSS-Ansatz

Der erste ad hoc Ansatz, welcher für das Dilaton verfolgt wird, ist

$$\varphi(z) := c^2 z^2. \tag{3.4}$$

Dieser wird im Folgenden kurz als KKSS-Ansatz, nach den Autoren von [23], bezeichnet und ist durch das im Abschnitt 2.3.4 vorgestellte Softwall-Modell motiviert, welches sich bei T = 0 ergibt. Für endliche Temperaturen, welche über eine Metrik der Form (2.39) eingebaut werden, wurde der obige KKSS-Ansatz beispielsweise in [9, 15, 28] diskutiert. In diesem Abschnitt sollen diese Arbeiten nachgezeichnet, die Resultate diskutiert und mit einem weiteren Ansatz für das Dilatonprofil verglichen werden. Die dimensionsbehaftete Konstante c wird hierbei so gewählt, dass das Dilaton profil  $\varphi$  dimensionslos wird und bei T = 0 durch Gleichung (2.34) fixiert.

#### Huang-Ansatz

Als zweiter Ansatz für das Dilatonprofil wird im Folgenden

$$\varphi(z) := c_1^2 z^2 \tanh\left(\frac{c_2^4 z^2}{c_1^2}\right) \tag{3.5}$$

untersucht. Dieses Dilaton wurde in [26] im Rahmen dynamischer Dilatonuntersuchungen vorgeschlagen, um folgendes Verhalten einzustellen:

$$\begin{split} \varphi(z) &\to c_2^4 z^4 \qquad \text{für } z \to 0, \\ \varphi(z) &\to c_1^2 z^2 \qquad \text{für } z \to \infty. \end{split}$$

Die Motivation dieses Dilaton-Ansatzes besteht in der vorliegenden Arbeit darin, dass im Unterschied zum obigen KKSS-Ansatz die zwei dimensionsbehaftete Größen  $c_1$  und  $c_2$  eingeführt und deren Einfluss auf die Beschreibung von Vektormesonen bei finiten Temperaturen untersucht werden.

#### 3.1.2 Formulierung des Problems

Ausgehend von der Wirkung (3.1) wird in diesem Abschnitt zur Bestimmung der Spektralfunktion Folgendes benötigt: die Bestimmungsgleichung für den Bulk-to-Boundary-Propagator und die On-Shell-Form der Wirkung (3.1).

#### Bestimmungsgleichung für den Bulk-to-Boundary-Propagator

Im Anhang A.2 wird die Bewegungsgleichung für  $V_M$  für eine allgemeine Form einer BH-Metrik (A.6) hergeleitet:

$$0 = e^B \left( f \partial^i F_{zi} - \partial_t F_{zt} \right), \tag{3.6}$$

$$0 = -\frac{e^B}{f} \partial^i F_{ti} - \partial_z \left( e^B F_{tz} \right), \qquad (3.7)$$

$$0 = -\frac{e^B}{f}\partial_t F_{it} + e^B\partial^l F_{il} + \partial_z \left(e^B f F_{iz}\right)$$
(3.8)

mit  $F_{MN} = \partial_M V_N - \partial_N V_M$  und  $(x^M) = (t, x^1, x^2, x^3, z)$ , wobei B = B(z) den konformen Faktor und f = f(z) die Blackness-Funktion bezeichnen. Dabei ensteht der hier vorliegende Fall für  $f(z) = 1 - \frac{z^4}{z_h^4}$ , sowie  $B(z) = -\ln\left(\frac{z}{R}\right) - \varphi(z)$  mit dem Dilaton  $\varphi$ . Man betrachte die Fourier-Transformation von  $V_{\mu}$  in den Minkowski-Koordinaten x

$$V_{\mu}(x,z) = \int d^4 p \, e^{ipx} V_{\mu}(p,z); \tag{3.9}$$

damit ergeben sich in der Strahlungseichung (3.3) aus den Bewegungsgleichungen (3.6), (3.7) und (3.8) selbige im Impulsraum. Im Ruhesystem  $(p^{\mu}) = (-\omega, 0, 0, 0)$  folgen insbesondere

$$0 = \partial_z V_t(\omega, z), \tag{3.10}$$
$$0 = \partial_z^2 V_t(\omega, z),$$

$$0 = \partial_z^2 V_i(\omega, z) + \left(\partial_z B(z) + \frac{\partial_z f(z)}{f(z)}\right) \partial_z V_i(\omega, z) + \frac{\omega^2}{f^2(z)} V_i(\omega, z),$$
(3.11)

wobei i = 1,2,3 die Indizes der räumlichen Komponenten von  $V_{\mu}$  bezeichnen. Der Wechsel ins Ruhesystem entkoppelt also die Bewegungsgleichungen von  $V_{\mu}$  und es lässt sich zeigen, dass Gleichung (3.11) gerade den transversalen Anteil des Vektorfeldes  $V_{\mu}$  beschreibt (für genaue Ausführungen sei diesbezüglich auf [28] verwiesen). Im Folgenden werden nur noch die räumlichen Komponenten von  $V_{\mu}$  betrachtet. Setzt man für diese den im Abschnitt 2.3.5 erläuterten Bulk-to-Boundary-Propagator  $K(\omega, z)$  ein, so erfüllt Letzterer die gleiche Bewegungsgleichung, wie  $V_i(\omega, z)$ :

$$0 = \partial_z^2 K(\omega, z) + \left(\partial_z B(z) + \frac{\partial_z f(z)}{f(z)}\right) \partial_z K(\omega, z) + \frac{\omega^2}{f^2(z)} K(\omega, z), \qquad (3.12)$$

womit eine Bestimmungsgleichung für K gefunden ist, welche als Grundlage für den weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit verwendet wird.

### Bestimmung der On-Shell-Wirkung

Im Anhang A.3 wird die On-Shell-Wirkung für den Fall einer allgemeinen BH-Metrik hergeleitet:

$$S^{\text{on-shell}} = \frac{1}{2k_V} \int d^4x \left( f e^{-B} g^{\mu\nu} V_{\mu} \partial_z V_{\nu} \right) \bigg|_{z \in \partial \mathcal{I}}$$

wobei  $(g_{\mu\nu}) = e^{2B} \operatorname{diag}(f, -1, -1, -1), B = B(z)$  den konformen Faktor und f = f(z) die Blackness-Funktion bezeichnet. Der in dieser Arbeit untersuchte Fall ergibt sich wieder mit  $f(z) = 1 - \frac{z^4}{z_h^4}$ , sowie  $B(z) = -\ln\left(\frac{z}{R}\right) - \varphi(z)$ . Da die Black-Brane den AdS-BH beschränkt, sind die Grenzen von z gegeben durch  $z \to 0$  und  $z \to z_h$ . Es folgt dabei

$$\begin{split} S^{\text{on-shell}} &= \frac{1}{2k_V} \int d^4x \, \left( f e^{-B} g^{\mu\nu} V_\mu \, \partial_z V_\nu \, \right) \, \bigg|_{z=0}^{z=z_h} \\ &= \frac{1}{2k_V} \int d^4x \, \left[ \left( f e^{-B} g^{tt} V_t \, \partial_z V_t \, \right) + \left( f e^{-B} g^{ij} V_i \, \partial_z V_j \, \right) \right]_{z=0}^{z=z_h} \\ &= \frac{1}{2k_V} \int d^4x \, \left[ \left( e^B V_t \, \partial_z V_t \, \right) + \left( f e^B \delta^{ij} V_i \, \partial_z V_j \, \right) \right]_{z=0}^{z=z_h} \, . \end{split}$$

Betrachtet man nun den ersten Term im Integranden und setzt die Fourier-Transformation (3.9) ein, so folgt:

$$\left(e^{B}V_{t}\,\partial_{z}V_{t}\,\right) = \int d^{4}p\,e^{ipx}e^{B}V_{t}\left(\omega,z\right)\partial_{z}V_{t}\left(\omega,z\right) = 0,$$

für alle z, wobei die Bewegungsgleichung (3.10) verwendet wurde. Damit ergibt sich die On-Shell-Wirkung als

$$S^{\text{on-shell}} = \frac{1}{2k_V} \int d^4x \left( f e^B \delta^{ij} V_i \,\partial_z V_j \right) \bigg|_{z=0},$$

wobei die obere Grenze wegen  $f(z_h) = 0$  wegfällt. Setzt man nun  $B(z) = -\ln\left(\frac{z}{L}\right) - \varphi(z)$ ein und verwendet f(0) = 1, sowie  $\varphi(0) = 0$  für die in der vorliegenden Arbeit untersuchten Dilatonprofile, so folgt für die On-Shell-Form der Wirkung (3.1)

$$S^{\text{on-shell}} = \frac{R}{2k_V} \int d^4x \,\delta^{ij} V_i \left. \frac{\partial_z V_j}{z} \right|_{z=0}.$$
(3.13)

Dies entspricht gerade dem exemplarischen Fall aus Abschnitt 2.3.5, was zu erwarten war, da die Funktionen f(z) und  $\varphi(z)$  gerade so eingerichtet wurden, dass für den Grenzfall  $z \to 0$  die Wirkung der Vektorfelder auf dem puren AdS entsteht.

### Bestimmung der Spektralfunktion

Wie schon im Abschnitt 2.3.5 wird nun die retardierte Green-Funktion aus der On-Shell-Wirkung mit Hilfe des Bulk-to-Boundary-Propagators gewonnen. Dieser wird im vorliegenden Fall für die räumlichen Komponenten des Vektorfeldes  $V_{\mu}$ angesetzt

$$V_i(x,z) = \int d^4 p \, K(p,z) V_i^0(p). \tag{3.14}$$

Aus der On-Shell-Wirkung (3.13) folgt die retardierte Green-Funktion durch Ableiten nach den Quellen  $V_i^0$ , und es ergibt sich im Ruhesystem  $(p^{\mu}) = (-\omega, 0, 0, 0)$ 

$$G_R(\omega) = \frac{R}{2k_V} K(\omega, z) \frac{\partial_z K(-\omega, z)}{z} \bigg|_{z \to 0}.$$
(3.15)

Das Problem besteht nun im Folgenden darin, die Gleichung (3.12) für verschiedene  $\omega$  numerisch zu lösen und die Lösung in die Gleichung (3.15) für  $G_R(\omega)$  einzusetzen. Der Imaginärteil von  $G_R$  ergibt dann die gesuchte Spektralfunktion:

$$\rho(\omega) = \operatorname{Im} \left( G_R(\omega) \right).$$

# 3.2 Spektralfunktion im KKSS-Ansatz

In diesem Abschnitt soll die Spektralfunktion im KKSS-Ansatz (3.4) bestimmt und diskutiert werden. Dazu wird die Bestimmungsgleichung für den Bulk-to-Boundary-Propagator (3.12) in diesem Ansatz numerisch gelöst, wobei das diesbezügliche Vorgehen [35] entnommen ist.

### 3.2.1 Numerische Bestimmung der Spektralfunktion

Den Ausführungen in [35] folgend, sind die asymptotischen Lösungen der Differentialgleichung (3.12) im KKSS-Ansatz zu bestimmen. Als erstes wird hierbei zu dimensionslosen Koordinaten  $u := \frac{z}{z_h}$  übergegangen, womit  $u \to 0$  dem Übergang zur Randtheorie und  $u \to 1$  der Betrachtung auf dem Horizont des schwarzen Lochs im AdS-BH entspricht. Im KKSS-Ansatz folgt damit aus Gleichung (3.12)

$$\partial_u^2 K(\omega, u) + F_1(u)\partial_u K(\omega, u) + F_0 K(\omega, u) = 0, \qquad (3.16)$$

mit den Koeffizienten

$$F_1(u) = -\frac{1}{u} - 2c^2 z_h^2 u - \frac{4u^3}{1 - u^4},$$
  
$$F_0(u) = \frac{\omega^2 z_h^2}{(1 - u^4)^2}.$$

Die Differentialgleichung (3.16) wird für die Fälle  $u \to 0$  und  $u \to 1$  analytisch gelöst und die Randbedingungen an die numerische Lösung von Gleichung (3.16) durch die Randbedingungen der asymptotischen Lösungen fixiert.

### Asymptotik bei $u \rightarrow 1$

Die Idee zum Lösen der Differentialgleichung (3.16) für  $u \to 1$  besteht darin, einen Ansatz der Form  $K \sim \varepsilon^{\lambda}$  mit einem noch zu bestimmenden  $\lambda \in \mathbb{R}$  zu verfolgen, wobei  $\varepsilon := 1 - u$ . Man entwickle dann die Koeffizienten  $F_{0,1}(\varepsilon)$  um  $\varepsilon = 0$ , setze diese Entwicklungen in die Differentialgleichung (3.16) ein und betrachte nur Terme mit führender Ordnung  $\varepsilon^{\lambda}$ . Multipliziert man die Differentialgleichung (3.16) mit  $\varepsilon^2$ , so ergeben sich in diesem Ansatz:

$$\varepsilon^2 \partial_u^2 K \sim \varepsilon^{\lambda}, \qquad \varepsilon^2 \partial_u K \sim \varepsilon^{\lambda+1}, \text{ sowie} \qquad \varepsilon^2 K \sim \varepsilon^{\lambda+2}.$$
 (3.17)

Es spielen also in der Entwicklung von  $F_1$  nur Terme  $\sim \frac{1}{\varepsilon^a}$  und in der Entwicklung von  $F_0$  nur Terme  $\sim \frac{1}{\varepsilon^{a+1}}$  mit jeweils  $a \ge 1$  eine Rolle. Für die Entwicklungen der Koeffizienten ergibt sich

$$F_{1}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon),$$
  

$$F_{0}(\varepsilon) = \omega^{2} z_{h}^{2} \left( \frac{1}{16\varepsilon^{2}} + \frac{3}{16\varepsilon} + \frac{19}{64} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Vernachlässigt man alle Terme, welche nach der obigen Argumentation (3.17) keinen Beitrag zur führenden Ordnung liefern, so ergibt sich eine asymptotische Differentialgleichung für  $\varepsilon \ll 1$ ,

$$\varepsilon^2 \partial_u^2 K + \varepsilon \partial_u K + \frac{\omega^2 z_h^2}{16} K = 0.$$

Mit dem Ansatz $K\sim \varepsilon^{\lambda}$ folgt damit

$$\lambda_{\pm} = \pm \frac{i}{4} \sqrt{\omega^2 z_h^2}.$$

Die asymptotischen Lösungen für K sind also in der Umgebung von u = 1 gegeben durch

$$K_{\pm}(\omega, u) = (1 - u)^{\pm \frac{i}{4}\sqrt{\omega^2 z_h^2}} = \left(1 - \frac{z}{z_h}\right)^{\pm \frac{i}{4}\sqrt{\omega^2 z_h^2}},$$
(3.18)

wobei  $K_+$  als auslaufende Lösung und  $K_-$  als einfallende Lösung bezeichnet wird. Wie schon in [35] angemerkt, ist nur die einfallende Lösung als physikalisch anzusehen, weswegen der Koeffizient von  $K_+$  im weiteren Verlauf verschwinden muss. Diese Forderung trägt der Vorstellung Rechnung, dass Wellen im Rahmen einer klassischen Betrachtung nur von einem schwarzen Loch absorbiert, jedoch nicht von diesem ausgesendet werden.

Es sei noch festgestellt, dass die asymptotischen Lösungen (3.18) unabhängig von der Skala c sind. Wie sich hierbei herausstellt, haben Dilatonprofile, welche sich

durch ein Polynom darstellen lassen, das heißt keine Terme der Ordnung  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^a}\right)$ mit a > 0 besitzen, keinen Einfluss auf die Asymptotik bei  $u \to 1$ .

### Asymptotik bei $u \to 0$

Für die Asymptotik bei  $u = \varepsilon$  mit  $\varepsilon \ll 1$  entwickelt man die Koeffizienten  $F_1$  und  $F_0$  um  $\varepsilon = 0$  und erhält

$$F_1(\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon),$$
  
$$F_0(\varepsilon) = \omega^2 z_h^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$$

Damit ergibt sich für die führenden Terme bei $\varepsilon \ll 1$ 

$$\varepsilon^2 \partial_u^2 K - \varepsilon \partial_u K = 0.$$

Mit dem Ansatz  $K \sim \varepsilon^{\lambda}$  folgt daraus  $\lambda_1 = 0$  sowie  $\lambda_2 = 2$ , womit sich zwei linear unabhängige Lösungen ergeben:  $K_1(\varepsilon) = 1$  und  $K_2(\varepsilon) = \varepsilon^2$ . Die asymptotische Lösung der Gleichung (3.16) für  $u \ll 1$  folgt damit als

$$K(\omega, u) = \alpha(\omega) + \beta(\omega)u^2 = \alpha(\omega) + \beta(\omega)\frac{z^2}{z_h^2},$$
(3.19)

wobei  $\alpha$  und  $\beta$  die Integrationskonstanten bezeichnen. Die Konstanz ist hierbei bezüglich u beziehungsweise z gemeint, denn für verschiedene  $\omega$  ergeben sich auch verschiedene Werte für  $\alpha$  und  $\beta$ .

Die Integrationskonstante  $\alpha$  lässt sich durch folgende Betrachtung fixieren. Setzt man den Ausdruck (3.14) in die vorausgesetzte Asymptotik (2.16) für das Vektorfeld  $V_i(x,z)$  ein, so folgt für den Bulk-to-Boundary-Propagator:  $K(\omega, 0) \stackrel{!}{=} 1$ , was gerade  $\alpha = 1$  für alle  $\omega$  zur Folge hat.

Man stellt hierbei ebenfalls fest, dass diese asymptotische Lösung unabhängig von der Skala c ist. Ferner ist diese Lösung sogar unabhängig von der angesetzten Dilatonfunktion, falls für diese gilt:  $\varphi(z) \to 0$ , für  $z \to 0$ .

