



**Institut für Theoretische Physik  
Fachrichtung Physik  
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften**

# **Multiphotonen Paarerzeugung in starken gepulsten Laserfeldern**

Vorgelegt von: Tobias Nusch  
geboren am: 24. September 1984 in Cottbus

**Diplomarbeit**

zur Erlangung des akademischen Grades

**Diplom-Physiker**

Eingereicht am 01. November 2011

1. Gutachter: Prof. Dr. B. Kämpfer
2. Gutachter: Prof. Dr. W. Strunz



**Kurzfassung:**

In der vorliegenden Arbeit wird die Erzeugung eines Elektron-Positron Paares mittels Wechselwirkung zwischen einem hochenergetischen Photon und einer intensiven, gepulsten ebenen Laserwelle untersucht. Die bisherige Beschreibung dieses Prozesses beruhte auf der Annahme, dass die Laserwelle in Raum und Zeit unendlich ausgedehnt ist. Die Entwicklung von neuartigen Lasersystemen, welche ultrakurze Lichtblitze emittieren, macht es notwendig eine adäquatere Beschreibung der Laserwelle zu verwenden. Aus diesem Grunde wird mittels eines semiklassischen Ansatzes das Streumatrixelement des Paarerzeugungsprozesses für gepulste Laserwellen aufgestellt und numerisch ausgewertet. Es wird die differentielle sowie totale Produktionswahrscheinlichkeit berechnet und mit Ergebnissen der unendlich ausgedehnten Welle verglichen.

**Abstract:**

In this work the creation of an electron-positron pair due to interaction of an high-energetic photon with an intensive, pulsed plane laser wave will be investigated. This process is usually described under the assumption of an infinite plane wave. The development of new laser systems, which emit ultra-short pulses, makes it necessary to go beyond the approximation of infinite pulse extent. To achieve that it will be calculated the scattering matrix of the pair creation process in a pulsed laser field, using a semi-classical approach. It will be investigated the differential as well as the total production probability. The results will be compared with the results of the infinite plane wave.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
1.1	Motivation . . . . .	7
1.2	Aufbau und Struktur der Arbeit . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>13</b>
2.1	Der semiklassische Ansatz . . . . .	13
2.2	Das Hintergrundfeld . . . . .	15
2.3	Die Einhüllende $g(\phi)$ . . . . .	16
2.4	Der Volkov-Zustand . . . . .	18
2.5	Der Quasiimpuls . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Paarerzeugung in unendlich ausgedehnten ebenen Wellen</b>	<b>21</b>
3.1	Kinematik . . . . .	21
3.2	Der Wirkungsquerschnitt . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Gepulste Laserfelder</b>	<b>29</b>
4.1	Streumatrixelement . . . . .	29
4.2	Der Grenzfall schwacher Felder . . . . .	34
4.3	Die Näherung der langsam variierenden Einhüllenden . . . . .	38
4.4	Die Produktionswahrscheinlichkeit . . . . .	39
4.5	Der Wirkungsquerschnitt . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Numerische Auswertung</b>	<b>43</b>
5.1	Die differentielle Produktionswahrscheinlichkeit . . . . .	43
5.1.1	Vergleich mit Ergebnissen aus der Literatur . . . . .	49
5.2	Abhängigkeit der Produktionswahrscheinlichkeit vom Azimutwinkel	52
5.3	Die totale Produktionswahrscheinlichkeit . . . . .	55
5.3.1	Die Abhängigkeit von der Schwerpunktennergie . . . . .	55
5.3.2	Analyse der einzelnen Harmonischen . . . . .	57
5.3.3	Die Abhängigkeit vom Intensitätsparameter . . . . .	61
5.3.4	Die Abhängigkeit von der Pulslänge . . . . .	64

<b>6 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>67</b>
<b>A Anhang</b>	<b>69</b>
A.1 Notation und Konventionen . . . . .	69
A.2 Der Volkov-Zustand des Positrons . . . . .	70
A.3 Lichtkegelkoordinaten . . . . .	71
A.4 Rapidity . . . . .	73
A.5 Eichinvarianz des Streumatrixelements . . . . .	76
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>79</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>83</b>

# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

Das Verhalten von massebehafteten, geladenen Teilchen, wie Elektronen und Positronen, in intensiven elektromagnetischen Feldern ist für Forschung und Anwendung von hohem Interesse und bis heute ein viel diskutiertes Thema. Die grundlegende Theorie, die die Wechselwirkung zwischen Licht und Materie, beschreibt ist die Quantenelektrodynamik (QED). Einer der noch verbliebenen Prüfsteine der QED ist die von Schwinger vorhergesagte Polarisation des Vakuums [1] in Anwesenheit eines starken, elektromagnetischen Feldes, auch als Schwinger-Effekt bezeichnet. Schwinger zeigte, dass ein elektrisches Feld, welches die von Sauter berechnete kritische Feldstärke [2]

$$E_c \equiv \frac{m^2 c^3}{e \hbar} \simeq 1.3 \times 10^{18} \text{ V/m} \quad (1.1)$$

übersteigt, reelle Elektron-Positron Paare erzeugen kann. Hierbei ist  $m$  die Masse und  $e$  die Ladung eines Elektrons,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit und  $\hbar$  das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum. Durch die Anwesenheit eines solchen Feldes werden die durch Vakuumfluktuationen kontinuierlich erzeugten, virtuellen Elektron-Positron Paare mehr als eine Compton-Wellenlänge voneinander getrennt und gehen in reelle Teilchen über. Das Vakuum wird polarisiert. Die zu  $E_c^2$  proportionale kritische Intensität des Feldes ergibt sich als

$$I_c = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_c^2 \simeq 2.2 \times 10^{29} \text{ W/cm}^2. \quad (1.2)$$

Felder mit solch immensen Intensitäten können zur Zeit noch nicht im Labor erzeugt werden. Es ist aber auch mit geringeren Intensitäten möglich Paare zu erzeugen. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist die Wechselwirkung eines elektromagnetischen Feldes mit einem hochenergetischen Photon. Dieses Phänomen, dass aus der Interaktion zweier Lichtquanten Materie mit einer endlichen Masse entsteht, wurde 1934 erstmalig von Breit und Wheeler [3] theoretisch beschrieben und wird oft als Breit-Wheeler-Prozess

## 1 Einleitung

---

bezeichnet. Die beiden Physiker berechneten den Wirkungsquerschnitt des linearen  $2 \rightarrow 2$  Prozesses,

$$\gamma_1 + \gamma_2 \longrightarrow e^+ + e^-, \quad (1.3)$$

und das Resultat ist heute bekannt als Breit-Wheeler-Formel. Ein experimenteller Nachweis konnte damals noch nicht erbracht werden. Es fehlten die nötigen Einrichtungen, um hochenergetische Photonen zu erzeugen und miteinander wechselwirken zu lassen. Mit Entwicklung des ersten Lasers im Jahre 1960 [4] entstanden neue Möglichkeiten, die Wechselwirkung von Materie und Licht zu erforschen. Die vom Laser erzeugten elektromagnetischen Felder waren von bis dahin nicht gekannter Intensität, wodurch Wissenschaftler mit neuen Fragestellungen konfrontiert wurden. Im Unterschied zum Breit-Wheeler-Prozess können Photonen, welche durch ein intensives Laserfeld propagieren, mit mehreren Photonen des Feldes gleichzeitig wechselwirken und somit Paare erzeugen,

$$\gamma_1 + l\gamma_2 \longrightarrow e^+ + e^- \quad (1.4)$$

mit  $l \in \mathbb{N}$ . Dieser Prozess ist in der Literatur als nicht-linearer Breit-Wheeler-Prozess bekannt. Erste theoretische Untersuchungen zur Paarerzeugung in starken Feldern, welche mit einem Photon wechselwirken, wurden von Reiss [5] 1962 und zwei Jahre später von Nikishov und Ritus [6] durchgeführt. Dabei ist die letztere Arbeit besonders umfangreich und grundlegend. Hierin wurden neben dem nicht-linearen Breit-Wheeler-Prozess auch dessen Kreuzkanal, der nicht-lineare Compton-Effekt, und die Umkehrung der Paarerzeugung, die Paarannihilation, betrachtet. Die erste experimentelle Bestätigung, dass aus Licht Materie entstehen kann, sollte erst 33 Jahre später erfolgen. Mitte der 90er Jahre wurde am Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) das Experiment E-144 durchgeführt [7, 8]. In diesem Experiment wurden in einem ersten Schritt 46.6 GeV Elektronen aus einem Linearbeschleuniger mit einem Terawatt Laserstrahl kollidiert. Dadurch wurden, mittels Comptoneffekt, rückgestreute Compton-Photonen mit einer Energie von 29.2 GeV erzeugt. Diese wurden in einem zweiten Schritt mit dem Laserstrahl in Wechselwirkung gebracht. Als Endresultat erzeugte man Elektron-Positron Paare. Dieser Prozess wird auch Trident-Prozess genannt. Die gemessene Produktionsrate stimmte gut mit der theoretischen Vorhersage überein. Es konnten jedoch nur geringe nicht-lineare Effekte beobachtet werden, da die Intensität des Lasers, aus der Sicht der Starkfeld-QED, eher klein war. Das bedeutet, um größere Starkfeldeffekte zu erhalten, müssten Experimente mit Lasern höherer Intensität durchgeführt werden.

	SLAC	XFEL (Ziel)	HZDR	Vulcan	ELI
Status	aktiv	in Planung	aktiv	in Planung	in Planung
Leistung	1 TW	5 TW	150 TW	10 PW	200 PW
$I$ [W/cm <sup>2</sup> ]	10 <sup>18</sup>	10 <sup>27</sup>	10 <sup>20</sup>	10 <sup>23</sup>	10 <sup>25</sup>
$\eta$	0.4	10	20	200	5 × 10 <sup>3</sup>

Tab. 1.1: Übersicht über verschiedene Lasersysteme (XFEL: X-ray free electron laser, DESY [13]; HZDR, Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf [14]; Vulcan: Central Laser Facility, Rutherford-Appleton Lab [15]; ELI: Extreme Light Infrastructure project [16]; SLAC: Stanford linear Accelerator, Experiment E-144 [7])

Die Intensität eines Laserfeldes wird in der Literatur [5, 6, 9, 10] oft durch den Parameter

$$\eta = \frac{eE}{mc^2\omega} = \frac{e\sqrt{\langle A \cdot A \rangle}}{m} \quad (1.5)$$

beschrieben. Hierbei ist  $\langle A \cdot A \rangle$  das zeitlich gemittelte Quadrat des Vierervektorpotentials  $A_\mu$  vom elektrischen Feld  $E$ , und  $\omega$  bezeichnet die zentrale Kreisfrequenz des Feldes. Der Parameter  $\eta$  ist somit ein dimensionsloses und Lorentz invariantes Maß der Intensität des Laserfeldes [11]. Er ist ein rein klassischer Parameter, worauf die Abwesenheit von  $\hbar$  hinweist. In Tabelle 1.1 ist eine Übersicht über Werte von  $\eta$  für verschieden Laser-Einrichtungen gegeben. Es ist ersichtlich, dass die modernsten, sich noch in Planung befindenden Laser-Einrichtungen immer näher an die kritische Intensität herankommen, diese aber noch nicht erreichen. Dennoch verändert sich mit den neuartigen Lasersystemen auch die Physik im subkritischen Bereich. Dieser Bereich kann in drei verschiedene Regime unterteilt werden [12]. Das Erste ist das perturbative Regime für sehr geringe Intensitäten des Feldes. Der lineare Breit-Wheeler-Prozess lässt sich in dieses Regime einordnen. Steigt die Feldintensität an, befindet man sich im nicht-perturbativen Regime. Hierzu zählt der nicht-lineare Breit-Wheeler-Prozess, wenn die Anzahl der absorbierten Laserphotonen  $l$  gering im Vergleich zur Gesamtanzahl der Photonen im Laserfeld ist. Erreicht man Intensitäten knapp unterhalb der kritischen Intensität und die Systemenergie der Kinematik ist viel kleiner als die Masse eines Elektrons, dann werden sehr viele Laserphotonen benötigt um ein Paar zu erzeugen. Man spricht vom quasistatischen Regime. In dieser Unterteilung ist das SLAC-Experiment E-144 in den Übergangsbereich vom perturbativen zum nicht-perturbativen Regime einzuordnen [12].

In der vorliegende Arbeit wird die Erzeugung von Elektron-Positron Paaren durch Wechselwirkung hochenergetischer Photonen mit einem intensiven, optischen Laserfeld

## 1 Einleitung

---

im nicht-perturbativen Regime untersucht. In den bisherigen theoretischen Arbeiten zu diesem Thema (eine Auswahl ist [5, 6, 10, 17, 18, 19]) wurde das Laserfeld mit Hilfe von unendlich ausgedehnten, ebenen Wellen beschrieben. Diese Näherung hat ihre Berechtigung solange die Anzahl der Schwingungen  $\mathcal{N}$  der Trägerwelle innerhalb eines Pulses viel größer ist als 1. Im SLAC Experiment E-144 war ein  $\mathcal{N}$  in der Größenordnung von  $\mathcal{O}(1000)$  ausreichend, um mit der Approximation zu arbeiten. Im Gegensatz dazu werden hochintensive Laserfelder gegenwärtig mit der chirped-Technik erzeugt [20]. Dabei werden die Laserpulse außerhalb des Resonators zeitlich gestreckt und durchlaufen dann einen Verstärker; dadurch wird die Beschädigung des Resonatormaterials verhindert. Nach anschließender Kompression entstehen ultrakurze, hochintensive Laserpulse im Femtosekundenbereich mit  $\mathcal{N}$  in der Größenordnung von  $\mathcal{O}(1)$ . Um Phänomene in diesem Gebiet der Physik adäquat beschreiben zu können, muss über die Näherung der unendlich ausgedehnten Laserwelle hinausgegangen werden. Ansätze dazu gibt es bereits für die Erzeugung von Paaren im quasistatischen Bereich durch Wechselwirkung eines Photons mit einem Coulomb-Feld [21, 22, 23] und durch zwei wechselwirkende Laserstrahlen [24, 25]. Für die Paarerzeugung durch die Wechselwirkung eines gepulsten Lasers mit einem Photon im nicht-perturbativen Regime wurden erste Ansätze von Narozhny [18] 1997 und von Heinzl [17] 2010 gemacht. In [18] wurden Massenspektren einzelner Harmonischer betrachtet und in [17] die differentielle Produktionsrate. Die vorliegende Arbeit geht darüber hinaus und beschreibt zum ersten Mal die totale Produktionswahrscheinlichkeit und den Wirkungsquerschnitt des nicht-lineare Breit-Wheeler-Prozesses in gepulsten Laserwellen. Dabei besteht die Hauptaufgabe darin, zwischen Unterschiede und Ähnlichkeiten in der Physik gepulsten und unendlichen Wellen zu untersuchen.

Eine unmittelbare physikalische Motivation, die Laserpulse in realistischen Rechnungen zu beschreiben, ist die Planung und der Bau des European XFEL [13]. Der XFEL ist ein Freier Elektronen Laser (FEL) der ultrakurze Laserpulse im Röntgenbereich erzeugen wird. Diese mittelintensive Laserpulse können mit einem hochintensiven optischen Laserstrahl in Wechselwirkung gebracht werden und somit experimentelle Untersuchungen im nicht-perturbativen Regime der QED vollzogen werden. Im Zusammenhang mit der geplanten Helmholtz beam-line am XFEL wird aktuell die Kombination eines diodengepumpten Lasers, der zur Zeit im Rahmen des PEnELOPE Projektes am HZDR entwickelt wird [26], mit dem XFEL in Erwägung gezogen [27]. Auch die Wechselwirkung XFEL mit einem einzelnen hochenergetischen Photon ist denkbar, was der Kinematik, die dieser Arbeit zugrunde liegt, entspricht. Ein Konkurrenzprojekt zum XFEL ist der „Linac Coherent Light Source“ (LCLS) am SLAC [28]. Hierbei handelt es sich ebenso um ein FEL der Laserblitze mit Photonen im Röntgenbereich produziert. Der LCLS ist bereits im Betrieb während der European

XFEL 2015 fertiggestellt werden soll.

Diese zwei Beispiele verdeutlichen, dass ein hohes Interesse in der wissenschaftlichen Gemeinschaft existiert, die neuartige Physik, welche mittels ultrakurzen Laserpulsen zugänglich wird, so realistisch wie möglich zu beschreiben. Somit besteht die Notwendigkeit, verfeinerte theoretische Methoden zu entwickeln, um experimentelle Ergebnisse vorherzusagen und adäquat interpretieren zu können.

## 1.2 Aufbau und Struktur der Arbeit

Eine der Hauptaufgaben dieser Arbeit ist es, das Streumatrixelement  $S_{fi}$  (siehe Abschnitt 4.1, Gl. (4.22)) einer gepulsten Laserwelle numerisch zu berechnen und die daraus folgende Produktionswahrscheinlichkeit in einem physikalischen Sinne zu interpretieren. Hierfür wurde ein Quellcode in der Programmiersprache Python verfasst. Dieser Quellcode hat einen Umfang von über tausend Zeilen, aufgeteilt in verschiedenen Unterprogrammen und Subroutinen. Damit ist er das unsichtbare Kernstück dieser Arbeit. Zur Auswertung des Quellcodes wurde dem Autor Rechenzeit auf dem Rechencluster „Hypnos“ am HZDR zur Verfügung gestellt. Die effektive Rechenzeit belief sich auf mehrere Wochen. Die Schwierigkeit der numerischen Auswertung liegt vor allem in der Berechnung der  $\mathcal{A}_n^m$ -Funktionen (siehe (4.17)). Der schnell oszillierende Exponent des Phasenfaktors der  $\mathcal{A}_n^m$ -Funktionen sorgt dafür, dass die Berechnung der Integrale im Exponenten numerisch sehr aufwendig ist. Mit zunehmender Feldintensität werden die Oszillationen immer heftiger und lassen sich mit den hier verwendeten Methoden nicht mehr berechnen. Deshalb beschränkt sich die Analyse in dieser Arbeit auf den nicht-perturbativen Parameterbereich nach der Definition in [12], was den Wert des Intensitätsparameter  $a_0$  (siehe (2.7)) auf  $a_0 \leq 5$  und die Gesamtenergie der Kinematik auf das Minimum von 0.1 MeV beschränkt.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut. Im nächsten Kapitel werden die theoretischen Grundlagen für die Berechnung des Paarerzeugungsprozesses beschrieben. Es wird der semiklassische Ansatz eingeführt und das Laserfeld definiert. Dies führt auf die Zustandsgleichungen des Elektrons und des Positrons, die auch als Volkov-Zustände bezeichnet werden.

Im dritten Kapitel wird der nicht-lineare Breit-Wheeler Prozess in unendlich ausgehenden, ebenen Wellen beschrieben und der Wirkungsquerschnitt berechnet. Dies gibt zum einen dem Leser eine physikalische Einführung und Übersicht über das in dieser Arbeit diskutierte Thema und zum anderen werden später die erhaltenen Resultate mit denen der gepulsten Welle verglichen.

## 1 Einleitung

---

Im vierten Kapitel wird das Streumatrixelement des nicht-linearen Breit-Wheeler Prozesses für gepulste Laserfelder untersucht. Es wird gezeigt, dass man aus dem definierten Streumatrixelement für den Grenzfall schwacher Felder das Streumatrixelement des linearen Breit-Wheeler Prozesses ableiten kann. Anschließend wird die Produktionswahrscheinlichkeit und der Wirkungsquerschnitt definiert, die im fünften Kapitel ausgewertet werden. Dafür werden differentielle Wahrscheinlichkeiten und Wirkungsquerschnitte dargestellt und die Abhängigkeiten der totalen Produktionswahrscheinlichkeit von der Gesamtenergie des Systems, von der Intensität des Laserfeldes und von der Pulslänge analysiert. Im letzten Kapitel werden die erhaltenen Resultate zusammengefasst und Motivationen für weitere Untersuchungen gegeben.

Im Anhang befinden sich die Konvention der benutzten Symbole, sowie Definitionen und Beispielrechnungen für ausgewählte Probleme.

Um unnötig aufwendige Notationen zu vermeiden, werden im Folgenden natürliche Einheiten ( $c = \hbar = 1$ ) verwendet.

## 2 Theoretische Grundlagen

### 2.1 Der semiklassische Ansatz

Die Bewegung eines Elektrons mit der Ladung  $q = -e$ , der Vierergeschwindigkeit  $u^\mu$  und der Masse  $m$ , welches sich in einem starken, elektromagnetischen Feld (z. B. erzeugt von einem Laser) befindet, wird nach klassischer Theorie durch die Lorentz-Gleichung

$$m \frac{du^\mu}{ds} = -e F^{\mu\nu} u_\nu \quad (2.1)$$

beschrieben. Hierbei ist  $F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$  der Feldstärketensor, der sich aus dem Viererpotentialen  $A^\mu$  bestimmen lässt, und  $ds = dt/\gamma$  die Eigenzeit mit  $\gamma$  als Lorentz-Faktor. Insbesondere in einer ebenen, elektromagnetischen Welle vollführt das Elektron schnelle, oszillierende Bewegungen transversal zur Ausbreitungsrichtung der Welle.

Aus der Sicht der Quantenmechanik besteht Laserlicht aus vielen Photonen. Das heißt, es handelt sich nicht, wie im Klassischen, um eine reine Welle, sondern vielmehr um einzelne Quanten. Diese wechselwirken mit dem Elektron und verursachen somit dessen transversale Bewegung im Feld. Um diese Wechselwirkungen vollständig in einer Störungstheorie beschreiben zu können, müssen die einzelnen Feynmangraphen ausgewertet und aufsummiert werden. Hierzu gab es bereits in den 60er Jahren Ansätze [29]. Die perturbative Beschreibung des Prozesses bringt tief liegende Probleme mit sich. So stellt sich die Frage, wie viele Laserphotonen mit dem Probephoton wechselwirken und wie der Ausgangszustand des Prozesses aussieht.

Ein andere Herangehensweise beschreibt das Laserfeld exakt und benutzt dafür einen semiklassischen Ansatz [5, 6]. Aufgrund der hohen Anzahl aus dem Laser emittierter Photonen mit Viererimpuls  $k = (\omega, \mathbf{k})$  kann die Gesamtheit aller Photonen im Laserfeld als ein kohärenter Zustand [30, 31],

$$|C\rangle = \exp \left[ \sqrt{N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} C^\mu(\mathbf{k}) a_\mu^\dagger(\mathbf{k}) \right] |0\rangle, \quad (2.2)$$

beschrieben werden. Hierbei ist  $a_\mu^\dagger(\mathbf{k})$  der Erzeugungsoperator eines Photons mit dem Wellenzahlvektor  $\mathbf{k}$  und  $N$  die gemittelte Photonenzahl im Laserstrahl. Der Zustand

ist durch die Polarisations- und Impulsverteilungsfunktion  $C_\mu(\mathbf{k})$  charakterisiert. Er ist ein Eigenzustand des Vernichtungsoperators. Das heißt, auch wenn ein Photon des Feldes mit dem Elektron wechselwirkt und seine Eigenschaften sich somit ändern, verändert sich der Gesamtzustand des Laserfeldes, welches nun ein Photon weniger besitzt, nicht. Das hat zur Folge, dass bei einer kleinen, vernachlässigbaren Anzahl wechselwirkender Photonen (im Vergleich zu der Gesamtanzahl der Photonen im Laserfeld) der Zustand des Laserfeldes konstant bleibt. Somit kann das Laserfeld als „klassisches“ Hintergrundfeld gesehen werden, welches das Elektron zu jeder Zeit in gleicher Weise umgibt. Der Zusammenhang zwischen  $|C_\mu\rangle$  und dem Hintergrundfeld ist durch das Viererpotential [32]

$$A_\mu(x) = \sqrt{N} \int d^3k \frac{e^{-ik \cdot x}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2|\mathbf{k}|}} C_\mu(\mathbf{k}) + c.c. \Big|_{k^2=0} \quad (2.3)$$

des Hintergrundfeldes, welches im nächsten Abschnitt genauer beschrieben wird, gegeben.  $A_\mu(x)$  ist im Wesentlichen die Fourier-Transformierte der Verteilungsfunktion  $C_\mu(\mathbf{k})$  [33].

Der Zustand eines Elektrons kann im Furry-Bild [34] dargestellt werden. In diesem Bild wird die Wechselwirkung eines Elektrons mit einem Hintergrundfeld nicht-perturbativ behandelt, was der Intention des semiklassischen Ansatzes entspricht. Der Zustand eines Elektrons im Furry-Bild ist der in Abschnitt 2.4 behandelte Volkov-Zustand.

Die Grenzen der Anwendbarkeit des semiklassischen Ansatzes werden erreicht, wenn sehr viele Photonen des Laserfeldes absorbiert werden. Um eine ungefähre Vorstellung von der Größenordnung der Anzahl der Photonen im Laserfeld zu bekommen soll hier eine Abschätzung angegeben werden. Für ein Volumen von  $1 \mu\text{m}^3$  und  $\eta = 1$  kann die Photonendichte durch

$$\rho_L = \frac{\omega \eta^2 m^2}{4\pi\alpha} \approx 10^{26} \text{ cm}^{-3} = 10^{14} \mu\text{m}^{-3} \quad (2.4)$$

abgeschätzt werden. Das heißt, das Laserfeld kann nicht mehr als kohärenter Zustand betrachtet werden, wenn die Anzahl absorbierter Photonen in der Größenordnung von  $\mathcal{O}(10^{14})$  ist. Dies ist beispielsweise im quasistatischen Regime der Fall. Folglich muss die Abschwächung des Laserfeldes berücksichtigt werden.

## 2.2 Das Hintergrundfeld

Das Feld einer ebenen Welle mit dem Vierervektorpotential  $A^\mu$  und einem Viererwellenvektor  $k^\mu$  mit  $k^2 = 0$  hängt über die invariante Phase  $\phi = k \cdot x$  von Raum und Zeit ab. Es erfüllt die Lorenz-Konvention  $\partial_\mu A^\mu = k_\mu \frac{dA^\mu}{d\phi} = 0$ . Ein möglicher konstanter Term kann durch eine geeignete Eichtransformation entfernt werden. Dadurch erhält man die Bedingung  $k \cdot A = 0$  [9]. Die Definition des Vierervektorpotentials mit einer konstanten Amplitude  $A_0$  und der Einhüllenden  $g(\phi)$  (siehe Abschnitt 2.3) sei

$$A^\mu = A_0 g(\phi) (\epsilon_1^\mu \cos \xi \cos \phi + \epsilon_2^\mu \sin \xi \sin \phi). \quad (2.5)$$

Die Polarisationsvektoren  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  haben den gleichen Betrag,  $\epsilon_1^2 = \epsilon_2^2 = \epsilon^2$ , und stehen senkrecht aufeinander,  $\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 = 0$ . Eine komplexe Darstellung des Potentials ist gegeben durch den Ausdruck

$$A^\mu = \frac{1}{2} A_0 g(\phi) (\epsilon_-^\mu e^{i\phi} + \epsilon_+^\mu e^{-i\phi}) \quad (2.6)$$

mit  $\epsilon_\pm^\mu = \epsilon_1^\mu \cos \xi \pm i \epsilon_2^\mu \sin \xi$ . Hierbei bestimmt der Parameter  $\xi$  die Polarisation des Feldes. Für  $\xi = \pm\pi/4$  ist das Feld zirkular polarisiert, während für  $\xi = 0$  oder  $\xi = \pm\pi/2$  lineare Polarisation vorliegt. Für andere Werte von  $\xi$  ist das Laserfeld elliptisch polarisiert. Das Vektorpotential  $A^\mu$  beschreibt reelle, transversale, ebene Wellen. Diese können das Vakuum nicht im Sinne des Schwinger-Effektes [1] polarisieren, da beide Feldinvarianten  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  und  $F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$  zu Null werden. Somit ist Paarproduktion nur in Anwesenheit eines weiteren, wechselwirkenden Feldes (z. B. ein Kernfeld, ein Laserfeld oder ein einzelnes, hochenergetisches „Probe“-Photon) möglich.

Die Normierung des Vektorpotentials wird so gewählt, dass die mittlere Energiedichte  $\langle \mathbf{E}^2 \rangle \propto -\langle A_\mu A^\mu \rangle = g^2(\phi) A_0^2/2$  ist. Die Mittelung  $\langle \dots \rangle$  bezieht sich dabei auf die schnellen Oszillationen der Trägerwelle. Die so gewählte Normierung ist unabhängig von der Polarisation, jedoch ist durch die Anwesenheit der Einhüllenden  $g(\phi)$  der dimensionslose Intensitätsparameter  $\eta$  (1.5) nicht mehr zeitunabhängig. Deshalb wird an dieser Stelle dem Vorgehen in [33] gefolgt und der zeitunabhängige Parameter

$$a_0 = \frac{eA_0}{m} \quad (2.7)$$

definiert. Dieser Intensitätsparameter ist wie  $\eta$  dimensionslos, zeitunabhängig und Lorentz-invariant. Ist der Wert von  $a_0$  in der Größenordnung  $\mathcal{O}(1)$  wird die transversale Bewegung eines Elektrons im Feld relativistisch. Somit ist  $a_0$  einer der wichtigen Parameter, welcher benötigt wird, um das Laserfeld zu beschreiben. Er stellt den Peakwert der Intensität des Laserpulses dar. Im Grenzfall einer unendlich ausgedehnten

Laserwelle,  $g(\phi) = 1$ , ergibt sich der Zusammenhang  $\eta = \frac{a_0}{\sqrt{2}}$ .

