TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

Hydrodynamische Beschreibung der Expansionsdynamik von relativistischen Schwerionenstößen mit Mitteln der AdS/CFT-Korrespondenz

Diplomarbeit
zur Erlangung des wissenschaftlichen Grades
Diplom-Physiker

vorgelegt von

Falk Wunderlich
geboren am 24.03.1987 in Dresden

Institut für Theoretische Physik
Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften
der Technischen Universität Dresden
2011

Eingereicht am 04.11.2011

1. Gutachter: Prof. Dr. B. Kämpfer
2. Gutachter: Prof. Dr. D. Stöckinger

Kurzdarstellung

Ein wichtiger Teil der Expansionsdynamik des Quark-Gluon-Plasmas, das bei relativistischen Schwerionenstößen am LHC entsteht, kann mit hydrodynamischen Modellen gut beschrieben werden. Zunächst wird deshalb die relativistische Hydrodynamik numerisch am Beispiel eindimensionaler Probleme behandelt. Die Verlässlichkeit des Codes wird durch Vergleich unabhängiger numerischer Methoden und dem Vergleich mit einer analytischen Lösung demonstriert. Als Beispiel wurde ein Anfangswertproblem gewählt, dessen Lösung neu gefunden werden musste. Weiterhin wurde ein iteratives Schema zur Berechnung von Lösungen der Einsteingleichungen in einem asymptotischen Anti-de Sitter-Raum entwickelt, dessen Grundidee aus der Literatur entnommen wurde. Es konnte angewendet werden, um ein in der Literatur angegebenes Setup, mit dem die AdS/CFT-Korrespondenz für ein eindimensional strömendes Medium ausgenutzt wird, zu verallgemeinern. Außerdem wird ein Weg aufgezeigt, wie dieses Setup verbessert werden kann, um realistische Ergebnisse zu erzielen. Inspiriert von dem iterativen Schema zur Berechnung der Einstein-Gleichungen wird eine Methode entwickelt, mit dem die hydrodynamischen Gleichungen iterativ gelöst werden können. Die Anwendbarkeit wird durch das Berechnen der Dynamik von anfänglich Gauß-verteilter Materie demonstriert. Es wird ebenfalls gezeigt, dass es möglich ist, mit dieser Methode den elliptischen Fluss zu untersuchen.

Abstract

An important part of the dynamics of the expanding quark gluon plasma, which is produced in relativistic heavy ion collisions, can be well described using hydrodynamical models. At first, relativistic hydrodynamics are treated numerically for one-dimensional problems. The reliability of the code is demonstrated by comparison of the results from independent numerical approaches. Additionally, the numerics are tested with an analytical solution, which had to be calculated first. Later an iterative scheme for constructing solutions of the Einstein equations in asymptotic anti de Sitter spaces is developed, for which the basic ideas are taken from the literature. Its application to a setup introduced in the literature yields a generalization of the result given there. Furthermore, a way is presented how to improve the setup for achieving realistic results. Inspired by the scheme for solving the Einstein equations a method is developed for solving the hydrodynamical equations in an iterative manner. The applicability is demonstrated by adopting this method to Gaussian shaped initial conditions. Likewise it can be shown, that it is possible to study the elliptic flow whithin this approach.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Grundlagen **7**

2.1 Allgemeine Relativitätstheorie 7

2.1.1 Einstein'sche Feldgleichungen 7

2.1.2 Energie-Impuls-Tensor 8

2.2 Die AdS/CFT-Korrespondenz 9

2.2.1 Der Anti-de Sitter-Raum 9

2.2.2 Konforme Feldtheorien 13

2.2.3 Die Korrespondenz 14

2.2.4 Asymptotischer Anti-de Sitter-Raum 19

2.3 Relativistische Schwerionenstöße 20

2.3.1 Das Quark-Gluon-Plasma 20

2.3.2 Relativistische Hydrodynamik 20

2.3.3 Relativistische Thermodynamik 23

3 Eindimensionale Hydrodynamik **27**

3.1 Methode der Charakteristiken 27

3.2 Numerische Lösungsmethoden 28

3.2.1 Methode der Charakteristiken 28

3.2.2 Verwendung von Odeint 30

3.2.3 Verwendung einer partiellen Lösung 30

4 Holographische Rekonstruktion **35**

4.1 Erläuterung der Methode 35

4.2 Bedingungen an den Energie-Impuls-Tensor der CFT 38

4.3 Die Lösungsmethode von Janik 39

4.4 Krümmungsskalare 42

4.5 Verallgemeinerte Kajantie-Lösung 43

4.6 Verbesserter 2D-Ansatz 46

5 Iterative Lösung der Hydrodynamischen Gleichungen 49
5.1 Erläuterung des Vorgehens . . . 49
5.1.1 Beschreibung der Koordinaten . . . 51
5.2 Bjorken-Anfangsbedingungen . . . 52
5.3 Gradienten in longitudinaler Richtung . . . 53
5.4 Gradienten in transversaler Richtung . . . 54
5.5 Gradienten in longitudinaler und transversaler Richtung . . . 56
5.5.1 Zylindersymmetrischer Fall . . . 56
5.5.2 Triaxiale Expansion . . . 59
5.6 Grenzen der iterativen Methode . . . 62

6 Zusammenfassung und Ausblick 65

A Konventionen und Abkürzungen 67
A.1 Liste der verwendeten Konventionen . . . 67
A.2 Liste der verwendeten Abkürzungen . . . 68

B Einführung der Begriffe der ART 69
B.1 Begriffe aus der Tensorrechnung . . . 69
B.2 Grundbegriffe der ART . . . 72
B.2.1 Tensoren . . . 72
B.2.2 Metrik . . . 73
B.2.3 Kovariante Ableitung . . . 74
B.2.4 Krümmungstensor, Ricci-Tensor, Ricci-Skalar . . . 75
B.2.5 Killing-Vektoren . . . 76