#### Numerische Bestimmung der Spektralfunktion

Zur Bestimmung der Spektralfunktion ist der Bulk-to-Boundary-Propagator nicht auf dem gesamten Intervall nötig. Dies erkennt man daran, dass in der Bestimmung der retardierten Green-Funktion (3.15) nur die Werte von  $K(\omega, z)$  für  $z \to 0$ benötigt werden, was hier gerade dem Fall  $u \to 0$  entspricht. Es ist also möglich die asymptotische Lösung (3.19) zu verwenden, womit sich für die retardierte Green-Funktion in der dimensionslosen Koordinate  $u := \left(\frac{z}{z_h}\right)$  ergibt

$$G_R(\omega) = \frac{R}{2k_V} \left( 1 + \beta(\omega)u^2 \right) \frac{\partial_u \left( 1 + \beta(\omega)u^2 \right)}{z_h^2 u} \bigg|_{u \to 0} = \frac{R}{k_V} \frac{\beta(\omega)}{z_h^2}.$$

Das Problem reduziert sich also auf die numerische Bestimmung der Integrationskonstante  $\beta(\omega)$ . Hierzu integriert man Gleichung (3.16) von u = 0 nach u = 1, wobei man als Anfangsbedingung die Asymptotik von  $K(\omega, u)$  für  $u \to 0$  verwendet, also  $K_1(0) = 1$  und  $\partial_u K_1(0) = 0$  sowie  $K_2(0) = 0$  und  $\partial_u K_2(0) = 0$ . Dies führt zu vier numerischen Ausdrücken, welche mit  $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \partial_u \tilde{K}_1$  sowie  $\partial_u \tilde{K}_2$  bezeichnet und bei u = 1 ausgewertet werden. Diese vier Ausdrücke müssen an die analytisch gefundene Asymptotik (3.18) von  $K(\omega, u)$  bei  $u \to 1$  angepasst werden, womit folgendes Gleichungssystem entsteht:

$$\begin{split} \tilde{K}_1 &= a_1 K_- + b_1 K_+, \qquad \partial_u \tilde{K}_1 &= a_1 \partial_u K_- + b_1 \partial_u K_+, \\ \tilde{K}_2 &= a_2 K_- + b_2 K_+, \qquad \partial_u \tilde{K}_2 &= a_2 \partial_u K_- + b_2 \partial_u K_+, \end{split}$$

aus welchem man die Konstanten  $a_1, a_2, b_1$  und  $b_2$  erhält. Abschließend ergibt sich die physikalische Lösung nach [35] als

$$K = \tilde{K}_2 + \beta \tilde{K}_1$$
  
=  $(a_2 K_- + b_2 K_+) + \beta (a_1 K_- + b_1 K_+)$   
=  $(a_2 + Ba_1) K_- + (b_2 + b_1 \beta) K_+.$ 

Wie schon erläutert erfüllt nur die einfallende Lösung  $K_-$  die physikalischen Forderungen, weswegen der Koeffizient der auslaufenden Lösung  $K_+$  für  $u \to 1$  verschwinden muss. Damit folgt

$$\beta = -\frac{b_2}{b_1}.$$

### 3.2.2 Analyse der Spektralfunktion

Im KKSS-Ansatz werden die noch nicht festgelegten Konstanten c und  $\frac{R}{k_V}$  durch den Fall bei T = 0, also wie im Softwall-Modell aus Abschnitt 2.3.4, fixiert. Mit (2.34) und (2.38) wird also c = 391 MeV und  $\frac{R}{k_V} = \frac{N_c}{12\pi^2}$  mit  $N_c = 3$  verwendet. Exemplarisch ist in Abbildung 3.1 die Spektralfunktion als Funktion von  $\omega$  für eine Temperatur von T = 20 MeV dargestellt. Es ist dabei zu erkennen, dass das Spektrum mehrere Peaks zeigt. Für T = 0 korrespondieren die Peakpositionen dabei zum Anregungsspektrum, welches durch Gleichung (2.33) gegeben ist.

Es soll jetzt auf das Temperaturverhalten des ersten Peaks eingegangen werden. In den Abbildungen 3.2 sind dazu Spektralfunktionen im  $\omega$ -Bereich um den ersten Peak für verschiedene Temperaturen dargestellt, wobei in Abbildung 3.2a einige Temperaturen von 20 bis 45 MeV und in Abbildung 3.2b Temperaturen von 50 bis 80 MeV gewählt werden. Es lässt sich als erstes feststellen, dass für eine Temperatur von 20 MeV ein sehr scharfer erster Peak nahe bei  $\omega = 782$  MeV entsteht; für noch kleinere Temperaturen wird dieser schärfer. Es lässt sich also feststellen, dass sich die Energie des Grundzustandes in der Spektralfunktion bei der Ruhemasse des  $\omega$ -Mesons befindet, welche im Abschnitt 2.3.4 zum Fixieren von c verwendet wurde. Mit steigender Temperatur verschiebt sich die Position dieses



**Abbildung 3.1:** Die Spektralfunktion  $\rho$  als Funktion der Energie  $\omega$  für T = 20 MeV im KKSS-Ansatz des Dilatons.



Abbildungen 3.2: Die Spektralfunktion ρ als Funktion der Energie ω für verschiedene Temperaturen im KKSS-Ansatz des Dilatons.
(a): Temperaturen von 20 bis 45 MeV,
(b): Temperaturen von 50 bis 80 MeV.

ersten Peaks zu kleineren Werten von  $\omega$ . Interpretiert man diese Peakposition als Energie des Grundzustandes des zu beschreibenden Mesons, so sinken die Massen im Temperaturbereich bis etwa 40 MeV. Ferner lässt sich feststellen, dass die Breite des ersten Peaks mit steigenden Temperaturen zunimmt, wohingegen dessen Höhe abnimmt. Dieser Umstand lässt sich als "Zerfließen" des Mesons interpretieren. In Abbildung 3.2b lässt sich feststellen, dass dieses "Zerfließen" bis zu einer Temperatur von etwa 70 MeV anhält und für höhere Temperaturen kein Peak mehr zu identifizieren ist.

Um im Folgenden etwas genauer auf die Positionsänderungen des ersten Peaks eingehen zu können, sollen die Peakpositionen des Grundzustandes als Funktion der Temperatur dargestellt werden. Hierzu wird zur Bestimmung der Position der ersten Maxima in den Spektralfunktionen ein einfacher Algorithmus verwendet, welcher die Position bestimmt, bei welcher der Anstieg der Tangente an der Spektralfunktion das Vorzeichen ändert. In der Abbildung 3.3 sind diese Positionen des ersten Peaks als Funktion der Temperatur dargestellt. Hierbei ist zu erkennen, dass sich zwei Bereiche bestimmen lassen. Im ersten Bereich (bis etwa 15 MeV) ist die Peakposition nur einer kleinen Verschiebung unterworfen. Ab einer Temperatur von etwa 20 MeV verschiebt sich die Peakpositionen deutlich zu kleineren Energien.



**Abbildung 3.3:** Die Position M des ersten Peaks der Spektralfunktion als Funktion der Temperatur T im KKSS-Ansatz des Dilatons.



**Abbildung 3.4:** Die Peakposition  $M_n$  der ersten drei Peaks der Spektralfunktion dargestellt über der Modenzahl n für verschiedene Temperaturen im Bereich von 15 bis 25 MeV.

Weiter soll noch das Temperaturverhalten der Peakpositionen bei höheren Moden betrachtet werden. Hierbei ist als erstes anzumerken, dass sich die Peakbreite der jeweiligen Mode mit steigender Modenzahl vergrößert. Ferner wird festgestellt, dass für steigende Temperaturen immer weniger Peaks in den jeweiligen Spektralfunktionen zu sehen sind. Beispielsweise können bei T = 15 MeV bis zu fünf Peaks in der Spektralfunktion ausgemacht werden, wohingegen bei einer Temperatur von T = 25 MeV nur noch drei Peaks zu sehen sind. In Abbildung 3.4 sind die Positionen der ersten drei Peaks über der jeweiligen Modenzahl für Temperaturen von 15 bis 25 MeV dargestellt. Wie schon angesprochen ergibt sich im vorliegenden Fall bei T = 0 das Softwall-Modell aus Abschnitt 2.3.4 und in dessen Rahmen wurde mit Gleichung (2.33) ein analytischer Zusammenhang zwischen den Massen der jeweiligen Mode und der Modenzahl angegeben, welcher ebenfalls in Abbildung 3.4 eingefügt wurde. Es ist hierbei festzustellen, dass sich auch die Peaks der höheren Moden im Vergleich zum Fall bei T = 0 zu kleineren Werten von  $\omega$  verschieben. In einer Reihe von Arbeiten von Colangelo et al. [8, 9] wurde bereits angemerkt, dass das Temperaturverhalten dieser Klasse von Modellen zu extrem ist. Die pseudokritische Temperatur der QCD, bei der eine Dissoziation der Hadronen als Bindungszustände von Quarks und Gluonen zu erwarten ist, beträgt 155 MeV, wohingegen im vorliegenden Modell Temperaturen bei etwa 50 MeV gefunden werden. Es gibt verschiedene Möglichkeiten dieses unerwartete Verhalten zu interpretieren.

- Wie schon in [22] gezeigt wurde, bietet die Verwendung des AdS-BH nur für Temperaturen T > 191 MeV stabile Lösungen für Vektormesonen. Demnach befindet man sich für die hier untersuchten Temperaturen in einer instabilen Phase.
- Die im Abschnitt 3.1.1 beschriebenen Modelle, insbesondere die ad hoc Einführung des Dilatons durch Gleichung (3.2) und die davon unabhängige Betrachtung der Funktionen A(z) und f(z) im Abschnitt 2.3.6, stellen keine konsistente Erweiterung des Softwall-Modells auf endliche Temperaturen dar. Das Dilaton ist vielmehr als dynamisches Feld zu betrachten, welches über die entsprechenden Einstein-Gleichungen mit dem AdS-BH in Wechselwirkung tritt.
- Der ad hoc Ansatz des quadratischen Dilatons bewirkt zufällig das Wegheben von Termen in der Bewegungsgleichung bei T = 0, welche sich für  $T \neq 0$ nicht mehr einstellen lassen.

# 3.3 Spektralfunktion im Huang-Ansatz

In diesem Abschnitt soll die Spektralfunktion im Huang-Ansatz (3.5) für das Dilatonprofil bestimmt werden. Dazu wird das am KKSS-Ansatz demonstrierte Vorgehen aus Abschnitt 3.2 auf das Modell aus Abschnitt 3.1.1 mit dem Huang-Ansatz für das Dilatonprofil angewendet.

### 3.3.1 Numerische Bestimmung der Spektralfunktion

Wie schon im Abschnitt 3.1.2 beschrieben, benötigt man zur Bestimmung der Spektralfunktion eine Bestimmungsgleichung für den Bulk-to-Boundary-Propagator und eine On-Shell-Form der Wirkung (3.1).

Mit Gleichung (3.12) wurde die Bestimmungsgleichung des Bulk-to-Boundary-Propagators  $K(\omega,z)$  für ein beliebiges Dilatonprofil  $\varphi(z)$  hergeleitet. Setzt man  $B(z) = -\ln(\frac{z}{R}) - \varphi(z)$  mit dem Huang-Ansatz (3.5) in Gleichung (3.12) ein, so folgt damit für die Bestimmungsgleichung des Bulk-to-Boundary-Propagators

$$0 = \partial_z^2 K(\omega, z) + F_1(z)\partial_z K(\omega, z) + F_0(z)K(\omega, z), \qquad (3.20)$$

mit den Koeffizienten

$$F_1(z) = -\frac{1}{z} + 2\left(Q^2(z) - 1\right)c_2^4 z^3 + 2c_1^2 z Q(z) + \frac{\partial_z f(z)}{f(z)},$$
  
$$F_0(z) = \frac{\omega^2}{f^2(z)},$$

wobei  $Q(z) = \tanh\left(\frac{c_2^4 z^2}{c_1^2}\right)$  und  $f(z) = 1 - \frac{z^4}{z_h^4}$  bezeichnen. Als On-Shell-Wirkung kann auch im Huang-Ansatz die Gleichung (3.13) verwendet werden, da in diesem Ansatz  $\varphi(z=0) = 0$  gilt, wie dies auch schon beim KKSS-Ansatz der Fall war. Um das Vorgehen zur numerischen Bestimmung der Spektralfunktion aus Abschnitt 3.2.1 auf das Huang-Dilaton anzuwenden, sind die asymptotischen Lösungen der Gleichung (3.20) für  $z \to 0$  und  $z \to z_h$  zu bestimmen. Hierzu wird als erstes wieder zu dimensionslosen Koordinaten  $u := \frac{z}{z_h}$  übergegangen, wobei  $u \to 0$  gerade  $z \to 0$  und  $u \to 1$  gerade  $z \to z_h$  entspricht. In diesen dimensionslosen Koordinaten folgt für die Bestimmungsgleichung für den Bulk-to-Boundary-Propagator

$$0 = \partial_u^2 K(\omega, u) + F_1(u) \partial_z K(\omega, u) + F_0(u) K(\omega, u), \qquad (3.21)$$

wobei die Koeffizienten gegeben sind durch

$$F_1(u) = -\frac{1}{u} + 2\left(Q^2(u) - 1\right)c_2^4 z_h^3 u^3 + 2c_1^2 z_h u Q(u) - \frac{4u^3}{1 - u^4},\tag{3.22}$$

$$F_0(z) = \frac{\omega^2 z_h^2}{(1 - u^4)^2} \tag{3.23}$$

und  $Q(u) = \tanh\left(\frac{c_2^4 z_h^2 u^2}{c_1^2}\right)$  als Abkürzung verwendet wird.

### Asymptotik bei $u \rightarrow 1$

Dem Abschnitt 3.2.1 folgend, setzt man  $\varepsilon := 1 - u$  und entwicklt die Koeffizienten (3.22) und (3.23) um  $\varepsilon = 0$ . Hierbei ergibt sich für  $\varepsilon \ll 1$ 

$$F_1(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon),$$
  
$$F_0(\varepsilon) = \frac{\omega^2 z_h^2}{16\varepsilon^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^{-1}).$$

Es ist dabei zu erkennen, dass analog den Überlegungen (3.17) betreffend, der gleiche asymptotische Ausdruck für die Differentialgleichung (3.21) bei  $\varepsilon \to 0$ entsteht, wie schon im Abschnitt 3.2.1 für den KKSS-Ansatz. Damit kann man im vorliegenden Fall aber auch die Lösung des KKSS-Ansatzes bei  $\varepsilon \to 0$  übernehmen, womit als asymptotische Lösung im Huang-Ansatz für  $u \to 1$  folgt

$$K_{\pm}(\omega, u) = (1 - u)^{\pm \frac{i}{4}\sqrt{\omega^2 z_h^2}} = \left(1 - \frac{z}{z_h}\right)^{\pm \frac{i}{4}\sqrt{\omega^2 z_h^2}}.$$

 $K_{-}$  wird hierbei wieder als einfallende und  $K_{+}$  wieder als auslaufende Lösung bezeichnet. Ebenfalls analog zum KKSS-Ansatz erfüllt auch im Huang-Ansatz nur die asymptotische Lösung  $K_{-}$  physikalische Forderungen, weswegen wiederum der Koeffizient von  $K_{+}$  im weiteren Verlauf verschwinden muss.

### Asymptotik bei $u \to 0$

Wie schon im Abschnitt 3.2.1 angemerkt, ist die Asymptotik der Gleichung (3.12) für  $z \to 0$ , oder äquivalent für  $u \to 0$ , unabhängig vom verwendeten Dilatonprofil, falls für Letzteres gilt  $\varphi(0) = 0$ . Da das Dilatonprofil (3.5) diese Voraussetzung erfüllt, kann auch im Huang-Ansatz die asymptotische Lösung (3.19) verwendet werden, womit für  $u \ll 1$  folgt

$$K(\omega, u) = \alpha(\omega) + \beta(\omega)u^2 = \alpha(\omega) + \beta(\omega)\frac{z^2}{z_h^2}.$$

Ebenfalls analog zum KKSS-Ansatz kann man auch im Huang-Ansatz aus der Voraussetzung  $\varphi(0) = 0$  und der Asymptotik des Bulk-to-Boundary-Propagators folgern, dass  $\alpha(\omega) = 1$  gilt.

Zusammenfassend lässt sich also festhalten, dass der einzige Unterschied zwischen KKSS- und Huang-Ansatz bei der Berechnung der Spektralfunktion in der verwendeten Bestimmungsgleichung für den Bulk-to-Boundary-Propagators liegt. Insbesondere reduziert sich auch im Huang-Ansatz die Bestimmung der retardierten Green-Funktion und damit der Spektralfunktion auf die Berechnung des Koeffizienten  $\beta(\omega)$ , welcher mit der im Abschnitt 3.2.1 beschriebenen Methode nach [35] numerisch bestimmt werden kann.

#### 3.3.2 Analyse der Spektralfunktion

Um qualitative Aussagen über die Spektralfunktion im Huang-Ansatz des Dilatons gewinnen zu können wird im vorliegenden Abschnitt analog zum KKSS-Modell aus Abschnitt 3.2.2 der noch unbestimmte Faktor  $\frac{R}{k_V}$  aus Gleichung (3.15) durch  $\frac{R}{k_V} = \frac{N_c}{12\pi^2}$  fixiert. Ferner wird  $c_1 = 391$  MeV verwendet, wobei darauf hingewiesen wird, dass diese Wahl im Abschnitt 4.2 durch einen Grenzfall des Huang-Ansatzes bei T = 0 motiviert wird. Damit wird im vorliegenden Abschnitt das Verhalten der Spektralfunktion für verschiedene Werte von  $c_2$  untersucht.

Als erstes wird dazu der Fall  $c_1 = c_2 = 391 \text{ MeV}$  betrachtet. Hierzu sind in den Abbildungen 3.5 die Spektralfunktionen im Huang-Ansatz für verschiedene Temperaturen dargestellt. In Abbildung 3.5a lässt sich dabei erkennen, dass für eine Temperatur von T = 20 MeV ein Peak nahe bei  $\omega = 790 \text{ MeV}$  entsteht, welcher für Temperaturen T < 20 MeV immer schärfer wird.

Für steigende Temperaturen lässt sich wieder eine Verschiebung des ersten Peaks hin zu kleineren  $\omega$  feststellen, wobei die Peakhöhe ab- und die Peakbreite zunimmt. Im Huang-Ansatz des Dilatons kann also analog zum KKSS-Modell ein "Zerfließen" des zu beschreibenden Mesons für steigende Temperaturen beobachtet werden.



Abbildungen 3.5: Die Spektralfunktion  $\rho$  dargestellt über der Energie  $\omega$  für verschiedene Temperaturen im Huang-Ansatz des Dilatons mit  $c_1 = c_2 = 391$  MeV.

(a): Temperaturen von 20 bis 45 MeV,

(b): Temperaturen von 50 bis 90 MeV.



**Abbildungen 3.6:** Die Spektralfunktion  $\rho$  dargestellt als Funktion der Energie  $\omega$  für verschiedene Temperaturen im KKSS- und im Huang-Ansatz des Dilatons mit  $c = c_1 = c_2 = 391$  MeV. (a): T = 30 MeV (b): T = 40 MeV, (c): T = 50 MeV (d): T = 60 MeV.

Um genauer auf die qualitativen Unterschiede zwischen Huang- und KKSS-Ansatz bezüglich der jeweiligen Spektralfunktionen eingehen zu können, sind Letztere für beide Modelle in den Abbildungen 3.6 für verschiedene Temperaturen von 30 bis 60 MeV dargestellt. Es lässt sich dabei feststellen, dass sich die Peaks im Huang-Modell bei steigenden Temperaturen langsamer zu kleinen  $\omega$  verschieben, als dies im KKSS-Ansatz der Fall ist. Die Höhe des ersten Peaks nimmt bei steigenden Temperaturen im Huang-Modell ebenfalls langsamer ab, als im KKSS-Modell. Dies führt dazu, dass der erste Peak im Huang-Ansatz länger bestehen bleibt, als im KKSS-Ansatz, was in Abbildung 3.6d zu erkennen ist.



Abbildung 3.7: Die Position M des ersten Peaks der Spektralfunktion im Huang-Ansatz des Dilatons als Funktion der Skala  $c_2$  für verschiedene Temperaturen und  $c_1 = 391$  MeV.

Weiter soll auf den Einfluss der Skala  $c_2$  auf die Spektralfunkion im Huang-Ansatz des Dilatons eingegangen werden. Dazu ist in Abbildung 3.7 die Position des ersten Peaks in der Spektralfunktion über der Skala  $c_2$  für Temperaturen von 15 bis 35 MeV dargestellt. Zur Orientierung wurde zusätzlich eine senkrechte Linie bei  $c_1 = 391$  MeV eingefügt. Es lässt sich erkennen, je kleiner der Wert von  $c_2$ gewählt wird, desto weiter verschiebt sich der erste Peak zu größeren Werten von  $\omega$ . Hierbei tritt für  $c_2 < 250$  MeV und für  $c_2 > 550$  MeV eine Art Sättigung auf, sodass die Variation von  $c_2$  in diesen Bereichen einen viel geringeren Einfluss auf die Peakposition besitzt.