### 2.3 Die Einhüllende $g(\phi)$

In den 60er Jahren zeigte Kibble [35], dass sich die physikalischen Eigenschaften langer Laserpulse, die eine große Anzahl an Oszillationen der Trägerwelle beinhalten, denen eines unendlich ausgedehnten Laserpulses annähern. Bei modernen, hochintensiven Lasersysteme wie Draco (HZDR) [14], ELI [16] oder Vulcan [15] (vergleiche Tabelle 1.1) dauert der Puls nur noch einige Femtosekunden an. Dies entspricht 1 bis 10 Oszillationen pro Puls, weswegen die Approximation der ausgedehnten Welle nicht mehr adäquat ist. Aus diesem Grunde wird in (2.5) die zusätzliche Funktion  $g(\phi)$  eingeführt. Sie ist eine einhüllende Funktion und moduliert das Vektorpotential  $A^\mu$  und somit das erzeugte Hintergrundfeld. Durch geeignete Wahl von  $g(\phi)$  kann ein endliches, gepulstes Feld beschrieben werden, welches beispielsweise durch einen hochintensiven Laser erzeugt wird.

Setzt man  $g(\phi) = 1$ , so ist das Feld  $A^\mu$  in Raum und Zeit unendlich ausgedehnt. Daraus folgt, dass die Welle genau mit der zentralen Frequenz  $\omega$  propagiert. Dies ist an den Deltadistributionen der Fourier-Transformierten von  $A^\mu(\phi)$

$$A_{FT}^\mu \left( \frac{\Omega}{\omega} \right) = \pi A_0 \left( \epsilon_-^\mu \delta \left( \frac{\Omega}{\omega} + 1 \right) + \epsilon_+^\mu \delta \left( \frac{\Omega}{\omega} - 1 \right) \right) \quad (2.8)$$

erkennbar, wobei  $\Omega/\omega$  eine dimensionslose Frequenz bezeichnet mit  $\Omega$  als Frequenz und  $\omega$  als zentrale Frequenz des Laserpulses.

Für endliche Laserpulse ist  $g(\phi) \neq \text{const.}$  Um den endlichen Charakter des Pulses darzustellen, sollte  $g(\phi)$  ab einem bestimmten Wert von  $\phi$  von Null verschieden sein und nach einer endlichen Dauer wieder gegen Null gehen. Eine einfache, aber eher unphysikalische Pulsform, die diese Bedingung erfüllt, ist der Box-Puls

$$g(\phi) = \Theta(\tau + \phi) \Theta(\tau - \phi) \quad (2.9)$$

mit der Heaviside-Funktion  $\Theta(x)$ . Der Parameter  $\tau$  ist hierbei ein Maß für die Länge des Laserpulses und ist typischerweise proportional zur Anzahl der Laseroszillationen  $\mathcal{N}$  unter der Einhüllenden. Eine weitere Möglichkeit, eine Einhüllende zu definieren, ist

$$g(\phi) = \cos^2 \left( \frac{\pi}{2\tau} \phi \right) \quad (2.10)$$

für  $|\phi| \leq \tau$  und  $g(\phi) = 0$  für  $|\phi| \geq \tau$ . Eine Laseroszillation entspricht dabei einer

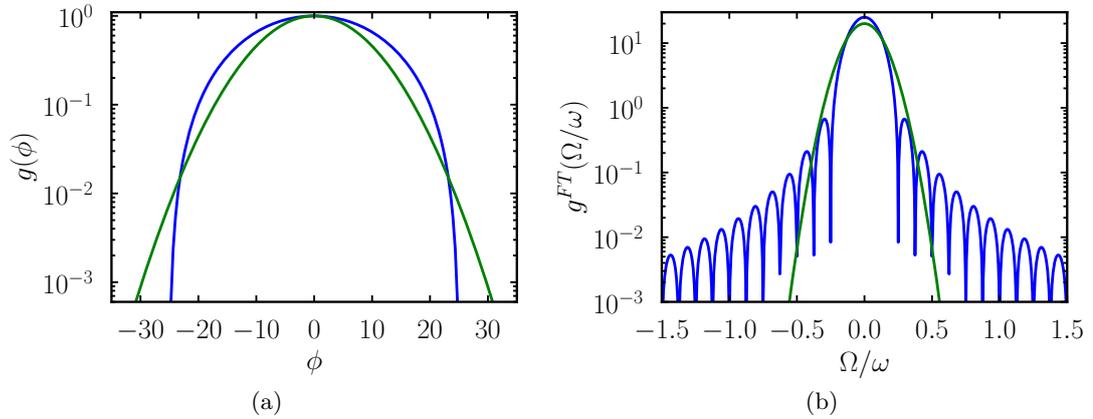


Abb. 2.1: (a): Die Einhüllende  $g(\phi) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2\tau}\phi\right)$  (blaue Kurve,  $\tau = 8\pi$ ) und  $g(\phi) = \exp(\phi^2/2\tau^2)$  (grüne Kurve,  $\tau = 8$ ) in Abhängigkeit von  $\phi$ . (b): Fourier-Transformierte von  $g(\phi)$ ,  $g^{FT}(\Omega/\omega)$ , in Abhängigkeit von der dimensionslosen Frequenz  $\Omega/\omega$ .

Pulslänge von  $\tau = \pi$ . Ein Vorteil der  $\cos^2$ -Funktion ist, dass sie einen kompakten Träger besitzt. Das bedeutet, dass der Puls für  $|\phi| \geq \tau$  identisch verschwindet. Im Gegensatz dazu nimmt beispielsweise eine Gauß-Funktion  $g(\phi) = \exp(-\phi^2/2\tau^2)$  (mit  $\mathcal{N} = 1$ , wenn  $\tau = 1$ ) erst im Unendlichen den Wert Null an, so dass man einen weiten Bereich in Betracht ziehen muss, um den Laserpuls mit ausreichender Genauigkeit beschreiben zu können (siehe Abb. 2.1a). Dies erhöht den numerischen Aufwand. Ein Nachteil der  $\cos^2$ -Funktion ist, dass die Fourier-Transformierte der Funktion relativ hohe Nebenmaxima aufweist (siehe Abb. 2.1b). Diese ergeben zusätzliche Beiträge zum Frequenzspektrum und müssen bei der Auswertung der Resultate beachtet werden. Im Unterschied dazu ist die Fourier-Transformierte der Gauß-Funktion wieder eine Gauß-Funktion ohne Nebenmaxima. Eine weitere, oft verwendete Möglichkeit, die Pulsform zu beschreiben ist durch  $g(\phi) = 1/\cosh(\phi/\tau)$  gegeben [33]. Diese Hüllfunktion besitzt ähnliche Eigenschaften wie die Gauß-Funktion, soll hier aber nicht näher betrachtet werden.

Für die Rechnungen in dieser Arbeit wird hauptsächlich der  $\cos^2$ -Puls verwendet, da der numerische Zeitaufwand so klein wie möglich gehalten werden sollte.

## 2.4 Der Volkov-Zustand

Der Zustand eines geladenen Fermions mit dem Spin  $1/2$ , welches sich in einem wie oben beschriebenen Feld (siehe Abschnitt 2.2) befindet, wurde 1935 von Volkov [36] berechnet und wird als Volkov-Lösung der Dirac-Gleichung oder Volkov-Zustand bezeichnet. Der Volkov-Zustand eines Elektrons mit Viererimpuls  $p = (p_0, \mathbf{p})$ , Masse  $m$  und elektrischer Ladung  $e$  ist demnach durch den Ausdruck

$$\psi_-(p, \mathfrak{s}) = \left(1 + \frac{e \not{k} \not{A}}{2k \cdot p}\right) e^{iS_p} \frac{u(p, \mathfrak{s})}{\sqrt{2p_0}}, \quad (2.11)$$

$$S_p = -p \cdot x - \int_0^\phi \left( e \frac{A \cdot p}{k \cdot p} - \frac{e^2 A^2}{2k \cdot p} \right) d\phi'. \quad (2.12)$$

gegeben [9]. Hierbei ist  $u(p, \mathfrak{s})$  ein Bispinor mit dem Spin  $\mathfrak{s}$ , der die Bedingung  $(\not{p} - m)u(p, \mathfrak{s}) = 0$  erfüllen muss und auf  $\bar{u}(p, \mathfrak{s})u(p, \mathfrak{s}) = 2m$  normiert ist. (Die Kurznotation  $\not{p}$  bedeutet  $p_\mu \gamma^\mu$  mit den Dirac-Matrizen  $\gamma^\mu$ , siehe Anhang A.1). Im Phasenfaktor  $e^{iS_p}$  stimmt  $S_p$  mit der klassischen Hamilton-Jacobi-Wirkung überein. Der Dirac-konjugierte Zustand lautet dementsprechend

$$\bar{\psi}_-(p, \mathfrak{s}) = \frac{\bar{u}(p, \mathfrak{s})}{\sqrt{2p_0}} \left(1 + \frac{e \not{A} \not{k}}{2k \cdot p}\right) e^{-iS}, \quad (2.13)$$

wobei  $\bar{\psi}_- = \gamma^0 \psi_-^*$  mit dem komplex konjugierten Zustand  $\psi_-^*$  darstellt. Der Volkov-Zustand ist eine exakte Lösung der Dirac-Gleichung

$$(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m) \psi_- = 0 \quad (2.14)$$

mit der eichkovarianten Ableitung  $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$  und dem Viererpotential (2.6). Er entspricht einem Zustand im Furry-Bild (siehe Abschnitt 2.1) und ist im Diagramm 2.2 schematisch dargestellt. Die doppelte Linie kennzeichnet das vom Laserfeld umgebene Elektron, welches durch den Volkov-Zustand beschrieben wird. Auf der rechten Seite des Diagramms ist die perturbative Entwicklung des Zustandes im Furry-Bild nach Feynman-Diagrammen zu sehen. Jeder Vertex entspricht dabei einer Wechselwirkung des Elektrons mit einem Photon des Laserfeldes und ist proportional zum Intensitätsparameter  $a_0$ . Dies macht deutlich, ist  $a_0 > 1$  können die höheren Ordnungen der Wechselwirkung nicht mehr vernachlässigt werden.

Die Normierung des Zustandes stimmt mit der einer ebenen Welle überein und erfüllt

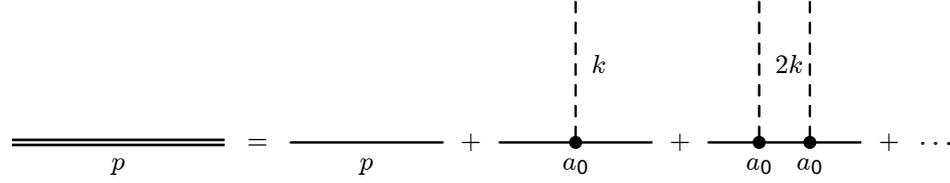


Abb. 2.2: Schematische Darstellung des Volkov-Zustandes. Hier symbolisiert eine Doppellinie (links) das Elektron im Furry-Bild und die einzelnen Diagramme (rechts) dessen perturbative Entwicklung in Feynman-Diagramme.

die Vorschrift

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \bar{\psi}_-(\tilde{p}, \mathfrak{s}) \gamma^0 \psi_-(p, \mathfrak{s}) d^3x = \delta(\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{p}). \quad (2.15)$$

Die Dirac-Stromdichte ergibt sich durch [9]

$$j^\mu = \bar{\psi}_- \gamma^\mu \psi_- = \frac{1}{p_0} \left[ p^\mu - eA^\mu + k^\mu \left( e \frac{p \cdot A}{k \cdot p} - \frac{e^2 A^2}{2k \cdot p} \right) \right]. \quad (2.16)$$

Den Volkov-Zustand des Positrons mit dem Viererimpuls  $p' = (p'_0, \mathbf{p}')$  erhält man, indem man in (2.11) alle Komponenten von  $p$  durch  $-p'$  und  $u(p, \mathfrak{s})$  durch  $v(p', \mathfrak{s})$  ersetzt [37]:

$$\psi_+(p', \mathfrak{s}) = \left( 1 - \frac{e k A}{2k \cdot p'} \right) e^{iS_{-p'}} \frac{v(p', \mathfrak{s})}{\sqrt{2p'_0}}, \quad (2.17)$$

$$S_{-p'} = p' \cdot x - \int_0^\phi \left( e \frac{A \cdot p'}{k \cdot p'} + \frac{e^2 A^2}{2k \cdot p'} \right) d\phi', \quad (2.18)$$

wobei  $(\not{p}' + m) v(p', \mathfrak{s}) = 0$  gelten soll.

Da die Herleitung und Darstellung des Volkov-Zustandes für das Positron in der Literatur etwas kurz kommt, wird dieser im Anhang A.2 genauer untersucht.

## 2.5 Der Quasiimpuls

Unter Beachtung der Definitionen (2.11) und (2.13) kann die Dichte des kinetischen Impulses im Zustand  $\psi_- = \psi_-(p)$  direkt berechnet werden. Es ergibt sich [9]

$$\begin{aligned} \psi_-^* (p^\mu - eA^\mu) \psi_- &= p^\mu - eA^\mu + k^\mu \left( e \frac{p \cdot A}{k \cdot p} - \frac{e^2 A^2}{2k \cdot p} \right) \\ &+ \frac{ie}{8p_0 k \cdot p} k^\mu F_{\lambda\nu} (u^* \sigma^{\lambda\nu} u). \end{aligned} \quad (2.19)$$

## 2 Theoretische Grundlagen

---

Hierbei ist  $\sigma^{\lambda\nu} = \frac{1}{2} (\gamma^\lambda \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\lambda)$  der antisymmetrische Spintensor, und  $\psi_-^*$  ist der komplex konjugierte Zustand zu  $\psi_-$ . Der zeitliche Mittelwert einer periodischen Funktion  $A^\mu$  (siehe (2.5) für  $g(\phi) = 1$ ) ist Null. Somit kann der Quasiimpuls  $q_\mu$  als zeitlicher Mittelwert des Vierervektors (2.19) definiert werden, und es ergibt sich der Ausdruck

$$q_\mu = p_\mu - \frac{e^2 \langle A^2 \rangle}{2k \cdot p} k_\mu, \quad (2.20)$$

$$\langle A^2 \rangle = A_0^2 \epsilon^2 \left\langle \left( \cos^2 \xi \cos^2 \phi + \sin^2 \xi \sin^2 \phi \right) \right\rangle = \frac{1}{2} A_0^2 \epsilon^2. \quad (2.21)$$

Daraus folgt mit  $\epsilon^2 = -1$

$$q_\mu = p_\mu + \frac{m^2 a_0^2}{4k \cdot p} k_\mu. \quad (2.22)$$

Der Quasiimpuls ist somit der gemittelte Impuls des Elektrons über eine Laserperiode. Die Verschiebung des Impulses  $p_\mu$  zum Quasiimpuls  $q_\mu$  lässt sich, klassisch gesehen, verstehen durch die schnellen, transversalen Oszillationen, die das Elektron als Reaktion auf das starke elektromagnetische Feld vollführt [38]. Der Intensitätsparameter  $a_0$  ist hierbei ein Maß für die Größe dieser Verschiebung. Ist der Wert von  $a_0 \gtrsim 1$  so wird die die Oszillation des Elektrons im Feld relativistisch.

Durch den Quasiimpuls lässt sich eine effektive Masse  $m_\star$  bestimmen. Sie ergibt sich aus dem Quadrat von (2.22) und kann geschrieben werden als

$$m_\star^2 = q^2 = m^2 \left( 1 + \frac{a_0^2}{2} \right). \quad (2.23)$$

Aus (2.16) und (2.22) kann demzufolge die zeitlich gemittelte Dirac-Stromdichte berechnet und durch

$$\langle j^\mu \rangle = \frac{q^\mu}{p_0} \quad (2.24)$$

ausgedrückt werden.

Damit sind die theoretischen Grundlagen geschaffen, um in den folgenden Kapiteln den Prozess der Paarerzeugung mittels Wechselwirkung eines hochenergetischen Probephotons mit einem intensiven, optischen Laserfeld zu untersuchen.

# 3 Paarerzeugung in unendlich ausgedehnten ebenen Wellen

## 3.1 Kinematik

In diesem Abschnitt soll die Kinematik, die dieser Arbeit zu Grunde liegt, beschrieben werden. Im Folgenden bezeichnet  $k_\mu$  den Viererimpuls der Photonen eines Hintergrundfeldes, welches durch das Vektorpotential (2.5) definiert wird. Des Weiteren sei  $k'_\mu$  der Viererimpuls und  $\epsilon'$  der Polarisationsvektor eines hochenergetischen „Probe“-Photons, welches mit dem Laserfeld wechselwirkt. Der Impuls des Elektrons sei gegeben durch  $p = (p_0, \mathbf{p})$  und der des Positrons durch  $p' = (p'_0, \mathbf{p}')$ . Um die Rechnungen nicht unnötig zu verkomplizieren, werden ausschließlich „head-on“-Kollisionen betrachtet. Das bedeutet, es gilt  $\mathbf{k}' = (0, 0, \omega')$  und  $\mathbf{k} = (0, 0, -\omega)$  mit  $\omega' \gg \omega$  und die Polarisationsvektoren des Laserfeldes nehmen die Form  $\epsilon_1 = (0, 1, 0, 0)$  und  $\epsilon_2 = (0, 0, 1, 0)$  an. Die zur Verfügung stehende Gesamtenergie des Systems wird durch die Mandelstam-Variable  $s = 4lkk'$  ausgedrückt. Dabei ist  $l \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Laserphotonen, die mit dem Probephoton wechselwirken. Daraus folgt, dass für jedes  $l$  ein eigenes Schwerpunktsystem existiert. In der vorliegenden Arbeit bezeichnet der Begriff „Schwerpunktsystem“ daher immer das System für  $l = 1$  mit der Schwerpunktenergie  $s = 4kk'$ . So werden unnötige Transformationen vermieden. In Abb. 3.1 ist die Kinematik schematisch im hier definierten Schwerpunktsystem sowie im Laborsystem dargestellt.

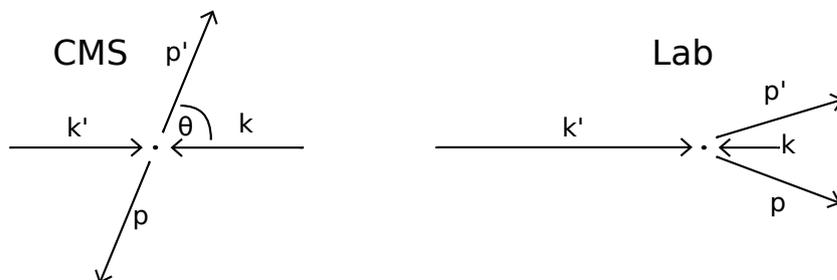


Abb. 3.1: Darstellung der Kinematik im Schwerpunktsystem (CMS) und im Laborsystem (Lab).

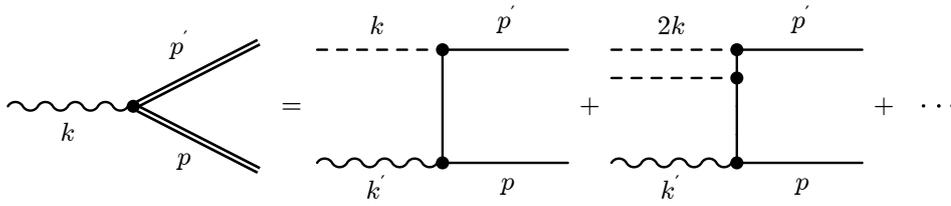


Abb. 3.2: Paarerzeugung im Breit-Wheeler-Prozess

Dieses Kapitel beschränkt sich auf den Grenzfall  $g(\phi) \rightarrow 1$ . Das bedeutet, es wird Paarerzeugung in unendlich ausgedehnten, ebenen Wellen beschrieben. Dieser Prozess, auch als „nicht-linearer Breit-Wheeler-Prozess“ bezeichnet [5, 6, 10, 17, 18, 19], wird durch die Summe über einzelne Prozesse mit der Energie-Impulserhaltung

$$q_\mu + q'_\mu = lk_\mu + k'_\mu \quad (3.1)$$

beschrieben [6, 5]. Hierbei sind  $q_\mu$  bzw.  $q'_\mu$  die im Abschnitt 2.5 eingeführte „Quasiimpulse“ des Elektrons bzw. Positrons. Das Diagramm 3.2 zeigt den nicht-linearen Breit-Wheeler-Prozess im Furry-Bild (linke Seite der Gleichung) und dessen Zusammensetzung aus den einzelnen Feynmangraphen in einer perturbativen Beschreibung (rechte Seite der Gleichung).

Der nicht-lineare Breit-Wheeler-Prozess beschreibt die Erzeugung eines Elektron-Positron Paares mit der jeweiligen Ruhemasse  $m_\star$ . Die wechselwirkenden Photonen müssen mindestens die Energie  $2m_\star$  aufbringen. Daraus folgt, dass zu jedem  $a_0$  eine spezifische Mindestanzahl  $l_0$  absorbierter Laserphotonen existiert, um die benötigte Schwellenenergie zu erreichen. Setzt man die räumlichen Impulse von Elektron und Positron gleich Null, kann man  $l_0$  aus dem Quadrat von (3.1) bestimmen:

$$l'_0 = \frac{4m_\star^2}{s}. \quad (3.2)$$

Daraus folgt, dass  $l_0$  die kleinste, natürliche Zahl größer als  $l'_0$  ist. In aktuellen Arbeiten wird der Begriff „Schwellenwert“ mit dem Parameter  $l_0$  in Verbindung gebracht [17]. Das heißt man befindet sich im Subschwellenbereich für  $l < l_0$ . Diese Definition des Schwellenwertbegriffes wird in der vorliegenden Arbeit nicht verwendet, da dies zu Irritationen führen kann und Rechnungen zum Schwellenwertverhalten verkomplizieren würde. Anstelle dessen soll hier mit dem Begriff „Schwellenwert“ immer die Energie  $\sqrt{s} = 2m$  bezeichnet werden, was der Produktionsschwelle des linearen Breit-Wheeler-Prozesses entspricht.

## 3.2 Der Wirkungsquerschnitt

Der Ausgangspunkt der Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten und Wirkungsquerschnitten ist das Streumatrixelement  $S_{fi}$ . Vorausgesetzt, man betrachtet die im vorherigen Abschnitt definierte Kinematik und verwendet die in Abschnitt 2.4 eingeführten Volkov-Zustände (2.11) und (2.17), dann nimmt das Streumatrixelement für das linke Diagramm in Abb. 3.2 die Gestalt

$$S_{fi} = -ie \int d^4x \bar{\psi}_p \frac{e^{-ik' \cdot x}}{\sqrt{2k'_0}} \not{\epsilon}' \psi_{p'} \quad (3.3)$$

an. Aufgrund der Periodizität des Hintergrundfeldes zerfällt die Streumatrix (3.3) in eine Summe von diskreten partiellen Amplituden [19]

$$S_{fi} = -ie (2\pi)^4 \sum_{l=l_0}^{\infty} M_l \delta^4(k' + lk - q - q'), \quad (3.4)$$

wobei die Energie-Impulserhaltung (3.1) für jede Harmonische  $l$  durch die  $\delta$ -Distribution sichergestellt wird. Die Auswertung der partiellen Matrixelemente  $M_l$  ist für den nicht-linearen Breit-Wheeler-Prozess in unendlich ausgedehnten, ebenen Wellen in der Literatur dokumentiert (siehe z. B. [5, 6, 10]). Aus diesem Grunde beschränkt sich dieser Abschnitt auf die Präsentation und Interpretation des Wirkungsquerschnittes des Prozesses. Eine ausführliche Analyse des Streumatrixelementes ist für den Fall der gepulsten Wellen im Kapitel 4 zu finden.

Das quadrierte Streumatrixelement und die Phasenraumintegrationen sind für unendlich ausgedehnte, ebene Wellen vollständig analytisch lösbar. Als Resultat erhält man die Produktionsrate  $\dot{W}$ . Dies ist die Rate, mit der ein Elektron-Positron Paar pro Zeiteinheit erzeugt wird.  $\dot{W}$  ist für zirkular polarisiertes Laserlicht durch den Ausdruck [19]

$$\dot{W} = \frac{\alpha m^2}{2\sqrt{s}} \sum_{l=l_0}^{\infty} \dot{W}^l, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{W}^l &= \int_1^{u_l} \frac{du}{u\sqrt{u(u-1)}} \\ &\times \left\{ 2J_l^2(z) + \eta^2(2u-1) \left( J_{l-1}^2(z) + J_{l+1}^2(z) - 2J_l^2(z) \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

gegeben. Hierbei ist  $\alpha = 1/137.036$  die Feinstrukturkonstante,  $\eta$  der dimensionslose Intensitätsparameter (siehe Gl. (1.5)),  $u_l = \frac{l}{l_0}$ ,  $z = 2\eta\sqrt{u(u-1)}/u_1\sqrt{1+\eta^2}$ , und  $J_l(z)$  sind die Bessel-Funktionen erster Art. Die Rate ist auf ein einlaufendes Probedphoton

normiert. Für sehr kleine Werte von  $\eta$  ist die Rate proportional zu [39]

$$\dot{W}^l \Big|_{\eta \ll 1} \propto \eta^{2l}. \quad (3.7)$$

Um aus der totalen Rate den totalen Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  zu berechnen, muss (3.5) durch die Teilchendichte der Laserphotonen  $\rho_L = \sqrt{s}\eta^2 m^2 / 8\pi\alpha$  und durch den Teilchenstrom der einlaufenden Photonen  $j_{in} = k \cdot k' / k_0 k'_0 = 2$  geteilt werden; man erhält [10]

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha}{m^2\sqrt{s}\eta^2} \dot{W}. \quad (3.8)$$

Hieraus lässt sich der Grenzfall des linearen Breit-Wheeler-Wirkungsquerschnittes ableiten. Nach Entwicklung von (3.5) nach Potenzen von  $\eta$  und anschließender Grenzwertbildung  $\eta \rightarrow 0$ , erhält man den führenden Term

$$\sigma \simeq \frac{2\pi\alpha^2}{s} \int_1^{u_1} \frac{du}{u\sqrt{u(u-1)}} \left\{ \frac{u(u_1-u)}{u_1^2} + \frac{1}{2}(2u-1) \right\}. \quad (3.9)$$

Integriert man über  $u$  und benutzt für  $u_1$  die Darstellung  $u_1 = 1/(1-v^2)$  mit  $v = \sqrt{(1-4m^2/s)}$ , so ergibt sich der bekannte totale Breit-Wheeler-Wirkungsquerschnitt [9]

$$\sigma_{BW} = \frac{2\pi\alpha^2}{s} \left\{ (3-v^4) \ln \left( \frac{1+v}{1-v} \right) - 2v(2-v^2) \right\}. \quad (3.10)$$

Es sollen nun die Resultate, die man aus (3.8) erhält, analysiert werden. Die Abb. 3.3 zeigt den totalen Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  als eine Funktion der Mandelstam-Variable  $\sqrt{s}$  für verschiedene Werte von  $a_0 = \sqrt{2}\eta$ . Als Erstes soll der lineare Breit-Wheeler-Prozess (schwarze Kurve) (3.10) betrachtet werden. Man erkennt eindeutig den starken Abfall von  $\sigma$ , wenn sich  $\sqrt{s}$  dem Schwellenwert  $2m = 1.022$  MeV nähert. Es gibt keine Subschwellen-Paarproduktion, da für  $\sqrt{s} < 2m$  die benötigte Ruheenergie des Paares nicht aufgebracht werden kann.

Lässt man das Probephoton mit einem Laserstrahl wechselwirken, wie im Diagramm 3.2 dargestellt, treten mit größer werdender Intensität des Lasers (ab einen  $a_0$  in der Größenordnung  $\mathcal{O}(1)$ ) zunehmend nicht-lineare Effekte auf. Die blau gestrichelte Kurve in Abb. 3.3 zeigt  $\sigma$  als Funktion von  $\sqrt{s}$  für  $a_0 = 0.8$ . Es ist zu erkennen, dass für  $\sqrt{s}$  unterhalb der Schwelle Elektron-Positron Paare erzeugt werden. Dies ist ein Multiphotoneneffekt, bei dem höhere Harmonische entstehen. Bei der Herleitung von (3.10) wurden die höheren Ordnungen vernachlässigt und tragen somit nicht zum gesamten Wirkungsquerschnitt des linearen Breit-Wheeler-Prozesses bei. Steigt der

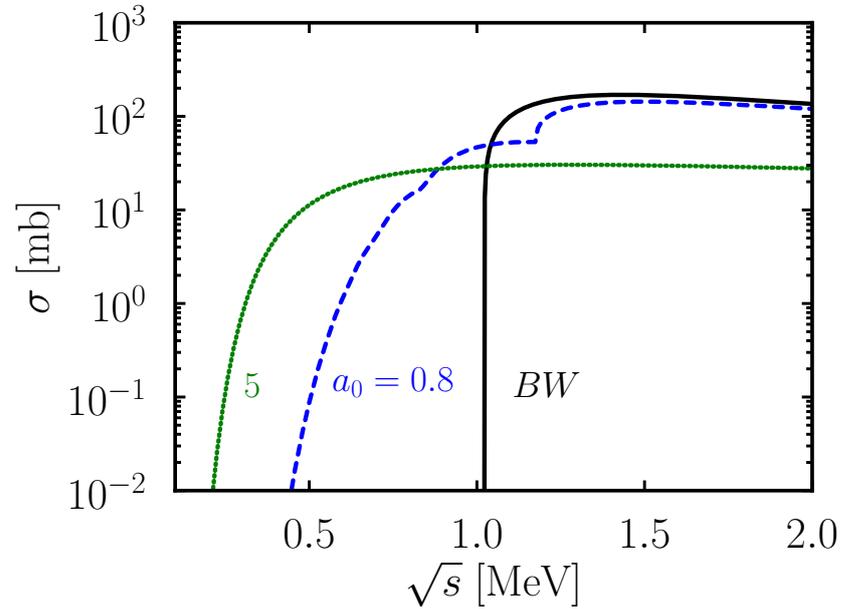


Abb. 3.3: Totaler Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  als Funktion der Gesamtenergie  $\sqrt{s}$  für verschiedene Werte von  $a_0$ . BW bezeichnet den linearen Breit-Wheeler-Prozess (3.10). Die Kurven für  $a_0 = 0.8$  und 5 basieren auf dem nicht-linearen Breit-Wheeler-Prozess (3.8).