C Symmetrien des Anti-de Sitter-Raums 79

D Berechnung eines Propagators mittels der AdS/CFT-Korrespondenz 83

E Umstellen der hydrodynamischen Gleichungen 89

F Lösung des Riemann-Problems in Milne-Koordinaten 91

G Lösung der Einstein-Gleichungen in Feffermann-Graham-Koordinaten 97
G.1 Herleitung der Gleichungen für die Submetrik . . . 97
G.2 Aufstellen eines algebraischen Gleichungssystems zur Lösung der PDEs . . . 100
G.3 Iterative Lösung . . . 103

H Krümmungsskalare 105

I Iteratives Lösungsschema für die relativistische Hydrodynamik 109
I.1 Herleitung des Gleichungssystems 109
I.2 $\mathbf{f}^{\mu\nu}$ für ideale Fluide 111
I.3 Einige ausgewählte Lösungsentwicklungen 112

1 Einleitung

Das gegenwärtige Bild der theoretischen Physik besteht darin, dass alle beobachteten Phänomene auf vier grundlegende Wechselwirkungen zurückgeführt werden. Dabei werden drei dieser Wechselwirkungen (die "elektromagnetische", die "schwache" und die "starke" Wechselwirkung) durch Quantenfeldtheorien beschrieben. Zur Behandlung der vierten Kraft, der Gravitation, verwendet man mit der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) Einsteins eine völlig andere Art von Theorie, die sich bisher allen Versuchen, sie konsistent zu quantisieren, entzogen hat. Einen der bisher aussichtsreichsten Wege dies zu erreichen, wird in Stringtheorien gesehen. Dabei stellen eindimensionale Objekte, die Strings, deren Ausdehnung von der Größenordnung der Plancklänge $l_p \approx 1,6 \times 10^{-34}\,\mathrm{m}$ ist, die fundamentalen Freiheitsgrade dar. Als Grenzfall ist in diesen Theorien die ART enthalten.

Im Jahr 1997 wies Maldacena in seinem viel zitierten Artikel [1] auf die Möglichkeit der Äquivalenz zwischen konformen Feldtheorien und Stringtheorien hin. In der Folge wurden sehr viele Arbeiten in diesem Bereich verfasst (siehe z.B. [2–4]). Denn mit dieser Äquivalenz ist es (in bestimmten Grenzfällen) möglich, konforme Quantenfeldtheorien (CFTs) [1, 2] auf eine klassische Gravitationstheorie abzubilden. Die Symmetrien der CFT übersetzen sich dabei in Symmetrien der Räume, für die die korrespondierende Gravitationstheorie formuliert ist. Das am besten untersuchte Beispiel für diese Korrespondenz ist die $\mathcal{N} = 4$ supersymmetrische Yang-Mills-Theorie [3], an der die Korrespondenz auch entdeckt wurde. Auf den ersten Blick hat diese Theorie nicht viel mit den Eichtheorien des Standardmodells gemeinsam und scheint deshalb zur adäquaten Beschreibung der Natur ungeeignet zu sein. Interessanterweise lassen sich jedoch Schwerionenkollisionen bei sehr hohen Energien (in gewissen Grenzen) durch konforme Theorien näherungsweise gut beschreiben, sodass man die Korrespondenz auf diese Probleme anwenden kann.

Aufgrund der Eigenschaft, dass sich eine starke CFT-Kopplung in eine schwache String-

[1] Vgl. Abschnitt 2.2.2.

[2] In dieser Arbeit werden die üblichen englischen Abkürzungen verwendet. Aus diesem Grund wird statt der deutschen Endung zur Kennzeichnung des Plurals ein "s" angehängt.

[3] Auch kurz: $\mathcal{N} = 4$ SYM-Theorie genannt. Das ist eine relativistische Quantenfeldtheorie mit der Eichgruppe SU(N), die zusätzlich supersymmetrisch ist. $\mathcal{N} = 4$ deutet dabei an, dass es vier nicht kommutierende Operatoren gibt, die supersymmetrische Transformationen erzeugen (also solche Transformationen, die Fermionen in Bosonen verwandeln und umgekehrt).

Kopplung übersetzt, können nicht störungstheoretisch behandelbare Probleme der CFT in störungstheoretisch lösbare Probleme der Stringtheorie umgewandelt werden. Im Grenzfall sehr großer CFT-Kopplung verschwinden die Quantenkorrekturen bei der korrespondierenden String-Theorie und man erhält eine Äquivalenz zwischen einer stark gekoppelten Quantentheorie und einer klassischen Feldtheorie. Doch nicht nur für die Lösung von quantenfeldtheoretischen Problemen bei starker Kopplung stellt die Korrespondenz neue Methoden bereit. Ebenso hat sie ein neues Licht auf das Problem des Informationsgehaltes bzw. der Entropie geworfen. Wenn Gravitationstheorien in D Dimensionen äquivalent zu Quantenfeldtheorien auf dem $(D-1)$-dimensionalen Rand der entsprechenden Raumzeit sind, so bedeutet das, dass der Informationsgehalt und damit die Entropie nicht proportional zum "Volumen" sondern proportional zur "Oberfläche" der Raumzeit sind. Das wird durch die Berechnung der Entropie schwarzer Löcher unterstützt, die nach Bekenstein [5] und Hawking [6] proportional zur Fläche des Ereignishorizonts und nicht zum umschlossenen Volumen ist. Die Überlegungen zur Äquivalenz von Theorien unterschiedlicher Dimensionen werden mit dem Schlagwort des "holographischen Prinzips" bezeichnet.

Eine ideale Möglichkeit, die Korrespondenz anzuwenden und ihre Relevanz für physikalische Fragestellungen zu testen, ist gegenwärtig am Large Hadron Collider (LHC) [4] gegeben. An diesem hat im März 2011 das wissenschaftliche Programm begonnen. Dessen wichtigstes Ziel ist die Suche nach dem Higgs-Boson, dessen Wechselwirkung mit den übrigen Teilchen des Standardmodells diesen ihre Masse verleiht[7]. Außerdem soll nach physikalischen Phänomenen gesucht werden, die nicht mit dem Standardmodell der Teilchenphysik zu erklären sind. Beispielsweise weicht das anomale magnetische Moment des Myons ungewöhnlich stark von dem durch das Standardmodell gegebenen Wert ab. Dies könnte durch Wechselwirkungen mit supersymmetrischen Teilchen, deren Masse im Bereich einiger TeV liegt, verursacht werden.[8] Diese Fragen, die die Suche nach "neuer" Physik betreffen, werden mithilfe von Proton-Proton-Kollisionen untersucht.