# 4 Analyse der Schrödinger-Form

Wie schon in Abschnitt 2.3.2 skizziert wurde, ermöglicht das Rückführen von Bewegungsgleichungen der Vektorfelder im AdS auf die Form einer Schrödinger-Gleichung Aussagen über diskrete Zustände und somit über die zu beschreibenden Mesonen. Im folgenden Kapitel soll diese Vorgehensweise auf das im Abschnitt 3.1.1 vorgestellte Modell für Vektormesonen bei endlichen Temperaturen angewendet und für die verschiedenen Dilaton-Ansätze diskutiert werden.

# 4.1 Allgemeine Betrachtung

Es soll in diesem Abschnitt eine allgemeine Form der Schrödinger-Form der Bewegungsgleichung (3.11) des Vektorfeldes  $V_i$  hergeleitet werden. Hierbei wird nur vorausgesetzt, dass der verwendete Hintergrund durch eine AdS-BH-Metrik der Form (2.39) mit allgemeinem konformen Faktor B(z) und allgemeiner Blackness-Funktion f(z) beschrieben wird. Das diesbezügliche Vorgehen ist dabei weitgehend [29] entnommen.

Wie schon in Abschnitt 3.1.2 dargestellt wurde, betrachte man die Bewegungsgleichung der räumlichen Komponenten  $V_i$  des Vektorfeldes im Impulsraum und im Ruhesystem  $p^{\mu} = (-\omega, 0, 0, 0),$ 

$$0 = \partial_z^2 V_i(\omega, z) + \left(\partial_z B(z) + \frac{\partial_z f(z)}{f(z)}\right) \partial_z V_i(\omega, z) + \frac{\omega^2}{f^2} V_i(\omega, z),$$

wobei B(z) den konformen Faktor der Metrik und f(z) die Blackness-Funktion bezeichnen. Diese Gleichung soll nun in die Form einer Schrödinger-Gleichung überführt werden. Multipliziert man als erstes obige Gleichung mit  $e^B f^2$ , so folgt

$$0 = f \left( e^B f \partial_z^2 V_i + e^B \partial_z B f \partial_z V_i + e^B \partial_z f \partial_z V_i \right) + e^B \omega^2 V_i$$
  
=  $f \partial_z \left( e^B f \partial_z V_i \right) + e^B \omega^2 V_i.$ 

Das mehrfache Auftauchen des Terms  $f\partial_z$  motiviert eine Koordinatentransformation  $z \mapsto r$  mit  $\partial_r = f(z)\partial_z$ , was gerade den Regge-Wheeler-Koordinaten (Tortoise-Koordinaten) entspricht, auf welche im Anhang D.3 eingegangen wird. Unter dieser Koordinatentransformation vereinfacht sich die obige Bewegungsgleichung zu

$$\partial_r \left( e^B \partial_r V_i \right) + e^B \omega^2 V_i = 0, \tag{4.1}$$

wobei nun B = B(r) und  $V_i = V_i(\omega, r)$ .

Ziel ist es, eine Transformation  $V_i(\omega, r) \mapsto \psi_i(\omega, r)$  zu finden, sodass eine Schrödinger-Form der Bewegungsgleichung (4.1) entsteht. Dazu wird der Ansatz  $V_i = e^g \psi_i$ verfolgt, wobei g = g(r) so gewählt werden soll, dass in diesem Ansatz in Gleichung (4.1) die Terme proportional zu  $\partial_r \psi_i$  wegfallen. Es folgt für den ersten Term aus Gleichung (4.1)

$$\partial_r \left( e^B \partial_r \left( e^g \psi_i \right) \right) = e^B e^g \left( 2 \partial_r g + \partial_r B \right) \partial_r \psi_i + e^B e^g \left[ \left( \partial_r B \right) \left( \partial_r g \right) + \left( \partial_r g \right)^2 + \partial_r^2 g \right] \psi_i + e^B e^g \partial_r^2 \psi.$$

Der Term proportional zu  $\partial_r \psi_i$  fällt also weg, wenn  $\partial_r g = -\frac{\partial_r B}{2}$ , womit folgt

$$g(r) = -\frac{B}{2} + C$$

mit einer Konstanten C. Diese Konstante kann jedoch als C = 0 gewählt werden, da mit  $V_i$  auch jedes Vielfache  $e^C V_i$  Lösung von Gleichung (4.1) ist. Mit der so gefundenen Funktion g(r) folgt aus Gleichung (4.1)

$$-\partial_r^2 \psi_i + U(r)\psi_i = \omega^2 \psi_i, \tag{4.2}$$

wobei das Potential U(r) gegeben ist durch:

$$U(r) = -\left(\left(\partial_r B\right)\left(\partial_r g\right) + \left(\partial_r g\right)^2 + \partial_r^2 g\right) = \frac{\partial_r^2 B}{2} + \frac{\left(\partial_r B\right)^2}{4}.$$
(4.3)

Zusammenfassend ergibt sich die Lösung  $V_i(x,z)$  im Ortsraum für einen gegebenen Wert von  $\omega$  als

$$V_i(x,z) = e^{-\omega t} e^{-\frac{B(z(r))}{2}} \psi_i(z(r)),$$

wobei  $\psi_i$  Lösung der Schrödinger-Gleichung (4.2) ist. Der in diesem Kapitel betrachtete Fall der AdS-BH-Metrik ergibt sich für  $B(z) = -\ln\left(\frac{z(r)}{R}\right) - \varphi(z(r))$ mit dem Dilaton  $\varphi$  für den konformen Faktor.

Wie schon angesprochen, können für  $V_i(x,z)$  nur genau dann diskrete Lösungen entstehen, wenn  $\psi_i$  Lösung der Schrödinger-Gleichung zu diskreten Werten von  $\omega^2$  ist. Letzteres setzt jedoch voraus, dass das obige Potential U(r) ein Minimum besitzt, was im Folgenden für verschiedene Ansätze des Dilatons diskutiert wird.

## 4.2 Der Spezialfall T = 0

Im folgenden Abschnitt wird die Schrödinger-Gleichung (4.1) und insbesondere deren Potential (4.3) mit  $B(z) = -\ln\left(\frac{z}{R}\right) - \varphi(z)$  in den Dilaton-Ansätzen (3.4) und (3.5) für den Übergang zum Spezialfall T =0 betrachtet. Dabei wird statt des KKSS-Ansatzes ein Potenzansatz untersucht und argumentiert, warum der Spezialfall des quadratischen Dilatons eine gewisse Besonderheit besitzt.

Der Übergang zu T = 0 ist wegen Gleichung (2.48) äquivalent zu  $z_h \to \infty$ . Für die Regge-Wheeler-Koordinate r folgt in diesem Zusammenhang:

$$\lim_{z_h \to \infty} r(z) = z,$$

wobei diesbezüglich auf den Anhang D.3 verwiesen wird. Ferner reduziert sich der AdS-BH für  $z_h \to \infty$  auf einen puren AdS, was durch die Bedingung (2.42) schon zum Ausdruck gebracht wurde. Das Potential (4.3) ergibt sich mit  $B(z) = -\ln\left(\frac{z}{R}\right) - \varphi(z)$  für den Limes T = 0 als

$$U(z) = \frac{3}{4z^2} - \frac{\partial_z^2 \varphi(z)}{2} + \frac{\partial_z \varphi(z)}{2z} + \frac{(\partial_z \varphi(z))^2}{4}.$$
 (4.4)

Setzt man hierbei  $\varphi(z) = c^2 z^2$ ein, so folgt  $U(z) = \frac{3}{4z} + c^4 z^2$ , also das Potential im Softwall-Modell, welches im Abschnitt 2.3.4 vorgestellt wurde.

Es soll nun jedoch ein anderer Ansatz für die Dilaton-Funktion betrachtet werden, welche das quadratische Dilaton verallgemeinert:

$$\varphi(z) = c^p z^p,$$

wobei  $p \in \mathbb{N}$ . Das Potential (4.4) erhält in diesem Ansatz die Form

$$U_p(z) = \frac{4}{3z^2} + \frac{pc^p}{2} z^{p-2} \left(2 - p + \frac{pc^p}{2} z^p\right).$$
(4.5)

Für p = 0 ist das resultierende Potential  $U_0(z)$  das Potential ohne Dilaton, welches im Abschnitt 2.3.2 diskutiert wurde und keine diskreten Lösungen für die Schrödinger-Gleichung ermöglicht. Ferner entsteht für p = 2 das eben schon angesprochene Potential (2.31) im Softwall-Modell.

#### Minimum des Potentials

Als notwendige Bedingung, damit die Schrödinger-Gleichung (4.2) im vorliegenden Fall eine Lösung zu mindestens einem diskreten Wert von  $\omega^2$  besitzt, fordert man, dass das Potential  $U_p(z)$  mindestens ein Extremum ausbildet, das heißt, dass die erste Ableitung von  $U_p$  an mindestens einer Stelle  $z = z_0$  verschwindet. Dabei ergibt sich folgende Bedingung für die Position  $z_0$  des Extremums von  $U_p(z)$ :

$$0 = p (cz_0)^p \left[ p (p-1) (cz_0)^p - (p-2)^2 \right] - 3,$$
(4.6)

wobei  $p \neq 0$  vorausgesetzt wird. Für den Fall p = 1 ergibt sich  $z_0 = -\frac{3}{c}$ , was durch die Forderung z > 0 ausgeschlossen ist, womit ein lineares Dilaton keine diskreten Lösungen der Schrödinger-Gleichung (4.2) erzeugen kann. Für p = 2, also das Softwall-Modell, ergibt sich eine reelle positive Lösung mit  $z_0 = \sqrt[4]{\frac{3}{4c^4}} \approx \frac{0.931}{c}$  und ermöglicht somit diskrete Lösungen der Schrödinger-Gleichung. Für allgemeine p > 1 ist Gleichung (4.6) ein Polynom vom Grad 2p der Form  $z^{2p} - a_p z^p - b_p$ , wobei  $a_p$  und  $b_p$  für kein p > 2 verschwinden. Solche Polynome besitzen nach dem Fundamentalsatz der Algebra mindestens eine positive reelle Nullstelle, womit das Potential (4.5) für jedes p > 1 mindestens ein Extremum besitzt. Ferner lässt sich durch das Vorzeichen der zweiten Ableitung von  $U_p$  an den kritischen Stellen dieses Extremums zeigen, dass es sich dabei stets mindestens ein lokales Minimum ausbildet. Es sind also für alle Potenzen p > 1 des Ansatzes  $\varphi(z) = c^p z^p$  für das Dilaton Lösungen der Schrödinger-Form der Bewegungsgleichungen mit diskreten Werten für  $\omega^2$  möglich.

Abschließend sei noch angemerkt, dass sich auch Argumente finden lassen, dass obiges Potential  $U_p(z)$  für p < -1 Minima ausbildet. Es stellt sich jedoch heraus, dass das Potential in solchen Fällen nach dem Minimum nur noch negativ ist und somit nur diskrete Lösungen der Schrödinger-Gleichung mit  $\omega^2 < 0$  möglich sind. Interpretiert man  $\omega$  als Energie des zu beschreibenden Vektormesons, so sind die Fälle p < -1 auszuschließen.

### Eigenwerte der Schrödinger-Form

Wie schon in [23] angeführt, lässt sich die Abhängigkeit der Eigenwerte  $\omega_n^2$  von der Modenzahl *n* für diskrete Lösungen der Schrödinger-Gleichung (4.2) bei großen *n* analytisch durch eine WKB-Näherung finden. Hierzu betrachte man weiterhin den Ansatz  $\varphi(z) = c^p z^p$  für das Dilaton, also das Potential (4.5). Das folgende Vorgehen ist [18] entnommen, wobei die WKB-Bedingung:

$$n\pi = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{\omega_n^2 - U_p(z)} \, dz = \omega_n \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{1 - \frac{U_p(z)}{\omega_n^2}} \, dz \tag{4.7}$$

verwendet wird. Hierbei bezeichnen  $z_1$  und  $z_2$  die klassischen Umkehrpunkte, für welche gilt

$$\omega_n^2 = U_p(z_1) = U_p(z_2).$$

Für große Werte von  $\omega_n^2 \gg U_p(z)$  zwischen den Umkehrpunkten erkennt man, dass der Term  $\frac{U}{\omega}$  nur nahe der Umkehrpunkte, also in den Grenzfällen für kleine beziehungsweise große z, einen Beitrag liefert. Bei großen Werten von z besitzt das Potential (4.5) dabei die Asymptotik

$$U_p\left(z \ll \frac{1}{c}\right) \sim c^{2p} z^{2(p-1)},\tag{4.8}$$

womit für den rechten Umkehrpunkt folgt

$$z_2 = \omega_n^{\frac{1}{p-1}} c^{\frac{p}{p-1}}.$$

Für kleine Werte von z wird das Potential  $U_p(z)$  zu einer "harten Wand" bei z = 0, womit der linke Umkehrpunkt gegeben ist durch  $z_1 = 0$ . Damit lässt sich die WKB-Bedingung (4.7) für große Werte von  $\omega_n$  und damit große n auswerten:

$$n\pi \approx \omega_n \int_{0}^{\omega^{\frac{1}{p-1}} c^{\frac{p}{p-1}}} \sqrt{1 - \frac{c^{2p} z^{2(p-1)}}{\omega_n^2}} dz$$
$$= \omega_n \omega_n^{\frac{1}{p-1}} c^{\frac{p}{p-1}} \int_{0}^{1} \sqrt{1 - t^{2(p-1)}} dt$$
$$= C_p \cdot \omega_n^{\frac{p}{(p-1)}},$$

wobei  $C_p$  für jedes feste p eine Konstante bezeichnet, welche unabhängig von n ist. Für große  $\omega_n^2$  und für große z erhält man die Abhängigkeit

$$\omega_n^2 \sim n^{\frac{2(p-1)}{p}}.\tag{4.9}$$

Hierbei stellt sich für p = 2 gerade das in Abschnitt 2.3.4 vorgestellte Verhalten  $\omega_n^2 \sim n$  ein, was die Wahl eines quadratischen Ansatzes für das Dilaton zu motivieren scheint.

Es ist jedoch anzumerken, dass obige Argumentation nicht voraussetzt, dass das Dilaton exakt  $\varphi(z) = c^p z^p$  sein muss. Diese Forderung lässt sich dahingehend abschwächen, dass die Abhängigkeit (4.9) auch dann folgt, wenn  $\varphi(z \gg \frac{1}{c}) = c^p z^p$ gilt. Diese Subtilität wird in der vorliegenden Arbeit bei der Betrachtung des Huang-Dilatons (3.5) verwendet. Dieses besitzt nämlich die Eigenschaft  $\varphi(z \gg 1) = c_1^2 z^2$ , womit die Abhängigkeit (4.9) mit p = 2 auch für diesen Ansatz gilt. Es lässt sich also an dieser Stelle feststellen, dass die Eigenwerte der Schrödinger-Gleichung für das Huang-Dilaton bei T = 0 ebenfalls eine Abhängigkeit  $\omega_n^2 \sim n$  für große Werte von n besitzen.

### Huang-Ansatz bei T = 0

Zwar wurde mit der Propotionalität (4.9) bei T = 0 auch ein Zusammenhang zwischen  $\omega_n^2$  und großen Modenzahlen n im Huang-Ansatz für das Dilatonprofil angegeben, jedoch besitzt das Potential U(z) für beliebige z in diesem Ansatz völlig andere Eigenschaften als im Fall des Softwall-Modells aus dem Abschnitt 2.3.4. Ausgehend von der Form (4.4) des Potentials der Schrödinger-Gleichung (4.2) bei T = 0 ergibt sich im Fall des Huang-Ansatzes (3.5)

$$U(z) = \frac{3}{4z^2} - 4c_2^4 z^2 + c_2^8 z^6 + \left(4c_2^4 + c_1^4\right) z^2 Q^2(z) + \left(\frac{4c_2^8}{c_1^2} + 2c_1^2 c_2^4\right) z^4 Q(z) - \left(\frac{4c_2^8}{c_1^2} + 2c_1^2 c_2^4\right) z^4 Q^3(z) - 2c_2^8 z^6 Q^2(z) + c_2^8 z^6 Q^4(z), \quad (4.10)$$

wobei  $Q(z) = \tanh\left(\frac{c_2^4 z^2}{c_1^2}\right)$  wieder als Abkürzung verwendet wird. Anders als im KKSS-Ansatz lässt sich mit diesem Potential keine einfache analytische Lösung der Schrödinger-Gleichung (4.2) bestimmen. Es soll deshalb versucht werden, eine Näherung für das Potential (4.10) zu finden, für welche die Schrödinger-Gleichung

eine analytische Lösung mit diskreten Werten für  $\omega_n^2$  besitzt. Dazu entwickelt man das Potential (4.10) um z = 0:

$$U(z) = \frac{3}{4z^2} - 4c_2^4 z^2 + 4\left(c_2^8 + 2\frac{c_2^{12}}{c_1^4}\right)z^6 + \mathcal{O}(z^8).$$
(4.11)

Es ist dabei zu erkennen, dass eine quadratische Näherung für U(z) die Form  $\frac{a}{z^2} - bz^2$  mit positiven Zahlen *a* und *b* besitzt. Eine Funktion dieser Form besitzt jedoch keine reelle, positive Extremstelle. Verwendet man die nächste Ordnung in der Entwicklung (4.11), so ergibt sich eine Funktion der Form  $\frac{a}{z^2} - bz^2 + cz^6$ . Diese besitzt zwar für alle positiven Zahlen *a*, *b* und *c* eine reelle positive Extremstelle, jedoch lässt sich für solch eine Näherung die Schrödinger-Gleichung (4.2) nicht mehr analytisch lösen.

Zusammenfassend lässt sich also festhalten, dass sich im Huang-Ansatz bei T = 0weder für das exakte Potential (4.10) noch für Näherungen aus der Entwicklung (4.11) analytisch eine Formel für  $\omega_n^2$  finden lässt. Es besteht noch die Möglichkeit das Potential (4.10) um sein Minimum zu entwickeln und dabei die Anharmonitäten zu beachten, jedoch kann dies nur störungstheoretisch geschehen und wird deshalb hier nicht verfolgt.