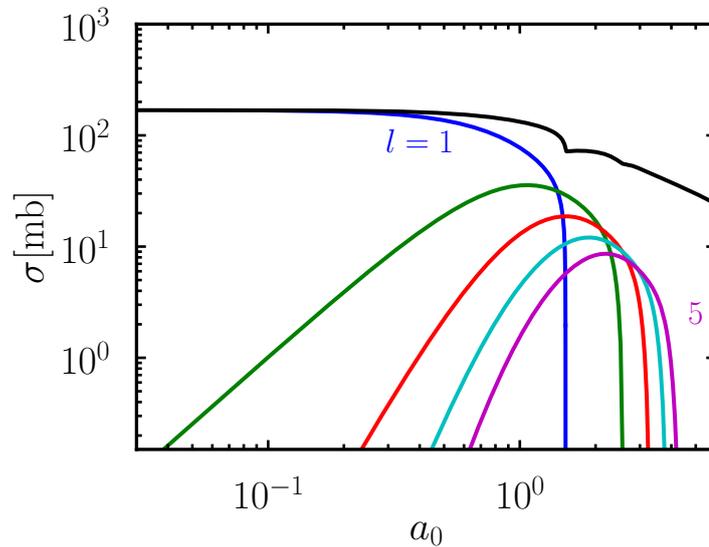


Abb. 3.4: Totaler Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  (schwarze Kurve) als Funktion von dem Intensitätsparameter  $a_0$  für  $\sqrt{s} = 1.5$  MeV. Zusätzlich sind die Beiträge der ersten fünf Harmonischen abgebildet.

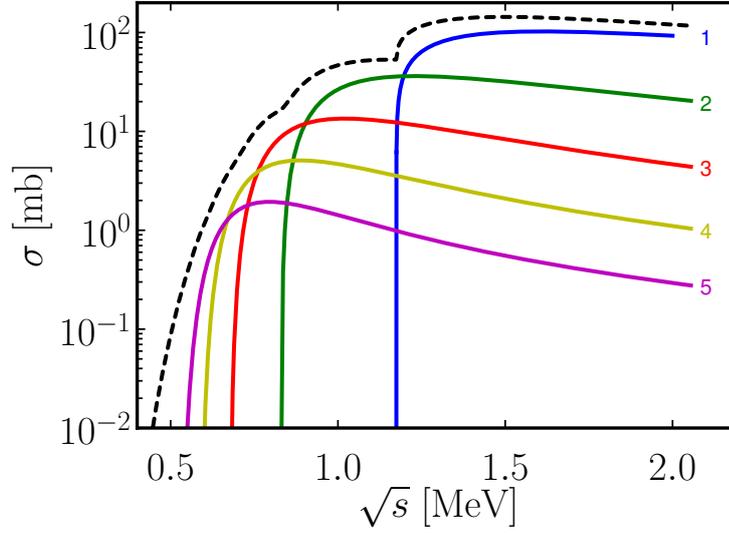


Abb. 3.5: Totaler Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  (schwarze, gestrichelte Kurve) als Funktion von der Gesamtenergie  $\sqrt{s}$  für  $a_0 = 0.8$ . Zusätzlich sind die Beiträge der ersten fünf Harmonischen abgebildet.

Wert von  $a_0$  weiter an (siehe Abb. 3.3, grün gepunktete Kurve,  $a_0 = 5$ ), so nimmt auch die Schwellen-Produktion weiter zu. Für  $\sqrt{s}$  oberhalb der Schwelle nimmt der Wirkungsquerschnitt mit steigendem  $a_0$  ab. In naiver Annahme könnte man vermuten, dass mit steigender Intensität, also steigender Anzahl von Photonen im Laserfeld, auch die Wahrscheinlichkeit, ein Paar zu erzeugen und damit der Wirkungsquerschnitt größer wird. Ein Grund warum dies nicht der Fall ist, ist in der Abb. 3.4 zu erkennen. Hier ist  $\sigma$  als Funktion von  $a_0$  für  $\sqrt{s} = 1$  MeV dargestellt. Der Gesamtwirkungsquerschnitt (schwarze Kurve) fällt für steigende Werte von  $a_0$  rapide ab. Ursache für diesen Abfall ist die Zunahme der effektiven Masse  $m_\star^2 = m^2 (1 + a_0^2/2)$ , da mit der effektiven Masse die benötigte Energie, um Paar der Masse  $2m_\star$  zu erzeugen, zunimmt. Die zu erreichende Energie ist für ein vorgegebenes  $l$  durch die Bedingung

$$s > \frac{1}{l} 4m_\star^2 \quad (3.11)$$

gegeben. Betrachtet man die höhern Harmonischen ( $l > 1$ ) des Prozesses (siehe Abb. 3.4, farbige Kurven) ist zu erkennen, dass  $\sigma$  aufgrund von Multiphotoneneffekte bis zu einem Maximum ansteigt. Nach Erreichen des Maximums geht  $\sigma$ , infolge der zunehmenden effektiven Masse  $m_\star$ , rapide gegen Null. Die maximale Intensität ist genau dann erreicht, wenn die Bedingung (3.11) nicht mehr erfüllt werden kann. Für kleiner werdende Werte von  $\sqrt{s}$  wird auch der maximale Wert von  $a_0$  kleiner, da jedes

Laserphoton weniger Energie aufbringt. Im Gegensatz dazu, bleibt der Anstieg des Wirkungsquerschnittes bei kleinen Werten von  $a_0$  konstant (siehe Gl. (3.7)). Daraus folgt, dass sich das Maximum der Verteilung für kleiner werdende Werte von  $\sqrt{s}$  zu kleineren Werten von  $a_0$  verschiebt.

Es soll im Folgenden die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes von  $\sqrt{s}$  genauer analysiert werden. In Abb. 3.5 ist zu sehen, dass für  $\sqrt{s} > 1.2$  MeV die erste Harmonische (blaue Kurve) den maßgeblich Beitrag zum gesamten Wirkungsquerschnitt (schwarze Kurve) gibt. Für  $\sqrt{s} < 1.2$  MeV fällt die erste Harmonische rapide ab. Die zweite Harmonische (grüne Kurve) steuert den größten Beitrag zum gesamten Wirkungsquerschnitt bei. Dieser Übergang ist auch an der Absenkung des gesamten Wirkungsquerschnittes bei  $\sqrt{s} \sim 1.2$  MeV zu erkennen. In dem Bereich  $0.85 < \sqrt{s} < 1.2$  MeV dominiert die zweite Harmonische. Sie geht für kleinere  $\sqrt{s}$  gegen Null und die nächste Harmonische wird dominierend. Die Schwelleneffekte der niedrigsten Harmonischen sind die Ursache für die Stufen im Gesamtwirkungsquerschnitt.

Es kann zusammenfassend gesagt werden, der totale Wirkungsquerschnitt fällt für kleiner werdende Werte von  $\sqrt{s}$  und für größer werdende Werte von  $a_0$  rapide ab. Die in diesem Kapitel gewonnen Erkenntnisse werden im Folgenden helfen, die physikalischen Effekte beim Übergang zu gepulsten Wellen zu verstehen und zu interpretieren.



# 4 Gepulste Laserfelder

## 4.1 Streumatrixelement

Nachdem im 3. Kapitel der Ansatz der unendlich ausgedehnten, ebenen Welle betrachtet wurde, soll in diesem Kapitel der nicht-lineare Breit-Wheeler-Prozess in gepulsten, ebenen Wellen untersucht werden. An den Grundlagen des Problems ändert sich beim Übergang von unendlichen zu gepulsten Wellen nicht viel. Die Kinematik bleibt wie in Abschnitt 3.1 dargestellt, und es wird weiterhin der semiklassische Ansatz zur Beschreibung der Wechselwirkung verwendet. Die wesentliche Veränderung ist durch das Hintergrundfeld gegeben. Die einhüllende Funktion  $g(\phi)$  ist nun nicht mehr konstant und somit ist das Streumatrixelement (3.3) nicht mehr vollständig analytisch auswertbar.

Um die Rechnungen möglichst einfach zu halten, werden zunächst die Lichtkegelkoordinaten eingeführt. Diese haben den Vorteil, dass die Viererwellenzahlvektoren  $k'$  und  $k$  eine besonders einfache Darstellung besitzen. Es ergibt sich folgende Vorschrift für die Transformation eines Vierervektors  $x$  vom kartesischen Koordinatensystem  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  in das Lichtkegelsystem  $(x_+, x_-, \mathbf{x}_\perp)$ :

$$x_\pm := x^0 \pm x^3, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{x}_\perp := (x^1, x^2). \quad (4.2)$$

Die Laserphase  $\phi$  wird in Lichtkegelkoordinaten durch den Ausdruck

$$\phi = k \cdot x = \frac{1}{2} k_- x_+ = \omega x_+ \quad (4.3)$$

beschrieben. Eine nähere Beschreibung der Lichtkegelkoordinaten, sowie die genaue Darstellung der Viererimpulse befindet sich im Anhang A.3.

Der Volkov-Zustand (siehe Abschnitt 2.4) nimmt unter Verwendung von (2.6) und der

Lichtkegelkoordinaten die Form

$$\psi_-(p, \mathfrak{s}) = D_p(x_+, x_-, \mathbf{x}_\perp) \frac{u(p, \mathfrak{s})}{\sqrt{2p_0}}, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} D_p(x_+, x_-, \mathbf{x}_\perp) &= \left[ 1 + d_p g(x_+) \left( \not{k} \not{\epsilon}_- e^{i\omega x_+} + \not{k} \not{\epsilon}_+ e^{-i\omega x_+} \right) \right] \\ &\times e^{-\frac{i}{2}(p_+ x_- + p_- x_+) + i \mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp + i f(x_+)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

an, wobei  $d_p = ma_0/4k \cdot p$  und  $f = f_1 + f_2$  mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} f_1(x_+; p) &:= - \int_0^{\omega x_+} \frac{eA \cdot p}{k \cdot p} d\phi \\ &= - \frac{ma_0}{2k \cdot p} \int_0^{\omega x_+} g(\phi) \left( p \cdot \epsilon_- e^{i\phi} + p \cdot \epsilon_+ e^{-i\phi} \right) d\phi, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} f_2(x_+; p) &:= \int_0^{\omega x_+} \frac{e^2 A^2}{2k \cdot p} d\phi \\ &= - \frac{m^2 a_0^2}{8k \cdot p} \int_0^{\omega x_+} g(\phi)^2 \left( \cos^2 \xi - \sin^2 \xi \right) \\ &\times \left( e^{i2\phi} + e^{-i2\phi} \right) + 2g(\phi)^2 d\phi \end{aligned} \quad (4.7)$$

eingeführt wurden. Diese Darstellung des Volkov-Zustandes wird in diesem Abschnitt die Grundlage für weitere Berechnungen sein. Setzt man das Vektorpotential (2.6) und die Volkov-Zustände für Elektron und Positron in (3.3) ein, ergibt sich die kompakte Darstellung

$$S_{fi} = \frac{N_0}{k_-} \int d\phi dx_- d^2 \mathbf{x}_\perp \Gamma(\phi) e^{i(S_{-p'} - S_p - k' \cdot x)}, \quad (4.8)$$

$$\Gamma(\phi) = \mathcal{J}_0^0 + g e^{i\phi} \mathcal{J}_1^1 + g e^{-i\phi} \mathcal{J}_{-1}^1 + g^2 \mathcal{J}_0^2 + g^2 e^{2i\phi} \mathcal{J}_2^2 + g^2 e^{-2i\phi} \mathcal{J}_{-2}^2, \quad (4.9)$$

mit  $N_0 = -ie/\sqrt{2k'_0 2p_0 2p'_0}$ . Die Dirac-Strukturen in  $\Gamma(\phi)$  haben die Form

$$\mathcal{J}_0^0 = \bar{u}_p \not{\epsilon}' v_{p'}, \quad (4.10)$$

$$\mathcal{J}_{\pm 1}^1 = \bar{u}_p \left( d_p \not{\epsilon}_\mp \not{k} \not{\epsilon}' - d_{p'} \not{\epsilon}' \not{k} \not{\epsilon}_\mp \right) v_{p'}, \quad (4.11)$$

$$\mathcal{J}_0^2 = -4(k \cdot \epsilon') d_p d_{p'} \bar{u}_p \not{k} v_{p'}, \quad (4.12)$$

$$\mathcal{J}_{\pm 2}^2 = -2(k \cdot \epsilon') \left( \cos^2 \xi - \sin^2 \xi \right) d_{p'} d_p \bar{u}_p \not{k} v_{p'} \quad (4.13)$$

mit  $d_p = ma_0/4k \cdot p$ . Diese Funktionen hängen nicht mehr vom Raumzeitpunkt  $x$  ab. Dadurch wurde eine Trennung der Dirac-Strukturen von der Raumzeitintegration erreicht.

Die Hamilton-Jacobi-Wirkungen des Elektrons und Positrons, die in den Phasenfaktor

von (4.8) eingehen, haben die Form

$$\begin{aligned} S_p(k \cdot x) &= -p \cdot x + \frac{1}{2k \cdot p} \int_0^\phi -2eA(\phi') p + e^2 A^2(\phi') d\phi' \\ &= -p \cdot x + f(\phi), \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} S_{-p'}(k \cdot x) &= p' \cdot x - \frac{1}{2k \cdot p'} \int_0^\phi 2eA(\phi') p' + e^2 A^2(\phi') d\phi' \\ &= p' \cdot x + f'(\phi), \end{aligned} \quad (4.15)$$

mit  $f' = f(p \rightarrow -p')$  (siehe Abschnitt 3.1, Definitionen (4.6) und (4.7)). Damit nimmt (4.8) die Gestalt

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \frac{N_0}{k_-} \int d\phi dx_- d^2 \mathbf{x}_\perp \Gamma(\phi) e^{i[(p+p'-k')x - f(\phi) + f'(\phi)]} \\ &= \frac{2N_0}{k_-} (2\pi)^3 \delta^2(\mathbf{p}_\perp + \mathbf{p}'_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \delta(p_+ + p'_+ - k'_+) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \Gamma(\phi) e^{i\left[\frac{1}{k_-}(p_- + p'_- - k'_-) \phi - f(\phi) + f'(\phi)\right]} \end{aligned} \quad (4.16)$$

an. In dieser Darstellung hängt der Integrand von  $S_{fi}$  nur noch von der Laserphase  $\phi$  ab. Die beiden Deltadistributionen in (4.16) bestimmen die Energie-Impuls Erhaltung in den transversalen Richtungen. Die fehlende Deltadistribution der Minus-Komponenten der Impulse ist durch das verbleibende Integral über die Laserphase  $\phi$  ersetzt. Dieses muss numerisch ausgewertet werden. Dazu soll die komplette  $\phi$ -Abhängigkeit in die Funktionen

$$\mathcal{A}_n^m = \frac{2}{k_-} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi g^m(\phi) e^{iH_+(\phi;n)}, \quad (4.17)$$

$$H_+(\phi;n) = \frac{1}{k_-} (p_- + p'_- - k'_-) \phi - f(\phi) + f'(\phi) + n\phi \quad (4.18)$$

geschrieben werden. Definiert man die kontinuierliche Photonenzahl

$$l = (p_- + p'_- - k'_-) / k_- \quad (4.19)$$

ergibt sich der Exponent des Phasenfaktors aus (4.17) als

$$H_+(\phi;n) = (l+n)\phi - f(\phi) + f'(\phi). \quad (4.20)$$

Multipliziert man (4.19) mit  $k_-$ , dann beschreibt  $lk_-$  den Impulsübertrag zwischen dem erzeugten Paar und dem Laserfeld. Mit der Definition (4.19) lässt sich die

Energie-Impulserhaltung als

$$p + p' = lk + k' \quad (4.21)$$

schreiben. Die endgültige Darstellung des Streumatrixelements, das im folgenden numerisch ausgewertet wird, ist

$$S_{fi} = (2\pi)^3 N_0 \delta^2(\mathbf{p}_\perp + \mathbf{p}'_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \delta(p_+ + p'_+ - k'_+) \Lambda \quad (4.22)$$

mit dem invarianten Matrixelement

$$\Lambda = \mathcal{J}_0^0 \mathcal{A}_0^0 + \mathcal{J}_1^1 \mathcal{A}_1^1 + \mathcal{J}_{-1}^1 \mathcal{A}_{-1}^1 + \mathcal{J}_0^2 \mathcal{A}_0^2 + \mathcal{J}_2^2 \mathcal{A}_2^2 + \mathcal{J}_{-2}^2 \mathcal{A}_{-2}^2. \quad (4.23)$$

Die Funktion

$$\mathcal{A}_0^0 = \frac{2}{k_-} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi e^{i(l\phi - f(\phi) + f'(\phi))} \quad (4.24)$$

nimmt eine besondere Rolle ein. Sie ist in dieser Form unbestimmt und kann deswegen nicht direkt numerisch berechnet werden. Aus diesem Grunde muss die Funktion regularisiert werden. Dafür wird (4.24) mit dem Regularisierungsfaktor  $e^{-\epsilon|\phi|}$  multipliziert und später der Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$  gebildet. Die Funktion kann somit in die Form

$$\mathcal{A}_0^0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2}{k_-} \int_{-\infty}^{\infty} v(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi} u_\epsilon(\phi) d\phi, \quad (4.25)$$

$$v(\phi) = e^{i(-f(\phi) + f'(\phi))}, \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} u_\epsilon(\phi) = e^{i(l\phi - \epsilon|\phi|)} \quad (4.27)$$

gebracht werden. Durch partielle Integration erhält man den Ausdruck

$$\mathcal{A}_0^0 = \frac{2}{k_-} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ [u_\epsilon(\phi) v(\phi)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u_\epsilon(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi} v(\phi) d\phi \right\} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{k_-} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{(il + \epsilon)} - \frac{1}{(il - \epsilon)} \right. \\ &\quad - \frac{i}{(il + \epsilon)} \int_{-\infty}^0 \frac{d(f' - f)}{d\phi} e^{(il + \epsilon)\phi - if(\phi) + if'(\phi)} d\phi \\ &\quad \left. - \frac{i}{(il - \epsilon)} \int_0^{\infty} \frac{d(f' - f)}{d\phi} e^{(il - \epsilon)\phi - if(\phi) + if'(\phi)} d\phi \right\}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Führt man die Grenzwertbildung  $\epsilon \rightarrow 0$  aus, ergibt sich die regulalisierte Funktion  $\mathcal{A}_0^0$

in der Gestalt

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0^0 &= \frac{2}{k-l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(f' - f)}{d\phi} e^{iH_+(\phi)} d\phi + \frac{2}{k-l} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{2\epsilon}{l^2 + \epsilon^2} \right) \\ &= \frac{2}{k-l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(f' - f)}{d\phi} e^{iH_+(\phi)} d\phi + \frac{4\pi}{k-l} \delta(l).\end{aligned}\quad (4.30)$$

Für den letzten Schritt wurde die Lorentz-Kurve als Darstellung der Deltadistribution verwendet. Die Deltadistribution ist genau dann ungleich Null, wenn  $l = 0$  ist. Dies entspricht dem freien QED-Vertex, bei dem keine Absorption von Laserphotonen statt findet. Das bedeutet, dass Energie und Impulserhaltung nicht gleichzeitig erfüllbar sind. Aus diesem Grunde kann der Term proportional zu  $\delta(l)$  in (4.30) außer Acht gelassen werden. Damit ergibt sich der Ausdruck

$$\mathcal{A}_0^0 = \frac{2}{k-l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(f' - f)}{d\phi} e^{iH_+(\phi)} d\phi. \quad (4.31)$$

Das Ergebnis (4.31) kann als direkte Folgerung aus der Forderung nach Eichinvarianz für das Matrixelement (4.23) betrachtet werden. Im Anhang A.5 ist daher gezeigt, dass das Matrixelement (4.23) die Ward-Identität erfüllt und somit eichinvariant ist [40].

Abschließend soll ein Vergleich zwischen dem Streumatrixelement für unendliche ausgedehnte Wellen (3.4) und dem hier definierten Streumatrixelement (4.22) der gepulsten Welle gemacht werden. Dazu kann (4.16) in die Form

$$S_{fi} = N_0 \int \frac{dl}{2\pi} (2\pi)^4 \delta^4(k' + lk - p - p') \cdot \int d\phi \Gamma(\phi) e^{i[n\phi - f(\phi) + f'(\phi)]} \quad (4.32)$$

gebracht werden. Vergleicht man diesen Ausdruck mit (3.4) ist zu erkennen, dass die diskrete Summation in (3.4) über  $l$  in eine kontinuierliche Integration übergegangen ist. Des Weiteren ist nicht mehr der Quasiimpuls  $q^\mu$  (bzw.  $q'^\mu$ ) sondern der Impuls  $p$  (bzw.  $p'$ ) in der Formel enthalten. Die damit verbundenen physikalischen Aussagen werden im nächsten Kapitel deutlich.

## 4.2 Der Grenzfall schwacher Felder

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass aus der gewählten Darstellung des Streumatrixelementes (4.22) im Grenzfall eines schwachen Feldes mit  $a_0 \ll 1$  das Streumatrixelement des linearen Breit-Wheeler-Prozesses

$$S_{fi}^{BW} = \frac{-ie^2}{\sqrt{2p_0 2p'_0 2k_0 2k'_0}} (2\pi)^4 \delta^4(p + p' - k - k') M_{fi}, \quad (4.33)$$

$$M_{fi} = \bar{u}_p \left\{ \not{\epsilon} \frac{(\not{p} - \not{k}) + m}{(p - k)^2 - m^2} \not{\epsilon}' + \not{\epsilon}' \frac{(\not{p} - \not{k}') + m}{(p - k')^2 - m^2} \not{\epsilon} \right\} v_{p'} \quad (4.34)$$

abgeleitet werden kann. Hierfür muss (4.22) in eine Taylor-Reihe nach Potenzen von  $a_0$  entwickelt werden. Da es sich um eine Näherung mit  $a_0 \ll 1$  handelt, werden nur Terme niedrigster, nicht verschwindender Ordnung in  $a_0$  betrachtet. Eine schematische Entwicklung in Form von Feynman-Diagrammen ist in Abb. 4.1 zu sehen. Hierbei sei darauf hingewiesen, dass das zweite Diagramm proportional zu  $a_0^2$  (siehe vierte Zeile in Abb. 4.1) eine Korrektur höherer Ordnung zur nullten Ordnung darstellt. Gleiches gilt für das dritte Diagramm proportional zu  $a_0^3$  (siehe fünfte Zeile in Abb. 4.1), welches eine Korrektur höherer Ordnung zur ersten Ordnung repräsentiert. Auf diese schematische Entwicklung wird im Laufe der nächsten Schritte weiter Bezug genommen.

Im Folgenden bezeichnet  $\Lambda^{(n)}$  das Matrixelement  $\Lambda$  (siehe (4.23)) entwickelt bis zur  $n$ -ten Potenz von  $a_0$ . Die Terme proportional zu  $\mathcal{J}_0^2$  und  $\mathcal{J}_{\pm 2}^2$  hängen quadratisch von  $a_0$  ab und können somit im Rahmen der Näherung für schwache Felder vernachlässigt werden.

Die nullte Ordnung der Entwicklung hängt nur von  $\mathcal{J}_0^0 \mathcal{A}_0^0$  ab, da alle anderen Terme mindestens linear proportional zu  $a_0$  sind. In der Funktion (4.30) ist auch nur der zweite Term, proportional zu  $\delta(l)$ , unabhängig von  $a_0$ . Dieser entspricht dem ersten Feynman-Diagramm auf der rechten Seite der Abb. 4.1 und kann aus den im letzten Abschnitt genannten Gründen vernachlässigt werden. Die nullte Ordnung trägt folglich nicht zur Entwicklung für schwache Felder bei.

Um die erste Ordnung der Taylor-Reihe zu erhalten, muss die erste Ableitung von (4.23) nach  $a_0$  berechnet werden. Die Funktion  $f_2$  (siehe (4.7)) kann in (4.31) vernachlässigt werden, da sie quadratisch von  $a_0$  abhängt. Somit ergibt sich der Ausdruck

$$\left( \mathcal{J}_0^0 \mathcal{A}_0^0 \right)^{(1)} = \frac{\partial (\mathcal{J}_0^0 \mathcal{A}_0^0)}{\partial a_0} \cdot a_0 = \frac{2}{k-l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(f_1' - f_1)}{d\phi} e^{il\phi} d\phi. \quad (4.35)$$

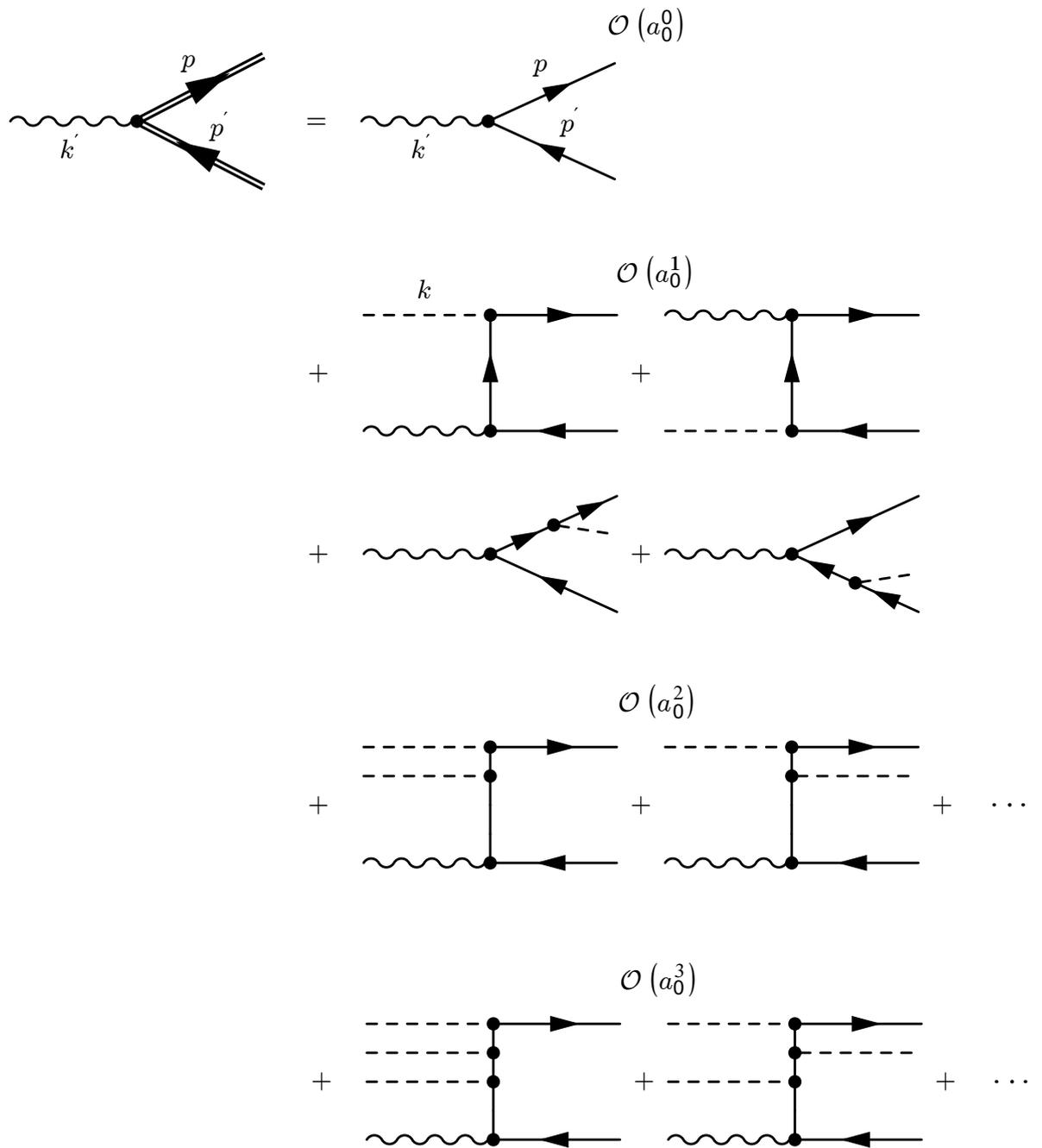


Abb. 4.1: Schematische perturbative Entwicklung des nicht-linearen Breit-Wheeler-Prozesses nach Potenzen von  $a_0$ .