Ein weiterer Forschungsschwerpunkt besteht darin, das am Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) entdeckte Quark-Gluon-Plasma (QGP) [5] zu vermessen. Dazu wurde der LHC zum ersten Mal im November 2010 mit Bleikernen betrieben. Bei diesen Kollisionen entsteht ein Bereich, in dem die Kernmaterie so stark verdichtet wird, dass die Zuordnung von Quarks zu Nukleonen ihren Sinn verliert. Die Quarks werden nicht mehr durch die starke Wech-

[4] Ein Protonen-Ringbeschleuniger der Europäischen Organisation für Kernforschung (CERN). Die maximal erreichbare Schwerpunktsenergie beträgt etwa 14 TeV für Protonen-Kollisionen. Der LHC kann auch mit Bleikernen betrieben werden. Bei diesen Experimenten sind Strahlenergien von bis zu $2,76A$ TeV möglich. (A ist die Nukleonenanzahl der beschleunigten Kerne, also für Blei $A = 208$). Siehe [11].

[5] Vgl. Abschnitt 2.3.1.

selwirkung zu farbneutralen [6] Objekten verbunden [7] , sondern können sich als quasifreie Teilchen innerhalb des Mediums bewegen.

Das Interesse an diesem Materiezustand, dem QGP, ist sehr groß, da er sonst nur im Inneren von Neutronensternen und in den frühesten Phasen des Universums auftritt bzw. auftrat. Wenn es gelingt, mittels der Experimente am LHC die Zustandsgleichung des QGPs zu bestimmen, so können damit wichtige Erkenntnisse über den Aufbau von Neutronensternen gewonnen werden. Auch die Frage nach der Existenz von Quarksternen kann dann geklärt werden.[9] Doch nicht nur astrophysikalische Problemstellungen können mit den Experimenten adressiert werden. Auch fundamentale Fragen aus dem Bereich der Teilchenphysik, die zum Beispiel die Natur des Confinements, die chirale Symmetriebrechung und das Verhalten von Jets betreffen [10], werden dabei untersucht.

Bei den Experimenten, die am RHIC gemacht wurden, ist beobachtet worden, dass das QGP kollektives Verhalten zeigt. Besondere Aufmerksamkeit wurde dabei dem elliptischen Fluss zuteil, der die Formänderung des expandierenden Plasmas beschreibt [8]. Dies hat Einfluss auf die Impulsverteilung der detektierten Teilchenspezies. Diese lässt sich sehr gut erklären, wenn man annimmt, dass das QGP ein nahezu ideales Fluid ist. Da auch die Zustandsgleichung des QGPs und Transportkoeffizienten, wie z.B. die Scherviskosität, die Impulsverteilung beeinflussen, hat man mit dieser eine einfach zugängliche Observable, mit der man auf diese Größen zurück schließen kann. Für diese Zwecke ist das Verständnis der Expansionsdynamik zentral.

Die hydrodynamische Beschreibung erfordert, dass das Medium sich nahe am lokalen thermischen Gleichgewicht befindet. Die Genauigkeit, mit der hydrodynamische Rechnungen bestimmte Observable vorhersagen, legt nahe, dass das QGP schon nach einer Zeit von $\sim$ 1fm/c ein lokales thermisches Gleichgewicht erreicht. Das ist nur ein Bruchteil der Zeit, die das Licht benötigt um eine Strecke zu durchlaufen, die der Ausdehnung des Systems entspricht. Große Bereiche des Plasmas können also gar nicht kausal verbunden sein. Trotzdem ist die Temperaturverteilung kontinuierlich und ohne größere Fluktuationen.

Es war deshalb nötig, Methoden zu entwickeln, die das schnelle Einstellen eines lokalen thermischen Gleichgewichts erklären können. In dem betrachteten Regime ist die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung so groß, dass das Verhalten nicht durch störungstheoretische Rechnungen der QCD behandelt werden kann. Eine Methode, die es erlaubt zu verstehen wie hydrodynamisches Verhalten asymptotisch aus einer stark wechselwirkenden Quantenfeldtheorie entsteht, basiert auf der AdS/CFT-Korrespondenz. Anstatt

[6] Mit “Farbe” ist die Ladung bezüglich der starken Wechselwirkung gemeint.
[7] Dieses Phänomen nennt man “Confinement”.
[8] Vgl. Abschnitt 5.5.2

der QCD betrachtet man eine stark wechselwirkende CFT. Diese übersetzt man mit Hilfe der AdS/CFT-Korrespondenz in eine Gravitationstheorie. Indem gefordert wird, dass die Lösung der Gravitationstheorie keine Singularitäten aufweisen soll, schränkt man die Evolution des Energie-Impulstensors der CFT so ein, dass asymptotisch nur noch hydrodynamische Moden auftreten[9]. Damit ist die Frage "Warum wird ein stark wechselwirkendes konformes Medium so gut durch Hydrodynamik beschrieben?" äquivalent zu der Frage "Was bedeutet es für die CFT, dass in der dualen Gravitationstheorie keine Singularitäten auftreten dürfen?". Diese Frage kann unter Umständen viel einfacher zu beantworten sein, insbesondere, da es eine exakte Formulierung der Korrespondenz gibt. Einige dieser Fragen werden im Verlauf dieser Arbeit noch ausführlicher diskutiert.

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut:

Lösungsideen, die prinzipiellen Schritte sowie die Interpretation der Ergebnisse, werden zumeist im Hauptteil der Arbeit (Kapitel 2 -5) dargestellt. Zahlreiche und teilweise aufwendige Rechnungen werden aus Gründen des besseren Leseflusses in den Anhängen durchgeführt.