Eine weitere Möglichkeit Näherungen an das Potential (4.10) zu finden, ist die Voraussetzung von Eigenschaften der Skalenparameter  $c_1$  und  $c_2$ . Hierfür geht man zu dimensionslosen Koordinaten  $\zeta := \frac{z}{c_1}$  über, womit für das Potential (4.10) folgt

$$U(\zeta) = c_1^2 \left[ \frac{3}{4\zeta^2} - 4\frac{c_2^4}{c_1^4} \zeta^2 + \frac{c_2^8}{c_1^8} \zeta^6 + \left( 4\frac{c_2^4}{c_1^4} + 1 \right) \zeta^2 Q^2(\zeta) + \left( 4\frac{c_2^8}{c_1^8} + 2\frac{c_2^4}{c_1^4} \right) \zeta^4 Q(\zeta) - \left( \frac{4c_2^8}{c_1^8} + 2\frac{c_2^4}{c_1^4} \right) \zeta^4 Q^3(\zeta) - 2\frac{c_2^8}{c_1^8} \zeta^6 Q^2(\zeta) + \frac{c_2^8}{c_1^8} \zeta^6 Q^4(\zeta) \right].$$
(4.12)

Wird nun  $c_2 \gg c_1$  gefordert, so folgt  $Q(\zeta) = \tanh\left(\frac{c_2^4}{c_1^4}\zeta^2\right) \approx 1$  und somit für das Potential (4.12)

$$U(\zeta) \approx \frac{3c_1^2}{4\zeta^2} + c_1^2 \zeta^2 = \frac{3}{4z^2} + c_1^4 z^2, \qquad (4.13)$$

wobei im letzten Schritt wieder zur dimensionsbehafteten Koordinate  $z = c_1 \zeta$ übergegangen wurde. Der approximative Ausdruck (4.13) für das Potential (4.10) besitzt hierbei die Form des Potentials (2.31), welches in Abschnitt 2.3.4 im Zuge



**Abbildungen 4.1:** (a): Das Potential 4.10 der Schrödinger-Form der Bewegungsgleichung im Huang-Ansatz bei T = 0 dargestellt als Funktion der holographischen Koordinate z für verschiedene  $c_2$  von 350 bis 440 MeV und mit  $c_1 = 391$  MeV. (b): Ausschnitt der Abbildung (a) um das Minimum des Potentials.

des Softwall-Modells hergeleitet wurde. Damit lässt sich über die Massengleichung (2.33) analog zu (2.34) eine Fixierung der Skala  $c_1$  motivieren. Im Folgenden wird im Huang-Ansatz also  $c_1 = 391$  MeV verwendet, um Aussagen über das Verhalten der Potentiale unter Veränderung von  $c_2$  gewinnen zu können.

In den Abbildungen 4.1 sind die Schrödinger-Potentiale im Huang-Ansatz für T = 0und  $c_1 = 391 \,\text{MeV}$  bei verschiedenen Werten von  $c_2$  über der holographischen Koordinate z dargestellt, wobei die durchgezogenen Graphen  $c_2 < c_1$  und die gestrichelten Graphen  $c_2 > c_1$  repräsentieren. In Abbildung 4.1a lässt sich erkennen, dass die Variation von  $c_2$  für große und kleine Werte von z keinen Einfluss besitzt. Im Gegensatz dazu werden die Potentiale um das Minimum durch die Veränderung von  $c_2$  stark deformiert. Abbildung 4.1b zeigt dazu einen Ausschnitt der Potentiale um das Minimum. Es lässt sich dabei erkennen, dass sich für  $c_2 > c_1$  ein weiteres Minimum bildet, welches sich mit steigendem  $c_2$  immer weiter in Richtung des ersten Minimums verschiebt. Für  $c_2 \gg c_1$  fallen diese beiden Minima zusammen und es bildet sich ein Potential der Form (2.31) was schon durch Gleichung (4.13) zum Ausdruck gebracht wurde.

# 4.3 Schrödinger-Form im KKSS-Ansatz

In diesem Abschnitt soll die stationäre Schrödinger-Gleichung (4.2) mit  $B(z) = -\ln\left(\frac{z}{L}\right) - \varphi(z)$  und einem quadratischen Dilaton  $\varphi(z) = c^2 z^2$ bei endlichen Temperaturen diskutiert werden. Hierbei wird erst das exakte Potential U(r) betrachtet und versucht, aus diesem numerische Aussagen über die zu beschreibenden Vektormesonen abzuleiten. Anschließend werden mögliche analytische Näherungen diskutiert und es wird untersucht, in wie weit diese das Verhalten der Peakpositionen aus Abschnitt 3.2.2 reproduzieren können.

#### 4.3.1 Das exakte Schrödinger-Potential

Im Abschnitt 4.1 wird gezeigt, dass das Potential der Schrödinger-Form der Bewegungsgleichung der Vektorfelder auf dem AdS-BH folgende Form besitzt

$$U(r) = \frac{\partial_r^2 B}{2} + \frac{(\partial_r B)^2}{4}.$$

Hierbei bezeichnet B(r) den konformen Faktor des AdS-BH ausgewertet an der Regge-Wheeler-Koordinate r. Im Anhang D.3 wird ein exakter Ausdruck für r(z)hergeleitet:

$$r(z) = \frac{z_h}{2} \left[ \arctan\left(\frac{z}{z_h}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{z_h - z}{z_h + z}\right) \right],\tag{4.14}$$

wobei  $z_h$  die Position der Black-Brane im AdS-BH bezeichnet, wie sie im Abschnitt 2.3.6 eingeführt wurde. Problematisch ist nun, dass sich analytisch für die Funktion r(z) keine Umkehrfunktion z(r) finden lässt und somit die auftretende Funktion B(r) analytisch nicht aus B(z) herzuleiten ist. Umgekehrt lässt sich jedoch das Potential U(r) mit Hilfe der Identität

$$\partial_r = f(z) \,\partial_z$$

als Funktion der holographischen Koordinate z darstellen, wobei  $f(z) = 1 - \frac{z^4}{z_h^4}$ 



Abbildungen 4.2: Das Potential (4.15) der Schrödinger-Form der Bewegungsgleichung (4.2) im KKSS-Ansatz dargestellt als Funktion der Regge-Wheeler-Koordinate r für verschiedene Temperaturen.
(a) Temperaturen von 0 bis 30 MeV,

(b) Temperaturen von 40 bis 100 MeV.

wiederum die Blackness-Funktion bezeichnet. Es ergibt sich

$$U(z) = f^{2}(z) \left(\frac{\partial_{z}^{2}B(z)}{2} + \frac{(\partial_{z}B(z))^{2}}{4}\right) + \frac{f(z)\partial_{z}f(z)}{2}\partial_{z}B(z).$$
(4.15)

Setzt man  $B(z) = -\ln(z) - c^2 z^2$  für den AdS-BH im KKSS-Ansatz ein, so folgt für das Potential

$$U(z) = f^{2}(z) \left(\frac{3}{4z^{2}} + c^{4}z^{2}\right) + 2f(z) \left(\frac{z^{2}}{z_{h}^{4}} - 2c^{2}\frac{z^{4}}{z_{h}^{4}}\right).$$
(4.16)

Es ist zu beachten, dass dieser Ausdruck das Potential der Schrödinger-Gleichung (4.1) ist, wenn U(z) bei z(r) ausgewertet wird (parametrische Darstellung). Letzteres muss im vorliegenden Fall numerisch geschehen. Es wird dazu mit Gleichung (4.14) eine Zuordnung  $z \mapsto r$  erzeugt, mit deren Hilfe sich das Potential (4.16) als Funktion von r abbilden lässt.

In der Abbildung 4.2a ist das Potential U(r) für verschiedene Temperaturen von 0 bis 30 MeV dargestellt. Als erstes lässt sich hierbei feststellen, dass das Potential für die dargestellten Temperaturen jeweils ein Minimum ausbildet. Für T = 0 ist das Potential nach dem Minimum nach oben unbeschränkt, womit sich beliebig viele diskrete Moden ausbilden können, was im Softwall-Modell aus Abschnitt 2.3.4 durch Gleichung (2.33) und den zugehörigen Lösungen (2.32) schon zum Ausdruck gebracht wurde.

Für endliche Temperaturen bildet sich nach dem Minimum jeweils ein Maximum. Durch dieses Maximum wird die Anzahl der diskreten Moden, welche sich im Potential ausbilden können, nach oben beschränkt, wie es zum Beispiel auch bei einem endlich tiefem Potentialtopf der Fall wäre. Wird die Temperatur erhöht, so ist zu erkennen, dass sich das Maximum immer weiter in Richtung des Minimums verschiebt und dessen Höhe immer geringer wird. Damit wird die Zahl der diskreten Moden, welche sich ausbilden können, mit steigender Temperatur immer kleiner.

Da das Potential bei endlichen Temperaturen nach dem Minimum beschränkt ist, gibt es, anders als bei T = 0, eine endliche Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen aus der Potentialmulde ins Kontinuum tunnelt. Diese endliche Tunnelwahrscheinlichkeit äußert sich in den Spektralfunktionen im Abschnitt 3.2.2 durch eine endliche Breite der Peaks. Da die Tunnelwahrscheinlichkeit (und damit die Breite der diskreten Zustände) um so größer ist, je kleiner die Breite des Potentialwalls wird, kann man für steigende Temperaturen aus der Verringerung der Breite des Potentialwalls eine Vergrößerung der Breite der diskreten Zustände folgern. Dies ist kompatibel mit den Aussagen, welche im Abschnitt 3.2.2 zum Temperaturverhalten der Peakbreiten gemacht wurden.

Für eine weitere Evaluation der Potentiale aus Abbildung 4.2a, insbesondere



**Abbildungen 4.3:** Das Potential U der Schrödinger-Form der Bewegungsgleichung dargestellt als Funktion der Regge-Wheeler-Koordinate r für verschiedene Temperaturen. Zusätzlich sind jeweils ein Fit der Form  $\frac{3}{4r^2} + a^4r^2$  mit einem Parameter a und daraus resultierende  $(\omega_{\text{fit}})_n^2 = 4a^2(n+1)$  bis n = 4dargestellt.

der möglichen diskreten Zustände, welche sich in diesen Potentialen ausbilden können, sollen die Darstellungen geeignet gefittet werden. Hierzu bietet sich eine Regressionsfunktion der Form

$$U_{\rm fit}(r) = \frac{3}{4r^2} + a^4 r^2 \tag{4.17}$$

mit zu fittenden Parameter a an, da sich einerseits nach Abschnitt 4.2 für T = 0 das Softwall-Potential (2.31) ergibt und andererseits für Potentiale der Form (4.17) die Eigenwerte der Schrödinger-Gleichung (4.2) analytisch bestimmt werden können:

$$(\omega_{\rm fit})_n^2 = 4a^2(n+1), \tag{4.18}$$

wie im Anhang D.2 dargelegt ist. In den Abbilungen 4.3 sind Potentiale und die zugehörigen Fits für Temperaturen von 10 bis 25 MeV dargestellt. Zusätzlich wurden mit den waagerechten gepunkteten Linien die Werte für  $(\omega_{\rm fit})_n^2$  für  $n = 0, 1, \ldots, 4$  eingefügt, welche sich nach Gleichung (4.18) aus dem gefitteten Parameter a ergeben. Liegen diese  $(\omega_{\rm fit})_n^2$  unterhalb des Maximums im jeweiligen Potential, so können sich diskrete Zustände mit diesen Eigenwerten ausbilden. Beispielsweise lässt das Potential bei T = 15 MeV bis zu fünf diskrete Zustände zu  $(n = 0, 1, \ldots, 4)$ , wie dies in Abbildung 4.3b zu erkennen ist, wohingegen bei einer Temperatur von  $T = 25 \,\text{MeV}$  nur noch zwei diskrete Zustände auftreten können. In Abbildung 4.4 ist die maximale Modenordnung  $n_{\text{max}}$  dargestellt, bis zu welcher sich für eine gegebene Temperatur diskrete Zustände ausbilden können, wobei mit  $n_{\text{max}} = 0$  nur noch der Grundzustand möglich ist. Hierbei lässt sich erkennen, dass der Temperaturbereich, in dem sich Zustände bis zur Ordnung  $n_{\rm max}$  ausbilden können, mit steigender Temperatur immer größer wird. Es lassen sich zudem in Abbildung 4.4 die Temperaturen ablesen, bei welchen eine Modenordnung "herausfällt". So ist beispielsweise zu erkennen, dass die diskrete



**Abbildung 4.4:** Die maximale Modenordnung  $n_{\max}$  dargestellt als Funktion der Temperatur T.

Mode der Ordnung n = 4 bei einer Temperatur von T = 15,2 MeV ins Kontinuum übergeht. Hierbei ist festzustellen, dass die Temperatur, bei welcher auch der Grundzustand herausfällt, mit  $T = 38,7 \,\mathrm{MeV}$  viel geringer ist, als dies in den Spektralfunktionen, zum Beispiel in Abbildung 3.2b, zu erkennen ist. Der Grund hierfür lässt sich an der Regressionsfunktion (4.17) festmachen, denn diese besitzt für jeden Parameter a nur ein Minimum und kein Maximum. Demnach sind die in diesem Abschnitt durchgeführten Fits an die Schrödinger-Potentiale um so ungenauer, je mehr Einfluss das Maximum im Potential auf das Minimum gewinnt. Es lässt sich ferner feststellen, dass die Energie des Grundzustandes, welche aus der Regression gewonnen werden kann, sich mit steigender Temperatur kaum ändert. Damit kann in diesem Zusammenhang das Absinken der Masse der Vektormesonen, welches in Abbildung 3.3 bei der Analyse der Spektralfunktion festgestellt wurde, in der Analyse des Schrödinger-Potentials nicht reproduziert werden. Hierbei lässt sich als Begründung wieder die verwendete Regressionsfunktion angeben, welche den Einfluss des Maximums im Potential auf die Grundzustandsenergie um so schlechter wiedergibt, je höher die Temperatur gewählt wird.

Abschließend sind in Abbildung 4.2b Potentiale im Temperaturbereich von 30 bis 90 MeV dargestellt. Hierbei lässt sich erkennen, dass sich ab einer Temperatur von etwa 90 MeV kein Extremum mehr ausbildet, womit auch keine Lösungen der Schrödinger-Gleichung (4.1) mit diskreten  $\omega_n^2$  mehr möglich sind.

### 4.3.2 Näherung für kleine Temperaturen

Es soll versucht werden, für kleine Temperaturen  $T \ll c$  approximative Ausdrücke für die in Abbildung 4.2 dargestellten Potentiale zu finden, wobei das diesbezügliche Vorgehen [28] entnommen ist. Hierbei wurde schon festgestellt, dass das zentrale Problem darin besteht, dass für die Regge-Wheeler-Koordinaten (4.14) keine Umkehrfunktion z(r) hergeleitet werden kann. Es lässt sich jedoch für kleine Temperaturen, also nach Gleichung (2.48) für große  $z_h$ , eine Approximation für z(r) angeben (siehe in Anhang D.3). Für große Werte von  $z_h$  gilt

$$z(r) = r - \frac{r^5}{5z_h^4} + \mathcal{O}\left(\frac{r^9}{z_h^8}\right)$$
Mit Hilfe dieser Approximation ergibt sich durch Einsetzen ein analytischer Ausdruck für das Potential (4.16) als Funktion von r. Entwickelt man diesen um r = 0und setzt Gleichung (2.48) für  $z_h$  ein, so ergibt sich

$$U(r) = \frac{3}{4r^2} + \left(\frac{4}{5}T^4 + c^4\right)r^2 - 4T^4c^2r^4 - \left(\frac{34}{25}T^8 + \frac{12}{5}T^4c^4\right)r^6 + \mathcal{O}(r^8).$$
(4.19)

Um auf die Form von U(r) in bestimmten Grenzfällen für T und r eingehen zu können, wird zu dimensionslosen Größen übergegangen:

$$\tau:=\frac{T}{c},\qquad \rho:=cr.$$

Damit erhält das Potential als Funktion von  $\rho$  die Form

$$U(\rho) = c^2 \left[ \frac{3}{4\rho^2} + \left(\frac{4}{5}\tau^4 + 1\right)\rho^2 - 4\tau^4\rho^4 - \left(\frac{34}{25}\tau^8 + \frac{12}{5}\tau^4\right)\rho^6 + \mathcal{O}(\rho^8) \right],$$

womit für den Ausdruck in den Klammern eine Approximation vorgenommen



**Abbildung 4.5:** Die Peakpositionen des ersten Peaks M dargestellt über der Temperatur T und die Approximation (4.20) der Peakposition dargestellt über der Temperatur.

werden kann. Für  $\tau \ll 1$  und  $\rho \ll 1$  lässt sich damit folgende Näherung für  $U(\rho)$  angeben

$$U(\rho) \approx c^2 \left( \frac{3}{4\rho^2} + \left( \frac{4}{5}\tau^4 + 1 \right) \rho^2 \right)$$
  
=  $\frac{3}{4r^2} + \left( \frac{4}{5}T^4 + c^4 \right) r^2,$ 

wobei im letzten Schritt wieder zu den dimensionsbehafteten Größen übergegangen wurde. Setzt man  $\tilde{c}(T) := \sqrt[4]{\frac{4}{5}T^4 + c^4}$ , so ergibt sich für  $T \ll c$  und  $r \ll \frac{1}{c}$  für das Potential (4.16) als Funktion von r

$$U(r) \approx \frac{3}{4r^2} + \tilde{c}^4 r^2,$$

womit die zugehörige Schrödinger-Gleichung (4.2) in dieser Näherung formal äquivalent ist zur Schrödinger-Gleichung (2.30) im Softwall-Modell. Es können also die Lösungen und insbesondere die Massengleichung aus Abschnitt 2.3.4 übernommen werden, wobei c formal durch  $\tilde{c}$  zu ersetzen ist. Für die diskreten Werte  $\omega_n^2$  lässt sich folgender approximativer Ausdruck angeben:

$$\omega_n^2 \approx 4\tilde{c}^2 \left(n+1\right) = 4(n+1)\sqrt{\frac{4}{5}T^4 + c^4}.$$
(4.20)

Hierbei ergibt sich für T = 0 gerade die Massengleichung (2.33) aus dem Softwall-Modell. In Abbildung 4.5 ist die Approximation (4.20) zusätzlich zu den Peakpositionen der ersten Peaks in den Spektralfunktionen aus Abbildung 3.3 dargestellt. Hierbei ist festzustellen, dass der Graph der Gleichung (4.20) im Temperaturbereich bis T = 15 MeV kaum Veränderungen zeigt und somit dem Verlauf der Peakpositionen weitgehend folgt, wohingegen ab einer Temperatur von etwa 20 MeV starke Abweichungen zwischen der Approximation und den Peakpositionen des ersten Peaks in der Spektralfunktion auftreten. Dies weist darauf hin, dass das Verhalten der Peakpositionen, insbesondere deren Absinken ab T = 20 MeV, eine Eigenschaft ist, welche sich erst in Termen höherer Ordnung der Entwicklung (4.19) zeigt.

### 4.4 Schrödinger-Form im Huang-Ansatz

In diesem Abschnitt soll die Schrödinger-Gleichung (4.2) und insbesondere deren Potential für  $B(z) = -\ln\left(\frac{z}{R}\right) - \varphi(z)$  mit dem Huang-Ansatz (3.5) für das Dilatonprofil untersucht werden. Hierbei werden die Potentiale für verschiedene endliche Temperaturen dargestellt und diskutiert, inwieweit die dimensionsbehafteten Größen  $c_1$  und  $c_2$  einen Einfluss auf die Form der Potentiale besitzen.