Die verbleibenden Terme proportional zu  $\mathcal{J}_{\pm 1}^1$  lassen sich im Rahmen der Näherung schwacher Felder ebenfalls einfach berechnen. Es ergibt sich

$$\left(\mathcal{J}_{\pm 1}^1 \mathcal{A}_{\pm 1}^1\right)^{(1)} = \frac{\partial \left(\mathcal{J}_{\pm 1}^1 \mathcal{A}_{\pm 1}^1\right)}{\partial a_0} \cdot a_0 = \mathcal{J}_{\pm 1}^1 \frac{2}{k_{\pm}} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi g(\phi) e^{i(l \pm 1)\phi}. \quad (4.36)$$

Daraus folgt für das Matrixelement  $\Lambda$  entwickelt nach Potenzen von  $a_0$  der Ausdruck

$$\begin{aligned} \Lambda^{(1)} &= -\mathcal{J}_0^0 \frac{2}{k_{-l}} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \frac{d(f_1' - f_1)}{d\phi} e^{il\phi} \\ &+ \mathcal{J}_1^1 \frac{2}{k_{-}} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi g(\phi) e^{i(l+1)\phi} + \mathcal{J}_{-1}^1 \frac{2}{k_{-}} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi g(\phi) e^{i(l-1)\phi}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Als nächster Schritt soll die Ableitung  $d(f_1' - f_1)/d\phi$  im ersten Term von (4.37) berechnet werden. Mit den in Abschnitt 4.1 eingeführten Koeffizienten  $d_p = \frac{ma_0}{4k \cdot p}$  ergibt sich der Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{d(f_1' - f_1)}{d\phi} &= \frac{ma_0}{2k \cdot p} g(\phi) \left( p \cdot \epsilon_{-} e^{i\phi} + p \cdot \epsilon_{+} e^{-i\phi} \right) \\ &- \frac{ma_0}{2k \cdot p'} g(\phi) \left( p' \cdot \epsilon_{-} e^{i\phi} + p' \cdot \epsilon_{+} e^{-i\phi} \right) \quad (4.38) \\ &= (2d_p p \cdot \epsilon_{-} - 2d_{p'} p' \cdot \epsilon_{-}) e^{i\phi} + (2d_p p \cdot \epsilon_{+} - 2d_{p'} p' \cdot \epsilon_{+}) e^{-i\phi} \quad (4.39) \end{aligned}$$

Setzt man dieses Ergebnis in (4.37) ein erhält man als Zwischenresultat

$$\begin{aligned} \Lambda^{(1)} &= \left( \mathcal{J}_1^1 + \mathcal{J}_0^0 \frac{2}{k_{-l}} (-2d_p p \cdot \epsilon_{-} + 2d_{p'} p' \cdot \epsilon_{-}) \right) \int g(\phi) e^{i(l+1)\phi} d\phi \\ &+ \left( \mathcal{J}_{-1}^1 + \mathcal{J}_0^0 \frac{2}{k_{-l}} (-2d_p p \cdot \epsilon_{+} + 2d_{p'} p' \cdot \epsilon_{+}) \right) \int g(\phi) e^{i(l-1)\phi} d\phi. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Die Integrale in (4.40) sind im Wesentlichen die Fourier-Transformierten der Einhüllenden  $g(\phi)$ . Die erste Zeile in (4.40) entspricht den Feynman-Diagrammen der dritten Zeile in Abb. 4.1 und die zweite Zeile entspricht den Feynman-Diagrammen der zweiten Zeile in Abb. 4.1. Dabei symbolisieren die Diagramme in der dritten Zeile der Abb. 4.1 die Emission eines Laserphotons. Terme, die diese Diagramme repräsentieren, erfüllen nicht die Energie-Impuls-Erhaltung. Sie gehen daher nicht in das lineare Breit-Wheeler-Streumatrixelement ein (4.33) und können außer Acht gelassen werden. Da das Streumatrixelement des linearen, monochromatischen Grenzfall es berechnet werden soll, kann an dieser Stelle der Grenzwert  $g(\phi) \rightarrow 1$  gebildet werden. Damit kollabieren die beiden Integrale in (4.40) zu Deltadistributionen  $\delta(l \pm 1)$ . Die

Energie-Impuls Beziehung nimmt somit die Form

$$k + k' = p + p' \quad (4.41)$$

an. Setzt man die Definitionen (4.10) und (4.11) in (4.40) ein, folgt für das Matrixelement

$$\Lambda^{(1)} = \bar{u}_p \left( d_p \left( \not{\epsilon}_+ \not{k} - 2p\epsilon_+ \right) \not{\epsilon}' - d_{p'} \not{\epsilon}' \left( \not{k} \not{\epsilon}_+ - 2p'\epsilon_+ \right) \right) v_{p'} \frac{4\pi\delta(l-1)}{k_-}. \quad (4.42)$$

Unter der Verwendung der Energie-Impuls Beziehung (4.41), der Vertauschungsrelation  $[\not{\epsilon}_+, \not{p}]_+ = 2p \cdot \epsilon_+$  und der Dirac-Gleichung  $\bar{u}_p (\not{p} - m) = 0$  bzw.  $(\not{p}' + m) v_{p'} = 0$  kann das Matrixelement in die Gestalt

$$\Lambda^{(1)} = -\bar{u}_p \left\{ d_p \left[ \not{\epsilon}_+ (\not{p} - \not{k} + m) \right] \not{\epsilon}' + d_{p'} \not{\epsilon}' \left[ (\not{p} - \not{k}' + m) \not{\epsilon}_+ \right] \right\} v_{p'} \frac{4\pi\delta(l-1)}{k_-}$$

umgeformt werden. Nutzt man noch die Relation  $k \cdot p = (p - k)^2 - m^2$  erhält man die gewünschte Form

$$\begin{aligned} \Lambda^{(1)} &= -\frac{ma_0}{4} \bar{u}_p \left\{ \not{\epsilon}_+ \frac{\not{p} - \not{k} + m}{(p - k)^2 - m^2} \not{\epsilon}' \right. \\ &\quad \left. + \not{\epsilon}' \frac{\not{p} - \not{k}' + m}{(p - k')^2 - m^2} \not{\epsilon}_+ \right\} v_{p'} \frac{4\pi\delta(l-1)}{k_-} \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$= -ma_0 M_{fi} \frac{\delta(l-1)}{k_-}. \quad (4.44)$$

Setzt man abschließend diesen Ausdruck in (4.22) ein und beachtet die Relation (4.19) erhält man das gesuchte Streumatrixelement

$$S_{fi}^{(1)} = \frac{ie}{\sqrt{2p_0 2p'_0 2k_0 2k'_0}} \frac{ma_0 \sqrt{k_0}}{\sqrt{2}} (2\pi)^4 \delta^4(p + p' - k - k') M_{fi}. \quad (4.45)$$

Der Faktor  $ma_0 \sqrt{k_0} / \sqrt{2}$ , der in (4.33) nicht auftritt, hat seinen Ursprung in den unterschiedlichen Normierungen des linearen und des nicht-linearen Breit-Wheeler-Matrixelementes. Während beim linearen Breit-Wheeler-Prozess das Streumatrixelement (4.33) auf zwei einlaufende Photonen normiert ist, ist das hier behandelte Streumatrixelement auf ein einlaufendes Photon und das klassische Hintergrundfeld mit der Teilchendichte  $\rho_L = m^2 a_0^2 k_0 / 2e^2$  (siehe Abschnitt 4.5) normiert. Teilt man (4.45) durch die Wurzel der Teilchendichte, erhält man exakt das Streumatrixelement (4.33) des linearen Breit-Wheeler-Prozesses.

Somit ist gezeigt worden, dass aus dem hier aufgestellten Streumatrixelement (4.22),

das Streumatrixelement (4.33) für den linearen Prozess abgeleitet werden kann.

### 4.3 Die Näherung der langsam variierenden Einhüllenden

Der Exponent des Phasenfaktors  $H_+(\phi; n)$  der  $\mathcal{A}_n^m$ -Funktionen (4.17) hat einen sehr schnell oszillierenden Anteil. Insbesondere die Berechnung der Stammfunktionen  $f_1(\phi)$  und  $f_2(\phi)$  (siehe (4.6) und (4.7)) erfordert erhöhten numerischen Rechenaufwand. Daher erscheint es als sinnvoll, diese Funktionen anhand einer geeigneten Näherung zu approximieren. Für lange Laserpulse ( $\tau \gg 1$ ) kann zu diesem Zweck die „Näherung der langsam variierenden Einhüllenden“ (NLVE) verwendet werden. Dazu wird im Wesentlichen dem Vorgehen in [33] gefolgt.

Die Funktion (4.7) kann in die Form

$$f_1(\phi; p) = -\frac{ma_0}{kp} \left( p\epsilon_1 \cos \xi \int_0^\phi g(\phi') \cos \phi' d\phi' + p\epsilon_2 \sin \xi \int_0^\phi g(\phi') \sin \phi' d\phi' \right)$$

gebracht werden. Integriert man partiell, erhält man die Ausdrücke

$$\int g(\phi) \cos \phi d\phi = g(\phi) \sin \phi - \int \frac{dg(\phi)}{d\phi} \sin \phi d\phi, \quad (4.46)$$

$$\int g(\phi) \sin \phi d\phi = -g(\phi) \cos \phi + \int \frac{dg(\phi)}{d\phi} \cos \phi d\phi. \quad (4.47)$$

Die Ableitungen der Einhüllenden  $dg(\phi)/d\phi$  ist um einen Faktor  $\mathcal{O}(1/\tau)$  kleiner als die Einhüllende selbst. Daher können die zweiten Terme in (4.46) und (4.47) im Rahmen der NLVE vernachlässigt werden.

Für die zweite Funktion (4.7) können die Näherungen

$$\int g^2(\phi) \cos^2 \phi d\phi \simeq \frac{1}{2} \int d\phi g^2(\phi) + \frac{1}{2} g^2(\phi) \sin \phi \cos \phi, \quad (4.48)$$

$$\int g^2(\phi) \sin^2 \phi d\phi \simeq \frac{1}{2} \int d\phi g^2(\phi) - \frac{1}{2} g^2(\phi) \sin \phi \cos \phi \quad (4.49)$$

genutzt werden. Für die in dieser Arbeit verwendeten Hüllfunktionen ist die Stammfunktion  $\int d\phi g^2(\phi)$  analytisch bekannt und die Approximation wird besonders einfach. Es ergibt sich zum Beispiel für  $g(\phi) = \cos^2(\frac{\pi}{2\tau}\phi)$  die Stammfunktion

$$\int d\phi g^2(\phi) = \frac{\tau}{2\pi} \left[ \cos^3\left(\frac{\pi\phi}{2\tau}\right) \sin\left(\frac{\pi\phi}{2\tau}\right) + \frac{3}{2} \cos\left(\frac{\pi\phi}{2\tau}\right) \sin\left(\frac{\pi\phi}{2\tau}\right) + \frac{3\pi\phi}{4\tau} \right] \quad (4.50)$$

Schließlich können die Funktionen (4.46) und (4.47) durch

$$f_1(\phi; p_+) \simeq -\frac{ma_0}{k \cdot p} g(\phi) (p \cdot \epsilon_1 \cos \xi \sin \phi - p \cdot \epsilon_2 \sin \xi \cos \phi), \quad (4.51)$$

$$f_2(\phi; p_+) \simeq -\frac{m^2 a_0^2}{4k \cdot p} \left[ \int_0^\phi g^2(\phi') d\phi' \right. \\ \left. + g^2(\phi) \sin \phi \cos \phi (\cos^2 \xi - \sin^2 \xi) \right] \quad (4.52)$$

approximiert werden, was den numerischen Aufwand bedeutend verringert.

## 4.4 Die Produktionswahrscheinlichkeit

In diesem Abschnitt soll die differentielle Produktionswahrscheinlichkeit  $dW$  abgeleitet werden. Es handelt sich um die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Elektron-Positron Paar pro Laserpuls und einlaufendem Photon erzeugt wird. Verwendet man das im Abschnitt 4.1 eingeführte Streumatrixelement  $S_{fi}$  (siehe (4.22)) ergibt sich für die differentielle Produktionswahrscheinlichkeit der Ausdruck

$$dW = |S_{fi}|^2 d\Pi, \quad (4.53)$$

$$|S_{fi}|^2 = (2\pi)^3 N_0^2 \delta^2(\mathbf{p}_\perp + \mathbf{p}'_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \delta(p_+ + p'_+ - k'_+) |\Lambda|^2 \quad (4.54)$$

mit dem Vorfaktor  $N_0 = -ie/\sqrt{2k'_0}$  und dem invarianten Phasenraumelement

$$d\Xi = \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2p'_0}. \quad (4.55)$$

In dem speziellen Bezugssystem der Lichtkegelkoordinaten lautet das Phasenraumelement für das Elektron  $d^3\mathbf{p}/2p_0 = dp_+ d^2\mathbf{p}_\perp/2p_+$ . Daraus folgt für die Produktionswahrscheinlichkeit

$$dW = \frac{e^2}{2k'_0} |\Lambda|^2 d\Pi, \quad (4.56)$$

$$d\Pi = (2\pi)^{-3} \delta^2(\mathbf{p}_\perp + \mathbf{p}'_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \delta(p_+ + p'_+ - k'_+) \frac{dp_+ d^2\mathbf{p}_\perp}{2p_+} \frac{d^3\mathbf{p}'}{2p'_0}. \quad (4.57)$$

Nach Integration über den Phasenraum des Elektrons  $dp_+ d^2\mathbf{p}_\perp$  erhält man

$$\int d\Pi = \frac{1}{2p_+ (2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{2p'_0}. \quad (4.58)$$

Damit ergibt sich die differentielle Produktionswahrscheinlichkeit mit  $d|\mathbf{p}'| = p'_0 dp'_0 / |\mathbf{p}'|$

als

$$d^3W = \frac{e^2 |\mathbf{p}'|}{8 (2\pi)^3 p_+ k'_0} |\Lambda|^2 dp'_0 d\Omega, \quad (4.59)$$

wobei das Raumelement  $d^3\mathbf{p}' = |\mathbf{p}'|^2 d|\mathbf{p}'| d\Omega$  mit  $d\Omega = -d\phi_{pos} d\cos\theta_{pos}$  in Kugelkoordinaten dargestellt wird. Hierbei repräsentiert  $\phi_{pos}$  den Azimutwinkel des Positrons im Ausgangskanal und  $\theta_{pos}$  dessen Polarwinkel.

Es ist jedoch günstiger, den Phasenraum über die Rapidität

$$y_z = \ln(p'_\perp / m_\perp) \quad (4.60)$$

entlang der z-Achse mit  $m_\perp^2 = m^2 + p_\perp'^2$  zu parametrisieren. Als weitere Koordinate ist es üblich, den Betrag des Transversalimpulses  $|\mathbf{p}'_\perp| = p'_\perp$  zu verwenden. Die Rapidität ist additiv, und  $p'_\perp$  ist invariant unter einem Lorentz-Boost, das heißt, geht man vom Laborsystem (L) in das Schwerpunktsystem (cms), welches sich mit  $y_B$  im Laborsystem entlang der z-Achse bewegt, gilt für die Rapidität und den Transversalimpuls in beiden Systemen der Zusammenhang

$$y_{cms} = y_L + y_B, \quad (4.61)$$

$$p_\perp^{cms} = p_\perp^L. \quad (4.62)$$

Das macht Transformationen vom Laborsystem in das Schwerpunktsystem besonders einfach. Die differentielle Produktionswahrscheinlichkeit nimmt unter Beachtung von  $-|\mathbf{p}'| dp'_0 d\phi_{pos} d\cos\theta_{pos} = p'_\perp dy_z dp'_\perp d\phi_{pos}$  (siehe Anhang A.4) die Form

$$d^3W = \frac{e^2 p'_\perp}{8 (2\pi)^3 p_+ k'_0} |\Lambda|^2 dy_z dp'_\perp d\phi_{pos} \quad (4.63)$$

an. Abschließend kann die Abhängigkeit des Transversalimpulses von der Rapidität für monochromatische Wellen im Schwerpunktsystem mit  $\omega = \omega'$  angegeben werden durch den Ausdruck (siehe Anhang A.4)

$$p'_\perp = \sqrt{\left( \frac{l\omega e^{y_z}}{le^{2y_z} + 1} + \sqrt{\left( \frac{l\omega e^{y_z}}{le^{2y_z} + 1} \right)^2 - \frac{m^2 a_0^2}{2(le^{2y_z} + 1)}} \right)^2 - m^2} \quad (4.64)$$

und für den Grenzfall schwacher Felder ergibt sich die Form

$$p'_\perp = \sqrt{\left( \frac{l\omega e^{y_z}}{le^{2y_z} + 1} \right)^2 - m^2}. \quad (4.65)$$

## 4.5 Der Wirkungsquerschnitt

Um von der Produktionswahrscheinlichkeit auf den Wirkungsquerschnitt zu kommen, muss diese durch die Teilchendichte der Laserphotonen  $\rho_L = I/k_0$  mit der Energieflussdichte  $I$  und durch den Teilchenstrom der einlaufenden Photonen  $j_{in} = kk'/k_0k'_0 = 2$  geteilt werden. Die Energieflussdichte  $I$  einer elektromagnetischen Welle ist proportional zum Betrag des Poyntingvektor  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ . Das Vektorpotential  $A_\mu$  (siehe (2.6)) besitzt mit der im Abschnitt 3.1 definierten Kinematik die elektrische Feldstärke

$$\mathbf{E} = A_0 k_0 \begin{pmatrix} \cos \xi \left( \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} g(\phi) - \sin \phi g(\phi) \right) \\ \sin \xi \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} g(\phi) + \cos \phi g(\phi) \right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

und die magnetische Flussdichte

$$\mathbf{B} = A_0 k_0 \begin{pmatrix} \sin \xi \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} g(\phi) + \cos \phi g(\phi) \right) \\ -\cos \xi \left( \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} g(\phi) - \sin \phi g(\phi) \right) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.67)$$

Aus diesen beiden Größen berechnet sich der Poyntingvektor zu

$$\mathbf{S} = A_0^2 k_0^2 \left[ -\cos^2 \xi \left( \cos \phi \frac{\partial g(\phi)}{\partial \phi} - \sin \phi g(\phi) \right)^2 - \sin^2 \xi \left( \sin \phi \frac{\partial g(\phi)}{\partial \phi} + \cos \phi g(\phi) \right)^2 \right] \mathbf{e}_z \quad (4.68)$$

mit dem Einheitsvektor  $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)^\top$ .

Der Betrag des Poyntingvektors ist gegeben durch

$$|\mathbf{S}| = A_0^2 k_0^2 \left[ \left( \frac{\partial g(\phi)}{\partial \phi} \right)^2 (\cos^2 \xi \cos^2 \phi + \sin^2 \xi \sin^2 \phi) \right. \quad (4.69)$$

$$+ 2g(\phi) \frac{\partial g(\phi)}{\partial \phi} \sin \phi \cos \phi (\sin^2 \xi - \cos^2 \xi) \\ \left. + g^2(\phi) (\sin^2 \xi \cos^2 \phi + \cos^2 \xi \sin^2 \phi) \right]. \quad (4.70)$$

Im Rahmen der NLVE (siehe Abschnitt 4.3) können die Ableitungen der Einhüllenden vernachlässigt werden. Damit fallen die ersten beiden Terme in (4.69) weg. Mittelt man über  $|\mathbf{S}|$  ergibt sich

$$\langle |\mathbf{S}| \rangle = k_0^2 \frac{m^2 a_0^2}{2e^2} g^2(\phi). \quad (4.71)$$

Dabei wurde die Einhüllende  $g(\phi)$  nicht gemittelt und wird im Folgenden weiter explizit behandelt. Durch Integration über die zeitliche Komponente  $x_0$  und Dividieren durch  $k_0$  erhält man schließlich die gesuchte Teilchendichte

$$\begin{aligned}\rho_L &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle |\mathbf{S}| \rangle}{k_0} dx_0 \\ &= \frac{m^2 a_0^2}{2e^2} \int_{-\infty}^{\infty} g^2(\phi) d\phi.\end{aligned}\quad (4.72)$$

Das Integral über die Einhüllende in (4.72) kann für gewisse  $g(\phi)$ , wie in Abschnitt 4.3 erwähnt, analytisch gelöst werden. Für  $g(\phi) = \cos^2(\pi\phi/2\pi)$  ergibt sich  $\int_{-\infty}^{\infty} g^2(\phi) d\phi = 3\tau/8$ . Aus (4.63) kann der differentielle Wirkungsquerschnitt  $d^3\sigma = d^3W/j_{in}/\rho_L$  bestimmt werden und nimmt die Form

$$d^3\sigma = \frac{\alpha^2 p'_\perp}{3\pi p_+ k'_0 m^2 a_0^2 \tau} |\Lambda|^2 dy_z dp'_\perp d\phi_{pos} \quad (4.73)$$

an. Um die Ergebnisse für gepulste Hintergrundfelder mit denen in unendlich ausgedehnten Wellen zu vergleichen, bietet es sich an, die Wirkungsquerschnitte (3.8) bzw. (4.73) zu benutzen. In einigen Fällen ist es jedoch günstiger, mit der Produktionswahrscheinlichkeit zu arbeiten (zum Beispiel bei der Frage nach der Zahl der experimentell zu erwartenden Photonen pro Puls). Dazu ist die Produktionsrate  $\dot{W}$  (3.5) mit einer effektiven Wechselwirkungszeit  $T_{eff} = \frac{2}{k_-} \int_{-\infty}^{\infty} g^2(\phi) d\phi$  zu multiplizieren, das heißt

$$W_{monochr} = \dot{W} \cdot T_{eff}. \quad (4.74)$$

Dieses Vorgehen ist äquivalent zur obigen Definition des Wirkungsquerschnittes (es ist genauer, die Umkehrung davon) und verwendet als Normierung die Energie des Laserpulses.

# 5 Numerische Auswertung

## 5.1 Die differentielle Produktionswahrscheinlichkeit

Betrachtet man den nicht-linearen Breit-Wheeler-Prozess in monochromatischen Laserfeldern (siehe Kapitel 3), ist einer der auftretenden Effekte in der Verschiebung des Impulses des Positrons  $p'$  zum Quasiimpuls  $q'$  (siehe (2.22)) zu sehen. Damit verbunden ist die Änderung der Masse  $m$  in eine effektive Masse  $m_*$ . Es stellt sich die interessante Frage, wie sich diese Impuls- und Massenverschiebungen im Rahmen der gepulsten Wellen verändern. Die Einführung einer Hüllfunktion  $g(\phi)$ , deren Kanten sanft verlaufen, bringt zwei maßgebliche Effekte mit sich. Zum einen ist die gepulste Laserwelle nicht mehr monochromatisch, wie es bei der unendlich ausgedehnten Welle der Fall war, sondern genügt einer Energieverteilung. Folglich haben Photonen im Laserfeld, entsprechend der Verteilung, unterschiedliche Frequenzen, die sowohl höher als auch niedriger als die zentrale Frequenz  $\omega$  sind. Wie das zu  $g(\phi)$  gehörende Spektrum aussieht, erkennt man an der Fourier-Transformierten von  $g(\phi)$  (siehe Abschnitt 2.3, Abb. 2.1b). Der zweite Effekt betrifft die Intensität des Pulses. Während die monochromatische Welle sich mit genau einer Intensität proportional zu  $a_0$  ausbreitet, besitzt die gepulste Welle eine Intensitätsverteilung. Beim Einschalten des Pulses ist die Intensität gleich bzw. nahezu Null und steigt im zeitlichen Verlauf zu einem Maximum an. Das Maximum ist genau dann erreicht, wenn  $g(\phi) = 1$  ist. Im weiteren Verlauf fällt die Intensität wieder ab und geht am Ende des Pulses gegen Null. Diese zwei Effekte sind grundlegend für die Veränderungen der Physik, die auftreten, wenn man von unendliche ausgedehnten Wellen zu gepulsten Wellen übergeht.

In diesem Abschnitt wird von zirkular polarisierten Laserfeldern ausgegangen. Im monochromatischen Fall ist der Wirkungsquerschnitt bei zirkulare Polarisation unabhängig vom Azimutwinkel  $\phi_{pos}$  des ausgehenden Positrons. Die Integration über  $\phi_{pos}$  ergibt dann einen Faktor von  $2\pi$ . Für gepulste Wellen ist auch bei zirkularer Polarisation eine Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes von  $\phi_{pos}$  vorhanden (siehe Abschnitt 5.2). Diese ist aber für die Laserpulse, die in diesem Abschnitt untersucht werden, im subprozentualen Bereich und kann daher außer Acht gelassen werden.

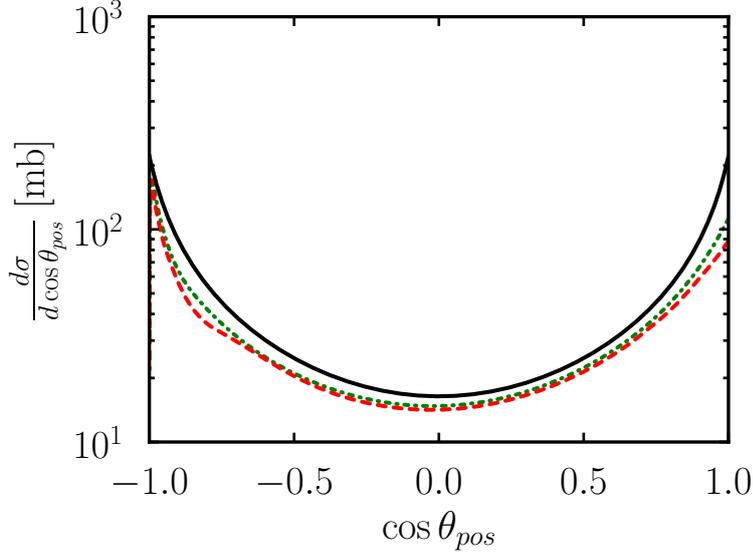


Abb. 5.1: Differentieller Wirkungsquerschnitt für verschiedene Werte von  $a_0$  ( 1.6: grün, 2: rot). Die schwarze Kurve stellt den winkeldifferentiellen Querschnitt  $d\sigma/d\cos\theta_{pos} = \int dp'_0 \frac{d^2\sigma}{dp'_0 d\cos\theta_{pos}}$  nach Breit-Wheeler dar. Für  $\sqrt{s} = 3 \text{ MeV}, \tau = 50$ .

Über die Polarisation des Probephoton  $\epsilon'$  wird gemittelt und über den Spin von Elektron und Positron summiert. Das Bezugssystem ist das in Abschnitt 3.1 eingeführte Schwerpunktsystem mit der Gesamtenergie  $\sqrt{s} = 2\sqrt{k k'} = 2\omega$ , wobei  $\omega = \omega'$ .

In einem ersten Schritt der Analyse der Paarerzeugung in gepulsten Laserfeldern soll der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$d^2\sigma = \frac{\alpha^2 |\mathbf{p}'|}{3\pi p_+ k'_0 m^2 a_0^2 \tau} |\Lambda|^2 2\pi dp'_0 d\cos\theta_{pos} \quad (5.1)$$

untersucht werden. In Abb. 5.1 ist der winkeldifferentielle Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/d\cos\theta_{pos} = \int dp'_0 \frac{d^2\sigma}{dp'_0 d\cos\theta_{pos}}$  in Abhängigkeit vom Polarwinkel  $\theta_{pos}$  des ausgehenden Positrons für verschieden Werte von  $a_0$  dargestellt. Über die Energie des Positrons  $p'_0 = m\gamma$  wurde numerisch integriert. Die zur Verfügung stehende Schwerpunktenenergie ist  $\sqrt{s} = 3 \text{ MeV}$  und die Einhüllende entspricht der Form (2.10) mit  $\tau = 50$ . Die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes von  $\theta_{pos}$  ist für den linearen Breit-Wheeler Prozess (schwarze Kurve) symmetrisch und ergibt eine U-Form. Das heißt, der Wirkungsquerschnitt steigt für Rück- und Vorwärtsstreuung des Positrons gleichmäßig an und hat ein Minimum für eine Streuung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Laserfeldes. Im Abschnitt 3.2 wurde erörtert, dass der Wirkungsquerschnitt für größer werdende Werte von  $a_0$  sinkt. Dieses Verhalten setzt sich für gepulste Wellen fort. In

Abb 5.1 ist außerdem zu erkennen, dass für steigende Werte von  $a_0$  die U-förmige Kurve zunehmend unsymmetrischer wird. Dies ist plausibel, da die Richtung des Laserstrahls ausgezeichnet ist, das heißt die Symmetrie bei Vertauschung von  $k$  mit  $k'$  geht verloren.

Die strukturellen Unterschiede zwischen monochromatischer Welle und gepulster Welle sind in der Abbildung 5.2 erkennbar. Hier sind auf der linken Seite die differentiellen Produktionswahrscheinlichkeiten in der Ebene, aufgespannt von der Rapidität  $y_z$  und dem transversalen Impuls  $p'_\perp$ , für zwei Werte von  $a_0$  und  $\sqrt{s} > 2m$ , das heißt oberhalb der Produktionsschwelle, dargestellt. Auf der rechten Seite sind Schnitte durch die  $(y_z, p'_\perp)$ -Ebene für einen konstanten Wert von  $p'_+ = \omega$  abgebildet. Der Verlauf des Schnittes durch die  $(y_z, p'_\perp)$ -Ebene ist durch die schwarzen Linien in den Abbn. 5.2a und 5.2c gekennzeichnet. Es wird dabei dem Vorgehen in [17] gefolgt, wo zum ersten Male die oben beschriebenen Schnitte berechnet wurden. Hierbei sei erwähnt, dass die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit in Übereinstimmung mit den Resultaten aus [17] stehen. Im Abschnitt 5.1.1 wird dieses an Hand von Beispielen verdeutlicht.