Im zweiten Kapitel werden die für diese Arbeit wichtigsten Relationen aus der Allgemeine Relativitätstheorie (ART) eingeführt. Die Definitionen der benötigten Begriffe, sowie einige Bemerkungen über deren mathematische Struktur sind in Anhang B zusammengefasst. Außerdem wird erläutert, wie Schwerionenkollisionen zum Verständnis fundamentaler Fragestellungen beitragen können. In diesem Zusammenhang wird auch auf die relativistische Hydrodynamik eingegangen, die als effektive Theorie einen Teil der Dynamik beschreiben kann. Ebenso wird die Thermodynamik in ihrer lokalen Formulierung besprochen, insbesondere im Hinblick auf die Beschreibung eines idealen Fluids.

Im dritten Kapitel werden analytische und numerische Methoden vorgestellt, mit denen man eindimensionale hydrodynamische Probleme lösen kann. Eine analytische Lösung befindet sich in Anhang F. Die Verlässlichkeit des numerischen Codes wird durch Vergleich mit Ergebnissen aus der Literatur und mit dem analytischen Ergebnis aus Anhang F demonstriert.

Im vierten Kapitel wird eine Methode vorgestellt, die in ähnlicher Form in den Arbeiten von Janik [12] verwendet wurde. Die zentralen Gleichungen und Aussagen werden in Anhang G hergeleitet. Mit der Methode wird eine Entwicklung der Lösung der Einstein-Gleichungen für einen asymptotischen Anti-de Sitter-Raum (aAdS) berechnet, die (so weit möglich) mit der Literatur verglichen wird. Die Methode wird angewendet um eine Verallgemeinerung des in [13] gegebenen Gravitationsfeldes zu bestimmen, das zu einem eindi-

[9] Vgl. Abschnitt 4.3.

mensional strömenden, konformen Medium dual ist. Dieses hat zwar den Vorteil, dass es sich exakt berechnen lässt, allerdings ist es keine gute Näherung für die ersten Expansionsphasen nach einer Schwerionenkollision, da eine ungeeignete Zustandsgleichung verwendet wird. Darum wird ein Weg aufgezeigt, wie man das Modell modifizieren kann, um realistische Zustandsgleichungen verwenden zu können.

Im fünften Kapitel wird die Methode, die im vierten Kapitel für die Lösung der Einstein-Gleichungen verwendet wurde, auf die hydrodynamischen Gleichungen angewandt. Zunächst wird gezeigt, wie die Gleichungen für lokale Energie-Impuls-Erhaltung im Falle sehr allgemeiner Systeme gelöst werden können. Das geschieht indem iterativ aus niedrigeren Entwicklungskoeffizienten der Taylor-Entwicklung der Lösungsfunktionen die höheren Koeffizienten bestimmt werden. Diese Methode wird auf ideale Fluide angewandt. Dabei wird zunächst für Fälle in denen analytische Lösungen bekannt sind die iterative Lösung bestimmt und mit dem analytischen Resultat verglichen. Danach wird die Methode den numerischen Ergebnissen aus Kapitel drei gegenüber gestellt. Nachdem die Verlässlichkeit der Methode demonstriert wurde, wird diese auf realistischere Anfangsbedingungen angewendet. Zum Schluss wird gezeigt, dass man den elliptischen Fluss als wichtige Observable bei Schwerionenkollisionen untersuchen kann.

In Kapitel 6 werden die Ergebnisse zusammengefasst und erläutert, welche weiteren Schritte zu unternehmen sind, um die Methode anwendungsreif zu machen.

2 Grundlagen

2.1 Allgemeine Relativitätstheorie

In der vorliegenden Arbeit wird häufig von Begriffen der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) Gebrauch gemacht. Die nötigen Begriffe dazu werden im Anhang B eingeführt. Da diese im Laufe der Arbeit immer wieder verwendet werden, sind im Folgenden nur die Einstein'schen Feldgleichungen und die Definition des Energie-Impuls-Tensors angegeben.

2.1.1 Einstein'sche Feldgleichungen

Die Einstein'schen Feldgleichungen haben die folgende Gestalt:

$$R_{\lambda\nu} - \frac{R}{2} g_{\lambda\nu} + \Lambda g_{\lambda\nu} = \kappa T_{\lambda\nu}. \tag{2.1.1}$$

Hierbei bezeichnet Λ die kosmologische Konstante und $T_{\lambda\nu}$ den Energie-Impuls-Tensor der Materie. Die Gravitationskonstante κ gibt die Stärke der Kopplung zwischen Materie und Raumkrümmung an. Im vierdimensionalen Fall kann $\kappa = \frac{G_N}{8\pi c^4}$ mit der Newton'schen Gravitationskonstante G_N und der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c in Verbindung gebracht werden. Schließlich stellen $R_{\lambda\nu}$ und R den Ricci-Tensor bzw. den Ricci-Skalar der Raumzeit dar. $g_{\lambda\nu}$ beschreibt die Metrik des Raumes. Die Feldgleichungen werden ergänzt durch die kontrahierten Bianchi-Identitäten, die durch die Konstruktion des Krümmungstensors automatisch erfüllt sind. Sie beinhalten, dass die Spur der kovarianten Ableitung der linken Seite in (2.1.1) verschwindet. Für die Metrik liefert das keine Einschränkung, jedoch für den Energie-Impuls-Tensor:

$$g^{\nu\mu} T_{\lambda\nu;\mu} = 0. \tag{2.1.2}$$

Das ist die Forderung nach lokaler Energie-Impuls-Erhaltung, die ein Nebenprodukt der ART ist. Die beiden Gleichungssysteme (2.1.1) und (2.1.2) beschreiben das Wechselspiel zwischen Materie und Geometrie der Raumzeit. Sie bilden ein System aus 14 partiellen Differentialgleichungen für die zehn unabhängigen Komponenten des metrischen Tensors

und die zehn Komponenten des Energie-Impuls-Tensors.