#### 4.4.1 Das exakte Schrödinger-Potential

Analog zum im Abschnitt 4.3.1 beschriebenen Vorgehen, lässt sich mit der allgemeinen Form des Potentials (4.3) und der Gleichung (4.14) für die Regge-Wheeler-Koordinaten, das Schrödinger-Potential für den Huang-Ansatz (3.5) graphisch darstellen. Dazu setzt man den Dilaton-Ansatz (3.5) in das allgemeine Potential (4.3) ein, womit folgt

$$\begin{split} U(z) &= f^2(z) \bigg[ \frac{3}{4z^2} - 4\,c_2^4 z^2 + c_2^8 z^6 + \left(4\,c_2^4 + c_1^4\right) z^2 Q^2(z) + \left(\frac{4\,c_2^8}{c_1^2} + 2\,c_1^2 c_2^4\right) z^4 Q(z) \\ &- \left(\frac{4\,c_2^8}{c_1^2} + 2\,c_1^2 c_2^4\right) z^4 Q^3(z) - 2\,c_2^8 z^6 Q^2(z) + c_2^8 z^6 Q^4(z) \bigg] \\ &+ 2f(z) \left(\frac{z^2}{z_h^4} + 2\frac{z^4}{z_h^4} c_1^2 Q(z) + \frac{z^6}{z_h^4} c_2^4 \left(1 - Q^2(z)\right)\right), \end{split}$$
(4.21)

wobei  $f(z) = 1 - \frac{z^4}{z_h^4}$  und  $Q(z) = \tanh\left(\frac{c_2^4}{c_1^2 z^2}\right)$  bezeichnen. Es sei dabei wieder darauf hingewiesen, dass obiges U(z) nur genau dann das Potential der Schrödinger-Gleichung (4.2) ist, wenn es bei z = z(r) ausgewertet wird.

Als erstes soll das Temperaturverhalten des Schrödinger-Potentials im Huang-Ansatz des Dilatons für  $c_1 = c_2 = 391$  MeV betrachtet werden. In Abbildung 4.6a ist hierfür das Potential (4.21) mit  $c_1 = c_2 = 391$  MeV für verschiedene Temperaturen von 0 bis 30 MeV dargestellt. Hierbei lässt sich erkennen, dass sich analog zur Darstellung 4.2a ein Minimum im Potential bildet, wobei der Verlauf des Potentials um das Minimum im vorliegenden Huang-Ansatz deformiert wird. Diese Deformation ändert sich jedoch kaum unter Variation der Temperatur im Bereich von 0 bis 30 MeV. Für T = 0 entsteht ein Potential, welches für große Werte von  $\omega$ unbeschränkt ist, womit beliebig viele diskrete Lösungen der Schrödinger-Gleichung



Abbildungen 4.6: Das Potential U der Schrödinger-Form der Bewegungsgleichung im Huang-Ansatz für das Dilaton dargestellt als Funktion der Regge-Wheeler-Koordinate r für verschiedene Temperaturen mit  $c_1 = c_2 = 391$  MeV. (a) Temperaturen von 0 bis 30 MeV, (b) Temperaturen von 30 bis 150 MeV.

möglich sind. Hingegen bildet sich für endliche Temperaturen rechts vom Minimum ein Maximum, welches die Anzahl der möglichen diskreten Moden, welche sich in diesem Potential ausbilden können, nach oben beschränkt. Dies wurde in ähnlicher Weise auch schon beim KKSS-Ansatz im Abschnitt 4.3.1 diskutiert. Für steigende Temperaturen verschiebt sich das Maximum immer weiter zu niedrigeren r, wobei die Höhe des Maximums abnimmt.

In Abbildung 4.6b ist das Schrödinger-Potential für  $c_1 = c_2 = 391 \text{ MeV}$  und verschiedene Temperaturen von 30 bis 130 MeV dargestellt. Es lässt sich dabei

erkennen, dass das Maximum bedeutend langsamer abnimmt, sobald es die oben angesprochene Deformation des Minimums passiert. Damit bleibt das Minimum, anders als im KKSS-Model, länger bestehen und wird erst bei etwa T = 120 MeVdurch das Maximum kompensiert, womit sich für T > 120 MeV keine diskreten Moden mehr ausbilden können. Als nächstes soll der Einfluss der Skala  $c_2$  auf



**Abbildungen 4.7:** Das Potential U der Schrödinger-Form der Bewegungsgleichung im Huang-Ansatz für das Dilaton dargestellt als Funktion der Regge-Wheeler-Koordinate r für verschiedene Werte von  $c_2$  bei  $c_1 = 391$  MeV und T = 20 MeV. (a): Skalen  $c_2$  von 125 bis 300 MeV, (b): Skalen  $c_2$  von 400 bis 550 MeV.

die Form des Potentials bei festem  $c_1 = 391$  MeV untersucht werden. Dazu ist in den Abbildungen 4.7 das Schrödinger-Potential (4.21) für verschiedene  $c_2$  und eine feste Temperatur von T = 20 MeV dargestellt, wobei Abbildung 4.7a Potentiale mit  $c_2 < c_1$  und Abbildung 4.7b Potentiale mit  $c_2 > c_1$  zeigt.



**Abbildung 4.8:** Das Potential U der Schrödinger-Form der Bewegungsgleichung im Huang-Ansatz für das Dilaton dargestellt als Funktion der Regge-Wheeler-Koordinate r mit T = 20 MeV und  $c_1 = 391$  MeV für verschiedene Werte von  $c_2$  im Bereich 400 bis 550 MeV.

Im Fall  $c_2 < c_1$  lässt sich feststellen, dass die oben angesprochene Deformation im Potentialverlauf um das Minimum mit sinkendem  $c_2$  eine Verbreiterung des Potentials um das Minimum bewirkt. Das Maximum im Potential, welches die Anzahl der möglichen diskreten Moden nach oben beschränkt, wächst mit sinkendem  $c_2$ erst etwas an, und wird für  $c_2 < 200 \,\text{MeV}$  immer kleiner. Für  $c_2 = 0$  reduziert sich das Potential auf den Fall ohne Dilaton. Der Grund hierfür ist, dass das Dilaton (3.5) im Huang-Ansatz für  $c_2 = 0$  verschwindet und somit der Ansatz (3.2) zur konformen Deformation der AdS-BH-Metrik zu einer identischen Abbildung wird. Im Fall  $c_2 > c_1$  lässt sich in Abbildung 4.7b erkennen, dass die Variation von  $c_2$ keinen Einfluss mehr auf das Maximum im Potential besitzt. Jedoch wird der Verlauf des Potentials um dessen Minimum stark deformiert. In Abbildung 4.8 ist hierzu ein Ausschnitt der Abbildung 4.7b um das Minimum im Schrödinger-Potential dargestellt. Es lässt sich dabei erkennen, dass sich für steigende  $c_2$  ein zusätzliches Maximum und damit ein weiteres Minimum bildet. Dieses zusätzliche Maximum verschiebt sich dabei mit steigenden  $c_2$  zu kleineren r und verschwindet für  $c_2 \gg 550 \,\mathrm{MeV}$  vollständig im globalen Anstieg des Schrödinger-Potentials bei  $r \to 0$ . Das Verhalten bei sehr großen  $c_2$  wurde dabei für den Fall T = 0 schon in Abschnitt 4.2 diskutiert, wobei sich das Schrödinger-Potential im Huang-Ansatz auf das Potential im KKSS-Ansatz (3.4) reduziert. Auch im vorliegenden Fall endlicher Temperaturen ergibt sich für große  $c_2 \gg c_1$  das Schrödinger-Potential im KKSS-Ansatz (3.4), denn für große Argumente im Tangens Hyperbolicus reduziert



sich das Huang-Dilaton (3.5) gerade auf das KKSS-Dilaton (3.4).



Weiter soll untersucht werden, inwiefern die Fälle  $c_2 < c_1$  und  $c_2 > c_1$  einen Einfluss auf das Temperaturverhalten der Schrödinger-Potentiale haben. Dazu sind in den Abbildungen 4.9 exemplarisch Potentiale jeweils mit  $c_2 = 250 \text{ MeV}$ beziehungsweise mit  $c_2 = 500 \text{ MeV}$  für verschiedene Temperaturen dargestellt. Im Fall  $c_2 < c_1$  lässt sich in Abbildung 4.9a erkennen, dass für steigende Temperaturen das Maximum im Potential kleiner wird und sich zu kleineren r verschiebt. Ab einer Temperatur von T = 110 MeV wird das Minimum durch das Maximum kompensiert, womit das Potential für T > 110 MeV kein Extremum mehr ausbildet. Dieses Verhalten ist dabei ähnlich den Beobachtungen, welche schon im KKSS-Ansatz des Dilatons in den Abbildungen 4.2 gemacht wurden.

Zum Fall  $c_2 > c_1$  ist das Schrödinger-Potential in Abbildung 4.9b bei  $c_2 = 500$  MeV für verschiedene Temperaturen T von 30 bis 150 MeV dargestellt. Hierbei lässt sich feststellen, dass sich bei T = 30 MeV im Verlauf des Minimums im Potential ein zweites Maximum bildet und somit das Schrödinger-Potential zwei Minima besitzt. Das rechte Minimum wird dabei bei einer Temperatur von T = 70 MeV durch das rechte Maximum kompensiert. Das linke Minimum wird mit steigenden Temperaturen zwar angehoben, bleibt jedoch bis etwa T = 160 MeV bestehen. Anders als der KKSS-Ansatz (3.4), bietet der Huang-Ansatz (3.5) des Dilatons durch die zweite Skala  $c_2$  mehr Einstellungsmöglichkeiten für das Verhalten der Peaks in der Spektralfunktion.

#### 4.4.2 Näherung für kleine Temperaturen

Im Abschnitt 4.3.2 wurde das Schrödinger-Potential im KKSS-Ansatz des Dilatons bei kleinen Temperaturen untersucht. Analog soll im vorliegenden Abschnitt versucht werden, eine Näherung an das Potential für kleine Temperaturen im Huang-Ansatz zu finden. Dazu wird wieder folgende Näherung für die Umkehrfunktion z(r) bei  $T \ll c_1$  verwendet:

$$z(r) = r - \frac{r^5}{5z_h^4},$$

welche im Anhang D.3 hergeleitet wird. Setzt man diese Näherung in das Schrödinger-Potential (4.21) ein und entwickelt um r = 0, so ergibt sich unter Verwendung von (2.48)

$$U(r) = \frac{3}{4r^2} + \left(\frac{4}{5}\pi^4 T^4 - 4c_2^4\right)r^2 + \mathcal{O}(r^6).$$

Zur genaueren Abschätzung dieses Ausdrucks, geht man zu dimensionslosen Größen  $\rho := c_2 r$  und  $\tau := \frac{T}{c_2}$  über, womit das Potential U(r) folgendermaßen umgeschrieben wird:

$$U(\rho) = c_2^2 \left( \frac{3}{4\rho^2} + \left( \frac{4}{5} \pi^4 \tau^4 - 4 \right) \rho^2 + \mathcal{O}(\rho^6) \right).$$

Vernachlässigt man nun für  $\rho \ll 1$  die Terme  $\mathcal{O}(r^6)$ , so ist zu erkennen, dass für  $\tau \ll 1$ , oder äquivalent  $T \ll c_2$ , ein Potential der Form  $\frac{3}{4\rho^2} - b\rho^2$ , mit positiver Konstante *b* entsteht. Wie schon in Abschnitt 4.2 diskutiert wurde, besitzen Potentiale dieser Form keine reelle positive Extremstelle, womit sich in dieser quadratischen Abschätzung des Potentials U(r) keine Näherung an die diskreten Werte für  $\omega^2$  finden lässt. Das Auftreten eines Minimums im Potential (4.21) und damit das Vorkommen von diskreten Lösungen der Schrödinger-Gleichung (4.2) scheint sich im Huang-Ansatz erst in Termen der Ordnung  $r^6$  und höher zu zeigen.

### 5 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde die Spektralfunktion von Vektormesonen bei endlichen Temperaturen mit Hilfe holographischer Methoden bestimmt. Motiviert durch das Vorgehen in [8, 9, 28, 29] wurden hierzu Vektorfelder auf einem fünfdimensionalen Raum betrachtet, welchen man sich als einen Anti-de Sitter-Raum erweitert um ein schwarzes Loch vorstellen kann. Zum Erzeugen eines diskreten Energiespektrums wurde vor diesem Hintergrund die in [23] vorgestellte Erweiterung der Wirkung im fünfdimensionalen Raum mittels eines Dilatons verwendet und diese als konforme Deformation dieses Raumes reinterpretiert, wobei die Wechselwirkung des Dilatons mit dem umgebenen Raum vernachlässigt wurde. Für das so eingebrachte Dilaton wurden zwei verschiedene ad hoc Profile angesetzt: der KKSS-Ansatz aus [23], wobei [9, 28] nachgezeichnet wurden und der Huang-Ansatz aus [26]. Für diese beiden Ansätze wurden die Spektralfunktionen numerisch berechnet.

Dabei wurde unter anderem festgestellt, dass sich die Peaks in der Spektralfunktion im KKSS-Ansatz für steigende Temperaturen zu kleineren Energien verschieben, wobei sich ein zu extremes Temperaturverhalten und eine zu geringe Dissoziationstemperatur der betrachteten Vektormesonen einstellt, was schon in [8, 9] diskutiert wurde. Ferner wurden mögliche Gründe für dieses Verhalten angegeben, womit sich auch ein mögliches weiteres Vorgehen zur Verbesserung ergibt. Für den Huang-Ansatz konnte festgestellt werden, dass sich ein ähnliches Verhalten der Peakpositionen unter Veränderung der Temperatur einstellt, wie schon beim KKSS-Ansatz. Hierbei ermöglicht die mit dem Ansatz verbundene Einführung einer zweiten Skala weitere Einstellungsmöglichkeiten bezüglich der Position des ersten Peaks und damit der Grundzustandsenergie.

Zur weiteren Evaluation des Temperaturverhaltens wurden, wieder motiviert durch die Arbeiten [8, 9, 28, 29], die Bewegungsgleichungen der Vektorfelder im fünfdi-

mensionalen Raum in die Form einer stationären Schrödinger-Gleichung überführt. Damit konnten Schrödinger-Potentiale identifiziert und somit Aussagen über die Möglichkeit eines diskreten Energiespektrums bei steigenden Temperaturen gewonnen werden.

Hierbei konnte durch Fitten der Potentiale im KKSS-Ansatz angegeben werden, bei welchen Temperaturen die jeweiligen Moden "herausfallen". Es wurde festgestellt, dass diese Angaben nur für kleine Temperaturen mit den Beobachtungen in den Spektralfunktionen kompatibel sind, was auf die verwendete Regressionsfunktion zurückgeführt wurde. Weiter ist eine Näherung des Schrödinger-Potentials im KKSS-Ansatz für kleine Temperaturen gefunden wurden, welche eine analytische Lösung der Schrödinger-Gleichung und damit die Angabe eines analytischen Ausdrucks für die diskreten Energien im Spektrum ermöglicht. Wie nicht anders zu erwarten war, ist diese Näherungsformel ebenfalls nur für kleine Temperaturen mit den Beobachtungen in der Spektralfunktion kompatibel. Vor allem das Absinken der Grundzustandsenergie konnte weder mit den Fits an die exakten Schrödinger-Potentiale, noch durch die Näherung für kleine Temperaturen nachgewiesen werden.

Für das Schrödinger-Potentiale im Huang-Ansatz des Dilatons wurden für endliche Temperaturen bestimmt und qualitativ untersucht. Dabei wurde der Einfluss der zweiten Skala in diesem Ansatz auf den Verlauf der Potentiale diskutiert. Es wurde weiter festgestellt, dass im Gegensatz zum KKSS-Ansatz, für kleine Temperaturen keine quadratische Näherung für die Potentiale im Huang-Ansatz gefunden werden kann und somit eine störungstheoretische Behandlung notwendig wird. Zusätzlich konnten für den Spezialfall bei T = 0 allgemeine Voraussetzungen festgestellt werden, welche Dilatonprofile erfüllen müssen, damit sich bei T = 0 ein diskretes Massenspektrum einstellt und dieses eine bestimmte Form besitzt.

Für die in dieser Arbeit dargelegten Methode zur Berechnung der Spektralfunktion von Vektormesonen bei endlichen Temperaturen lassen sich folgende notwendige Verbesserungen vorschlagen:

- Mit Hilfe der im Anhang A und im Abschnitt 4.1 hergeleiteten allgemeinen Formeln lässt sich die Berechnung der Spektralfunktion sowie der zugehörigen Schrödinger-Form auch auf andere vorgegebene Dilaton-Profile anwenden.
- Die Einführung des Dilatons, als konforme Deformation der Metrik in Abschnitt 3.1.1 sollte ersetzt werden durch eine Betrachtung des Dilatons als

dynamisches Feld mit einem nicht-trivialen Potential, womit die im Abschnitt 2.3.6 bestimmten Funktionen A und f nicht mehr unabhängig vom Dilaton wären.

# Anhang

# ANHANG A

### Vektorfelder auf Riemann-Räumen

### A.1 Skalarfelder auf Riemann-Räumen

Man betrachte ein reelles klassisches Skalarfeld  $\varphi$  auf einem *d*-dimensionalen Riemann-Raum mit der Metrik  $g_{mn}$ , wobei  $m, n = 0, \ldots, d$ . Dieses Skalarfeld  $\varphi$ soll dabei beschrieben werden durch die Wirkung

$$S_{scal} = \int d^d x \sqrt{g} \frac{1}{2} \left( g^{mn} \partial_m \varphi \partial_n \varphi - \mu^2 \varphi^2 \right) =: \int d^d x \, \mathcal{L}(\varphi, \partial_m \varphi), \tag{A.1}$$

wobei  $\mu$  einen Massen-Parameter und  $\mathcal{L}$  die Lagrange-Dichte für  $\varphi$  bezeichnet. Um die Dynamik von  $\varphi$  zu beschreiben, verwendet man die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \partial_a \varphi \right)} = 0$$

mit  $a = 0, \ldots, d$ , welche sich aus dem Verschwinden der ersten Variation von  $S_{scal}$  ergibt.