Während bei einer monochromatischen Welle die Verteilung zu einer Deltadistribution kollabiert (siehe in Abbn. 5.2a und 5.2c weiße Kurven und gestrichelte, senkrechte Linie in Abb. 5.2b und 5.2d), ist das Resultat für eine gepulste Laserwelle ein ausgedehntes Spektrum, welches durch die Verteilung der Energie der Laserphotonen verursacht wird. Die monochromatischen Peaks können mittels (4.64) bestimmt werden. Für kleine Werte von  $a_0$  (siehe Abbn. 5.2a und 5.2b,  $a_0 = 10^{-4}$ ,  $\sqrt{s} = 1.5$  MeV) sind aufgrund der geringen Laserintensität die Multiphotoneneffekte stark unterdrückt. Effekte höherer Harmonischer sind, wie bei der monochromatischen Welle (siehe 3.7), proportional zu  $a_0^{2l}$ . Somit ergibt sich für kleine Werte von  $a_0$  der bekannte  $2 \rightarrow 2$  Prozess. Für eine monochromatische Welle zeigt sich als Resultat eine symmetrische Kurve um die Mittrapidität in der  $(y_z, p'_\perp)$ -Ebene. Der Grund für diese Symmetrie liegt, wie oben erwähnt, darin, dass das Laserphoton und das Probephoton gleichberechtigt sind. Somit ist das gezeigte Ergebnis zu erwarten. Im Gegensatz dazu ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung für gepulste Laserwellen nicht mehr symmetrisch. Sie weitet sich für hohe negative Rapidität (das heißt das Positron wird in z-Richtung emittiert) bis zu einem Wert von  $y_z \sim -1.5$  aus. Die Photonen im Laserfeld sind ausgezeichnet. Durch die zur Verfügung stehenden Energie  $\sqrt{s}$  ist eine Beschränkung des transversalen Impulses,  $p'_\perp/m \lesssim 1.5$ , vorgegeben. Das Maximum der Verteilung fällt mit dem monochromatischen Peak zusammen. Aber es ergeben sich auch neben diesen Peak signifikante Beiträge zur Verteilung. Diese Beiträge werden von den Laserphotonen, die aufgrund des durch die Einhüllende erzeugten Frequenzspektrums eine andere Frequenz besitzen als die zentrale Frequenz  $\omega$ , produziert.

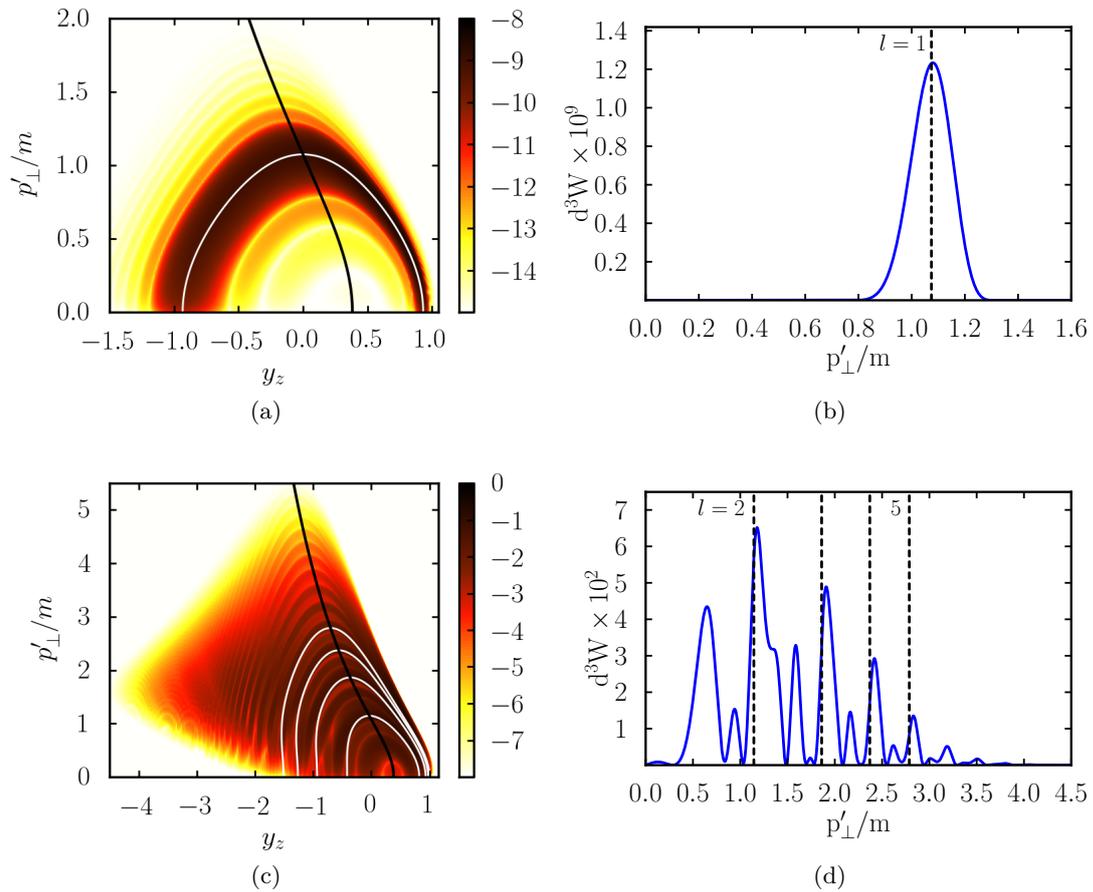


Abb. 5.2: Linke Seite: Intensitätsverteilung des erzeugten Positrons in der  $(y_z, p'_\perp)$ -Ebene für  $\sqrt{s} = 1.5$  MeV,  $\tau = 25$  und verschiedene Werte für  $a_0$  ((a)  $a_0 = 10^{-4}$ , (b)  $a_0 = 2$ ). Die weißen Linien geben die Position der Peaks für eine monochromatische Laserwelle an. Rechte Seite: Schnitte durch die  $(y_z, p'_\perp)$ -Ebene, die durch die schwarzen Linien in (a) und (c) gekennzeichnet sind. Senkrechte gestrichelte Linien mit dem Label  $l$  geben die Positionen der Harmonischen in einer unendlich ausgedehnten Laserwelle an. Die Einhüllende ist  $g(\phi) = \cos^2(\frac{\pi}{2\tau}\phi)$ .

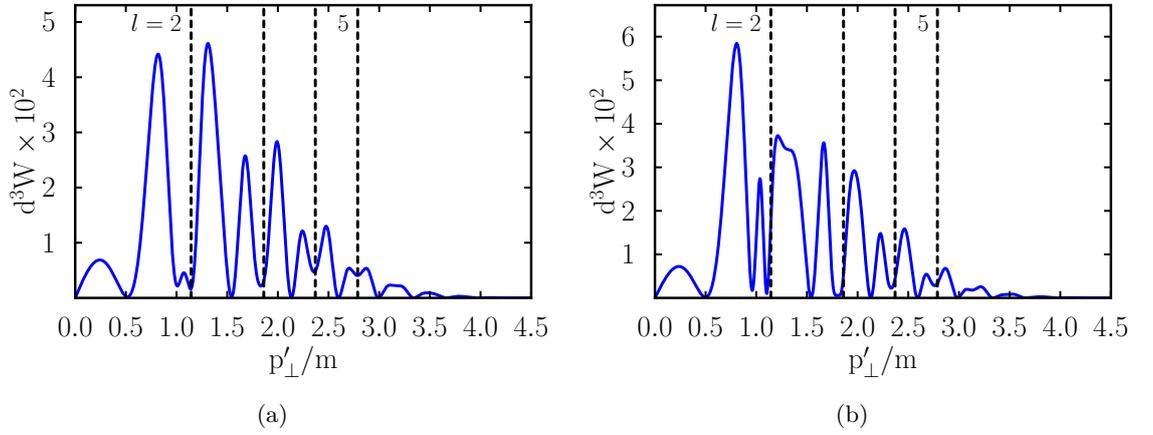


Abb. 5.3: Schnitte durch die  $(y_z, p'_\perp)$ -Ebene mit Parametern wie für 5.2d aber mit unterschiedliche Hüllfunktionen  $g(\phi)$ . (a):  $g(\phi) = \exp(\phi^2/2\tau^2)$  mit  $\tau = 8$ , (b):  $g(\phi) = 1/\cosh(\phi/\tau)$  mit  $\tau = 8$ .

Man könnte das Auftreten polychromatischer Laserphotonen auch wie folgt interpretieren. Es wechselwirkt nicht mehr ein „ganzes Laserphoton“ mit dem Probephoton, sondern vielmehr eine „gebrochene Anzahl an Laserphotonen“. Das heißt, die Photonenzahl  $l$  in (3.1) ist nicht mehr zwingend eine ganze Zahl, sondern muss als kontinuierliche Variable angesehen werden. Das ist eine der Implikationen des in der Volkov-Lösung realisierten quasi-klassischen Charakters des externen Feldes und kommt im Vergleich zwischen (3.4) und (4.32) durch den Übergang der diskreten Summe über  $l$  zum Integral zum Ausdruck (siehe Abschnitt 4.1).

Geht man zu höheren Werten von  $a_0$  über, werden die Multiphotoneffekte stärker. Das hat unter anderem zur Folge, dass ein größerer Bereich des Phasenraumes belegt wird. Die Verteilung ist gegenüber dem linearen Fall stark deformiert und besitzt deutliche Substrukturen. In den Abbn. 5.2c und 5.2d ( $a_0 = 2$ ,  $\sqrt{s} = 1.5$  MeV) sind die auftretenden Substrukturen gut zu erkennen. Das zeigt sich anhand der ausgeprägten Maxima zwischen den monochromatischen Peaks. Diese sind auf die endliche Zeitdauer des Laserpulses und die damit verbundene Impulsverteilung, der die Laserwelle genügt, zurückzuführen. Dabei ist die Form der auftretenden Substrukturen von der speziellen Gestalt der Einhüllenden abhängig (siehe Abb. 5.3). Die vertikalen Linien in Abb. 5.2d repräsentieren die auftretenden Harmonischen in einer monochromatischen Welle, welche durch den Quasiimpuls  $q'_\mu$  und der Photonenzahl  $l$  bestimmt sind. Die Maxima der Verteilung fallen nicht mehr genau auf die Peaks der monochromatischen Welle sondern sind leicht verschoben. Dieses verdeutlicht, dass der Quasiimpuls  $q'_\mu$  und die damit verbundene effektive Masse  $m_\star$  für gepulste Wellen ihre Bedeutung

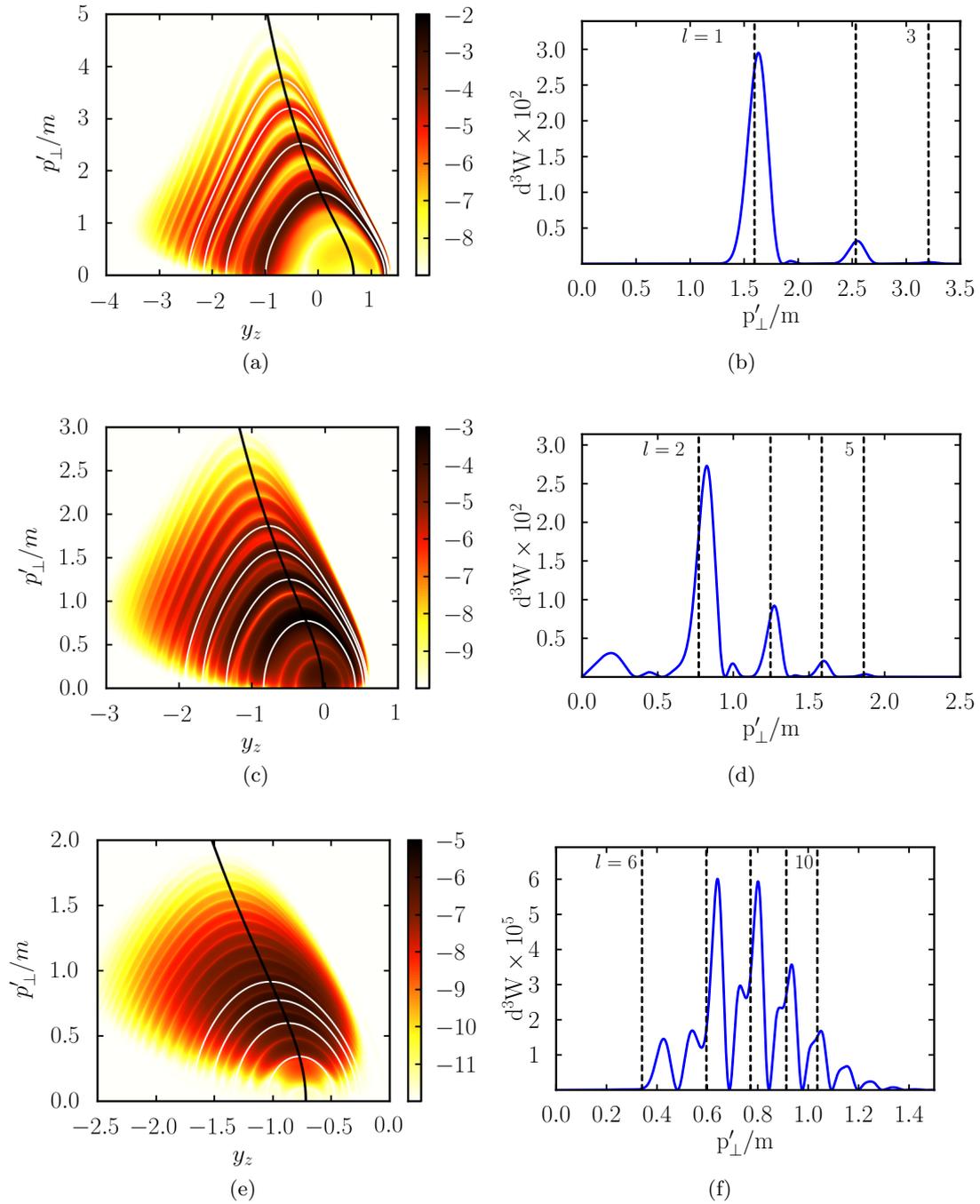


Abb. 5.4: Wie in Abb. 5.2, aber für verschiedene Werte von  $\sqrt{s}$  ((a),(b):  $\sqrt{s} = 2$  MeV; (c),(d):  $\sqrt{s} = 1$  MeV; (e),(f):  $\sqrt{s} = 0.5$  MeV) und  $a_0 = 0.8$ .

verlieren. Für die unendlich ausgedehnte Welle konnte durch eine zeitliche Mittelung des Vierervektorpotentials  $A_\mu$  der Quasiimpuls definiert werden (siehe (2.22)). Mit der Hinzunahme einer nicht-trivialen Hüllfunktion  $g(\phi)$  gibt es keine natürliche Definition eines Quasiimpulses, da die Mittelung über das vollständige Vektorpotential sich nicht mehr als sinnvoll erweist. Die Variation der Energie der Laserphotonen, gegeben durch die Einhüllende  $g(\phi)$ , hat zur Folge, dass auch der Impuls des Positrons  $p'$  im Ausgangskanal einer Verteilung unterliegt. Für den Peakwert des Pulses ( $g(\phi) = 1$ ) entspricht  $p'$  dem Quasiimpuls des monochromatischen Grenzfalles. Im Gegensatz dazu, gleicht er beim Minimum des Pulses ( $g(\phi) \rightarrow 0$ ) dem Impuls des linearen Breit-Wheeler-Prozesses. Das hat zur Folge, dass der Betrag des Transversalimpulses  $p'_\perp$  einen Wert zwischen nicht-linearen (4.64) und linearen (4.65) Transversalimpuls der monochromatischen Welle einnimmt.

An dieser Stelle wird das Verhalten der differentiellen Produktionswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von  $\sqrt{s}$  für einen festen Wert von  $a_0 = 0.8$  beim Übergang in den Subschwellenbereich analysiert. Dazu betrachte man die Abb. 5.4. Für Energien oberhalb der Schwelle,  $\sqrt{s} > 2m$ , (siehe (a) und (b) in Abb. 5.4) sind die Maxima klar voneinander getrennt. Die Peaks, und damit die Harmonischen, der monochromatischen Welle können den Maxima der gepulsten Welle recht gut zu geordnet werden. Geht man zu kleineren Werten von  $\sqrt{s}$  über (siehe (c), (d):  $\sqrt{s} = 1$  MeV und (e), (f):  $\sqrt{s} = 0.5$  MeV) wird dementsprechend ein kleinerer Bereich des Phasenraumes belegt. Es treten Substrukturen mit einer zunehmenden Anzahl an Maxima auf. Das könnte man als ein Überlappen der einzelnen Harmonischen interpretieren, wobei aber nicht klar ist zu welcher Harmonischen ein Maximum der Verteilung gehört. Das verdeutlicht, dass man in der gewählten Darstellung der  $\mathcal{A}_n^m$ -Funktionen (siehe (4.17)) den Begriff der Harmonischen nicht mehr eindeutig verwenden kann, was der Kontinuität von  $l$  entspricht. Es ist außerdem zu erkennen, dass unterhalb der Schwelle  $l_0 > 1$  Photonen aus dem Laserfeld benötigt werden, um ein Paar zu erzeugen.

### 5.1.1 Vergleich mit Ergebnissen aus der Literatur

In diesem Abschnitt werden die Resultate aus [17] mit Rechnungen der vorliegenden Arbeit verglichen. Um die Übereinstimmung zu verdeutlichen, sind in der Abb. 5.6 Produktionsraten für zwei Pulsformen dargestellt. Rote Kreuze stellen ausgewählte Punkte aus den Abbildungen 1c und 2 aus [17] dar. Die Parameter sind dem erwähnten Artikel entnommen: es handelt sich hierbei um linear polarisiertes Laserlicht mit einer Energie von  $\omega = 1$  eV und dem Intensitätsparameter  $a_0 = 2\sqrt{2}$ . Die Probephotonenenergie ist  $\omega' = p'_+ = 250$  GeV, woraus  $\sqrt{s} = 1$  MeV folgt. Der Azimutwinkel des Positrons wurde auf  $\phi_{pos} = 0$  festgesetzt. Dargestellt ist die dreifach-differentielle

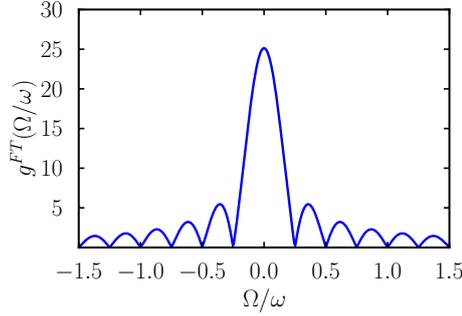
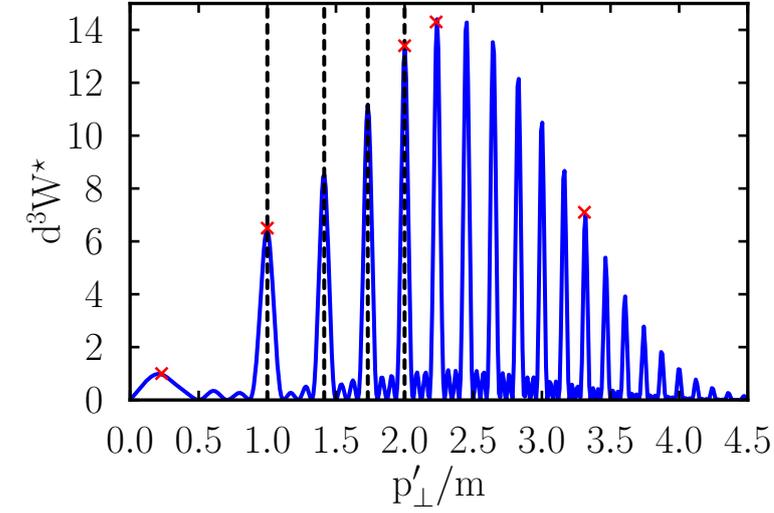


Abb. 5.5: Fourier-Transformierte  $g^{FT}(\Omega/\omega)$  des Box-Pulses in Abhängigkeit der dimensionslosen Frequenz  $\Omega/\omega$ .

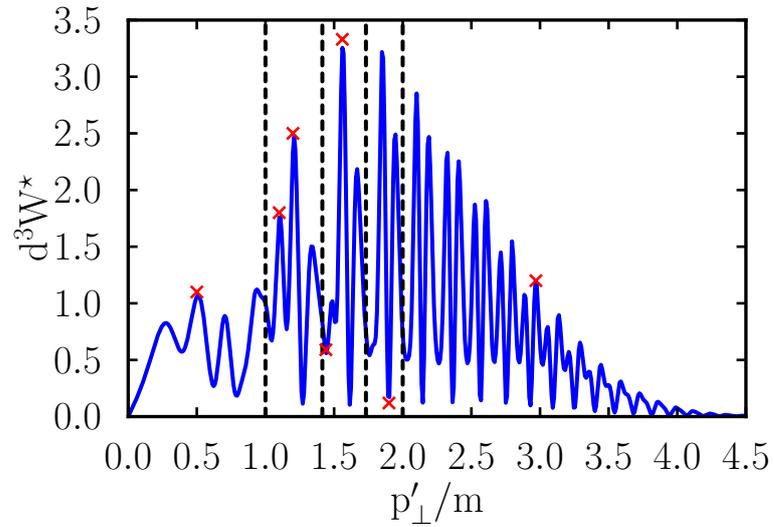
Produktionsrate für unterschiedliche Pulsformen und Pulsbreiten. Die Umrechnung von der in dieser Arbeit verwendeten Produktionswahrscheinlichkeit  $d^3W$  zur der in [17] verwendeten Produktionsrate  $d^3W^*$  lautet:

$$d^3W^* = \frac{8(2\pi)^2 \omega_{cms}}{e^2 m^2} \frac{d^3W}{\tau}. \quad (5.2)$$

In Abb. 5.6a ist  $d^3W^*$  in Abhängigkeit von  $p'_\perp/m$  für einen Box-Puls  $g(\phi) = \Theta(\tau - \phi)\Theta(\tau + \phi)$  und  $\tau = 4\pi$  dargestellt. Es fällt auf, dass die dargestellte Kurve einem Interferenzmuster ähnelt. In [17] wird dementsprechend erörtert, dass der Prozess der Paarerzeugung für diese spezielle Pulsform im Wesentlichen ein Beugungsprozess ist. Die endliche Pulsdauer korrespondiert mit einer endlichen Öffnung in der Blende, während  $\mathcal{N} = \tau/\pi$ , die Anzahl der Schwingungen des Pulses, mit  $N$  Spalten korrespondiert. Dieser Effekt ist auf die spezielle Beschaffenheit des Frequenzspektrums des Box-Pulses zurückzuführen. Das wird deutlich, wenn man die Fourier-Transformierte von  $g(\phi)$  für den Box-Puls betrachtet (siehe Abb. 5.5). Die Nebenmaxima im Frequenzspektrum sind von bedeutender Höhe und beeinflussen die physikalischen Vorgänge wesentlich. Folglich sind die Seitenbänder im Wahrscheinlichkeitsspektrum in Abb. 5.6a auf die Nebenmaxima der Fourier-Transformierten des Box-Pulses zurückzuführen. Die Ähnlichkeit mit dem Beugungsmuster geht verloren, wenn man zu anderen Pulsformen, wie den hier verwendeten  $\cos^2$ -Puls, übergeht (siehe Abb. 5.6b mit  $\tau = 8\pi$ ). Das Frequenzspektrum dieser Pulsform besitzt zwar auch Nebenmaxima (vergleiche mit Abb. 2.1b), diese sind aber deutlich geringer ausgeprägt als beim Box-Puls. Die spezielle Struktur von  $d^3W^*$  in Abb. 5.6b ist vielmehr auf nicht-lineare Effekte zurückzuführen. Dies könnte man auch als eine Überlagerung vieler einzelner Beugungsmuster deuten [17]. Die Ursache dieser Substrukturen unterscheidet sich aber grundsätzlich von der Ursache der Substrukturen eines Box-Pulses.



(a)



(b)

Abb. 5.6: Differentielle Produktionsrate als Funktion des transversalen Impulses des Positrons für  $a_0 = 2\sqrt{2}$ ,  $p_+ = \omega' = 250$  GeV,  $\sqrt{s} = 1$  und linearer Polarisation. Die schwarz gestrichelten Linien stellen die Resonanzen des monochromatischen Grenzfalles dar. Die roten Kreuze zeigen ausgewählte Punkte aus den Spektren in [17]. (a)  $g(\phi) = \Theta(\tau + \phi)\Theta(\tau - \phi)$  mit  $\tau = 4\pi$ ; (b)  $g(\phi) = \cos^2(\frac{\pi}{2\tau}\phi)$  mit  $\tau = 8\pi$ .

Dies erkennt man, wenn man andere Pulsformen untersucht, die keine Nebenmaxima im Frequenzspektrum besitzen. Nimmt man beispielsweise einen Gauß-Puls (siehe Abb. 5.3) treten ebenfalls Substrukturen auf (siehe Abb. 5.3a), welche aber auf die Impulsverteilung im Laserpuls zurückzuführen sind.

## 5.2 Abhängigkeit der Produktionswahrscheinlichkeit vom Azimutwinkel

In den vorangegangenen Abschnitten ist die Abhängigkeit der Produktionswahrscheinlichkeit vom Azimutwinkel  $\phi_{pos}$  nicht betrachtet worden. Unter der Annahme, dass die Abhängigkeit von  $\phi_{pos}$  für zirkular polarisierte Laserwellen vernachlässigbar gering ist, kann die Integration über  $\phi_{pos}$  analytisch ausgeführt werden und ergibt einen Faktor von  $2\pi$ . Diese Abhängigkeit der Produktionswahrscheinlichkeit soll nun sowohl für linear polarisierte als auch für zirkular polarisierte Laserwellen untersucht werden.

Um die differentielle Produktionswahrscheinlichkeit  $dW/d\phi_{pos}$  zu erhalten, muss (4.63) über  $y_z$  und  $p'_\perp$  integriert werden. Die Integration erfolgt numerisch. In Abb. 5.7 ist  $dW/d\phi_{pos}$  für lineare und zirkulare Polarisation für jeweils zwei Pulslängen  $\tau$  abgebildet. Der Polarisationsparameter  $\xi$  wurde für lineare Polarisation auf den Wert  $\xi = \pi/2$  und für zirkulare Polarisation auf den Wert  $\xi = \pi/4$  gesetzt. Bei linear polarisierten Wellen (Abbn. 5.7a und 5.7c) bilden sich für beide Pulslängen zwei Maxima der Verteilung aus. Ein Maximum liegt bei  $\phi_{pos} = \pi/2$  und steht somit senkrecht zur Polarisationsrichtung. Das zweite Maximum liegt bei  $\phi_{pos} = 2\pi/3$  und steht ebenfalls senkrecht zur Polarisationsrichtung.

Im Gegensatz dazu sollte nach naiver Annahme die Produktionswahrscheinlichkeit unabhängig von  $\phi_{pos}$  sein, sobald eine zirkulare Polarisation der Laserwelle vorliegt. Für unendliche Wellen ist dies auch der Fall. Ein Grund hierfür ist, dass keine der Polarisationsrichtungen ausgezeichnet ist. Dennoch ist in Abbn. 5.7b und 5.7d zu erkennen, dass ein Maximum der Verteilung bei  $\phi_{pos} = \pi$  und ein Minimum bei  $\phi_{pos} = 0$  bzw. bei  $\phi_{pos} = 2\pi$  existiert. Dies ist ein Effekt der endlichen Dauer des Laserpulses und der durch die Einhüllende  $g(\phi)$  vorgegebenen Verteilung der Intensität des Feldes, welche die Symmetrie um die Strahlachse bricht. Um dies zu verdeutlichen ist in Abb. 5.8 der Verlauf des Vektorpotentials  $A_\mu$  in der  $(x, y)$ -Ebene für zirkulare Polarisation gezeigt. Die Laserwelle breitet sich in der negativen  $z$ -Richtung aus (siehe Abschnitt 3.1) und steht somit senkrecht auf der in Abb. 5.8 dargestellten Ebene. Das Minimum der Intensität entspricht in Abb. 5.8 den Kurvenverlauf in der Nähe des Zentrums der Ebene bei dem Punkt  $(0, 0)$  und in Abb. 5.7b bzw. 5.7d dem Minimum bei  $\phi_{pos} = 0$  und  $\phi_{pos} = 2\pi$ . Im zeitlichen Verlauf des Pulses steigt

## 5.2 Abhängigkeit der Produktionswahrscheinlichkeit vom Azimutwinkel

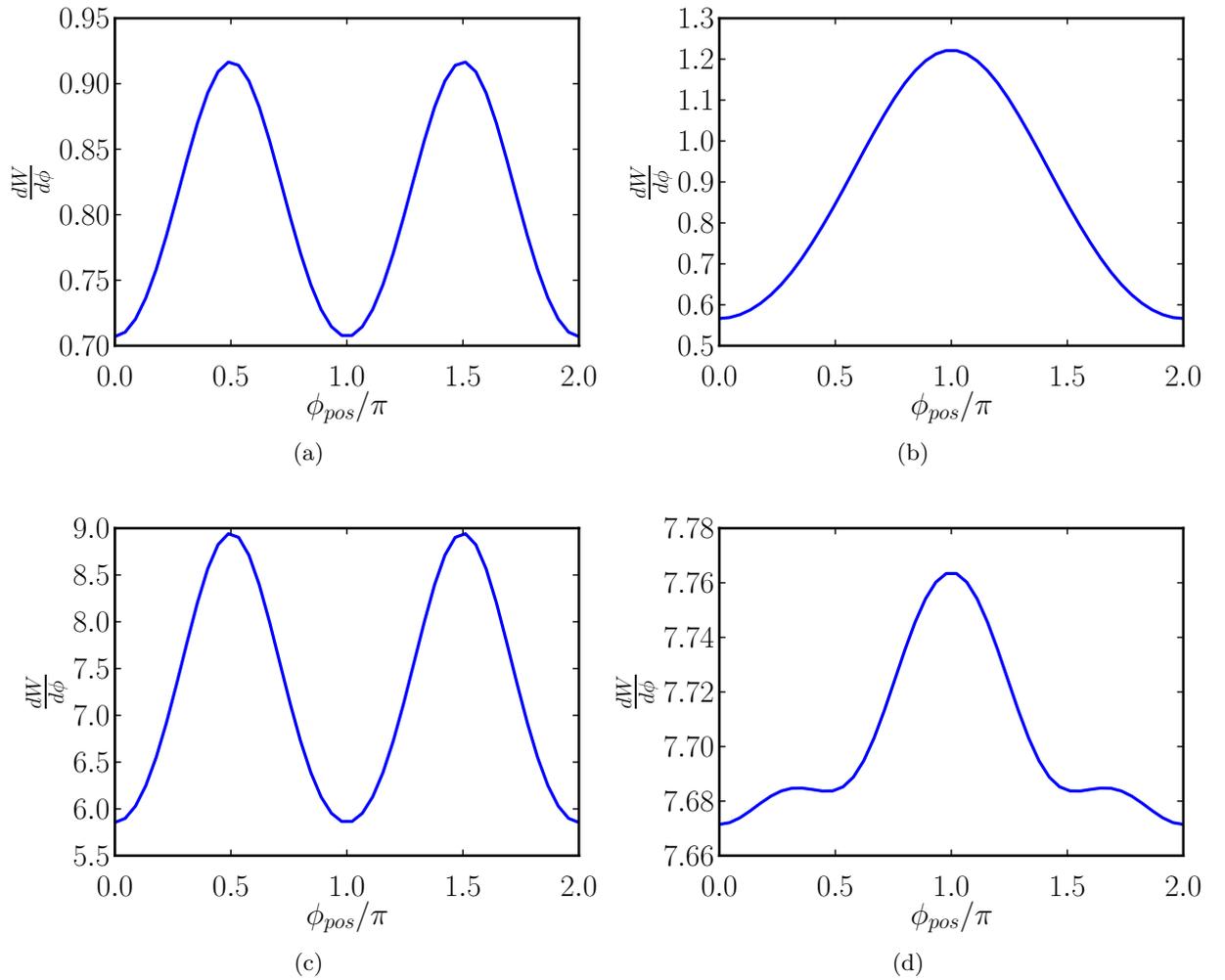


Abb. 5.7: Darstellung des differentiellen Wirkungsquerschnitts  $dW/d\phi_{pos}$  als Funktion vom Azimutwinkels  $\phi_{pos}$  des Positrons für  $a_0 = 2$ ,  $\sqrt{s} = 2.5$  MeV und lineare Polarisation  $\xi = \pi/2$  in (a) und (c), zirkulare Polarisation  $\xi = \pi/4$  in (b) und (d). In (a) und (b)  $\tau = 3$ , in (c) und (d)  $\tau = 30$ .