2.1.2 Energie-Impuls-Tensor

Um später den Zusammenhang von Metrik und Energie-Impuls-Tensor zu verstehen, wird hier die Ableitung der Einstein-Gleichungen aus einem Extremalprinzip skizziert. Eine ausführliche Darstellung findet sich in [14]. Die extremale Größe, das Einstein-Hilbert-Funktional W, lautet:

$$W = \int \frac{1}{2}R + \Lambda + \kappa\mathcal{L}_M\sqrt{|g|}d^4x. \tag{2.1.3}$$

Dabei ist $\mathcal{L}_M$ die Lagrangefunktion der Materie und g die Determinante der Metrik. Die Konstante Λ kann hinzugefügt werden, da die Lagrangedichte nicht eindeutig festgelegt ist und die aus ihr abgeleiteten Bewegungsgleichungen sich bei dieser Addition nicht ändern. Nun berechnet man $\delta W[g_{\mu\nu}]$ und fordert, dass diese Variation verschwindet:

$$\delta W[g_{\mu\nu}] = \int \left(\delta\sqrt{|g|}\left(\frac{1}{2}R + \Lambda + \kappa\mathcal{L}_M\right) + \frac{1}{2}\delta R + \kappa\delta\mathcal{L}_M\sqrt{|g|}\right)d^4x \stackrel{!}{=} 0. \tag{2.1.4}$$

Durch Auswerten der Variationen $\delta\sqrt{|g|}$ und δR und Anwenden des Satzes von Stokes kann man dies umformen in:

$$\delta W = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - R_{\mu\nu} + \Lambda + \frac{2\kappa}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}}\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{|g|}d^4x = 0. \tag{2.1.5}$$

Diese Bedingung lässt sich nur dann für alle Variationen der Metrik erfüllen, wenn der Klammerausdruck verschwindet, wenn also (2.1.1) gilt. Dabei ist der Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ folgendermaßen definiert:

Def.: Energie-Impuls-Tensor $\mathbf{T}_{\mu\nu}$

$$T_{\mu\nu} := \frac{2}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{2.1.6}$$

Somit hat man die Einstein-Gleichungen aus einem Extremalprinzip abgeleitet. In der Definition (2.1.6) kann man erahnen, warum Metrik und Energie-Impuls-Tensor in der AdS/CFT-Korrespondenz so eng zusammenhängen: Im Wesentlichen ist $T_{\mu\nu}$ das zu $g_{\mu\nu}$ kanonisch konjugierte Feld im Sinne des kanonischen Impulses von $g_{\mu\nu}$.

2.2 Die AdS/CFT-Korrespondenz

2.2.1 Der Anti-de Sitter-Raum

Definition

Ein Anti-de Sitter-Raum (AdS) kann am besten veranschaulicht werden, indem man ihn in einen flachen Raum höherer Dimension isometrisch einbettet. Sei n die Dimension einer nicht kompakten, mindestens dreimal stetig differenzierbaren Mannigfaltigkeit, so kann diese allgemein in einen flachen Raum der Dimension $N = \frac{(3n+11)n(n+1)}{2}$ isometrisch eingebettet werden [15] [1]. Aufgrund seiner hohen Symmetrie ist es bei einem AdS der Dimension D jedoch bereits möglich, diesen in einen Raum der Dimension $N = D+1$ mit der Metrik $\mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1, -1)$ einzubetten. Dann kann der AdS durch folgende Punktmenge veranschaulicht werden:

$$M_M := \left\{ x \in \mathbb{R}^{D+1} : -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{D-1}^2 - x_D^2 = -\mathcal{B}^2 \right\}. \tag{2.2.1}$$

Bei obiger Definition als Punktmenge ist es wichtig zu betonen, dass der Raum, in den man einbettet, die Signatur [2] $(D-1, 2)$ hat. Bei Einbettung in einen Raum mit anderer Signatur, ändern sich die Vorzeichen vor den entsprechenden Termen. Interessant bei obiger Definition ist, dass der Rand des AdS ein Minkowski-Raum ist.

In der Literatur ist häufig von einem Euklidischen AdS die Rede [3]. Darunter versteht man die Mannigfaltigkeit, die sich ergibt, wenn man in (2.2.1) eine Wick-Rotation bzgl. der x_0-Koordinate durchführt. Es handelt sich also um die Punktmenge

$$M_E := \left\{ x \in \mathbb{R}^{D+1} : x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{D-1}^2 - x_D^2 = -\mathcal{B}^2 \right\}, \tag{2.2.2}$$

eingebettet in einen $(D+1)$-dimensionalen flachen Raum mit der Metrik $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1)$. Das Subskript E am Mengensymbol deutet an, dass der Rand dieser Mannigfaltigkeit isomorph zu einem Euklidischen Raum ist. Eine Einbettung in einen Euklidischen Raum der Dimension $N = D+1$ gelingt jedoch nicht. Das kann daran verdeutlicht werden, dass zwar eine Wick-Rotation [4] der x_D-Koordinate durchführt werden kann, allerdings ergibt

[1] Für kompakte oder beliebig oft differenzierbare Mannigfaltigkeiten gelten stärkere Aussagen.

[2] Unter Signatur eines (Pseudo-)Riemannschen Raumes wird das Tripel (p, m, n) verstanden, wobei p die Anzahl der positiven Eigenwerte und m die Anzahl der negativen Eigenwerte des metrischen Tensors angibt. n ist die Anzahl der Eigenwerte, die verschwinden. Falls $n = 0$ (wie in allen physikalisch relevanten Fällen), wird nur das Paar (p, m) angegeben. [16]

[3] In der englischen Literatur spricht man von "Euclidean version of AdS" oder "Euclideanized AdS".