Man erkennt nun sofort

$$rac{\partial \mathcal{L}}{\partial arphi} = -\sqrt{g}\mu^2 arphi.$$

Ferner ergibt sich

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a \varphi)} = \sqrt{g} \frac{g^{mn}}{2} \frac{\partial}{\partial (\partial_a \varphi)} (\partial_m \varphi \partial_n \varphi)$$

$$= \sqrt{g} \frac{g^{mn}}{2} \left( \frac{\partial (\partial_m \varphi)}{\partial (\partial_a \varphi)} \partial_n \varphi + \frac{\partial (\partial_n \varphi)}{\partial (\partial_a \varphi)} \partial_m \varphi \right)$$

$$= \sqrt{g} \frac{g^{mn}}{2} (\delta^a_m \partial_n \varphi + \delta^a_n \partial_m \varphi)$$

$$= \frac{\sqrt{g}}{2} (g^{an} \partial_n \varphi + g^{am} \partial_m \varphi)$$

$$= \sqrt{g} g^{an} \partial_n \varphi.$$

Damit folgt für die Bewegungsgleichung für das obige Skalarfeld

$$0 = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_m \left( \sqrt{g} g^{mn} \partial_n \varphi \right) + \mu^2 \varphi.$$

### A.2 Bewegungsgleichungen

Es bezeichne  $A_m$  ein klassisches masseloses abelsches Vektorfeld auf einem *d*dimensionalen Riemann-Raum mit der Metrik  $g_{mn}$ , wobei wieder  $m, n = 0, \ldots, d$ . Beschrieben werden soll dieses Vektorfeld durch die Wirkung

$$S_{vec} = -\int d^d x \, \frac{\sqrt{g}}{4} g^{mm'} g^{nn'} F_{mn} F_{m'n'} =: \int d^d x \, \mathcal{L}(A_m, \partial_n A_m), \tag{A.2}$$

wobei  $F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m$  den Feldstärketensor und  $\mathcal{L}$  die Lagrange-Dichte für  $A_m$  bezeichnen. Man beachte, dass eigentlich beim Übergang vom flachen in den gekrümmten Raum die partielle durch die kovariante Ableitung ersetzt werden muss

$$\partial_m A_n \to D_m A_n := \partial_m A_n - \Gamma_{mn}^k A_k,$$

wobei  $\Gamma_{mn}^k := \frac{g^{kl}}{2} \left( \partial_m g_{ln} + \partial_n g_{lm} - \partial_l g_{mn} \right)$  die Christoffel-Symbole bezeichnen, für welche  $\Gamma_{mn}^k = \Gamma_{nm}^k$  gilt. Wegen der Antisymmetrie von  $F_{mn}$  in den Indizes fallen die Zusatzterme jedoch weg:

$$F_{mn} = D_m A_n - D_n A_m = \partial_m A_n - \Gamma_{mn}^k A_k - \partial_n A_n + \Gamma_{nm}^k A_k = \partial_m A_n - \partial_n A_m$$

Wie schon beim Skalarfeld, wird die Dynamik von  $A_m$  beschrieben durch die Euler-Lagrange-Gleichung, welche sich aus dem Verschwinden der ersten Variation von  $S_{vec}$  ergibt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_l} - \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_k A_l\right)} = 0$$

mit  $k, l = 0, \ldots, d$ . Es folgt nun termweise:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_l} = 0,$$

wie es für ein masseloses nichtabelsches Feld zu erwarten ist. Ferner findet man

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k A_l)} = \frac{\sqrt{g}}{4} g^{mm'} g^{nn'} \frac{\partial (F_{mn} F_{m'n'})}{\partial (\partial_k A_l)}$$
$$= \frac{\sqrt{g}}{4} g^{mm'} g^{nn'} \left( \frac{\partial (\partial_m A_n)}{\partial (\partial_k A_l)} - \frac{\partial (\partial_n A_m)}{\partial (\partial_k A_l)} \right) F_{m'n'}$$
$$+ \frac{\sqrt{g}}{4} g^{mm'} g^{nn'} F_{mn} \left( \frac{\partial (\partial_{m'} A_{n'})}{\partial (\partial_k A_l)} - \frac{\partial (\partial_{n'} A_{m'})}{\partial (\partial_k A_l)} \right)$$

und mit  $\frac{\partial(\partial_m A_n)}{\partial(\partial_k A_l)} = \delta_m^k \delta_n^l$  ergibt sich

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k A_l)} = \frac{\sqrt{g}}{4} g^{mm'} g^{nn'} \left[ \left( \delta_m^k \delta_n^l - \delta_n^k \delta_m^l \right) F_{m'n'} + \left( \delta_{m'}^k \delta_{n'}^l - \delta_{n'}^k \delta_{m'}^l \right) F_{mn} \right]$$
$$= \frac{\sqrt{g}}{4} \left[ \left( g^{km'} g^{ln'} - g^{lm'} g^{kn'} \right) F_{m'n'} + \left( g^{km} g^{ln} - g^{lm} g^{kn} \right) F_{mn} \right].$$

Benennt man nun folgendermaßen um:  $m',n' \to m,n$ , so ergibt sich

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k A_l)} = \frac{\sqrt{g}}{4} \left[ 2g^{km}g^{ln}F_{mn} - 2g^{lm}g^{kn}F_{mn} \right]$$
$$= \sqrt{g}g^{km}g^{ln}F_{mn}.$$

Hierbei wurden beim letzten Schritt im zweiten Term  $m \leftrightarrow n$  umbenannt und ausgenutzt, dass  $F_{mn} = -F_{nm}$  gilt. Setzt man dies in die Euler-Lagrange-Gleichung ein, so folgt

$$0 = \partial_k \left( \sqrt{g} g^{km} g^{ln} F_{mn} \right). \tag{A.3}$$

### Spezialfall: konform flache Metriken

In diesem Abschnitt sollen Vektorfelder auf einer Klasse von fünfdimensionalen Riemann-Räumen diskutiert werden, welche sich bis auf einen Faktor nicht von einem flachen Raum mit der Signatur (1,4) des  $AdS_5$  unterscheiden. Mit Blick auf Untersuchungen im  $AdS_5$  soll ein flacher fünfdimensionaler Riemann-Raum mit der Metrik  $(\eta_{MN}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1, -1)$  betrachtet werden, welcher durch einen konformen Faktor  $e^{2B}$  deformiert wird. Der so entstehende Raum besitzt die Metrik

$$(g_{MN}) = e^{2B} \left( \eta_{MN} \right), \tag{A.4}$$

welche als konform flach bezeichnet wird. Dabei kann der vorkommende konforme Faktor  $e^B$  eine Funktion der Koordinaten sein, wobei hier, wieder motiviert durch die AdS-Metrik (2.8), nur eine Abhängigkeit zur holographischen Koordinate betrachtet werden soll: B = B(z). Aus obiger Metrik  $(g_{MN})$  bestimmt man

$$\sqrt{g} = \sqrt{\det(g_{MN})} = \sqrt{e^{10B}} = e^{5B},$$

sowie die inverse Metrik

$$\left(g^{MN}\right) := \left(g_{MN}\right)^{-1} = e^{-2B}\left(\eta^{MN}\right) \quad \text{mit } \left(\eta^{MN}\right) \equiv \left(\eta_{MN}\right)$$

Setzt man also die konform flache Metrik in die Gleichung (A.3) ein, so folgt

$$0 = \partial_{K} \left( \sqrt{g} g^{LM} g^{KN} F_{MN} \right)$$
$$= \partial_{K} \left( e^{5B} e^{-4B} \eta^{LM} \eta^{KN} F_{MN} \right)$$
$$= \partial_{K} \left( e^{B} \eta^{LM} \eta^{KN} F_{MN} \right),$$

womit für eine konform flache Metrik die Bewegungsgleichung die Form erhält

$$0 = e^B \eta^{LM} \eta^{KN} \left( \left( \partial_K B \right) F_{MN} + \partial_K F_{MN} \right).$$
(A.5)

#### Spezialfall: BH-Metriken

Im Folgenden sollen Vektorfelder auf einer Klasse fünfdimensionaler Riemann-Räume betrachtet werden, welche aus einer Metrik der Form (A.4) durch Einfügen eines schwarzen Lochs, vermittelt durch die Blackess-Funktion f(z), entstehen. Dabei wird das Linienelement angesetzt als

$$ds^{2} = (g_{MN}) dx^{M} dx^{N} = e^{2B} \left( f(z) dt^{2} - \sum_{i=1}^{3} \left( dx^{i} \right)^{2} - \frac{dz^{2}}{f(z)} \right).$$
(A.6)

Motiviert wird dieser Ansatz durch die bekannte Form der Schwarzschild-Metrik, wobei die holographische Koordinate als Radialkoordinate interpretiert wird. Die Position des Ereignishorizontes  $z_h$  wird definiert als der kleinste Wert für z, für welchen die Blackness-Funktion f(z) eine einfache Nullstelle besitzt. Es soll nun die Bewegungsgleichung (A.3) in obiger Metrik für verschiedene freie Indizes skizziert werden:

*i*) L = z:

$$0 = \partial_K \left( e^{5B} g^{zM} g^{KN} F_{MN} \right).$$

Da die Metrik  $g_{MN}$  diagonal ist, fallen in der Summe über M alle Summanden bis auf den Fall M = z weg, womit folgt

$$\begin{split} 0 &= \partial_{K} \left( e^{5B} g^{zz} g^{KN} F_{zN} \right) \\ &= \partial_{K} \left( e^{3B} \left( -f \right) g^{KN} F_{zN} \right) \\ &= \partial_{t} \left( e^{3B} \left( -f \right) g^{tN} F_{zN} \right) + \partial_{i} \left( e^{3B} \left( -f \right) g^{iN} F_{zN} \right) \\ &+ \partial_{z} \left( e^{3B} \left( -f \right) g^{zN} F_{zN} \right), \end{split}$$

wobei über i = 1, 2, 3 summiert wird. Betrachtet man wieder das Wegfallen aller Summanden für nicht auf der Diagonale liegenden Elemente der Metrik, so folgt

$$0 = -e^{3B}f\left(g^{tt}\partial_t F_{zt} - g^{ij}\partial_i F_{zj}\right) - \partial_z\left(e^{3B}fg^{zz}F_{zz}\right),$$

wobei über i, j = 1, 2, 3 summiert wird. Wegen der Schiefsymmetrie von  $F_{MN}$  in den Indizes gilt  $F_{zz} = 0$ , womit der letzte Term wegfällt und somit folgt

$$0 = e^B \left( f \partial^i F_{zi} - \partial_t F_{zt} \right). \tag{A.7}$$

*ii*) L = t:

$$0 = \partial_K \left( e^{5B} g^{tM} g^{KN} F_{MN} \right).$$

Beachtet man wieder das Wegfallen aller Summanden für nicht auf der Diagonale liegende Elemente der Metrik, so folgt

$$\begin{split} 0 &= \partial_{K} \left( e^{5B} g^{tt} g^{KN} F_{tN} \right) \\ &= \partial_{K} \left( \frac{e^{3B}}{f} g^{KN} F_{tN} \right) \\ &= \partial_{t} \left( \frac{e^{3B}}{f} g^{tN} F_{tN} \right) + \partial_{i} \left( \frac{e^{3B}}{f} g^{iN} F_{tN} \right) + \partial_{z} \left( \frac{e^{3B}}{f} g^{zN} F_{tN} \right) \\ &= \partial_{t} \left( \frac{e^{3B}}{f} g^{tt} F_{tt} \right) + \partial_{i} \left( \frac{e^{3B}}{f} g^{ij} F_{tj} \right) + \partial_{z} \left( \frac{e^{3B}}{f} g^{zz} F_{tz} \right). \end{split}$$

Wieder gilt  $F_{tt} = 0$ , womit der erste Term verschwindet:

$$0 = -\frac{e^B}{f} \partial^i F_{ti} - \partial_z \left( e^B F_{tz} \right), \tag{A.8}$$

wobei über i = 1, 2, 3 summiert wird.

*iii)* L = i (= 1, 2, 3):

$$0 = \partial_K \left( e^{5B} g^{iM} g^{KN} F_{MN} \right).$$

Wieder fallen alle Summanden für nicht auf der Diagonale liegende Elemente der Metrik weg, womit folgt:

$$0 = \partial_{K} \left( e^{5B} g^{ij} g^{KN} F_{jN} \right)$$
  

$$= -\partial_{K} \left( e^{3B} g^{KN} F_{iN} \right)$$
  

$$= -\partial_{t} \left( e^{3B} g^{tN} F_{iN} \right) - \partial_{j} \left( e^{3B} g^{jN} F_{iN} \right) - \partial_{z} \left( e^{3B} g^{zN} F_{iN} \right)$$
  

$$= - \left[ e^{3B} g^{tt} \partial_{t} F_{it} + e^{3B} g^{il} \partial_{j} F_{il} + \partial_{z} \left( e^{3B} g^{zz} F_{iz} \right) \right]$$
  

$$= - \frac{e^{B}}{f} \partial_{t} F_{it} + e^{B} \partial^{l} F_{il} + \partial_{z} \left( e^{B} f F_{iz} \right), \qquad (A.9)$$

wobei über l = 1, 2, 3 summiert wird.

# A.3 On-shell-Wirkungen

Man betrachte ein masseloses abelsches Vektorfeld  $V_M$  auf einem fünfdimensionalen Riemann-Raum, welcher durch die Metrik  $g_{MN}$  beschrieben wird. Die Dynamik dieses Vektorfeldes soll beschrieben werden durch die Wirkung

$$S_{vec} = -\int d^5x \, \frac{\sqrt{g}}{4} g^{MM'} g^{NN'} F_{MN} F_{M'N'},$$

wobei  $F_{MN} = \partial_M V_N - \partial_N V_M$ . Im Abschnitt A.2 wurde die Bewegungsgleichung (A.3) des Vektorfeldes hergeleitet, wobei sich ergab

$$0 = \partial_K \left( \sqrt{g} g^{KM} g^{LN} F_{MN} \right).$$

Die On-Shell-Wirkung entsteht, wenn diese Bewegungsgleichung in obige Wirkung eingesetzt wird. Motiviert wird dieses Vorgehen dadurch, dass für die Operator-Feld-Dualität nur Teile der Randwerte obiger Wirkung benötigt werden und der Rest durch die Bewegungsgleichung wegfällt. Man betrachte dazu den Integranden der obigen Wirkung:

$$\begin{split} \sqrt{g}g^{MM'}g^{NN'}F_{MN}F_{M'N'} &= \sqrt{g}g^{MM'}g^{NN'}\left(\partial_M V_N - \partial_N V_M\right)F_{M'N'}\\ &= \partial_M\left(\sqrt{g}g^{MM'}g^{NN'}V_NF_{M'N'}\right)\\ &- V_N\partial_M\left(\sqrt{g}g^{MM'}g^{NN'}F_{M'N'}\right)\\ &- \partial_N\left(\sqrt{g}g^{MM'}g^{NN'}V_MF_{M'N'}\right)\\ &+ V_M\partial_N\left(\sqrt{g}g^{MM'}g^{NN'}F_{M'N'}\right). \end{split}$$

Der zweite und der vierte Term fällt aufgrund der Bewegungsgleichung weg. Es folgt damit

$$\begin{split} \sqrt{g}g^{MM'}g^{NN'}F_{MN}F_{M'N'} &= \partial_M \left(\sqrt{g}g^{MM'}g^{NN'}V_NF_{M'N'}\right) \\ &- \partial_N \left(\sqrt{g}g^{MM'}g^{NN'}V_MF_{M'N'}\right) \\ &= 2\partial_M \left(\sqrt{g}g^{MM'}g^{NN'}V_NF_{M'N'}\right), \end{split}$$

wobei im letzten Schritt im zweiten Term  $M \leftrightarrow N$  und  $M' \leftrightarrow N'$  umbenannt und  $F_{MN} = -F_{NM}$  ausgenutzt wurde. Damit ergibt sich also die On-Shell-Wirkung

$$S^{\text{on-shell}} = -\frac{1}{2} \int d^5 x \,\partial_M \left( \sqrt{g} g^{MM'} g^{NN'} V_N F_{M'N'} \right). \tag{A.10}$$

### Spezialfall: konform flache Metriken

Es soll nun die On-Shell-Wirkung für den Fall konform flacher Metriken spezifiziert werden. Setzt man eine Metrik der Form (A.4) in die On-Shell-Wirkung (A.10) ein, so folgt

$$S^{\text{on-shell}} = -\frac{1}{2} \int d^5 x \,\partial_M \left( e^B \eta^{MM'} \eta^{NN'} V_N F_{M'N'} \right),$$

wobei  $(\eta_{MN}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1, -1)$  und B = B(z) den konformen Faktor der Metrik bezeichnet. Man teilt die *M*-Summation in *z*-Anteile und  $\mu$ -Anteile auf und integriert den jeweils anderen Teil, womit sich zwei Arten von Randtermen ergeben:

$$S^{\text{on-shell}} = -\frac{1}{2} \int d^5 x \, \partial_z \left( e^B \eta^{zz} \eta^{NN'} V_N F_{zN'} \right) - \frac{1}{2} \int d^5 x \, \partial_\mu \left( e^B \eta^{\mu\nu} \eta^{NN'} V_N F_{\nu N'} \right) = -\frac{1}{2} \int d^4 x \left( e^B \eta^{zz} \eta^{NN'} V_N F_{zN'} \right) \bigg|_{z \in \partial \mathcal{I}} - \frac{1}{2} \int dz \left( e^B \eta^{\mu\nu} \eta^{NN'} V_N F_{\nu N'} \right) \bigg|_{x^{\mu} \in \mathcal{C}}.$$

Dabei bezeichnet  $\mathcal{I}$  ein Intervall für z und somit  $\partial \mathcal{I}$  dessen Randpunkte. Ferner bezeichnet  $\mathcal{C}$  eine Randfläche für die restlichen Koordinaten, welche im Fall des Minkowski-Raums gerade dem Fall  $|x^{\mu}| \to \infty$  entspricht. Mit Blick auf die Operator-Feld-Dualität werden folgende Eigenschaft für das Vektorfeld  $V_M$ gefordert:

$$\lim_{x^{\mu} \in C} V_{\mu} = 0 \qquad (\text{Regularität der Randtheorie}), \tag{A.11}$$

$$V_z = 0$$
 (Strahlungseichung). (A.12)

Damit reduziert sich die On-Shell-Wirkung auf

$$S^{\text{on-shell}} = \frac{1}{2} \int d^4 x \, \left( e^B \eta^{\mu\nu} V_{\mu} \partial_z V_{\nu} \right) \Big|_{z \in \partial \mathcal{I}}.$$

#### Spezialfall: BH-Metriken

In diesem Abschnitt soll die On-Shell-Wirkung für den Fall einer allgemeinen BH-Metrik spezifiziert werden. Dazu setzt man die BH-Metrik (A.6) in die allgemeine Form der On-Shell-Wirkung (A.10) ein und erhält:

$$\begin{split} S^{\text{on-shell}} &= -\frac{1}{2} \int d^5 x \left[ \partial_z \left( e^B \tilde{\eta}^{zz} \tilde{\eta}^{NN'} V_N F_{zN'} \right) + \partial_\nu \left( e^B \tilde{\eta}^{\nu\mu} \tilde{\eta}^{NN'} V_N F_{\mu N'} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4 x \left( e^B \tilde{\eta}^{zz} \tilde{\eta}^{NN'} V_N F_{zN'} \right) \bigg|_{z \in \partial \mathcal{I}} \\ &- \frac{1}{2} \int dz \left( e^B \tilde{\eta}^{\nu\mu} \tilde{\eta}^{NN'} V_N F_{\mu N'} \right) \bigg|_{x \in \mathcal{C}}, \end{split}$$

wobei  $(\tilde{\eta}_{MN}) = \text{diag}(f, -1, -1, -1, -f^{-1})$  bezeichnet. Wieder mit Blick auf die Operator-Feld-Dualität werden hier für das Vektorfeld  $V_M$  die Eigenschaften (A.11) und (A.12) gefordert. Damit fällt jedoch der zweite Term in obiger On-Shell-Wirkung weg und es folgt

$$\begin{split} S^{\text{on-shell}} &= \frac{1}{2} \int d^4 x \left( f e^{-B} g^{NN'} V_N F_{zN'} \right) \bigg|_{z \in \partial \mathcal{I}} \\ &= \frac{1}{2} \int d^4 x \left( f e^{-B} g^{\mu\nu} V_\mu \partial_z V_\nu \right) \bigg|_{z \in \partial \mathcal{I}}, \end{split}$$

wobei  $(g_{\mu\nu}) = e^{2B} \operatorname{diag} (f, -1, -1, -1)$  bezeichnet.

# ANHANG B

### Vektorfelder im AdS-BH ohne Dilaton

Im Abschnitt 3.1.1 wurde die Behauptung aufgestellt, dass sich für Vektorfelder im AdS-BH ohne Dilaton, trotz der Beschränkung der holographischen Koordinate durch eine Black-Brane, kein diskretes Energiespektrum  $\omega_n^2$  einstellt. Das Ziel in diesem Abschnitt ist es, diese Aussage zu zeigen.