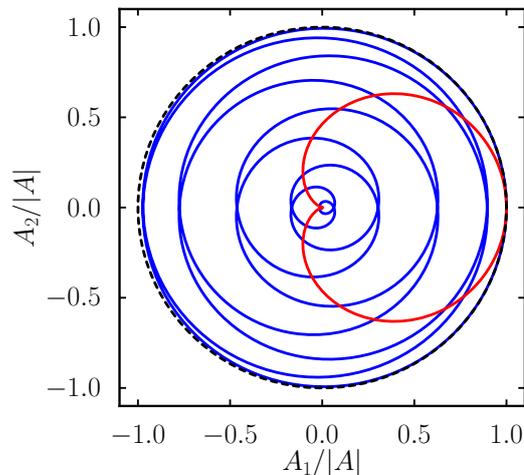


Abb. 5.8: Schnitt durch das Vektorpotential  $A_\mu$  in der  $(x, y)$ -Ebene für zirkulare Polarisation,  $\xi = \pi/4$ , und  $\tau = 30$  (blaue Kurve) sowie  $\tau = 3$  (rote Kurve). Die schwarz gestrichelte Kurve repräsentiert den Grenzfall eines unendlich ausgedehnten Potentials.

die Intensität bis zu einem Maximum an. In der vorgegebenen Kinematik ist das Maximum der Einhüllenden und damit der Intensität, bei einem Wert von  $\phi_{pos} = \pi$  erreicht. Dies spiegelt sich in den Abbn. 5.7b und 5.7d wider. In Abb. 5.8 ist das Maximum des Pulses genau dann erreicht, wenn die Verteilung der gepulsten Welle mit dem Grenzfall der unendlich ausgedehnten Welle (schwarz gestrichelte Kurve) übereinstimmt. Daraus folgt, dass bei zirkularer Polarisation von gepulsten Feldern nicht alle Polarisationsrichtungen gleichberechtigt sind. Besonders gravierend wird dieser Effekt, wenn man zu sehr kurzen Laserpulsen übergeht, die zum Beispiel nur aus einer Schwingung des Laserfeldes bestehen. In Abb. 5.7b ist zu erkennen, dass das Maximum um 100% höher ist als das Minimum. Den Grund dafür kann man an der roten Kurve in Abb. 5.8 erkennen, welche den Laserpuls in der  $(x, y)$ -Ebene für eine Schwingungen des Laserfeldes ( $\tau = 3$ ) darstellt. Die Kurve ist nicht rotationssymmetrisch, sondern geht vom Zentrum zum Maximum und wieder zurück zum Zentrum. Daraus lässt sich schließen, dass während bei den längeren Pulsen (siehe 5.7d) die Abhängigkeit von  $\phi_{pos}$  verschwindend gering ist (das Maximum ist ca. um 1% höher als das Minimum), ist sie bei sehr kurzen Pulsen (siehe Abb. 5.7b) von Relevanz und kann auch für zirkular polarisierte Laserwellen nicht vernachlässigt werden.

## 5.3 Die totale Produktionswahrscheinlichkeit

### 5.3.1 Die Abhängigkeit von der Schwerpunktennergie

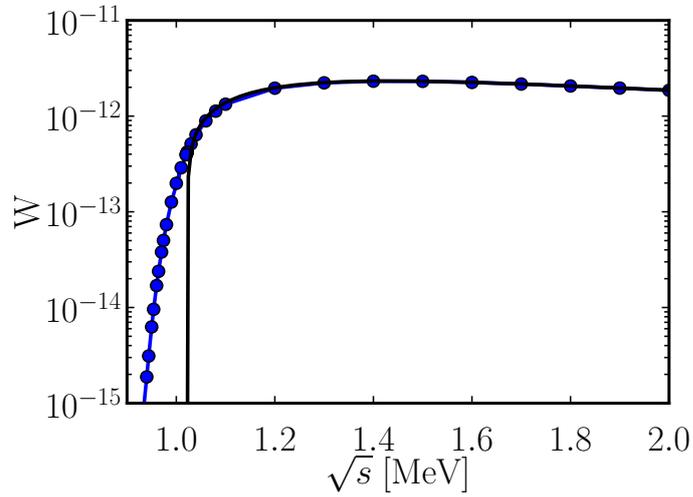
Um die totale Produktionswahrscheinlichkeit  $W$  zu erhalten, muss die differentielle Produktionswahrscheinlichkeit (4.63) über die Rapidität  $y_z$  und den transversalen Impuls  $p'_\perp$ , sowie über den Azimutwinkel des Positrons  $\phi_{pos}$  integriert werden.  $W$  ist durch

$$W = \int dp'_\perp dy_z d\phi_{pos} \frac{d^3W}{dp'_\perp dy_z d\phi_{pos}} \quad (5.3)$$

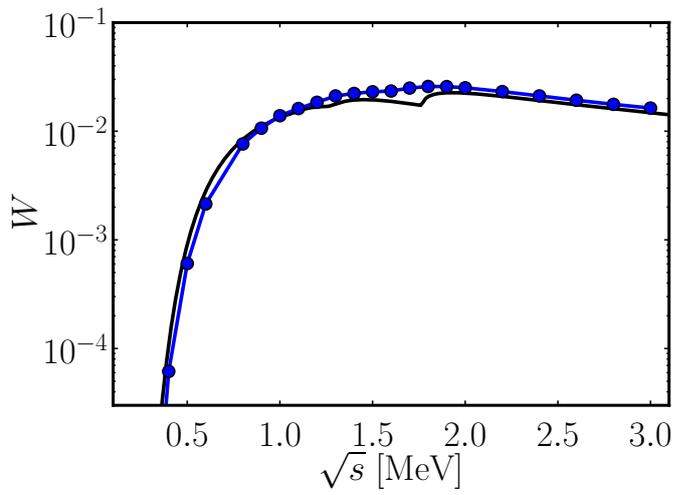
gegeben. Da in diesem Abschnitt zirkular polarisierte Laserwellen mit  $\tau = 25$  untersucht werden, kann  $W$ , wie im vorangegangenen Abschnitt gezeigt, als annähernd unabhängig von  $\phi_{pos}$  betrachtet werden, und die Integration über  $\phi_{pos}$  ergibt mit guter Genauigkeit einen Faktor  $2\pi$ .

In Abb. 5.9 ist die Produktionswahrscheinlichkeit (blaue Kurve mit Kreisen) als Funktion von  $\sqrt{s}$  für ein zirkular polarisiertes Laserfeld mit  $\tau = 25$  und für zwei verschiedene Werte von  $a_0$  dargestellt. Zum Vergleich ist zusätzlich die monochromatische Produktionswahrscheinlichkeit abgebildet (schwarze Kurve ohne Symbole). Die in diesem Kapitel verwendete Pulsfunktion ist, so fern nicht anders angegeben, die  $\cos^2$ -Funktion (siehe (2.10)).

Für kleine Werte von  $a_0$ ,  $a_0 \ll 1$ , ist die Schwelle des Paarerzeugungsprozesses in unendlich ausgedehnten, ebenen Wellen gegeben durch  $\sqrt{s} = 2m$  (siehe Abb. 5.9a,  $a_0 = 10^{-5}$ ). Das heißt, für  $\sqrt{s} \rightarrow 2m$  geht die Wahrscheinlichkeit rapide gegen Null. Während die Resultate der endlichen Welle und der unendlichen Welle für  $\sqrt{s}$  oberhalb der Schwelle sehr gut übereinstimmen, differieren die beiden Kurven zunehmend in der Nähe der Schwelle. Für gepulste Felder ist auch knapp unterhalb der Schwelle eine signifikante Produktionswahrscheinlichkeit vorhanden. Eine Begründung dafür liegt in der Einhüllenden  $g(\phi)$  und die damit verbundene Verbreiterung des Frequenzbereiches der einlaufenden Laserphotonen. Die Laserphotonen besitzen nicht nur die zentrale Frequenz sondern ein Frequenzspektrum (siehe Abschnitt 2.3). So können Photonen innerhalb des Laserpulses mit höheren Frequenzen die Schwellenenergie  $\sqrt{s} = 2m$  aufbringen und Paare erzeugen. Die Differenz der beiden Kurven ist abhängig von der speziellen Form der Einhüllenden, denn je nach Form ist das Frequenzspektrum breiter oder schmaler. Außerdem nähert sich die Kurve der gepulsten Welle für größer werdende  $\tau$  dem monochromatischen Grenzfall an, da dann das Frequenzspektrum schmaler. Dies entspricht der in Abschnitt 2.3 erwähnten Annäherung von gepulsten und unendlich ausgedehnten Wellen für eine große Anzahl an Schwingungen des



(a)



(b)

Abb. 5.9: Totale Produktionswahrscheinlichkeit  $W$  als Funktion von  $\sqrt{s}$  in MeV für zirkulare Polarisation,  $\tau = 25$  und der Einhüllenden  $g(\phi) = \cos^2(\frac{\pi}{2\tau}\phi)$ . Die schwarze Kurve zeigt den monochromatischen Grenzfall, während die blaue Kurve mit Kreisen die Resultate für die gepulste Welle zeigt. (a)  $a_0 = 10^{-5}$  und (b)  $a_0 = 2$ .

Laserfeldes  $\mathcal{N}$  [35].

Für größere Werte von  $a_0$  tritt der starke Abfall der Kurve erst unterhalb der Schwelle des schwachen Feldes,  $\sqrt{s} = 2m$ , ein. In Abb. 5.9b ( $a_0 = 2$ ) ist zu sehen, dass die Resultate der monochromatischen Welle annähernd mit den Ergebnissen der gepulsten Welle übereinstimmen. Doch sind die Strukturen in der Kurve der monochromatischen Welle, verursacht durch die niedrigsten Harmonischen (siehe Abschnitt 3.2), im gepulsten Fall geglättet. Außerdem liegt für  $\sqrt{s} > 2m$  die Kurve der gepulsten Welle knapp oberhalb der Kurve der monochromatischen Welle. Unterhalb dieser Schwelle ist die Produktionswahrscheinlichkeit des gepulsten Falles niedriger als die des monochromatischen Falles. Um dieses Verhalten zu verstehen, soll noch einmal der monochromatische Grenzfall betrachtet werden. In Abschnitt 3.2 wurde gezeigt, dass im Fall unendlich ausgedehnter Wellen der Wirkungsquerschnitt oberhalb der Schwelle,  $\sqrt{s} = 2m$ , für steigende Werte von  $a_0$  abnimmt. Im Gegensatz dazu nimmt er unterhalb der Schwelle für steigende Werte von  $a_0$  zu. Geht man zu endlichen Laserpulsen über, muss die in Abschnitt 5.2 beschriebene Intensitätsverteilung berücksichtigt werden. Wie erwähnt sind am Anfang und am Ende des Pulses die Intensitäten viel kleiner als die Peakintensität bei  $g(\phi) = 1$ , die der Intensität der unendlich ausgedehnten Laserwelle entspricht. Diese Bereiche des Pulses mit geringerer Intensität sind Ursache dafür, dass oberhalb der Schwelle die Produktionswahrscheinlichkeit der gepulsten Wellen größer ist als die der monochromatischen Welle, aber unterhalb der Schwelle unterdrückt wird.

Man könnte vermuten, dass die Energieverteilung der eingehenden Photonen der Unterdrückung von  $W$  für kleine Werte von  $\sqrt{s}$  entgegenwirkt, da durch die Verteilung auch höherenergetische Photonen im Laserpuls enthalten sind. Dies scheint aber nur einen geringeren Effekt zu haben, was damit verbunden sein könnte, dass die Photonen mit geringerer Energie im Puls diesen Effekt ausgleichen.

### 5.3.2 Analyse der einzelnen Harmonischen

Im Abschnitt 4.1 wurden die  $\mathcal{A}_n^m$ -Funktionen (siehe (4.17)) hergeleitet. Sie beinhalten alle Veränderungen der Physik, die auftreten, wenn man von unendlich ausgedehnten Laserwellen zu regulären, gepulsten Wellenzügen übergeht. In der bisher verwendeten Darstellung der  $\mathcal{A}_n^m$ -Funktionen treten für größer werdende Werte von  $a_0$  immer ausgeprägtere Substrukturen auf (siehe Abb. 5.2), was mit einem Überlappen der einzelnen Harmonischen assoziiert werden kann. Daher muss eine andere Darstellung der  $\mathcal{A}_n^m$ -Funktionen gewählt werden, um die Substrukturen voneinander zu trennen und dann einzelnen Harmonischen zuzuordnen. Die Idee für den im Folgenden vorgestellten Ansatz ist zurückzuführen auf [18].

## 5 Numerische Auswertung

Es soll zunächst der Exponent des Phasenfaktors (4.20) der  $\mathcal{A}_n^m$ -Funktionen betrachtet werden. Der erste Term auf der rechten Seite von (4.20) ist linear von  $\phi$  abhängig. Der zweite und der dritte Term können in einen schnell oszillierenden Teil  $\tilde{f}$  und einen nicht-linearen, ponderomotiven Teil  $\hat{f}$  zerlegt werden. Unter Benutzung der NLVE ergibt sich der ponderomotive Term  $\hat{f}$  aus dem Integralterm in (4.52) als

$$\hat{f}(x_+) = -\beta \int_0^{\omega x_+} d\phi g^2(\phi) \quad (5.4)$$

mit dem Koeffizienten  $\beta = \frac{m^2 a_0^2}{4} \left( \frac{1}{kp} + \frac{1}{kp'} \right)$ . Unter der Verwendung von (4.51) und dem zweiten Term in (4.52) ergibt sich für den oszillierenden Term

$$\tilde{f} = f_1 - f_1' - \beta g^2(\phi) \sin \phi \cos \phi \left( \cos^2 \xi - \sin^2 \xi \right). \quad (5.5)$$

Die ersten beiden Terme lassen sich zusammenfassen zu

$$f_1 - f_1' = g(\phi) (-\alpha_1 \sin \phi + \alpha_2 \cos \phi) \quad (5.6)$$

mit den zwei Koeffizienten  $\alpha_1 = ma_0 \left( \frac{p\epsilon_1}{kp} - \frac{p'\epsilon_1}{kp'} \right) \cos \xi$  und  $\alpha_2 = ma_0 \left( \frac{p\epsilon_2}{kp} - \frac{p'\epsilon_2}{kp'} \right) \sin \xi$ . Unter der Verwendung der Relationen

$$x = \sqrt{x^2 + y^2} \cos \left( \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \right), \quad (5.7)$$

$$y = \sqrt{x^2 + y^2} \sin \left( \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \right) \quad (5.8)$$

kann (5.6) weiter umgeformt werden. Es ergibt sich die Darstellung

$$f_1 - f_1' = \alpha g(\phi) \sin(\phi + \phi_0). \quad (5.9)$$

Hierbei ist  $\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$  und  $\tan(\phi_0) = -\alpha_2/\alpha_1$ . Aus Gründen einer kompakten Darstellung wird im Folgenden von zirkular polarisiertem Licht ausgegangen. Dies hat zur Folge, dass der letzte Term in (5.5) Null wird. Somit nimmt der oszillierende Term die Form

$$\tilde{f} = \alpha g(\phi) \sin(\phi + \phi_0) \quad (5.10)$$

an. Dem entsprechend können die  $\mathcal{A}_n^m$ -Funktionen in die Gestalt

$$\mathcal{A}_n^m = \frac{2}{k_-} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi g^m(\phi) e^{i((l+n)\phi - \tilde{f}(\phi) - \hat{f}(\phi))} \quad (5.11)$$

gebracht werden. Die schnell oszillierende Phase  $e^{-i\tilde{f}}$  kann in eine Fourier-Reihe

$$e^{-i\tilde{f}} = \sum_{a=-\infty}^{\infty} \mathcal{B}_a(\phi) e^{-ia\phi} \quad (5.12)$$

entwickelt werden. Hierbei sind  $\mathcal{B}_a(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\phi-\pi}^{\phi+\pi} d\phi' e^{-ia\phi' - i\tilde{f}(\phi')}$  die von  $\phi$  abhängigen Fourier-Koeffizienten. Die hier auftretende Integration kann mit Hilfe der Bessel-Funktionen erster Art  $J_a$  ausgewertet werden. Die Koeffizienten nehmen dann die Gestalt

$$\mathcal{B}_a(\phi) = e^{-ia\phi_0} J_a(\alpha g(\phi)) \quad (5.13)$$

an. Setzt man die Entwicklung in (5.11) ein ergibt sich der Ausdruck

$$\mathcal{A}_n^m = \frac{2}{k_-} \sum_{a=-\infty}^{\infty} e^{-ia\phi_0} \int_{-\infty}^{\infty} J_a(\alpha g) g^m e^{i((l+n-a)\phi - \hat{f})} d\phi. \quad (5.14)$$

Abschließend kann noch der Summationsindex umbenannt werden in  $a' = a - n$  und  $a' \rightarrow a$  und man erhält die Form

$$\mathcal{A}_n^m = \frac{2}{k_-} \sum_{a=-\infty}^{\infty} e^{-i(a+n)\phi_0} \int_{-\infty}^{\infty} J_{a+n}(\alpha g) g^m e^{i((l-a)\phi - \hat{f})} d\phi. \quad (5.15)$$

Um aus dieser Darstellung der  $\mathcal{A}_n^m$ -Funktionen das Matrixelement (4.23) zu berechnen, muss über  $a$  summiert werden,

$$\Lambda = \sum_a \Lambda_a. \quad (5.16)$$

Das heißt, dass jedem Wert von  $a$  eine Harmonische zugeordnet werden kann. Dies wird am monochromatischen Grenzfall  $g(\phi) \rightarrow 1$  deutlich. Für  $g(\phi) = 1$  wird der ponderomotive Anteil zu  $\hat{f}(\phi) = -\beta\phi$ . Somit kann (5.15) umgeschrieben zu

$$\mathcal{A}_n^m|_{g(\phi)=1} = \frac{2}{k_-} \sum_a e^{-i(a+n)\phi_0} J_{a+n}(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(l-a+\beta)\phi} d\phi. \quad (5.17)$$

Das Integral ergibt eine Deltadistribution  $\delta(l - a + \beta)$ . Setzt man für  $l$  die Definition (4.19) ein, erhält man

$$\mathcal{A}_n^m|_{g(\phi)=1} \propto \frac{1}{k_-} \delta(p_- + p'_- - k'_- - ak_- + \beta k_-). \quad (5.18)$$

Wobei der Term  $\beta k_-$  genau die Verschiebung vom Viererimpuls  $p^\mu$  zum Quasiimpuls  $q^\mu$  repräsentiert.

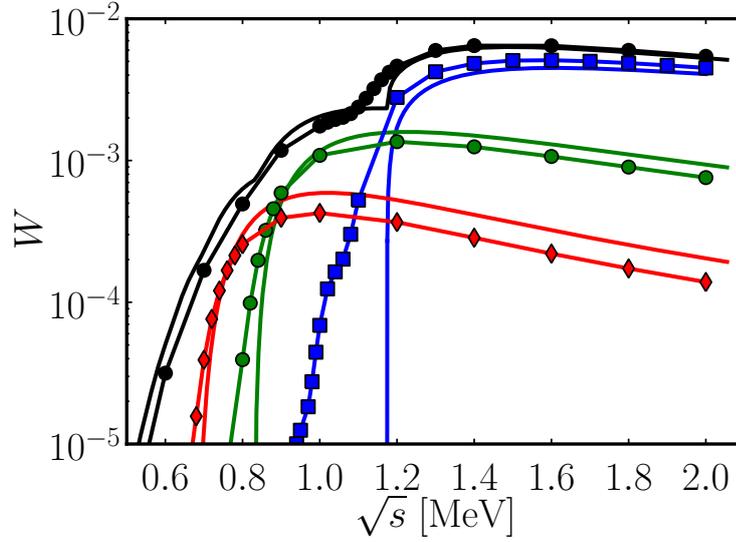


Abb. 5.10: Beitrag der ersten drei Harmonischen zur totalen Produktionswahrscheinlichkeit (schwarze Kurve) als Funktion von  $\sqrt{s}$  für  $a_0 = 0.8$ . Die Kurven ohne Symbole entsprechen den unendlichen, ebenen Wellen. Die Kurven mit Symbolen entsprechen den gepulsten ebenen Wellen mit  $\tau = 25$ .

Die Produktionswahrscheinlichkeit ist proportional zu  $W \propto |\Lambda|^2$ , somit folgt aus (5.16) der Ausdruck

$$|\Lambda|^2 = \sum_{aa'} \Lambda_{a'}^* \Lambda_a = \sum_a |\Lambda_a|^2 + \sum_{a \neq a'} \Lambda_{a'}^* \Lambda_a. \quad (5.19)$$

Dabei steht die letzte Summe für Interferenzterme, welche auftreten, wenn die einzelnen Harmonischen überlappen. Berechnet man die totale Produktionswahrscheinlichkeit werden diese Terme durch die Integration über den Phasenraum sehr klein und können vernachlässigt werden [41].

Der Beitrag der ersten drei Harmonischen zur gesamten Produktionswahrscheinlichkeit ist in Abb. 5.10 dargestellt. Zum Vergleich ist zusätzlich der monochromatische Grenzfall (Kurven ohne Symbole) abgebildet. Wie aus den Ergebnissen des Abschnittes 3.2 zu erwarten, sinkt die Produktionswahrscheinlichkeit für höhere Harmonische im Gegensatz zu den niedrigeren Harmonischen. Man kann erkennen, dass die erste Harmonische der gepulsten Welle (blaue Kurve mit Quadraten) für  $\sqrt{s} > 1.2$  MeV oberhalb der ersten Harmonischen der unendlichen Welle liegt. Während sich die zweite und die dritte Harmonische jeweils unterhalb der korrespondierenden Harmonischen der monochromatischen Welle befindet. Das kann wie folgt begründet werden. Im Abschnitt 3.2 wurde erörtert, dass der Wirkungsquerschnitt, und damit die Produkti-

onswahrscheinlichkeit, der ersten Harmonischen für steigende Werte von  $a_0$  angesichts der steigenden effektiven Masse  $m_*$  sinkt (siehe Abb. 3.4). Für höhere Harmonische ( $l > 1$ ) gilt  $\sigma \propto a_0^{2l-2}$  für kleine Werte von  $a_0$  (siehe Abschnitt 3.2, Gl. 3.7). Nach Überschreiten des Maximums fällt  $\sigma$  stark ab, da sich der entsprechende Produktionskanal aufgrund der steigenden Masse  $m_*$  schließt. Wie in Abschnitt 3.2 erörtert, verschiebt sich dieses Maximum für größer werdende Werte von  $\sqrt{s}$  zu größeren Werten von  $a_0$ . Die gepulste Welle genügt einer Intensitätsverteilung und besitzt dadurch eine durchschnittlich geringere Intensität als die unendlich ausgedehnten Welle. Das hat zur Folge, dass für die höheren Harmonischen einer gepulsten Welle für große Werte von  $\sqrt{s}$  der Wirkungsquerschnitt als Funktion von  $\sqrt{s}$  (siehe Abb 5.10) geringer ist als der der monochromatischen Welle. Im Gegensatz dazu ist der Wirkungsquerschnitt der gepulsten Welle für kleine Werte von  $\sqrt{s}$ , angesichts der steigenden effektiven Masse  $m_*$ , größer als der der monochromatischen Welle.

Zusätzlich beeinflusst die Energieverteilung der Photonen einer gepulsten Laserwelle die Produktionswahrscheinlichkeit. Dies ist besonders gut an der ersten Harmonischen in Abb. 5.10 zu erkennen. Während die erste Harmonische der unendlichen Welle für  $\sqrt{s} < 1.2$  MeV rapide gegen Null geht, existiert für die gepulste Welle sogar unterhalb der Schwach-Feld Schwelle  $\sqrt{s} = 1.022$  MeV eine signifikante Wahrscheinlichkeit Paare zu erzeugen. Grund hierfür sind die höher-energetischen Photonen im Laserpuls.

### 5.3.3 Die Abhängigkeit vom Intensitätsparameter

Nachdem im letzten Abschnitt die Abhängigkeit der Produktionswahrscheinlichkeit von der Energie  $\sqrt{s}$  betrachtet wurde, wird in diesem Abschnitt die Abhängigkeit vom zweiten wichtigen Parameter, dem Intensitätsparameter  $a_0$ , untersucht. In Abb. 5.11 ist die Produktionswahrscheinlichkeit als Funktion von  $a_0$  für verschiedene Werte von  $\sqrt{s}$  abgebildet. Zum Vergleich ist ebenso der jeweilige monochromatische Grenzfall dargestellt (gestrichelte Kurven). Es sei bemerkt, dass die Produktionswahrscheinlichkeit im Gegensatz zu dem Wirkungsquerschnitt proportional zu  $a_0^2$  ist (siehe (3.8) und (4.73)). Das muss bei einem direkten Vergleich der beiden Größen berücksichtigt werden, da hier die Abhängigkeit von  $a_0$  selbst betrachtet wird (siehe dazu Diskussion in Abschnitt (4.5)).

Aus der Abbildung 5.11 ist zu erkennen, dass ein Erhöhen der Laserintensität eine Erhöhung der Produktionswahrscheinlichkeit mit sich führt. Für Werte von  $\sqrt{s}$  oberhalb der linearen Schwelle stimmen die Resultate der monochromatischen Welle mit denen der gepulsten Welle annähernd überein. Es ist jedoch zu erkennen, dass die Strukturen in der monochromatischen Verteilung, welche durch die niedrigsten Harmonischen verursacht werden, in der Kurve der gepulsten Welle nicht mehr vorhanden sind. Das

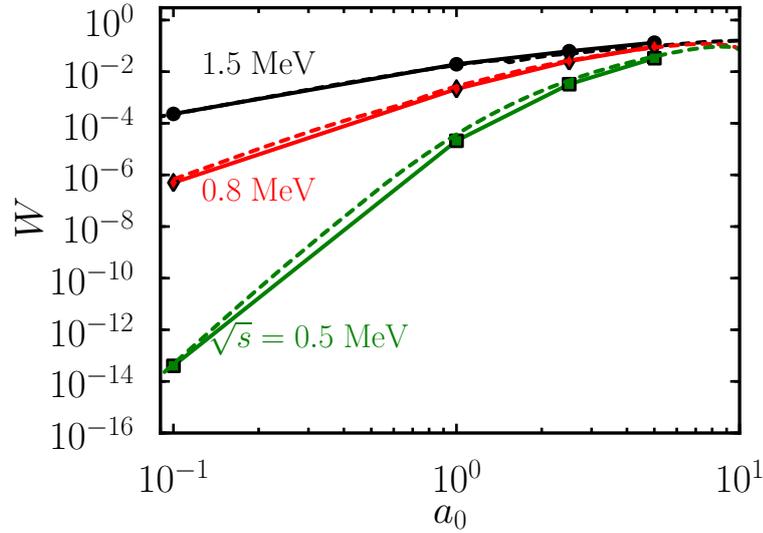


Abb. 5.11: Produktionswahrscheinlichkeit als eine Funktion von  $a_0$  für verschiedene Werte von  $\sqrt{s}$  und  $\tau = 50$ . Zusätzlich ist der monochromatische Grenzfall (gestrichelte Linien) dargestellt.

ist auf die Intensitätsverteilung des Laserpuls zurückzuführen. Es ist außerdem zu sehen, dass für kleiner werdende Werte von  $\sqrt{s}$  höhere Intensitäten des Lasers benötigt werden, um in einen relevanten Bereich der Produktionswahrscheinlichkeit zu gelangen. Für Werte von  $a_0 < 1$  sind die Produktionswahrscheinlichkeiten proportional zu  $a_0^{2r}$  (siehe Abschnitt 3.2, Gl. 3.7), wobei  $r \in \mathbb{R}$  von den dominierenden Harmonischen abhängt. Für  $\sqrt{s} = 1.5$  MeV ist zu erkennen, dass die erste Harmonische dominiert ( $r \simeq 1$ ). Für  $\sqrt{s} = 0.5$  MeV scheint die vierte Harmonische zu dominieren ( $r \simeq 4$ ).