[4] Darunter versteht man das analytische Fortsetzen einer Koordinate in die komplexe Ebene und anschließendes Auswerten auf der imaginären Achse.

sich auf diese Weise eine Mengendefinition, die nur die leere Menge umfasst:

$$M_\emptyset := \Big\{ x \in \mathbb{R}^{D+1} : \underbrace{x_1^2 \dots x_{D-1}^2 + x_0^2 + x_D^2}_{\geq 0} = -\mathcal{B}^2 \Big\}. \tag{2.2.3}$$

Ganz ähnlich kann man den AdS auch in flache Räume anderer Signaturen einbetten. Diese haben allerdings für die AdS/CFT-Korrespondenz keine Bedeutung. Schließlich sei hier noch eine Anmerkung zur Bezeichnung angebracht. In der mathematischen Literatur unterscheidet man die verschiedenen Definitionen (2.2.1) und (2.2.2). Dort spricht man von einem "AdS der Signatur $(D, 0)$" (im Fall (2.2.2)) bzw. "AdS der Signatur $(D-1, 1)$" (im Fall (2.2.1)). Da diese jedoch durch Wick-Rotationen ineinander transformiert werden können, wird im Folgenden immer nur vom "AdS der Dimension D" gesprochen. Gemeint ist dann die jeweils passende Definition. Bei Betrachtungen der formalen Struktur (z.B. Symmetrien) wird meist mit der Euklidischen Version gearbeitet, bei den physikalischen Berechnungen hingegen mit der Version, die einen Minkowski-Rand aufweist.

Eigenschaften

Wie man durch Nachrechnen (vgl. z.B. [17]) überprüfen kann, ist die Skalarkrümmung des AdS unabhängig von Raum und Zeitkoordinaten:

$$R = -\frac{D(D-1)}{\mathcal{B}^2}. \tag{2.2.4}$$

Der AdS ist also ein Raum konstanter Krümmung. Wenn man den Krümmungstensor berechnet, gelangt man zu dem Ergebnis

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\mathcal{B}^2}(g_{\rho\nu}g_{\mu\sigma} - g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho}). \tag{2.2.5}$$

Der AdS ist demzufolge sogar ein maximal symmetrischer Raum. Als solcher besitzt er die maximale Anzahl von Killing-Vektoren. In D Dimensionen sind es $\frac{D(D+1)}{2}$. Wie man durch Kontrahieren von (2.2.5) und Einsetzen in die Einstein-Gleichungen überprüfen kann, ist der AdS eine Lösung der Einstein-Gleichungen für einen verschwindenden Energie-Impuls-Tensor [5] und für eine negative [6] kosmologische Konstante:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \tag{2.2.6}$$

[5] Diese werden auch Vakuum-Feldgleichungen genannt, da sie die Raumkrümmung in Abwesenheit von Materie beschreiben.

[6] Das Vorzeichen ist konventionsabhängig. In den hier verwendeten Konventionen ist es negativ.

Häufig wird diese Eigenschaft auch genutzt um den Begriff AdS zu definieren. In diesem Fall definiert man:

Def.: AdS, Definition mittels Einstein-Gleichungen

> Der AdS ist eine maximal symmetrische Raumzeit, die die Vakuum-Einstein-Gleichungen (2.2.6) mit negativer kosmologischer Konstante löst.

Diese Definition hat den Vorteil, dass sie nur Größen benutzt, die innerhalb der Raumzeit messbar sind. Andererseits ist sie weniger anschaulich als die Definition über eine Einbettung in einen höherdimensionalen flachen Raum. Wenn man die Spur von (2.2.6) bildet, bekommt man mit

$$R - \frac{R}{2}D + \Lambda D = 0 \tag{2.2.7}$$

eine Relation zwischen Λ und R. Betrachtet man den AdS in Einheiten, in denen $\mathcal{B} = 1$ ist, so kann man mit (2.2.7) die Einstein-Gleichungen (2.2.6) schreiben als:

$$R_{\mu\nu} + (D-1)g_{\mu\nu} = 0. \tag{2.2.8}$$

Zur Beschreibung des AdS kann eine Vielzahl von Koordinatensystemen verwendet werden. Da die Definition des AdS der einer D-dimensionalen Kugelschale sehr ähnlich ist, bieten sich Winkelkoordinaten an (vgl. Anhang C). Das infinitesimale Abstandsquadrat hat dann die Form

$$ds^2 = d\phi_0^2 + \sinh(\phi_0)^2 d\Omega^2, \tag{2.2.9}$$

wobei $d\Omega$ das übliche Raumwinkelelement in D Dimensionen beschreibt. Diese Koordinaten lassen sich in eine noch einfachere Form transformieren (vgl. Anhang C) :

$$ds^2 = \frac{1}{z^2}\Big(dz^2 + (dx^1)^2 + \cdots + (dx^{D-1})^2\Big). \tag{2.2.10}$$

Diese Form eignet sich wegen ihrer besonders einfachen Struktur am besten zur Bestimmung der Raumzeitsymmetrien.

Symmetrien

Eng mit den Killing-Vektoren zusammen hängen die Symmetrien des Raumes. Da die Killing-Vektoren ξ^μ die Richtungen angeben, in die man sich bewegen muss, damit die Metrik unverändert bleibt, kann man mit ihnen die infinitesimalen Symmetrietransformationen und deren Vertauschungsrelationen bestimmen. Sei T_i die infinitesimale Transformation, die einer Bewegung in Richtung des Killing-Vektorfeldes ξ_i entspricht. Dann

gilt:

$$T_i(x^\alpha) = x^\alpha + (\xi_i)^\alpha d\lambda. \tag{2.2.11}$$

Für diese Transformationen kann man die Vertauschungsrelationen berechnen. Dies soll anhand der Killing-Vektorfelder des dreidimensionalen AdS aus Anhang C demonstriert werden. Gezeigt wird es an $[T_3, T_4]$, also dem Kommutator der Transformationen, die von den Killing-Vektoren ξ_3 und ξ_4 aus Anhang C erzeugt werden:

$$\begin{aligned}
[T_3, T_4](x^\alpha) &= T_3 \circ T_4 \begin{pmatrix} z \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} - T_4 \circ T_3 \begin{pmatrix} z \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} && (2.2.12)\\
&= T_3 \begin{pmatrix} z \\ x^1 + x^2 d\lambda \\ x^2 - x^1 d\lambda \end{pmatrix} - T_4 \begin{pmatrix} z + z d\lambda \\ x^1 + x^1 d\lambda \\ x^2 + x^2 d\lambda \end{pmatrix} && (2.2.13)\\
&= \begin{pmatrix} z + z d\lambda \\ x^1 + x^2 d\lambda + (x^1 + x^2 d\lambda) d\lambda \\ x^2 - x^1 d\lambda + (x^2 - x^1 d\lambda) d\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z + z d\lambda \\ x^1 + x^1 d\lambda + (x^2 + x^2 d\lambda) d\lambda \\ x^2 + x^2 d\lambda - (x^1 + x^1 d\lambda) d\lambda \end{pmatrix} && (2.2.14)\\
&= \begin{pmatrix} z + z d\lambda - (z + z d\lambda) \\ x^1 + x^2 d\lambda + (x^1 + x^2 d\lambda) d\lambda - (x^1 + x^1 d\lambda + (x^2 + x^2 d\lambda) d\lambda) \\ x^2 - x^1 d\lambda + (x^2 - x^1 d\lambda) d\lambda - (x^2 + x^2 d\lambda - (x^1 + x^1 d\lambda) d\lambda) \end{pmatrix} && (2.2.15)\\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. && (2.2.16)
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\circ$ die Verkettung der Transformationen. Wenn man auf diese Weise alle Vertauschungsrelationen zwischen infinitesimalen Symmetrieoperationen bestimmt hat, ist die Symmetriegruppe des Raumes bestimmt. Meist bietet es sich an, noch eine Basistransformation der Killing-Vektoren durchzuführen, um die Vertauschungsrelationen in eine Art Normalform zu transformieren. Dies soll hier aber nicht geschehen. Im Falle eines D-dimensionalen AdS gehört zu der Lie-Algebra eine einfach zu beschreibende Gruppe: $SO(D, 1)$ [7].

[7] Das ist die Gruppe der speziellen orthogonalen Matrizen in einem Raum, dessen Metrik die Signatur $(D, 1)$ hat. Das bedeutet, dass die Gruppe von Matrizen O, welche die Relationen $O^\mu{}_\alpha \tilde{\eta}_{\mu\nu} O^\nu{}_\rho = \tilde{\eta}_{\rho\alpha}$ und $\det(O) = +1$ erfüllen, gebildet wird. $\tilde{\eta}_{\alpha\beta}$ ist dabei die auf $D+1$ Dimensionen erweiterte Minkowski-Metrik $\mathrm{diag}(-1, 1, ...1)$.

2.2.2 Konforme Feldtheorien

Die AdS/CFT-Korrespondenz stellt einen Zusammenhang zwischen Stringtheorien und konformen (Quanten-)Feldtheorien her. Dafür wird folgender Begriff eingeführt:

Def.: konforme Feldtheorie (CFT)

> Eine Feldtheorie heißt konform, wenn deren Felder symmetrisch unter konformen Transformationen sind. Konforme Transformationen sind alle winkelerhaltenden Transformationen, d.h. diejenigen Transformationen, die für alle Vektoren x^μ, y^ν die Größe $\frac{g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu}{\|x\|\|y\|}$ invariant lassen.

Diese Transformationen [8] unterteilen sich in vier Klassen [17]:

- Translationen: $x^\mu \mapsto x^\mu + a^\mu$,
- Rotationen: $x^\mu \mapsto \omega^\mu_\nu x^\nu$, wobei ω^μ_ν die Komponenten einer Lorentzmatrix (ein Element von SO(3,1)) sind, also insbesondere konstant in der ganzen Raumzeit,
- Skalierungen: $x^\mu \mapsto \lambda x^\mu$ und
- sog. "spezielle konforme Transformationen": $x^\mu \mapsto \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1+2b_\mu x^\mu + b^2 x^2}$.

Eine wichtige Konsequenz der Konformität ist, dass der Energie-Impuls-Tensor spurfrei sein muss. Um das zu sehen, betrachtet man die Variation der Wirkung unter Transformationen, die $g_{\mu\nu}$ bis auf einen skalaren Vorfaktor invariant lassen:

$$g_{\mu\nu} \mapsto (1 + f(x^\mu))g_{\mu\nu}. \tag{2.2.17}$$

Damit gilt:

$$\delta g_{\mu\nu} = \delta f(x^\alpha) g_{\mu\nu}. \tag{2.2.18}$$

Unter einer Symmetrietransformation darf sich die Wirkung nicht ändern, also gilt:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \delta \int d^d x \sqrt{|g|}\mathcal{L} && (2.2.19)\\
&= \int d^d x \frac{\delta(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} && (2.2.20)\\
&= \int d^d x \sqrt{|g|}\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta\sqrt{|g|}\mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} \delta f(x^\alpha) g_{\mu\nu} && (2.2.21)\\
&\overset{(2.1.6)}{=} \int d^d x \sqrt{|g|}\frac{1}{2} T^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \delta f(x^\alpha). && (2.2.22)
\end{aligned}$$

[8] Gemeint ist hier: Transformationen in einem Minkowski-Raum, da dies der einzige verwendete Fall in dieser Arbeit ist.

Damit dies für alle $\delta f(x^\alpha)$ gelten kann, muss der Integrand identisch verschwinden. Es muss also gelten:

$$T^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 0. \tag{2.2.23}$$

Der Energie-Impuls-Tensor muss also spurfrei sein. Der Schritt von (2.2.20) zu (2.2.21) ist ein Teilschritt der Ableitung der Einstein-Gleichungen aus dem Variationsprinzip (vgl. Abschnitt 2.1.2) und ist in [14] ausführlich beschrieben.