Man betrachte also ein abelsches Vektorfeld vor dem Hintergrund eines AdS-BH, welches beschrieben wird durch eine Wirkung der Form

$$S = -\int d^5x \, \frac{\sqrt{g}}{4} g^{MM'} g^{NN'} F_{MN} F_{M'N'},$$

wobei  $F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M$  den Feldstärketensor bezeichnet und  $g_{MN}$  gegeben ist durch die im Abschnitt 2.3.6 eingeführte AdS-BH-Metrik (2.39) mit den Funktionen (2.46) und (2.47).

Im Anhang A.2 werden die Bewegungsgleichungen (A.7), (A.8) sowie (A.9) eines abelschen Vektorfeldes in einem Riemann-Raum mit beliebigem konformen Faktor  $e^{2B}$  und beliebiger Blackness-Funktion f hergeleitet. Weiter wird im Abschnitt 3.1.2 gezeigt, dass sich im Ruhesystem  $(p^{\mu}) = (-\omega, 0, 0, 0)$  diese Bewegungsgleichungen reduzieren auf

$$0 = \partial_z^2 V_i(\omega, z) + \left(\partial_z B(z) + \frac{\partial_z f(z)}{f(z)}\right) \partial_z V_i(\omega, z) + \frac{\omega^2}{f^2(z)} V_i(\omega, z).$$
(B.1)

Hierbei bezeichnet  $V_i(\omega, z)$  die räumlichen Komponenten des betrachteten Vektorfeldes im Impulsraum. Um Aussagen über Lösungen mit diskreten  $\omega_n$  zu gewinnen, wurde Gleichung (B.1) im Abschnitt 4.1 auf die Form einer Schrödinger-Gleichung transformiert:

$$-\partial_r^2 \psi_i + U(r)\psi_i = \omega^2 \psi_i, \tag{B.2}$$

wobei r die Regge-Wheeler-Koordinate (siehe dazu Anhang D.3) und U(r) das Schrödinger-Potential bezeichnet, welches gegeben ist durch

$$U(r) = \frac{\partial_r^2 B}{2} + \frac{(\partial_r B)^2}{4}.$$
(B.3)

Ist dabei  $\psi_i(\omega, r)$  Lösung der Schrödinger-Gleichung (B.2), so ist

$$V_i(\omega, z) = e^{-\frac{B(r(z))}{2}} \psi_i(r(z))$$

Lösung von Gleichung (B.1), wobei die Regge-Wheeler-Koordinate r(z) gegeben ist durch Gleichung (D.11). Es wurde hierbei schon erwähnt, dass nur genau dann Lösungen der Schrödinger-Gleichung (B.2) mit diskreten Werten für  $\omega^2$  existieren, wenn das Potential (B.3) mindestens ein Minimum besitzt.

Wie beispielsweise im Abschnitt 4.3.1 argumentiert, lässt sich das Potential (B.3) mit Hilfe des Ausdrucks (D.11) für die Regge-Wheeler-Koordinaten als Funktion der holographische Koordinate z schreiben:

$$U(z) = f^{2}(z) \left(\frac{\partial_{z}^{2}B(z)}{2} + \frac{(\partial_{z}B(z))^{2}}{4}\right) + \frac{f(z)\partial_{z}f(z)}{2}\partial_{z}B(z).$$

Spezialisiert man letzteren Ausdruck für U(z) auf den AdS-BH, das heißt, setzt man  $B(z) = A(z) = -\ln\left(\frac{z}{R}\right)$  und  $f(z) = 1 - \frac{z^4}{z_h^4}$  ein, so folgt

$$U(z) = \frac{1}{2} \frac{f(\partial_z f)}{z} - \frac{1}{4} \frac{f^2}{z^2}$$
  
=  $\frac{1}{2} \left( \frac{4z^6}{z_h^8} - \frac{4z^2}{z_h^4} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{z^6}{z_h^8} - \frac{2z^2}{z_h^4} + \frac{1}{z^2} \right)$   
=  $\frac{7}{4} \frac{z^6}{z_h^8} - \frac{3}{2} \frac{z^2}{z_h^4} - \frac{1}{4z^2}.$  (B.4)

Als notwendige Bedingung, dass das Potential U(z) mindestens ein Extremum besitzt, muss dessen erste Ableitung verschwinden. Diese Forderung führt auf die Bedingung

$$\left(\frac{z}{z_h}\right)^8 - \frac{2}{7}\left(\frac{z}{z_h}\right)^4 + \frac{1}{2} = 0.$$
(B.5)

Die Gleichung (B.5) besitzt dabei für kein reelles  $z_h$  eine reelle positive Lösung. Insbesondere besitzt damit das Potential (B.4) keine reelle positive Extremstelle, womit sich im Fall des AdS-BH für die Schrödinger-Gleichung (B.2) keine Lösungen zu diskreten Werten von  $\omega^2$  finden lassen.

# ANHANG C

### Begriffe der allgemeinen Relativitätstheorie

Im folgenden Anhang werden Aussagen und Notationen der allgemeinen Relativitätstheorie zusammengetragen, welche in der vorliegenden Arbeit verwendet werden. An dieser Stelle wird dabei nicht auf die grundlegenden Definitionen der Riemannschen Geometrie eingegangen, sondern stattdessen auf die Einführungen [20, 25, 34] verwiesen.

### C.1 Grundlegende Definitionen

Sei M ein d-dimensionaler Riemann-Raum mit Metrik  $g_{mn}$ , dann heißt  $(M, g_{mn})$ Raumzeit mit kosmologischer Konstante  $\Lambda$ , wenn die Metrik  $g_{mn}$  folgende Einstein-Gleichungen erfüllt:

$$\mathcal{R}_{mn} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{mn} = \frac{1}{2}\Lambda g_{mn} \tag{C.1}$$

mit  $m, n = 0, \ldots, d-1$ . Hierbei bezeichnet  $\mathcal{R} = g^{mn} \mathcal{R}_{mn}$  den Ricci-Skalar und

$$\mathcal{R}_{mn} = \partial_l \Gamma^l_{mn} - \partial_n \Gamma^l_{ml} + \Gamma^s_{mn} \Gamma^l_{sl} - \Gamma^s_{ml} \Gamma^l_{sn}$$
(C.2)

den Ricci-Tensor, wobei die Christoffel-Symbole  $\Gamma^s_{mn}$  gegeben sind durch

$$\Gamma^{s}_{mn} = \frac{g^{sl}}{2} \left( \partial_n g_{ml} + \partial_m g_{nl} - \partial_l g_{mn} \right). \tag{C.3}$$

Kontrahiert man Gleichung (C.1) mit  $g^{mn}$  von rechts, so folgt für den Ricci-Skalar

$$\mathcal{R} = \frac{d}{2-d}\Lambda.\tag{C.4}$$

Setzt man Gleichung (C.4) wieder in die Einstein-Gleichung (C.1) ein, so ergibt sich

$$\mathcal{R}_{mn} = \frac{\Lambda}{2-d} g_{mn}.$$
(C.5)

Hierbei ist Gleichung (C.5) äquivalent zur Einstein-Gleichung (C.1).

## C.2 Christoffel-Symbole diagonaler Metriken

In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich diagonale Metriken betrachtet, das heißt es gilt

$$g_{mn} = 0$$
, falls  $m \neq n$ .

Mit dieser Voraussetzung lassen sich die Christoffel-Symbole (C.3) vereinfachen, wobei drei verschiedene Fälle auftreten können. Im Folgenden wird nicht die Einsteinsche Summenkonvention verwendet.

*i*) Für die Indizes von  $\Gamma^s_{mn}$  gilt  $m \neq n, m \neq s$  und  $n \neq s$ :

$$\Gamma^{s}_{mn} = \sum_{l} \frac{g^{sl}}{2} \left( \partial_{n} g_{ml} + \partial_{m} g_{nl} - \partial_{l} g_{mn} \right) = \sum_{l} \frac{g^{sl}}{2} \left( \partial_{n} g_{ml} + \partial_{m} g_{nl} \right),$$

wobei  $g_{mn} = 0$  für  $m \neq n$  verwendet wurde. In der Summation über l verschwinden nun alle Terme, für welche  $l \neq s$  gilt, womit folgt

$$\Gamma^{s}_{mn} = \frac{g^{ss}}{2} \left( \partial_n g_{ms} + \partial_m g_{ns} \right) = 0.$$

*ii)* Für die Indizes von  $\Gamma^s_{mn}$  gilt  $m = n \neq s$ :

$$\begin{split} \Gamma^s_{\ mm} &= \sum_l \frac{g^{sl}}{2} \left( \partial_m g_{ml} + \partial_m g_{ml} - \partial_l g_{mm} \right) \\ &= \frac{g^{ss}}{2} \left( \partial_m g_{ms} + \partial_m g_{ms} - \partial_s g_{mm} \right) \\ &= -\frac{1}{2} g^{ss} \partial_s g_{mm}. \end{split}$$

*iii)* Für die Indizes von  $\Gamma^s_{mn}$  gilt s = m:

$$\begin{split} \Gamma^m_{\ mn} &= \sum_l \frac{g^{ml}}{2} \left( \partial_n g_{ml} + \partial_m g_{nl} - \partial_l g_{mn} \right) \\ &= \frac{g^{mm}}{2} \left( \partial_n g_{mm} + \partial_m g_{nm} - \partial_m g_{mn} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{mm} \partial_n g_{mm}. \end{split}$$

Führt man  $g_m := g_{mm}$  als Bezeichnung für die Diagonalelemente der Metrik  $g_{mn}$ und  $\partial_m F =: F_{,m}$  als Abkürzung für die partielle Ableitung einer Funktion F ein, so gilt zusammengefasst für die Christoffel-Symbole

$$\Gamma^{s}_{mn} = 0 \qquad \qquad \text{für } s \neq m \neq n \neq s, \tag{C.6}$$

$$\Gamma^{s}_{mm} = -\frac{g^{s}}{2}g_{m,s} \qquad \text{für } m \neq s, \tag{C.7}$$

$$\Gamma^{m}_{\ mn} = \frac{g^{m}}{2}g_{m,n} \qquad \text{für alle } m, n.$$
(C.8)

Hierbei bezeichnet  $g^m := (g_m)^{-1} = \frac{1}{g_m}$ .

# C.3 Ricci-Tensor diagonaler Metriken

Da in der vorliegenden Arbeit nur Ricci-Tensoren von Metriken betrachtet werden, welche die Einstein-Gleichung (C.1) erfüllen, gilt für  $m \neq n$ 

$$\mathcal{R}_{mn} = \frac{\Lambda}{2-d} g_{mn} = 0,$$

wobei im ersten Schritt Gleichung (C.5) und im zweiten Schritt die Diagonalform der Metrik verwendet wurde. Es genügt also die Diagonalelemente des Ricci-Tenors zu betrachten.

Mit Hilfe der im Abschnitt C.2 gefundenen Ausdrücke (C.6) bis (C.8) der Christoffel-Symbole für diagonale Metriken lassen sich die Diagonalelemente des Ricci-Tensors (C.2) ebenfalls vereinfachen. Hierbei wird wieder keine Einsteinsche Summenkonvention verwendet:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{nn} &= \sum_{l} \left( \Gamma^{l}_{nn,l} - \Gamma^{l}_{nl,n} \right) + \sum_{s,l} \left( \Gamma^{s}_{nn} \Gamma^{l}_{sl} - \Gamma^{s}_{nl} \Gamma^{l}_{sn} \right) \\ &= \sum_{l \neq n} \left( \Gamma^{l}_{nn,l} - \Gamma^{l}_{nl,n} \right) + \sum_{l \neq n} \left( \Gamma^{s}_{nn} \Gamma^{l}_{sl} - \Gamma^{s}_{nl} \Gamma^{l}_{sn} \right) \\ &+ \sum_{s} \left( \Gamma^{s}_{nn} \Gamma^{n}_{sn} - \Gamma^{s}_{nn} \Gamma^{n}_{sn} \right), \end{aligned}$$

wobei in der letzten Summe jeder Summand einzeln verschwindet. Es folgt weiter

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{nn} &= \sum_{l \neq n} \left( \Gamma^l_{nn,l} - \Gamma^l_{nl,n} \right) + \sum_{\substack{l \neq n \\ s \neq l}} \left( \Gamma^s_{nn} \, \Gamma^l_{sl} - \Gamma^s_{nl} \, \Gamma^l_{sn} \right) \\ &+ \sum_{l \neq n} \left( \Gamma^l_{nn} \, \Gamma^l_{ll} - \Gamma^l_{nl} \, \Gamma^l_{ln} \right). \end{aligned}$$

Betrachtet man separat die zweite Summe, so folgt

$$\begin{split} \sum_{\substack{l\neq n\\s\neq l}} \left( \Gamma^s_{nn} \, \Gamma^l_{sl} - \Gamma^s_{nl} \, \Gamma^l_{sn} \right) &= \sum_{\substack{l\neq n\\s\neq l}} \Gamma^s_{nn} \, \Gamma^l_{sl} - \sum_{\substack{l\neq n\\s\neq l}} \Gamma^s_{nl} \, \Gamma^l_{sn} \\ &= \sum_{\substack{l\neq n\\s\neq l}} \Gamma^s_{nn} \, \Gamma^l_{sl} - \sum_{\substack{l\neq n\\l\neq n}} \Gamma^n_{nl} \, \Gamma^l_{nn} \,, \end{split}$$

wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass in der zweiten Summe alle Summanden mit  $s \neq n$  nach Gleichung (C.6) verschwinden. Zusammenfassend lassen sich also die Diagonalelemente des Ricci-Tensors für diagonale Metriken schreiben als

$$\mathcal{R}_{nn} = \sum_{l \neq n} \left( \Gamma^l_{nn,l} - \Gamma^l_{nl,n} + \Gamma^l_{nn} \Gamma^l_{ll} - \Gamma^l_{nl} \Gamma^l_{ln} - \Gamma^n_{nl} \Gamma^l_{nn} \right) + \sum_{\substack{l \neq n \\ s \neq l}} \Gamma^s_{nn} \Gamma^l_{sl}.$$

Hierbei lässt sich erkennen, dass nur noch Christoffel-Symbole der Form (C.7) und (C.8) auftreten und sich somit eine Gleichung für  $\mathcal{R}_{nn}$  angeben lässt, in welche nur noch die Diagonalelemente  $g_n := g_{nn}$  der Metrik einzusetzen sind:

$$\mathcal{R}_{nn} = \sum_{l \neq n} \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{g_{n,l}}{g_l} \right)_{,l} - \frac{1}{2} \left( \frac{g_{l,n}}{g_l} \right)_{,n} - \frac{1}{4} \left( \frac{g_{n,l}}{g_l} \right) \left( \frac{g_{l,l}}{g_l} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{g_{l,n}}{g_l} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{g_{n,l}}{g_n} \right) \left( \frac{g_{n,l}}{g_l} \right) \right] - \frac{1}{4} \sum_{\substack{l \neq n \\ s \neq l}} \left( \frac{g_{n,s}}{g_s} \right) \left( \frac{g_{l,s}}{g_l} \right),$$

wobei wieder  $g_{n,s} := \partial_s g_n$  als Abkürzung verwendet wird.

# ANHANG D

### Mathematische Werkzeuge

In diesem Anhang werden die mathematischen Hilfsmittel zusammengetragen, welche in der vorliegenden Arbeit verwendet werden. Die Aussagen über Besselsche und assoziierte Laguerresche Differentialgleichungen sind dabei weitgehend [3] entnommen.

### D.1 Besselsche Differentialgleichung

Es sei  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, so heißt diese Bessel-Funktion, falls sie folgende gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung erfüllt

$$x^{2}\frac{d^{2}f}{dx^{2}} + x\frac{df}{dx} + (x^{2} - \nu^{2})f = 0.$$
 (D.1)

Hierbei bezeichnet  $\nu \in \mathbb{R}$  die Ordnung der Bessel-Funktion, wobei im Folgenden nur ganzzahlige Werte für  $\nu$  betrachtet werden. Die Differentialgleichung (D.1) heißt auch Besselsche Differentialgleichung.

Verwendet man einen verallgemeinerten Potenzreihenansatz  $f \sim x^{\alpha} \sum_{k} a_{k} x^{k}$ , so erhält man folgende Lösung der Besselschen Differentialgleichung

$$\mathcal{J}_{\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

wobei  $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$  die Eulersche Gamma-Funktion bezeichnet. Es kann gezeigt werden, dass  $\mathcal{J}_{\nu}$  und  $\mathcal{J}_{-\nu}$  für nicht-ganzzahlige  $\nu$  linear unabhängige Lösungen der Besselschen Differentialgleichung (D.1) sind. In der vorliegenden Arbeit werden jedoch zwei linear unabhängige Lösungen für ganzzahlige  $\nu$  benötigt. Hierzu betrachte man die Bessel-Funktion zweiter Gattung, welche definiert ist durch

$$\mathcal{Y}_{\nu}(x) = \frac{\mathcal{J}_{\nu}(x)\cos(\nu\pi) - \mathcal{J}_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)},$$

welche ebenfalls Lösung der Besselschen Differentialgleichung (D.1) ist. Hierbei sind  $\mathcal{J}_{\nu}$  und  $\mathcal{Y}_{\nu}$  linear unabhängige Lösungen, womit durch  $\mathcal{J}_n$  und  $\mathcal{Y}_n := \lim_{\nu \to n} \mathcal{Y}_{\nu}$  zwei linear unabhängige Lösungen der Besselschen Differentialgleichung für ganzzahlige  $\nu = n$  gegeben sind.

Die k-te Nullstelle der Bessel-Funktion erster Gattung wird für jedes  $\nu$  mit  $j_{\nu,k}$ bezeichnet:  $\mathcal{J}_{\nu} (j_{\nu,k}) = 0$ . Diese sind auch Nullstellen von  $\mathcal{Y}_n$  und für verschiedene Werte von  $\nu$  und k in Tabelle D.1 aufgeführt. Für die vorliegende Arbeit werden die Nullstellen von  $\mathcal{J}_{\nu}(x)$  für große x benötigt. Dazu betrachte man folgende asymptotische Form der Bessel-Funktion erster Gattung

$$\mathcal{J}_{\nu}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu \pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

wobei  $x \gg |\nu^2 - \frac{1}{4}|$ .