Zum Vergleich sei hier ein Arbeit von Ringwald [42] erwähnt. In dieser wurden Abschätzungen für den Verlauf der Produktionswahrscheinlichkeit als Funktion der Intensität im Schwinger-Regime gemacht. Der dieser Arbeit [42] zu Grunde liegende Lasertyp ist ein XFEL (siehe Kapitel 1), wie er beispielsweise am DESY geplant ist. Der betrachtete Intensitätsbereich für 10 keV Laserphotonen liegt zwischen  $a_0 \simeq 4$  und 40, was einer elektrischen Feldstärke von  $E \simeq 10^{17}$  V/m bis  $10^{18}$  V/m entspricht. Ringwald zeigt, dass bei einer Verringerung der Feldintensität um eine Größenordnung unterhalb der kritischen Feldstärke  $E_c$  (siehe Kapitel 1.1, Gl. (1.1)) die Produktionswahrscheinlichkeit um 18 Größenordnungen abfällt, aber nicht gleich Null ist. Dies verdeutlicht, dass der Schwinger-Effekt kein Schwelleneffekt ist und somit Vakuumpolarisation auch im subkritischen Bereich stattfinden kann, aber numerisch extrem unterdrückt ist. Ein qualitativ ähnliches Ergebnis ist in Abb. 5.11 zu erkennen. Man sieht, dass für  $\sqrt{s} < 2m$  die Produktionswahrscheinlichkeit nicht gleich Null ist und somit kein

Schwellenprozess vorliegt. Ebenso ist die Tendenz erkennbar, dass die Produktionswahrscheinlichkeit bei sehr kleinen  $\sqrt{s}$  und kleiner werdenden Werten von  $a_0$  rapide abfällt. Es ist klar, dass bei sehr kleinen  $\sqrt{s}$  sehr viele Photonen aus dem Laserfeld benötigt werden, um ein Paar zu erzeugen. Daraus folgt, dass man große Werte von  $a_0$  benötigt, damit Multiphotoneneffekte hinreichend wahrscheinlich sind. Für genau diesen Fall hat Ritus [39] eine Abschätzung der Produktionsrate angegeben:

$$\dot{W} = \frac{3}{64} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{e^2 m^2}{\pi k'_0} \Upsilon \exp \left[ -\frac{8}{3\Upsilon} \left( 1 - \frac{2}{15a_0^2} \right) \right], \quad (5.20)$$

die für  $a_0 \gg 1$  und  $\Upsilon \lesssim 1$  gültig ist. Dabei ist  $\Upsilon$  durch den Ausdruck

$$\Upsilon = a_0 \frac{k \cdot k'}{m^2} = a_0 \frac{s}{4m^2} \quad (5.21)$$

gegeben. Dieser Parameter gibt das Ausmaß der nicht-linearen Quanteneffekte des Paarerzeugungsprozesses an [19, 39]. Aus (5.21) folgt, dass für  $a_0 \gg 1$  und  $\Upsilon \lesssim 1$  die Energie  $\sqrt{s}$  sehr klein sein muss, was genau dem betrachteten quasistatischen Regime entspricht. In diesem Limes hat der nicht-lineare Breit-Wheeler Prozess genau die gleiche funktionale Abhängigkeit vom elektrischen Feld wie der Schwinger-Prozess, für den die Produktionswahrscheinlichkeit  $\dot{W}_S \propto e^{-E_c/E}$  ist [7].

Eine weiterführende, interessante Frage ist, in wie weit der hier behandelte Paarerzeugungsprozess in gepulsten Laserfeldern ein Konkurrenzprozess zum Schwinger-Effekt darstellt, wenn man zu sehr hohen Feldintensitäten und sehr kleinen Energien der Probenphotonen übergeht. Zur Zeit ist eine Diskussion im Gange, ob das kritische Feld der QED überhaupt erreicht werden kann [43, 44, 45]. Die Argumentation der Autoren [43, 44, 45] bezieht sich darauf, dass bei Feldintensitäten in der Größenordnung der kritischen Intensität (siehe (1.2)) ein erzeugtes Elektron-Positron Paar eine lawinenartige QED-Kaskade verursacht und damit das Feld sofort wieder abschwächt. Dieses Problem kann aber aus numerischen Gründen in dieser Arbeit nicht weiter behandelt werden und verbleibt als Fragestellung für zukünftige Arbeiten.

Abschließend wird der Zusammenhang zwischen den Intensitätsparameter  $a_0$  und der zur Verfügung stehenden Energie  $\sqrt{s}$  untersucht werden. Dafür wird ein Bezugsgrenzwert,  $W_{tot}^{fid}$  an der Stelle  $W_{tot}(\sqrt{s}, a_0) = 10^{-10}$ , definiert. In Abb. 5.12 ist die  $\sqrt{s}$  in Abhängigkeit von  $a_0$  bei einem Wert von  $W_{tot}(\sqrt{s}, a_0) = W_{tot}^{fid}$  dargestellt. Die Kurve sinkt rapide für größer werdendes  $a_0$ . Dies bedeutet, dass für große Werte von  $a_0$  ( $a_0 \gg 1$ ) auch für  $\sqrt{s} < 2m$  eine signifikante Wahrscheinlichkeit existiert, Paare zu erzeugen.

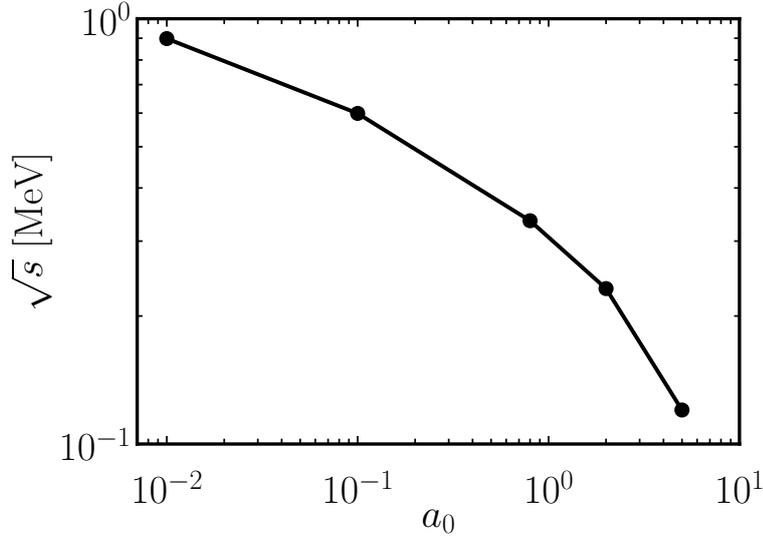


Abb. 5.12: Abhängigkeit der Schwerpunktenenergie  $\sqrt{s}$  von  $a_0$  für ein Bezugsgrenzwert  $W_{tot}^{fid}$ , definiert als  $W_{tot}(\sqrt{s}, a_0) = W_{tot}^{fid}$ , an der Stelle  $W_{tot}(\sqrt{s}, a_0) = 10^{-10}$ .

### 5.3.4 Die Abhängigkeit von der Pulslänge

Es verbleibt die Untersuchung der Abhängigkeit der Produktionswahrscheinlichkeit von der Pulslänge  $\tau$ . Dafür ist in Abb. 5.13 die Produktionswahrscheinlichkeit als Funktion von  $\tau$  für  $\sqrt{s} = 1.6$  MeV und verschiedene Werte von  $a_0$  dargestellt. Für große Werte von  $\tau$  steigt die Produktionswahrscheinlichkeit kontinuierlich an; es gilt  $W \propto \tau$ . Es ist zu erkennen, dass mit größer werdender Intensität des Feldes der Anstieg der Kurve bei kleinen Werten von  $\tau$  immer steiler wird. Ein Grund dafür ist, dass bei so kurzen Pulsen nur noch wenige Laseroszillationen stattfinden. Das führt dazu, dass die Peakintensität des Pulses nur von sehr kleinen Bereichen der Laseroszillation erreicht wird. Zusätzlich kommt hinzu, dass die Produktionswahrscheinlichkeit für kleine Werte von  $\tau$  auch für zirkular polarisierte Wellen vom Azimutwinkel  $\phi_{pos}$  abhängt (siehe Abschnitt 5.2). Der Fehler, der bei der Vernachlässigung dieser Abhängigkeit gemacht wurde, ist in der Abb. 5.13 angegeben. Dieser wurde aus den Ergebnissen des Abschnittes 5.2 abgeschätzt. Es zeigt sich, dass der Bereich des linearen Zusammenhangs  $W \propto \tau$  mit größer werdenden Werten von  $a_0$  schon für wesentlich längere Pulse verlassen wird. Während bei  $a_0 = 0.01$  noch bei  $\tau = 3$  lineares Verhalten vorliegt, zeigen sich für  $a_0 = 3$  schon bei  $\tau = 10$  erste Abweichungen.

Bei Laserpulsen, die nur eine einzige Oszillation enthalten, gibt es außerdem noch eine Abhängigkeit von der „carrier envelope phase“  $\phi_{CE}$ , das heißt, der Phasenbeziehung

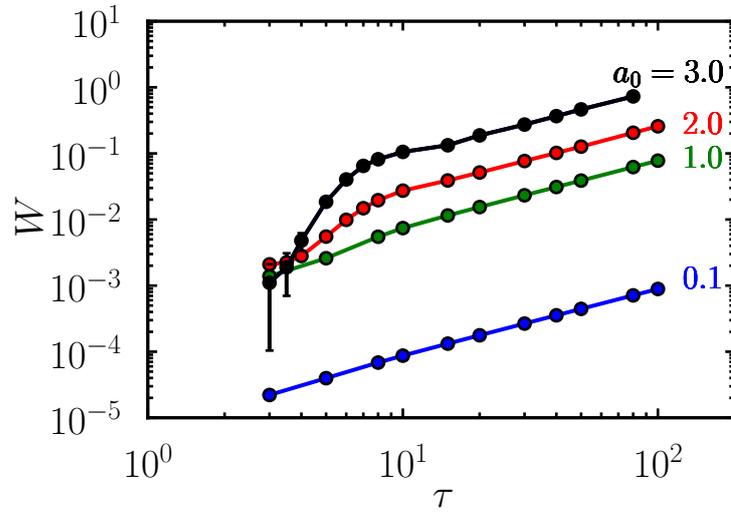


Abb. 5.13: Abhängigkeit der Produktionswahrscheinlichkeit von der Pulslänge  $\tau$  für  $\sqrt{s} = 1.6$  MeV und verschiedene Werte von  $a_0$ .

zwischen Trägerwelle und Einhüllender, die zum Beispiel gegeben ist durch

$$A^\mu(\phi) \propto g(\phi) \cos(\phi + \phi_{CE}), \quad (5.22)$$

aber in dieser Arbeit nicht untersucht wurde.



## 6 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde die Erzeugung eines Elektron-Positron Paares mittels Wechselwirkung zwischen einem hochenergetischen Photon und einer intensiven, gepulsten ebenen Laserwelle untersucht. In Zuge dessen ist eine einhüllende Funktion definiert worden, mit welcher das Vektorpotential des elektromagnetischen Feldes der Laserwelle modelliert wurde. Für die Auswertung des Streumatrixelementes  $S_{fi}$  wurde ein semiklassischer Ansatz gewählt, indem das Laserfeld als „klassisches“ Hintergrundfeld exakt beschrieben werden konnte. Somit war es möglich, den Volkov-Zustand einzuführen, welcher ein Fermion mit Spin  $1/2$  im Furry-Bild beschreibt. Das Streumatrixelement  $S_{fi}$  wurde analysiert und numerisch ausgewertet. Es wurden differentielle sowie totale Produktionswahrscheinlichkeiten berechnet und mit dem bekannten Grenzfall der unendlich ausgedehnten Laserwelle verglichen, welcher ebenso in der Arbeit dargestellt wurde.

Die differentielle Produktionswahrscheinlichkeit wies mit zunehmender Feldintensität ausgeprägte Substrukturen im Spektrum auf und unterschied sich deutlich von der Wahrscheinlichkeit der monochromatischen Wellen. Die Substrukturen konnten auf die Verteilung der Intensität innerhalb der Laserwelle, welche durch die Einhüllende erzeugt wurde, zurückgeführt werden. Es wurde gezeigt, dass der für die monochromatische Welle definierte Quasiimpuls und die damit verbundene effektive Masse für die gepulste Welle ihre Bedeutung verlieren.

Des Weiteren ist die totale Produktionswahrscheinlichkeit als Funktion der drei wichtigsten Parameter, Energie  $\sqrt{s}$ , Intensitätsparameter  $a_0$  und Pulslänge  $\tau$ , für ausgewählte Bereiche des Parameterraums analysiert worden. Es wurde gezeigt, dass die maßgeblichen Veränderungen der Physik durch die Verteilung der Intensität der Photonen im Laserfeld verursacht wird. Verglichen mit der monochromatischen Welle nimmt die totale Produktionswahrscheinlichkeit als Funktion von  $\sqrt{s}$  für gepulste Felder oberhalb der linearen Produktionsschwelle höhere Werte an. Unterhalb der Schwelle ist diese jedoch stärker unterdrückt. Für die Abhängigkeit vom Intensitätsparameter  $a_0$  konnten für die gewählten Parameter keine signifikanten Unterschiede zwischen monochromatischer und gepulster Welle festgestellt werden. Es konnte bestätigt werden, dass sich für steigende Pulslängen  $\tau$  die Produktionswahrscheinlichkeit

den Resultaten der unendlich ausgedehnten Welle annähert.

Zusätzlich zu den in dieser Arbeit durchgeführten Analysen kann in zukünftigen Untersuchungen der Verschränktheitsgrad des ausgehenden Elektrons und Positrons betrachtet werden. Hierfür müsste die Spinabhängigkeit des Streumatrixelementes analysiert werden, was mit dem hier verwendeten Quellcode durch geeignete Erweiterungen möglich wäre.

Auch der Trident-Prozess [7, 8] könnte in zukünftigen Arbeiten analysiert werden. Damit würde auch die Erzeugung des hochenergetischen Probephotons durch nicht-lineare Compton-Streuung untersucht werden. Erste Ansätze in der Literatur sind [12, 46]. Für neue Experimente sind aber detaillierte numerische Analysen notwendig.

In weitergehenden Untersuchungen sollten die Methoden der numerischen Auswertung des Streumatrixelementes verbessert werden, sodass ein größerer Parameterbereich betrachtet werden kann. Ein besonders interessanter Bereich wäre das quasistatische Regime und die damit verbundene Frage, ob der Schwinger-Effekt beobachtet werden kann oder ob lawinenartige QED-Kaskaden ein Erreichen der kritischen Feldstärke verhindern.

# A Anhang

## A.1 Notation und Konventionen

Hier werden einige Notationen und Konventionen deklariert, welche in der vorliegenden Arbeit benutzt werden. Alle Berechnungen wurden in natürlichen Einheiten mit  $c = \hbar = 1$  vollzogen. Die Feinstrukturkonstante ist durch  $\alpha = e^2/4\pi$  gegeben. Für einen beliebigen Punkt in der Raumzeit wird die kontravariante Vierervektorkonvention

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \mathbf{x}) = (t, x, y, z), \quad (\text{A.1})$$

mit den räumlichen Komponenten  $\mathbf{x}$  verwendet. Das Skalarprodukt wird durch einen Punkt

$$x \cdot p = x^\mu p_\mu = x^0 p^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} \quad (\text{A.2})$$

gekennzeichnet. Der Metrische Tensor  $g_{\mu\nu}$  ist in kartesischen Koordinaten gegeben durch

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Es wird die Konvention

$$\not{p} = \gamma_\mu p^\mu \quad (\text{A.4})$$

verwendet mit den Dirac-Matrizen  $\gamma^\mu$ . Es ergibt sich der Antikommutator  $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu}$ .

## A.2 Der Volkov-Zustand des Positrons

Der Volkov-Zustand des Positrons (2.17) ist im Wesentlichen die Lösung zur Dirac-Gleichung (2.14) mit negativer Energie [47]. Diese erhält man, wenn in (2.11) von  $p \rightarrow -p = p'$  übergegangen wird. Dass dieser Übergang korrekt ist, kann unter der Voraussetzung, dass der Dirac-Spinor  $v(p', \mathfrak{s})$  die Bedingung

$$0 = (\not{p}' + m) v(p', \mathfrak{s})$$

erfüllt, geprüft werden, indem man die Dirac-Gleichung (2.14) löst. Es ergibt sich

$$(i\not{\partial} - e\not{A}(\phi) - m) \psi_+ = \left[ \left( -\not{p}' + \not{\partial} \int_0^\phi \left( e \frac{A \cdot p'}{k \cdot p'} + \frac{e^2 A^2}{2k \cdot p'} \right) d\phi' \right) \left( 1 - \frac{e\not{k}\not{A}}{2k \cdot p'} \right) - \frac{e\not{\partial}\not{k}\not{A}}{2k \cdot p'} + (e\not{A} - m) \left( 1 - \frac{e\not{k}\not{A}}{2k \cdot p'} \right) \right] e^{iS_{-p'}} \frac{v(p', \mathfrak{s})}{\sqrt{2p'_0}}. \quad (\text{A.5})$$

Unter der Verwendung der Relation  $d\phi' = k dx$  ergibt sich für die Integration über  $\phi'$

$$\not{\partial} \int_0^\phi \left( e \frac{A \cdot p'}{k \cdot p'} + \frac{e^2 A^2}{2k \cdot p'} \right) d\phi' = \not{k} \left( e \frac{A \cdot p'}{k \cdot p'} + \frac{e^2 A^2}{2k \cdot p'} \right). \quad (\text{A.6})$$

Des Weiteren kann gezeigt werden, dass

$$\begin{aligned} \not{\partial}\not{k}\not{A} &= -\not{k}\not{\partial}\not{A} + 2(k \cdot \partial) \not{A} \\ &= -\not{k}\not{k}\not{A}' + 2(k \cdot k) \not{A}' \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

mit  $A' = \partial A / \partial \phi$  gilt, womit der dritte Term in (A.5) zu Null wird. Weitere Umformungen der Gleichung führen auf

$$\begin{aligned}
[\gamma (i\partial - eA) - m] \psi_+ &= \left[ -\not{p} + e \frac{A \cdot \not{p}'}{k \cdot p'} \not{k} + \frac{e^2 A^2}{2k \cdot p'} \not{k} - e \frac{\not{p} A}{2k \cdot p'} \not{k} \right. \\
&\quad \left. - m \left( 1 - e \frac{\not{k} A}{2k \cdot p'} \right) - eA - \frac{e^2 A^2}{2k \cdot p'} \not{k} \right] e^{iS_{-p'}} \frac{v(p', \mathfrak{s})}{\sqrt{2p'_0}} \\
&= \left[ -\not{p} + e \frac{A \not{p}}{2k \cdot p'} \not{k} - m \left( 1 - e \frac{\not{k} A}{2k \cdot p'} \right) - eA \right] e^{iS_{-p'}} \frac{v(p', \mathfrak{s})}{\sqrt{2p'_0}} \\
&= - \left( 1 - e \frac{\not{k} A}{2k \cdot p'} \right) (\not{p} + m) e^{iS_{-p'}} \frac{v(p', \mathfrak{s})}{\sqrt{2p'_0}}. \tag{A.8}
\end{aligned}$$

Mit der Bedingung  $(\not{p} + m) v(p) = 0$  folgt die gesuchte Gleichung:

$$[\gamma (i\partial - eA) - m] \psi_+ = 0. \tag{A.9}$$

Um sicherzustellen, dass die Lösung negativer Energie auch dem Zustand des Positrons entspricht, muss gezeigt werden, dass dieser Zustand eine Lösung positiver Energie der ladungskonjugierten Dirac-Gleichung  $(i\cancel{\partial} + e\cancel{A}(\phi) - m) C\psi_+(x) = 0$  ist. Hierbei ist  $C$  der Operator für die Ladungskonjugation der Wellenfunktion. Es ergibt sich unter Verwendung der Dirac-Matrizen  $C\psi_+ = i\gamma^2\psi_+^*$  [9]. Beachtet man die Relationen  $\gamma^2\cancel{k}^*A^* = \cancel{k}A\gamma^2$  und  $Cv(p', \mathfrak{s}) = u(p', \mathfrak{s})$  erhält man den Zustand

$$C\psi_+ = \left( 1 - \frac{e\cancel{k}A}{2k \cdot p} \right) \exp \left( -ip \cdot x - i \int_0^\phi \left( -e \frac{A \cdot p}{k \cdot p} - \frac{e^2 A^2}{2k \cdot p} \right) d\phi' \right) \frac{u(p, \mathfrak{s})}{\sqrt{2p_0}},$$

was genau (2.11) mit den Übergang  $e \rightarrow -e$  entspricht und somit Lösung der ladungskonjugierten Dirac-Gleichung ist.

### A.3 Lichtkegelkoordinaten

Die Lichtkegelkoordinaten stellen eine Projektion auf einen lichtartigen Vierervektor dar. Unter der Verwendung der speziellen Kinematik in dieser Arbeit ist dies der Viererimpuls der Laserphotonen  $k_\mu = \omega(1, 0, 0, -1)$ . Wie im Abschnitt (3.1) schon erwähnt, ergibt sich folgende Vorschrift für die Transformation eines Vierervektors  $x$  vom kartesischen Koordinatensystem  $(x^0, x^1, x^2, x^4)$  in das Lichtkegelsystem  $(x_+, x_-, \mathbf{x}_\perp)$ :

$$x_\pm := x^0 \pm x^3, \tag{A.10}$$

$$\mathbf{x}_\perp := (x^1, x^2). \tag{A.11}$$

Das Skalarprodukt ergibt sich dementsprechend aus

$$x^\mu y_\mu = \frac{1}{2} (x_+ y_- + x_- y_+) - \mathbf{x}_\perp \cdot \mathbf{y}_\perp. \quad (\text{A.12})$$

Die Minkowski-Metrik  $g_{\mu\nu}$  in Lichtkegelkoordinaten ist gegeben durch den Ausdruck

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Daraus folgt für das infinitesimale Raumelement

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} d^4 x &= \frac{1}{2} dx_+ dx_- d^2 \mathbf{x}_\perp \\ &= \frac{1}{k_-} d\phi dx_- d^2 \mathbf{x}_\perp. \end{aligned}$$

Für die Komponenten der Viererimpulse  $k_\mu$  und  $k'_\mu$  gilt

$$k_- = 2\omega, \quad k_+ = 0, \quad k_\perp = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$k'_- = 0, \quad k'_+ = 2\omega', \quad k'_\perp = 0. \quad (\text{A.15})$$

Das auslaufende Positron hat einen Viererimpuls  $p' = p'(\gamma, \theta_{pos}, \phi_{pos})$ , und es ergeben sich mit dem relativistischen Faktor  $\gamma = p'_0/m$  und  $\beta = \sqrt{\gamma^2 - 1}/\gamma$  die Komponenten

$$p'_- = p'_0 (1 - \beta \cos\theta_{pos}), \quad (\text{A.16})$$

$$p'_+ = p'_0 (1 + \beta \cos\theta_{pos}), \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbf{p}'_\perp = p'_0 \beta \sin\theta_{pos} (\cos\phi_{pos}, \sin\phi_{pos}). \quad (\text{A.18})$$

Daraus kann die Dispersionsrelation des freien Teilchens abgeleitet werden

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{1}{2} (p_+ p_- + p_- p_+) - \mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{p}_\perp \\ &= p_+ p_- - \mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{p}_\perp, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\Rightarrow p_- = \frac{m^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{p_+}. \quad (\text{A.20})$$

Der Viererimpuls  $p$  des auslaufenden Elektrons kann über die Energie-Impulsbeziehung und die Dispersionsrelation (4.41) durch  $p'$  und  $k'$  ausgedrückt werden. Es ergeben sich die Abhängigkeiten

$$p_- = \frac{m^2 + \mathbf{p}'_{\perp}{}^2}{k'_+ - p'_+}, \quad (\text{A.21})$$

$$p_+ = k'_+ - p'_+, \quad (\text{A.22})$$

$$\mathbf{p}_{\perp} = -\mathbf{p}'_{\perp}. \quad (\text{A.23})$$

## A.4 Rapidität

Die in Abschnitt 4.4 eingeführte Rapidität ist ein dimensionsloses Maß der Geschwindigkeit. In kartesischen Koordinaten ergibt sich eine alternative Definition zu (4.60) durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} y_z &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{m\gamma + p'_3}{m\gamma - p'_3} \right) \\ &= \operatorname{arctanh} \left( \frac{p'_3}{m\gamma} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Daraus folgt für die dritte Komponente des Impulses  $\mathbf{p}'$  folgende Darstellung

$$p'_3 = m_{\perp} \sinh y_z, \quad (\text{A.25})$$

unter der Beachtung der Umformung

$$\begin{aligned} (m\gamma)^2 &= m^2 + p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2 \\ &= m^2 + p_1'^2 + p_2'^2 + m_{\perp}^2 \sinh^2 y_z \\ &= m_{\perp}^2 \cosh^2 y_z. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Damit können die Komponenten des Viererimpulses  $p'$  bestimmt werden als

$$p'_- = m_{\perp} (\cosh y_z - \sinh y_z), \quad (\text{A.27})$$

$$p'_+ = m_{\perp} (\cosh y_z + \sinh y_z), \quad (\text{A.28})$$

$$\mathbf{p}'_{\perp} = |\mathbf{p}'_{\perp}| (\cos \phi, \sin \phi). \quad (\text{A.29})$$

Für den monochromatischen Grenzfall kann der Zusammenhang zwischen  $p'_{\perp} = |\mathbf{p}'_{\perp}|$  und  $y_z$  aus (3.1) berechnet als

$$q'^2 = (lk + k' - q')^2, \quad (\text{A.30})$$

$$0 = lk \cdot k' - lk \cdot q' - k' \cdot q'. \quad (\text{A.31})$$

Setzt man den Quasiimpuls (2.22) ein, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= lk \cdot k' - lk \cdot p' - k' \cdot p' - \frac{m^2 a_0^2}{4k \cdot p'} k \cdot k' \\ &= l(k \cdot k')(k \cdot p') - l(k \cdot p')^2 - (k \cdot p')(k \cdot p') - \frac{m^2 a_0^2}{4} k \cdot k'. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Im Schwerpunktsystem ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= l(2\omega^2)(m_\perp \omega e^{yz}) - l(m_\perp \omega e^{yz})^2 \\ &\quad - (m_\perp \omega e^{-yz})(m_\perp \omega e^{yz}) - \frac{m^2 a_0^2}{4} 2\omega^2 \\ &= 2lm_\perp \omega e^{yz} - lm_\perp^2 e^{2yz} - m_\perp^2 - \frac{m^2 a_0^2}{2} \\ &= m_\perp^2 - \frac{2l\omega_{cms} e^{yz}}{le^{2yz} + 1} m_\perp + \frac{m^2 a_0^2}{2(le^{2yz} + 1)}. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Daraus kann die gesuchte Relation abgeleitet werden,

$$m_\perp = \frac{l\omega_{cms} e^{yz}}{le^{2yz} + 1} + \sqrt{\left(\frac{l\omega_{cms} e^{yz}}{le^{2yz} + 1}\right)^2 - \frac{m^2 a_0^2}{2(le^{2yz} + 1)}}, \quad (\text{A.34})$$

$$p_\perp = \sqrt{\left(\frac{l\omega_{cms} e^{yz}}{le^{2yz} + 1} + \sqrt{\left(\frac{l\omega_{cms} e^{yz}}{le^{2yz} + 1}\right)^2 - \frac{m^2 a_0^2}{2(le^{2yz} + 1)}}\right)^2 - m^2}. \quad (\text{A.35})$$

Es kann jetzt die Transformation des infinitesimalen Raumelements  $d\gamma d\theta_{pos} d\phi_{pos} \rightarrow dy_z d\mathbf{p}'_\perp d\phi_{pos}$  berechnet werden. Es ergibt sich für den Lorentz-Faktor

$$\gamma = \frac{m_\perp}{m} \text{cosh} y_z. \quad (\text{A.36})$$

Der Winkel  $\theta_{pos}$  kann aus

$$p_\perp'^2 = p_1'^2 + p_2'^2, \quad (\text{A.37})$$

$$p_\perp' = m\gamma\beta \sin\theta_{pos}, \quad (\text{A.38})$$

$$\theta_{pos} = \arcsin\left(\frac{p_\perp'}{m\gamma\beta}\right) \quad (\text{A.39})$$

mit  $p'_\perp = |\mathbf{p}'_\perp|$  berechnet werden. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\cos\theta_{pos} &= \cos \left[ \arcsin \left( \frac{p_\perp}{\sqrt{m^2 \sinh^2 y_z + p_\perp^2 \cosh^2 y_z}} \right) \right] \\
&= \sqrt{1 - \frac{p_\perp'^2}{m_\perp^2 \cosh^2 y_z - m^2}} \\
&= \sqrt{\frac{m_\perp^2 \sinh^2 y_z}{m_\perp^2 \cosh^2 y_z - m^2}}. \tag{A.40}
\end{aligned}$$

Um die Jacobi-Determinante zu berechnen, muss dieser Ausdruck nach  $y_z$  abgeleitet werden. Er kann in die Form

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \cos\theta_{pos}}{\partial y_z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{m_\perp^2 \sinh^2 y_z}{m_\perp^2 \cosh^2 y_z - m^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{2p_\perp'^2 m_\perp^2 \sinh y_z \cosh y_z}{(m_\perp^2 \cosh^2 y_z - m^2)^2} \right) \\
&= \frac{p_\perp'^2 m_\perp^2 \sinh y_z \cosh y_z}{d(y_z, p'_\perp)} \tag{A.41}
\end{aligned}$$

mit  $d(y_z, p'_\perp) = \sqrt{\frac{m_\perp^2 \sinh^2 y_z}{m_\perp^2 \cosh^2 y_z - m^2}} (m_\perp^2 \cosh^2 y_z - m^2)^2$  gebracht werden. Leitet man (A.40) nach  $p'_\perp$  ab ergibt sich der Ausdruck

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \cos\theta_{pos}}{\partial p'_\perp} &= \frac{1}{2} \left( \frac{m_\perp^2 \sinh^2 y_z}{m_\perp^2 \cosh^2 y_z - m^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{-2p'_\perp (m_\perp^2 \cosh^2 y_z - m^2) + 2p_\perp'^3 \cosh^2 y_z}{(m_\perp^2 \cosh^2 y_z - m^2)^2} \right] \\
&= \frac{-p'_\perp m^2 \sinh^2 y_z}{d(y_z, p'_\perp)}. \tag{A.42}
\end{aligned}$$

Damit sind die Voraussetzungen geschaffen, die benötigte Jacobi-Determinante  $\det J$  zu bestimmen. Sie berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
\det J = \det \frac{\partial (d\gamma, d\cos\theta_{pos})}{\partial (dy_z, p'_\perp)} &= \det \begin{pmatrix} \frac{m_\perp}{m} \sinh y_z & \frac{p'_\perp}{m m_\perp} \cosh y_z \\ \frac{p'^2_\perp m^2_\perp}{d(y_z, p'_\perp)} \sinh y_z \cosh y_z & \frac{-p'_\perp m^2}{d(y_z, p'_\perp)} \sinh^2 y_z \end{pmatrix} \\
&= -\frac{p'_\perp m^2 m_\perp}{m d(y_z, p'_\perp)} \sinh^3 y_z - \frac{p'^3_\perp m_\perp}{m d(y_z, p'_\perp)} \sinh y_z \cosh^2 y_z \\
&= -\frac{p'_\perp m_\perp \sinh y_z (m^2_\perp \cosh^2 y_z - m^2)}{m d(y_z, p'_\perp)} \\
&= -\frac{p'_\perp m_\perp \sinh y_z}{m \sqrt{\frac{m^2_\perp \sinh^2 y_z}{m^2_\perp \cosh^2 y_z - m^2} (m^2_\perp \cosh^2 y_z - m^2)}} \\
&= -\frac{p'_\perp}{m \sqrt{m^2_\perp \cosh^2 y_z - m^2}} \\
&= -\frac{p'_\perp}{m \sqrt{m^2_\perp \sinh^2 y_z + p'^2_\perp}} \\
&= -\frac{p'_\perp}{m |\mathbf{p}'|}. \tag{A.43}
\end{aligned}$$

Daran anschließend kann das infinitesimale Raumelement bestimmt werden. Unter der Beachtung der Relationen  $d^3 p' / p'_0 = -m |\mathbf{p}'| d\gamma d\cos\theta_{pos} d\phi_{pos}$  folgt

$$\begin{aligned}
-m |\mathbf{p}'| d\gamma d\phi d\cos\theta &= -m p' \det J dy_z dp'_\perp d\phi_{pos} \\
&= p'_\perp dy_z dp'_\perp d\phi_{pos}. \tag{A.44}
\end{aligned}$$

## A.5 Eichinvarianz des Streumatrixelements

Um die Eichinvarianz,  $\epsilon' \rightarrow \epsilon' + \lambda k'$ , zu überprüfen, muss getestet werden, ob das Streumatrixelement (4.8) die Ward-Identität erfüllt, welche aus der Viererstromerhaltung  $\partial_\mu j^\mu = 0$  folgt. Dazu kann man alle  $\epsilon'$  durch  $k'$  ersetzen, woraus folgen muss, dass das so modifizierte Streumatrixelement Null wird [40].