Die Nullstellen von  $\mathcal{J}_{\nu}(x)$  ergeben sich für große x als

$$j_{\nu,k} = \pi \left( k + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \right),$$

mit  $k \gg 1$ . Es gilt also insbesondere  $j_{1,k} \sim k$  für große k.

k	$j_{0,k}$	$j_{1,k}$	$j_{2,k}$	$j_{3,k}$	$j_{4,k}$	$j_{5,k}$
1	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715
2	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386
3	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002
4	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801
5	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178

**Tabelle D.1:** Nullstellen  $j_{\nu,k}$  der Bessel-Funktion erster Gattung [37].

### Lösung der Schrödinger-Gleichung (2.24)

Im Abschnitt 2.3.2 wurde die Schrödinger-Gleichung (2.24) diskutiert:

$$-\psi''(z) + \left(\frac{3}{4z^2} - m^2\right)\psi(z) = 0,$$
(D.2)

wobei ' die Ableitung nach z bezeichnet. Diese gewöhnliche Differentialgleichung soll nun auf eine Besselsche Differentialgleichung zurückgeführt werden. Dazu wird folgender Ansatz verwendet:  $\psi(z) = aY(z)$ , wobei a = a(z) so gewählt werden soll, dass obige Schrödinger-Gleichung eine Besselsche Form (D.1) erhält. Durch Einsetzen und Multiplizieren mit  $-\frac{z^2}{a}$  ergibt sich

$$z^{2}Y'' + \frac{2a'z^{2}}{a}Y' + \frac{a''z^{2}}{a}Y + \left(-\frac{3}{4} + m^{2}z^{2}\right)Y = 0.$$

Der Koeffizient von Y' muss hierbei gerade z sein, womit sich für a folgende Differentialgleichung ergibt:

$$2za' - a = 0.$$

Mit dem Ansatz  $a \sim z^{\alpha}$  ergibt sich  $\alpha = \frac{1}{2}$  und somit  $a(z) = \sqrt{z}$ . Damit folgt dann  $\frac{a''z^2}{a} = \frac{1}{4}$ , womit sich folgende Differentialgleichung für Y(z) ergibt:

$$z^{2}Y'' + zY' + \left(m^{2}z^{2} - 1\right)Y = 0.$$

Mit der Substitution x := mz folgt daraus eine zur vorausgesetzten Schrödinger-Gleichung äquivalente Besselsche Differentialgleichung. Eine Lösung von der Gleichung (D.2) lässt sich also mit Hilfe der Bessel-Funktion erster Gattung und erster Ordnung schreiben:

$$\psi_1(z) = \sqrt{z} \mathcal{J}_1(mz).$$

Zu einer zweiten Lösung der Schrödinger-Gleichung (D.2) gelangt man durch Verwendung der oben eingeführten Bessel-Funktionen zweiter Gattung:

$$\psi_2(z) = \sqrt{z} \mathcal{Y}_1(mz).$$

### D.2 Assoziierte Laguerre-Polynome

Eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$x\frac{d^2f}{dx^2} + (l+1-x)\frac{df}{dx} + nf = 0$$
(D.3)

mit  $l,n \in \mathbb{N}$  wird als assoziierte Laguerresche Differentialgleichung bezeichnet. Die Lösung dieser Differentialgleichung kann für jedes l und n als Polynom dargestellt werden:

$$L_n^l(x) = \frac{e^x x^{-l}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left( x^{n+l} e^{-x} \right),$$

welche auch als assoziierte Laguerre-Polynome bezeichnet werden. Um zu einer zweiten linear unabhängigen Lösung der assoziierte Laguerresche Differentialgleichung (D.3) zu gelangen, betrachte man diese als Spezialfall der Kummerschen Differential-Gleichung

$$x\frac{d^2f}{dx^2} + (\beta - x)\frac{df}{dx} - \alpha f = 0, \qquad (D.4)$$

wobei für  $\alpha = -n$  und  $\beta = l + 1$  wieder die assoziierte Laguerresche Differentialgleichung entsteht. Eine Lösung der Kummerschen Differentialgleichung (D.4) ist hierbei gegeben durch die Kummer-Funktion erster Gattung

$$M(\alpha, \beta, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_{(m)} x^m}{\beta_{(m)} m!},$$
(D.5)

wobei  $\alpha_{(m)} = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (a + m - 1)$  das Pochhammer-Symbol bezeichnet. Die assoziierten Laguerre-Polynome lassen sich also als Spezialfall dieser Kummer-Funktionen erster Gattung auffassen:

$$L_n^l(x) = M(-n, l+1, x).$$

Für die Kummersche Differentialgleichung (D.4) lässt sich ferner eine zweite linear unabhängige Lösung aus den Kummer-Funktion erster Gattung konstruieren:

$$\mathcal{U}(\alpha,\beta,x) := \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} M(\alpha,\beta,x) + \frac{\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)} x^{1-\beta} M(\alpha-\beta+1,2-\beta,x),$$

wobei  $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$  die Eulersche Gamma-Funktion bezeichnet. Hierbei wird  $\mathcal{U}(\alpha, \beta, x)$  auch als Kummer-Funktion zweiter Gattung bezeichnet. Es ist also mit

$$\mathcal{U}(-n,l+1,x) = \frac{\Gamma(-l)}{\Gamma(-n-l)} L_n^l(x) + \frac{\Gamma(l)}{\Gamma(-n)} x^{-l} L_{n+l}^{-l}(x)$$
(D.6)

eine zweite, von  $L_n^l(x)$  linear unabhängige, Lösung der Laguerrschen Differentialgleichung (D.3) gegeben.

### Lösung der Schrödinger-Gleichung (2.30)

Im Abschnitt 2.3.4 wurde folgende Schrödinger-Gleichung (2.30) betrachtet:

$$-\partial_z^2 \psi + \left(\frac{3}{4z^2} + c^4 z^2 - m^2\right) \psi = 0.$$
 (D.7)

Diese soll im Folgenden auf eine assoziierte Laguerresche Differentialgleichung zurückgeführt werden. Man beginnt mit der Substitution  $\xi := c^2 z^2$ , womit sich aus der Schrödinger-Gleichung (D.7) ergibt

$$\psi'' + \frac{1}{2\xi}\psi' - \left(\frac{3}{16\xi^2} + \frac{1}{4} - \frac{m^2}{4c^2\xi}\right)\psi = 0.$$
 (D.8)

Hierbei bezeichnet ' die Ableitung nach  $\xi$ . Es wird folgender Ansatz verfolgt:  $\psi(\xi) = aY(\xi)$ , wobei  $a = a(\xi)$  so gewählt wird, dass eine assoziierte Laguerresche Differentialgleichung für Y entsteht. Setzt man diesen Ansatz in Gleichung (D.8) ein, so folgt:

$$\xi Y'' + \left(\frac{2\xi a'}{a} + \frac{1}{2}\right)Y' + \left(\frac{\xi a''}{a} + \frac{a'}{2a} - \frac{3}{16\xi} - \frac{\xi}{4} + \frac{m^2}{4c^2}\right)Y = 0.$$
 (D.9)

Es wird gefordert, dass für den Koeffizienten Y' gilt  $\frac{2\xi a'}{a} + \frac{1}{2} = l + 1 - \xi$ , wobei  $l \in \mathbb{N}$ . Damit ergibt sich eine Differentialgleichung für  $a(\xi)$ :

$$2\xi a' + \left(\frac{1}{2} - (l+1) + \xi\right)a = 0.$$
welche sich mit dem Ansatz  $a \sim \xi^{\alpha} e^{\lambda \xi}$  lösen lässt. Dabei ergibt sich  $\alpha = \frac{1}{2} \left( l + \frac{1}{2} \right)$ , sowie  $\lambda = -\frac{1}{2}$ . Setzt man dieses *a* in Gleichung (D.9) ein, so folgt:  $\xi Y'' + (l + 1 - \xi) Y' + nY = 0$ , wobei

$$n = \frac{1}{\xi} \left( \frac{l^2}{4} - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} \left( l + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} + \frac{m_n^2}{4c^2}.$$

Damit dieses  $n \in \mathbb{N}$  und damit die Gleichung (D.9) in die Form (D.3) überführt wird, muss der Koeffizient an  $\frac{1}{\xi}$  verschwinden, womit sich  $l = \pm 1$  ergibt. Insbesondere entsteht also für l = 1 eine assoziierte Laguerresche Differentialgleichung für Y mit  $n = \frac{m_n^2}{4c^2} - 1$ , womit sich eine Lösung der Schrödinger-Gleichung (D.7) schreiben lässt als

$$\psi_1(z) = (cz)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{c^2 z^2}{2}} L_n^1 \left(c^2 z^2\right).$$

Hierbei sind die Massen in der Schrödinger-Gleichung so zu wählen, dass  $m_n^2 = 4c^2 (n+1)$  mit n = 0, 1, 2, ... gilt. Um zu einer zweiten linear unabhängigen Lösung der Gleichung (D.7) zu gelangen, verwendet man die Kummer-Funktionen zweiter Gattung (D.6)

$$\psi_2(z) = (cz)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{c^2 z^2}{2}} \mathcal{U}\left(-\frac{m_n^2}{4c^2} + 1, 0, c^2 z^2\right).$$

## D.3 Regge-Wheeler-Koordinaten

Man betrachte ein offenes Intervall  $(0, z_h)$ , wobei  $z_h \in \mathbb{R}$  eine nichtverschwindende Konstante bezeichnet. Es wird eine Koordinatentransformation  $r: (0, z_h) \to (0, \infty)$ durch

$$r(z) = z_h \int_{0}^{\frac{z}{z_h}} \frac{d\xi}{1 - \xi^4}$$
(D.10)

definiert, wobei r auch Regge-Wheeler-Tortoise-Koordinate, oder kurz Regge-Wheeler-Koordinate, genannt wird. Mit der in der vorliegenden Arbeit verwendeten

Blackness-Funktion  $f(z) = 1 - \frac{z^4}{z_h^4}$  ergibt sich in diesen Koordinaten für eine Funktion F auf dem Intervall  $(0, z_h)$ 

$$f\partial_z F = \partial_r \left( F \circ r^{-1} \right),$$

was zur formalen Vereinfachung einiger Gleichungen in der vorliegenden Arbeit führt. In diesem Abschnitt soll ein Ausdruck r(z) für jedes z und ein approximative Ausdruck für z(r) für große  $z_h$  gefunden werden.

#### Lösung des Integrals (D.10)

Um das Integral (D.10) zu lösen, betrachte man als erstes die Partialbruchzerlegung des Integranten

$$\frac{1}{1-\xi^4} = -\frac{1}{(\xi^2+1)(\xi-1)(\xi+1)} =: \frac{A}{\xi^2+1} + \frac{B}{\xi-1} + \frac{C}{\xi+1}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit  $(\xi^2 + 1) (\xi - 1) (\xi + 1)$ , so folgt

$$-1 = (B+C)\xi^{3} + (A+B-C)\xi^{2} + (B+C)\xi + (B-A-C).$$

Aus dieser Gleichung kann man die Koeffizienten ablesen, womit sich  $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{4}$  und  $C = \frac{1}{4}$  ergibt. Das Integral (D.10) zerfällt also in folgende drei Teile:

$$\int_{0}^{\frac{z}{z_h}} \frac{d\xi}{\xi^2 + 1} = \arctan\left(\frac{z}{z_h}\right),$$
$$\int_{0}^{\frac{z}{z_h}} \frac{d\xi}{\xi + 1} = \ln\left|\frac{z}{z_h} + 1\right|,$$
$$\int_{0}^{\frac{z}{z_h}} \frac{d\xi}{\xi - 1} = \ln\left|\frac{z}{z_h} - 1\right|.$$

Damit lässt sich ein exakter Ausdruck für r(z) angeben:

$$r(z) = \frac{z_h}{2} \left[ \arctan\left(\frac{z}{z_h}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{z_h - z}{z_h + z}\right) \right].$$
(D.11)

Die Grenzfälle  $z \to 0$  und  $z \to z_h$  entsprechen hierbei  $r \to 0$  und  $r \to \infty$ .

#### Entwicklung für große Werte von $z_h$

Ausgehend vom exakten Ausdruck (D.11) betrachte man die Entwicklung von r(z)um z = 0

$$r(z) = z \left( 1 \frac{z^4}{5z_h^4} + \mathcal{O}\left(\frac{z^8}{z_h^8}\right) \right),$$

wobei für  $z \ll z_h$  die Terme achter und höherer Ordnungen im Folgenden vernachlässigt werden. Ziel ist eine Entwicklung von z(r) um r = 0 der Form

$$z(r) = z(r) \Big|_{r=0} + z'(r) \Big|_{r=0} \cdot r + \dots,$$

wobei der erste Term verschwindet, da r = 0 für z = z(r) = 0. Für die erste Ableitung z'(r) bedient man sich der Umkehrregel [2] für Ableitungen. Dazu definiert man  $F(z) := -z - \frac{z^5}{5z_h^4}$ , was gerade einer Approximation an r(z) für große Werte von  $z_h$  entspricht. Damit ist  $z(r) = F^{-1}(r)$  für große  $z_h$ , und es ergibt sich nach der Umkehrregel

$$z'(r) = \left(F^{-1}(r)\right)' = \frac{1}{F'(r)} = \frac{1}{1 + \frac{r^4}{z_h^4}},$$

womit z'(0) = 1. Nach dem gleichen Schema lassen sich noch weitere Ableitungen von z(r) finden:

$$z''(0) = z'''(0) = z^{(4)}(0) = 0$$
, sowie  $z^{(5)}(0) = -\frac{24}{z_h^4}$ 

Die nächste nicht verschwindende Ordnung ist dabei  $z^{(9)}(0) \sim \frac{1}{z_h^8}$ . Mit diesen Ableitungen lassen sich die ersten Terme der Taylor-Entwicklung von z(r) angeben:

$$z(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{(n)}(0)}{n!} \cdot r^n = -r + \frac{1}{5!} \cdot \frac{24}{z_h^4} \cdot r^5 + \mathcal{O}(r^9).$$

Für  $r \ll z_h$  ergibt sich

$$z(r) \approx r - \frac{r^5}{5z_h^4}.$$

Dieses Ergebnis wird auch schon in [29] angegeben.

### Literaturverzeichnis

- [1] AHARONY, O. ; GUBSER, S. S. ; MALDACENA, J. ; OOGURI, H. ; OZ, Y. : In: *Phys. Rep.* **323** (2000), 183
- [2] AMANN, H.; ESCHER, J.: Analysis. Bd. 1. 3. Springer, 2005
- [3] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.: Mathematical Methods For Physicists. Academic press, 2005
- [4] BALLÓN BAYONA, C. A.; BRAGA, N. R. F.: In: Gen. Rel. Grav. 39 (2007), 1367
- [5] BECKER, K.; BECKER, M.; SCHWARZ, J. H.: String theory and M-theory: A modern introduction. Cambridge University Press, 2006
- [6] BEKENSTEIN, J. D.: In: Phys. Rev. D7 (1973), 2333
- [7] BRODSKY, S. J.; TÉRAMOND, G. F.; DOSCH, H. G.; ERLICH, J.: In: 1407.8131 (2014)
- [8] COLANGELO, P. ; GIANNUZZI, F. ; NICOTRI, S. : In: Phys. Rev. D80 (2009), 094019 S.
- [9] COLANGELO, P. ; GIANNUZZI, F. ; NICOTRI, S. : In: JHEP 1205 (2012), 076
  S.
- [10] CUI, L. X.; TAKEUCHI, S.; WU, Y. L.: In: JHEP **1204** (2012), 144 S.
- [11] DA ROLD, L.; POMAROL, A.: In: Nuc. Phys. **B721** (2005), 79
- [12] D'HOKER, E.; FREEDMAN, D. Z.: In: *hep-th/0201253* (2002)

- [13] DISSERTORI, G.; KNOWLES, I. G.; SCHMELLING, M.: Quantum Chromodynamics, High Energy Experiments and Theory. Oxford University Press, 2003
- [14] ERLICH, J. ; KATZ, E. ; SON, D. T. ; STEPHANOV, M. A.: In: *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005), 261602 S.
- [15] FUJITA, M. ; FUKUSHIMA, K. ; MISUMI, T. ; MURATA, M. : In: *Phys. Rev.* D80 (2009), 035001 S.
- [16] GINSPARG, P. H.: Applied Conformal Field Theory. In: hep-th/9108028 (1988)
- [17] GUBSER, S. S. ; KLEBANOV, I. R. ; POLYAKOV, A. M.: In: *Phys. Lett.* B428 (1998), Nr. 1, 105
- [18] GÜRSOY, U.; KIRITSIS, E.; NITTI, F.: In: JHEP 0802 (2008), 019 S.
- [19] HAWKING, S. W.: In: Commun. Math. Phys. 43 (1975), 199
- [20] HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R.: The large scale structure of space-time. Cambridge university press, 1973
- [21] HAWKING, S. W.; PAGE, D. N.: In: Commun. Math. Phys. 87 (1983), 577 S.
- [22] HERZOG, C. P.: In: *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007), 091601 S.
- [23] KARCH, A. ; KATZ, E. ; SON, D. T. ; STEPHANOV, M. A.: In: *Phys. Rev.* D74 (2006), 015005 S.
- [24] KLINGL, F.; WEISE, W.: In: *hep-ph/9802211* (1998)
- [25] KÜHNEL, W. : Differentialgeometrie. 5. Springer, 2010
- [26] LI, D.; HUANG, M.: In: *JHEP* **1311** (2013), 088 S.
- [27] MALDACENA, J.: In: Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998), 231
- [28] MAMANI, L. A. H.; MIRANDA, A. S.; BOSCHI-FILHO, H.; BRAGA, N. R. F.: In: JHEP 1403 (2014), 058 S.

- [29] MIRANDA, A. S. ; BALLÓN BAYONA, C. A. ; BOSCHI-FILHO, H. ; BRAGA, N. R. F.: In: *JHEP* 0911 (2009), 119 S.
- [30] MUTA, T. : Foundations of quantum chromodynamics: an introduction to perturbative methods in gauge theories. World Scientific, 1998
- [31] OLIVE, K. A. u. a.: In: Chin. Phys. C38 (2014), 090001
- [32] PETERSEN, J. L.: In: Int. J. Mod. Phys. A14 (1999), 3597
- [33] SCHERER, S.; SCHINDLER, M. R.: LNP. Bd. 830: A primer for chiral perturbation theory. Springer Science, 2011
- [34] STRAUMANN, N. : LNP. Bd. 150: Allgemeine Relativitätstheorie und relativistische Astrophysik. Springer Verlag, 1981
- [35] TEANEY, D. : In: *Phys. Rev.* D74 (2006), 045025 S.
- [36] TÉRAMOND, G. F.; BRODSKY, S. J.: In: *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005), 201601
  S.
- [37] WEISSTEIN, E. W.: Bessel Function Zeros. http://mathworld.wolfram. com/BesselFunctionZeros.html. Version: 2015, Abruf: 27. März 2015
- [38] WITTEN, E. : In: Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998), 253
- [39] YNDURÁIN, F.: Quantum chromodynamics. Springer, 1983

## Verwendete Software

Die vorliegende Arbeit wurde mit dem Textsatzsystem  $T_EX$  von Donald E. Knuth und dem Makropakets  $ET_EX$  von Leslie Lamport erstellt. Hierbei wurde zur Anpassung an europäische Dokumentenstandards das KOMA-Skript von Markus Kohm verwendet.

Die numerischen Berechnungen wurden mit Python unter Verwendung der Modulpakete NumPy und SciPy durchgeführt. Als Computeralgebrasystem wurde Sagemath verwendet.

## Danksagung

Als erstes möchte ich Prof. Dr. Burkhard Kämpfer für die Vergabe dieses sehr interessanten Themas und seiner Geduld mit mir und meiner Arbeitsweise danken. Ferner danke ich den Mitarbeitern der Arbeitsgruppe Hadronenphysik im Institut für Strahlenphysik am HZDR für viele lehrreiche und anregende Diskussionen, wobei ich vor allem Roman Yaresko, Falk Wunderlich und Rico Zöllner hervorheben möchte. Weiter danke ich all meinen Kommilitonen und Freunden, welche mich in einer schweren Zeit aufgerichtet haben und ohne jene ich nie weitgehend frei an diesem Thema hätte arbeiten können. Abschließen bin ich noch meinen Eltern und meinen Geschwistern zu tiefem Dank verpflichtet, denn ohne eure Unterstützung und euer Verständnis wäre weder mein Studium, noch diese Arbeit möglich gewesen.

# Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Dresden, den 31. März 2015

Uwe Hernandez Acosta