Benötigte Relationen sind  $(\not{p} - m) u_p = 0$ ,  $(\not{p}' + m) v_{p'} = 0$  und  $\bar{u}_p (\not{p} - m) = 0$

Durch die Ersetzung  $\epsilon' \rightarrow k'$  ergeben sich folgende Ausdrücke für die Dirac-Struckturen (siehe 4.1)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_0^0 &= \bar{u}_p \not{k}' k v_{p'} \\
 &= \bar{u}_p (\not{p} + \not{p}' - l \not{k}) v_{p'} \\
 &= -l \bar{u}_p \not{k} v_{p'}, \tag{A.45}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_{\pm 1}^1 &= \bar{u}_p (d_p \not{\epsilon}_{\mp} \not{k} \not{k}' - d_{p'} \not{k}' \not{k} \not{\epsilon}_{\mp}) v_{p'} \\
 &= \bar{u}_p (d_p \not{\epsilon}_{\mp} \not{k} (\not{p} + \not{p}') - d_{p'} (\not{p} + \not{p}') \not{k} \not{\epsilon}_{\mp}) v_{p'} \\
 &= \bar{u}_p (d_p \not{\epsilon}_{\mp} \not{k} \not{p} + d_p \not{\epsilon}_{\mp} \not{k} \not{p}' - d_{p'} \not{p} \not{k} \not{\epsilon}_{\mp} - d_{p'} \not{p}' \not{k} \not{\epsilon}_{\mp}) v_{p'} \\
 &= \bar{u}_p \left[ d_p \not{\epsilon}_{\mp} (2p \cdot k - \not{p} \not{k}) - m d_p \not{\epsilon}_{\mp} \not{k} - m d_{p'} \not{k} \not{\epsilon}_{\mp} - d_{p'} (2p' \cdot k - \not{k} \not{p}') \not{\epsilon}_{\mp} \right] v_{p'} \\
 &= \bar{u}_p \left[ d_p 2p \cdot k \not{\epsilon}_{\mp} - d_p (2p \cdot \epsilon_{\mp} - \not{p} \not{\epsilon}_{\mp}) \not{k} - m d_p \not{\epsilon}_{\mp} \not{k} - \right. \\
 &\quad \left. - m d_{p'} \not{k} \not{\epsilon}_{\mp} - d_{p'} 2p' \cdot k \not{\epsilon}_{\mp} + d_{p'} \not{k} (2p' \cdot \epsilon_{\mp} - \not{\epsilon}_{\mp} \not{p}') \right] v_{p'} \\
 &= \bar{u}_p \left[ d_p 2p \cdot k \not{\epsilon}_{\mp} + m d_p \not{\epsilon}_{\mp} \not{k} - 2p \cdot \epsilon_{\mp} d_p \not{k} - m d_p \not{\epsilon}_{\mp} \not{k} - \right. \\
 &\quad \left. - 2p' \cdot k d_{p'} \not{\epsilon}_{\mp} - m d_{p'} \not{k} \not{\epsilon}_{\mp} + d_{p'} 2p' \cdot \epsilon_{\mp} \not{k} + d_{p'} m \not{k} \not{\epsilon}_{\mp} \right] v_{p'} \\
 &= \bar{u}_p \left[ 2 (p' \cdot \epsilon_{\mp} d_{p'} - p \cdot \epsilon_{\mp} d_p) \not{k} + 2 (k \cdot p d_p - p' \cdot k d_{p'}) \not{\epsilon}_{\mp} \right] v_{p'} \\
 &= 2 (p' \cdot \epsilon_{\mp} d_{p'} - p \cdot \epsilon_{\mp} d_p) \bar{u}_p \not{k} v_{p'}, \tag{A.46}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{J}_0^2 = -4 (k \cdot k') d_p d_{p'} \bar{u}_p \not{k} v_{p'}, \tag{A.47}$$

$$\mathcal{J}_{\pm 2}^2 = -2 (k \cdot k') (\cos^2 \xi - \sin^2 \xi) d_{p'} d_p \bar{u}_p \not{k} v_{p'}. \tag{A.48}$$

Der erste Term in (4.23) proportional zu  $\mathcal{A}_0^0$  kann demzufolge umgeformt werden zu

$$\begin{aligned}
 l \mathcal{A}_0^0 \bar{u}_p \not{k} v_{p'} &= 2 \left[ (p' \cdot \epsilon_- d_{p'} - p \cdot \epsilon_- d_p) \mathcal{A}_1^1 + (p' \cdot \epsilon_+ d_{p'} - p \cdot \epsilon_+ d_p) \mathcal{A}_{-1}^1 + 2 (k \cdot k') d_{p'} d_p \mathcal{A}_0^2 \right. \\
 &\quad \left. + (k \cdot k') (\cos^2 \xi - \sin^2 \xi) d_{p'} d_p (\mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_{-2}^2) \right] \bar{u}_p \not{k} v_{p'} \\
 &= 2 \left[ (p' \cdot \epsilon_- d_{p'} - p \cdot \epsilon_- d_p) \mathcal{A}_1^1 + (p' \cdot \epsilon_+ d_{p'} - p \cdot \epsilon_+ d_p) \mathcal{A}_{-1}^1 \right. \\
 &\quad \left. - (k \cdot k') d_{p'} d_p \left[ 2 \mathcal{A}_0^2 + (\cos^2 \xi - \sin^2 \xi) (\mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_{-2}^2) \right] \right] \bar{u}_p \not{k} v_{p'}. \tag{A.49}
 \end{aligned}$$

Es muss abschließend gezeigt werden, dass die Definition der  $\mathcal{A}_0^0$ -Funktion (4.31) der hier gefundenen Definition (A.49) entspricht. Aus (4.31) folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0^0 &= -\frac{2\omega}{lk_-} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{ma_0}{2k \cdot p'} g(\phi) (p' \cdot \epsilon_- e^{i\phi} + p' \cdot \epsilon_+ e^{-i\phi}) \right. \\
&+ \frac{m^2 a_0^2}{8} g^2(\phi) \left[ (\cos^2 \xi - \sin^2 \xi) (e^{i2\phi} + e^{-i2\phi}) + 2 \right] \left( \frac{1}{k \cdot p'} + \frac{1}{k \cdot p} \right) \\
&+ \left. \frac{ma_0}{2k \cdot p} g(\phi) (p \cdot \epsilon_- e^{i\phi} + p \cdot \epsilon_+ e^{-i\phi}) \right\} e^{iH_+(\phi)} d\phi \\
&= \frac{1}{l} \left\{ \left( \frac{ma_0}{2k \cdot p'} p' \cdot \epsilon_- - \frac{ma_0}{2k \cdot p} p \cdot \epsilon_- \right) \mathcal{A}_1^1 + \left( \frac{ma_0}{2k \cdot p'} p' \cdot \epsilon_+ - \frac{ma_0}{2k \cdot p} p \cdot \epsilon_+ \right) \mathcal{A}_{-1}^1 \right. \\
&- \left. \left( \frac{m^2 a_0^2}{8k \cdot p'} + \frac{m^2 a_0^2}{8k \cdot p} \right) \left[ 2\mathcal{A}_0^2 + (\cos^2 \xi - \sin^2 \xi) (\mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_{-2}^2) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{l} \left\{ (2d_{p'} p' \cdot \epsilon_- - 2d_p p \cdot \epsilon_-) \mathcal{A}_1^1 + (2d_{p'} p' \cdot \epsilon_+ - 2d_p p \cdot \epsilon_+) \mathcal{A}_{-1}^1 \right. \\
&- \left. 2(k \cdot p + k \cdot p') d_{p'} d_p \left[ 2\mathcal{A}_0^2 + (\cos^2 \xi - \sin^2 \xi) (\mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_{-2}^2) \right] \right\} \\
&= \frac{2}{l} \left\{ (d_{p'} p' \cdot \epsilon_- - d_p p \cdot \epsilon_-) \mathcal{A}_1^1 + (d_{p'} p' \cdot \epsilon_+ - d_p p \cdot \epsilon_+) \mathcal{A}_{-1}^1 \right. \\
&- \left. k \cdot k' d_{p'} d_p \left[ 2\mathcal{A}_0^2 + (\cos^2 \xi - \sin^2 \xi) (\mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_{-2}^2) \right] \right\}, \tag{A.50}
\end{aligned}$$

was dem gesuchten Ausdruck aus (A.49) entspricht. Somit ist gezeigt, dass das Streumatrixelement (4.22) die Eichinvarianz erfüllt.

# Abbildungsverzeichnis

2.1	(a): Die Einhüllende $g(\phi) = \cos^2(\frac{\pi}{2\tau}\phi)$ (blaue Kurve, $\tau = 8\pi$ ) und $g(\phi) = \exp(\phi^2/2\tau^2)$ (grüne Kurve, $\tau = 8$ ) in Abhängigkeit von $\phi$ . (b): Fourier-Transformierte von $g(\phi)$ , $g^{FT}(\Omega/\omega)$ , in Abhängigkeit von der dimensionslosen Frequenz $\Omega/\omega$ . . . . .	17
2.2	Schematische Darstellung des Volkov-Zustandes. Hier symbolisiert eine Doppellinie (links) das Elektron im Furry-Bild und die einzelnen Diagramme (rechts) dessen perturbative Entwicklung in Feynman-Diagramme. . . . .	19
3.1	Darstellung der Kinematik im Schwerpunktsystem (CMS) und im Laborsystem (Lab). . . . .	21
3.2	Paarerzeugung im Breit-Wheeler-Prozess . . . . .	22
3.3	Totaler Wirkungsquerschnitt $\sigma$ als Funktion der Gesamtenergie $\sqrt{s}$ für verschiedene Werte von $a_0$ . BW bezeichnet den linearen Breit-Wheeler-Prozess (3.10). Die Kurven für $a_0 = 0.8$ und 5 basieren auf dem nicht-linearen Breit-Wheeler-Prozess (3.8). . . . .	25
3.4	Totaler Wirkungsquerschnitt $\sigma$ (schwarze Kurve) als Funktion von dem Intensitätsparameter $a_0$ für $\sqrt{s} = 1.5$ MeV. Zusätzlich sind die Beiträge der ersten fünf Harmonischen abgebildet. . . . .	25
3.5	Totaler Wirkungsquerschnitt $\sigma$ (schwarze, gestrichelte Kurve) als Funktion von der Gesamtenergie $\sqrt{s}$ für $a_0 = 0.8$ . Zusätzlich sind die Beiträge der ersten fünf Harmonischen abgebildet. . . . .	26
4.1	Schematische perturbative Entwicklung des nicht-linearen Breit-Wheeler-Prozesses nach Potenzen von $a_0$ . . . . .	35
5.1	Differentieller Wirkungsquerschnitt für verschiedene Werte von $a_0$ (1.6: grün, 2: rot). Die schwarze Kurve stellt den winkeldifferentiellen Querschnitt $d\sigma/d\cos\theta_{pos} = \int dp'_0 \frac{d^2\sigma}{dp'_0 d\cos\theta_{pos}}$ nach Breit-Wheeler dar. Für $\sqrt{s} = 3$ MeV, $\tau = 50$ . . . . .	44

5.2	Linke Seite: Intensitätsverteilung des erzeugten Positrons in der $(y_z, p'_\perp)$ -Ebene für $\sqrt{s} = 1.5$ MeV, $\tau = 25$ und verschiedene Werte für $a_0$ ((a) $a_0 = 10^{-4}$ , (b) $a_0 = 2$ ). Die weißen Linien geben die Position der Peaks für eine monochromatische Laserwelle an. Rechte Seite: Schnitte durch die $(y_z, p'_\perp)$ -Ebene, die durch die schwarzen Linien in (a) und (c) gekennzeichnet sind. Senkrechte gestrichelte Linien mit dem Label $l$ geben die Positionen der Harmonischen in einer unendlich ausgedehnten Laserwelle an. Die Einhüllende ist $g(\phi) = \cos^2(\frac{\pi}{2\tau}\phi)$ . . . . .	46
5.3	Schnitte durch die $(y_z, p'_\perp)$ -Ebene mit Parametern wie für 5.2d aber mit unterschiedliche Hüllfunktionen $g(\phi)$ . (a): $g(\phi) = \exp(\phi^2/2\tau^2)$ mit $\tau = 8$ , (b): $g(\phi) = 1/\cosh(\phi/\tau)$ mit $\tau = 8$ . . . . .	47
5.4	Wie in Abb. 5.2, aber für verschiedene Werte von $\sqrt{s}$ ((a),(b): $\sqrt{s} = 2$ MeV; (c),(d): $\sqrt{s} = 1$ MeV; (e),(f): $\sqrt{s} = 0.5$ MeV) und $a_0 = 0.8$ . . .	48
5.5	Fourier-Transformierte $g^{FT}(\Omega/\omega)$ des Box-Pulses in Abhängigkeit der dimensionslosen Frequenz $\Omega/\omega$ . . . . .	50
5.6	Differentielle Produktionsrate als Funktion des transversalen Impulses des Positrons für $a_0 = 2\sqrt{2}$ , $p_+ = \omega' = 250$ GeV, $\sqrt{s} = 1$ und linearer Polarisation. Die schwarz gestrichelten Linien stellen die Resonanzen des monochromatischen Grenzfalles dar. Die roten Kreuze zeigen ausgewählte Punkte aus den Spektren in [17]. (a) $g(\phi) = \Theta(\tau + \phi)\Theta(\tau - \phi)$ mit $\tau = 4\pi$ ; (b) $g(\phi) = \cos^2(\frac{\pi}{2\tau}\phi)$ mit $\tau = 8\pi$ . . . . .	51
5.7	Darstellung des differentiellen Wirkungsquerschnitts $dW/d\phi_{pos}$ als Funktion vom Azimutwinkels $\phi_{pos}$ des Positrons für $a_0 = 2$ , $\sqrt{s} = 2.5$ MeV und lineare Polarisation $\xi = \pi/2$ in (a) und (c), zirkulare Polarisation $\xi = \pi/4$ in (b) und (d). In (a) und (b) $\tau = 3$ , in (c) und (d) $\tau = 30$ . . .	53
5.8	Schnitt durch das Vektorpotential $A_\mu$ in der $(x, y)$ -Ebene für zirkulare Polarisation, $\xi = \pi/4$ , und $\tau = 30$ (blaue Kurve) sowie $\tau = 3$ (rote Kurve). Die schwarz gestrichelte Kurve repräsentiert den Grenzfall eines unendlich ausgedehnten Potentials. . . . .	54
5.9	Totale Produktionswahrscheinlichkeit $W$ als Funktion von $\sqrt{s}$ in MeV für zirkulare Polarisation, $\tau = 25$ und der Einhüllenden $g(\phi) = \cos^2(\frac{\pi}{2\tau}\phi)$ . Die schwarze Kurve zeigt den monochromatischen Grenzfall, während die blaue Kurve mit Kreisen die Resultate für die gepulste Welle zeigt. (a) $a_0 = 10^{-5}$ und (b) $a_0 = 2$ . . . . .	56

---

5.10	Beitrag der ersten drei Harmonischen zur totalen Produktionswahrscheinlichkeit (schwarze Kurve) als Funktion von $\sqrt{s}$ für $a_0 = 0.8$ . Die Kurven ohne Symbole entsprechen den unendlichen, ebenen Wellen. Die Kurven mit Symbolen entsprechen den gepulsten ebenen Wellen mit $\tau = 25$ . . . . .	60
5.11	Produktionswahrscheinlichkeit als eine Funktion von $a_0$ für verschiedene Werte von $\sqrt{s}$ und $\tau = 50$ . Zusätzlich ist der monochromatische Grenzfall (gestrichelte Linien) dargestellt. . . . .	62
5.12	Abhängigkeit der Schwerpunktenenergie $\sqrt{s}$ von $a_0$ für ein Bezugsgrenzwert $W_{tot}^{fid}$ , definiert als $W_{tot}(\sqrt{s}, a_0) = W_{tot}^{fid}$ , an der Stelle $W_{tot}(\sqrt{s}, a_0) = 10^{-10}$ . . . . .	64
5.13	Abhängigkeit der Produktionswahrscheinlichkeit von der Pulslänge $\tau$ für $\sqrt{s} = 1.6$ MeV und verschiedene Werte von $a_0$ . . . . .	65



## Literaturverzeichnis

- [1] SCHWINGER, J.: On Gauge Invariance and Vacuum Polarization. In: *Phys. Rev.* 82 (1951), S. 664
- [2] SAUTER, F.: Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs. In: *Z. Phys.* 69 (1931), S. 742
- [3] BREIT, G. ; WHEELER, J. D.: Collision of Two Light Quanta. In: *Phys. Rev.* 46 (1934), S. 1087–1091. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.46.1087>. – DOI 10.1103/PhysRev.46.1087
- [4] MAIMAN, T. H.: Stimulated Optical Radiation in Ruby. In: *Nature* 187 (1960), S. 493–494. <http://dx.doi.org/doi:10.1038/187493a0>. – DOI doi:10.1038/187493a0
- [5] REISS, H. R.: Absorption of Light by Light. In: *J. Math. Phys.* 3 (1962), S. 9. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1703787>. – DOI 10.1063/1.1703787
- [6] NIKISHOV, A. I. ; RITUS, V. I.: Quantum Processes in the Field of a Plane Electromagnetic Wave and in a Constant Field. In: *Sov. Phys. JETP* 19 (1964), S. 529–54
- [7] BAMBER, C. u. a.: Studies of nonlinear QED in collisions of 46.6 GeV electrons with intense laser pulses. In: *Phys. Rev. D* 30 (1999), S. 092004
- [8] BURKE, D. L. u. a.: Positron Production in Multiphoton Light-by-Light Scattering. In: *Phys. Rev. Lett.* 79 (1997), S. 1626
- [9] LANDAU, L. D. ; LIFSHITZ, E. M.: *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band IV.* Akademie Verlag Berlin, 4. Edition, 1980
- [10] GREINER, W. ; REINHARDT, J.: *Quantum Electrodynamics.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009
- [11] HEINZL, T. ; ILBERTON, A.: A Lorentz and gauge invariant measure of laser intensity. In: *Opt. Commun.* 282 (2009), S. 1879
- [12] HU, H. ; MÜLLER, C. ; KEITEL, C. H.: Complete QED Theory of Multiphoton Trident Pair Production in Strong Laser Fields. In: *Phys. Rev. Lett.* 105 (2010), S. 080401

- [13] *Eurobeam XFEL*. <http://www.xfel.eu>
- [14] *Draco*. <http://www.hzdr.de/db/Cms?pNid=2123&pLang=de>
- [15] *Vulcan 10 PW Project*. <http://www.clf.stfc.ac.uk/New+Initiatives/The+Vulcan+10+Petawatt+Project/14684.aspx>
- [16] *The Extreme Light Infrastructure*. <http://www.extreme-light-infrastructure.eu/>
- [17] HEINZL, T. ; ILBERTON, A. ; MARKLUND, M.: Finite size effects in stimulated laser pair production. In: *Physics Letters B* 692 (2010), S. 250–256
- [18] NAROZHNY, N. B. ; FOFANOV, M. S.: Creation of a Pair by a Photon Colliding with a Short Focused Laser Puls. In: *Laser Physics* 7 (1997), S. 141–149
- [19] NAROZHNY, N. ; JAROSZYNSKI, D. A. (Hrsg.) ; BINGHAM, R. (Hrsg.) ; CAIRNS, R. A. (Hrsg.): *Laser-Plasma Interactions*. CRC Press, 2009. – 297–324 S.
- [20] STRICKLAND, D. ; MOUROU, G.: Compression of amplified chirped optical pulses. In: *Opt. Commun* 56 (1985), S. 219
- [21] NITTA, H. ; KHOKONOV, M. K. ; NAGATA, Y. ; ONUKI, S.: Electron-Positron pair production by photons in nonuniform strong fields. In: *Phys. Rev. Lett.* 93 (2004), S. 18
- [22] PIAZZA, A. D. ; MILSTEIN, A. I. ; MÜLLER, C.: Polarization of the electron and positron produced in combined Coulomb and strong laser fields. In: *Phys. Rev. A* 82 (2010), S. 062110
- [23] KRAJEWSKA, K.: Electron-positron pair creation and Oleinik resonances. In: *Laser Phys.* 21 (2011), S. 1275
- [24] PIAZZA, A. D.: Pair production at the focus of two equal and oppositely directed laser beams: The effect of the pulse shape. In: *Phys. Rev. D* 70 (2004), S. 053013
- [25] SCHÜTZHOLD, R. ; GIES, H. ; DUNNE, G.: Dynamically Assisted Schwinger Mechanism. In: *Phys. Rev. Lett.* 101 (2008), S. 130404
- [26] *PEneLOPE*. <http://www.hzdr.de/db/Cms?pNid=2098>
- [27] *Workshop on Petawatt-Lasers at Hard X-Ray Light Sources*. <http://www.hzdr.de/db/Cms?pNid=2356>
- [28] *Linac Coherent Light Source*. [http://lcls.slac.stanford.edu/WhatIsLCLS\\_1.aspx](http://lcls.slac.stanford.edu/WhatIsLCLS_1.aspx)
- [29] FRIED, Z. ; EBERLY, J. H.: Scattering of a High-Intensity, Low-Frequency Electromagnetic by an Unbound Electron. In: *Phys. Rev.* 136 (1964), S. 17

- [30] GLAUBER, R. J.: Photon Correlations. In: *Phys. Rev. Lett.* 10 (1963), S. 84
- [31] GLAUBER, R. J.: Coherent and Incoherent States of the Radiation Field. In: *Phys. Rev.* 131 (1963), S. 2766
- [32] HARVEY, C. ; HEINZL, T. ; ILBERTON, A.: Signatures of high-intensity Compton scattering. In: *Phys. Rev. A* 79 (2009), S. 063407
- [33] SEIPT, D. ; KÄMPFER, B.: Nonlinear Compton scattering of ultrashort intense laser pulses. In: *Phys. Rev. A* 83 (2011), S. 022101. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.83.022101>. – DOI 10.1103/PhysRevA.83.022101
- [34] FURRY, W. H.: On Bound States and Scattering in Positron Theory. In: *Phys. Rev.* 81 (1951), S. 115
- [35] KIBBLE, T. W. B.: Frequency shift in High-Intensity Compton Scattering. In: *Phys. Rev.* 138 (1965), S. B740
- [36] VOLKOV, D. M.: Über eine Klasse von Lösungen der Diracschen Gleichung. In: *Z. Phys* 94 (1935), S. 25–26. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01331022>. – DOI 10.1007/BF01331022
- [37] MÜLLER, S. J. ; MÜLLER, C.: Few-photon electron-positron pair creation by relativistic muon impact on intense laser beams. In: *Phys. Rev. D* 80 (2009), S. 053014. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.80.053014>. – DOI 10.1103/PhysRevD.80.053014
- [38] McDONALD, K. T.: Positron Production By Laser Light. In: *1997 SLAC Summer Institute, 1997*. – posted at: "<http://www.hep.princeton.edu/mcdonald/>"[08.08.2011]
- [39] RITUS, V. I.: Quantum effects of the interaction of elementary particles with an intense electromagnetic field. In: *J. Sov. Laser Res.* 6 (1985), S. 497
- [40] PESKIN, M. E. ; SCHROEDER, D. V.: *An Introduction to Quantum Field Theory*. Perseus Books, 1995
- [41] D. Seipt; B. Kämpfer: to be published
- [42] RINGWALD, A.: Pair production from vacuum at the focus of an X-ray free electron laser. In: *Phys. Lett. B* 510 (2001), S. 107–116
- [43] KIRK, J. G. ; BELL, A. R. ; ARKA, I.: Pair production in counter-propagating laser beams. In: *Plasma Phys. and Control. Fusion* 51 (2009), S. 085008
- [44] FEDOTOV, A. M. ; NAROZHNY, N.B. ; MOUROU, G. ; KORN, G.: Limitations on the Attainable Intensity of High Power Lasers. In: *Phys. Rev. Lett.* 105 (2010), S. 080402

- [45] BULANOV, S. S. ; ESIRKEPOV, T. Z. ; THOMAS, A. G. R. ; KOGA, J. K. ; BULANOV, S. V.: Schwinger Limit Attainability with Extreme Power Lasers. In: *Phys. Rev. Lett.* 105 (2010), S. 220407
- [46] ILBERTON, A.: Trident Pair Production in Strong Laser Pulses. In: *Phys. Rev. Lett.* 106 (2011), S. 020404
- [47] LÖTSTEDT, E.: *Laser-assisted second-order relativistic QED processes: Bremsstrahlung and pair creation modified by a strong electromagnetic wave field*, Ruperto-Carola University of Heidelberg, Diss., 2008

## Danksagung

Hiermit bedanke ich mich bei Prof. Dr. R. Schmidt und Prof. Dr. T. B. Cowan für die Aufnahme in das Institut für Theoretische Physik und das Institut für Strahlenphysik und die damit verbundene Möglichkeit, diese Arbeit anzufertigen.

Des Weiteren möchte ich mich bei Prof. Dr. B. Kämpfer für die Bereitstellung des Themas und dessen Betreuung sowie für die Anregungen und Diskussionen bedanken.

Insbesondere gilt mein Dank Herrn Dipl. Phys. D. Seipt für die langen, hilfreichen Gespräche und für seine Ausdauer und Geduld mit mir über Fragestellungen dieser Arbeit zu diskutieren.

Schließlich bedanke ich mich bei meiner Frau, Laura Nousch, für die stetige Unterstützung und Motivation.

## **Selbstständigkeitserklärung**

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Diplomarbeit von mir selbständig und ohne die unzulässige Hilfe Dritter angefertigt worden ist. Dabei wurden lediglich die von mir explizit angegebenen Hilfsmittel verwendet. Wissen, welches von mir direkt oder indirekt aus fremden Quellen übernommen wurde, ist als solches kenntlich gemacht und in das Literaturverzeichnis aufgenommen worden. Die Diplomarbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form bei einer anderen Prüfungsbehörde eingereicht.

Dresden, den 29.10.2011

Unterschrift