2.2.3 Die Korrespondenz

Allgemeines

Die AdS/CFT-Korrespondenz ist eine Vermutung, die besagt, dass alle konformen Feldtheorien (in einer d-dimensionalen Raumzeit) eine äquivalente Stringtheorie besitzen. Diese Stringtheorie ist dann auf einem Produktraum (im Sinne des kartesischen Mengenprodukts) aus einem Anti-de Sitter-Raum der Dimension $D = (d + 1)$ und einer kompakten Mannigfaltigkeit der Dimension $(10 - D)$ definiert.[9] Für eine ausführliche Einführung in die Stringtheorie sei auf [18] verwiesen. Nun kann man sich fragen, was die konforme Symmetrie mit dem AdS zu tun hat. Einen deutlichen Hinweis darauf erhält man, wenn man sich anschaut, welche Symmetriegruppe sich hinter den Worten "konforme Symmetrie" verbirgt: Man stellt fest, dass die konformen Transformationen, die auf einem Euklidischen Raum der Dimension d möglich sind, die Gruppe $SO(d + 1, 1)$ bilden. Das ist genau die gleiche Symmetriegruppe, wie die oben genannte Isometriegruppe des Euklidischen AdS der Dimension $D = d + 1$. Der Zusammenhang der Symmetriegruppen wird im Anhang C dargestellt.

[9] Mit dieser Aussage ist folgendes gemeint: In der Stringtheorie nimmt man an, dass alle Teilchen durch Anregungen von eindimensionalen Objekten, den Strings, beschrieben werden können. Diese Strings bewegen sich dabei in einer zehndimensionalen Raumzeit. Diese Raumzeit kann man derart zerlegen, dass die ersten D Koordinaten eine Untermannigfaltigkeit beschreiben, die nicht von der Wahl der restlichen Koordinaten abhängt (und umgekehrt). Diese Untermannigfaltigkeit, die durch die ersten D Koordinaten beschrieben wird, ist ein AdS. Die zweite Mannigfaltigkeit hat beliebige Form, soll aber kompakt sein. In obigem Satz bedeutete "in einem Raum R definiert", dass das Wirkungsfunktional aus Feldern konstruiert wird, die von den Koordinaten des Raumes R abhängen.

Formulierung

Die AdS/CFT-Korrespondenz lässt sich wie folgt formulieren [19]:

$$\left\langle \exp\left\{ i \int\limits_{\partial AdS} d^d x \phi_0 \mathcal{O} \right\} \right\rangle = \int\limits_{\phi(x \in \partial AdS) = \phi_0} \mathcal{D}\phi \exp\left\{ -i \int\limits_{AdS} d^D x \mathcal{L}\left(\phi\right) \right\}. \tag{2.2.24}$$

Dabei bezeichnet auf der linken Seite ∂AdS den Rand des AdS (also den Definitionsbereich der CFT-Operatoren und -Felder), $\mathcal{O}$ ein Operatorfeld der CFT und ϕ_0 dessen externe Quelle. Im Exponenten auf der rechten Seite steht die Wirkung des Feldes ϕ. $\int \mathcal{D}\phi$ bezeichnet das Pfadintegral, das über aller Felder ϕ ausgeführt wird, die mit den Randbedingungen ϕ_0 verträglich sind. Das Objekt auf der linken Seite lässt sich wie folgt aus dem erzeugenden Funktional $Z(\phi, \mathcal{O})$ der CFT berechnen:

$$\left\langle \exp\left\{ i \int\limits_{\partial AdS} d^d x \phi_0 \mathcal{O} \right\} \right\rangle = \frac{Z(\phi_0)}{Z(0)}, \tag{2.2.25}$$

wobei

$$Z(\phi_0) := \int \mathcal{D}\mathcal{O} \exp\left\{ i \int\limits_{\partial AdS} d^d x (\mathcal{L} + \phi_0 \mathcal{O}) \right\} \tag{2.2.26}$$

ist. $\int \mathcal{D}\mathcal{O}$ bezeichnet dabei das Pfadintegral über alle möglichen Realisierungen von $\mathcal{O}$. Die Green'schen Funktionen der CFT lassen sich durch Variation nach den Quellen ϕ_0 bestimmen. Beispielsweise gilt für einen Zweipunkt-Korrelator [20]:

$$\langle 0|\mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y)|0\rangle = (-i)^2 \frac{\delta^2}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)} \left\langle \exp\left\{ i \int\limits_{\partial AdS} d^d x \phi_0 \mathcal{O} \right\} \right\rangle \Bigg|_{\phi_0 = 0}. \tag{2.2.27}$$

Aus den Green'schen Funktionen lassen sich die Observablen der CFT berechnen (Wirkungsquerschnitte, Massen, etc.). Auf der linken Seite von (2.2.24) ist also alle Information, die sich aus der CFT extrahieren lässt, codiert.

Um den Ausdruck auf der rechten Seite von (2.2.24) zu berechnen, muss man das Pfadintegral über alle Felder ϕ, die die Randbedingung $\phi(x \in \partial AdS) = \phi_0$ erfüllen, ausführen. Häufig ist das jedoch nicht möglich. Den größten Beitrag erhält man durch die Felder, die eine stationäre Phase aufweisen, wo also gilt:

$$\delta \int\limits_{AdS} d^D x \mathcal{L}\left(\phi\right) = 0. \tag{2.2.28}$$

Dies sind die Felder, die die Euler-Lagrange-Gleichungen zur Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi)$ erfüllen. Vernachlässigt man Felder, bei denen die Phase $\int d^D x \mathcal{L}(\phi)$ variiert, was in vielen interessanten Fällen gerechtfertigt ist, so kann man (2.2.24) einfacher schreiben:

$$\left\langle \exp\left\{ i \int\limits_{\partial AdS} d^d x \phi_0 \mathcal{O} \right\} \right\rangle = \exp\left\{ -i \int\limits_{AdS} d^D x \mathcal{L}(\phi)\Big|_{\phi(x\in\partial AdS)=\phi_0} \right\}. \tag{2.2.29}$$

Damit muss man nur noch die Lösung der AdS-Euler-Lagrange-Gleichungen, bei der das Feld ϕ auf dem Rand die Werte ϕ_0 annimmt, bestimmen. Diese Lösung ist selbst ein Funktional der Randbedingungen, d.h. $\phi[\phi_0]$. Damit ist auch der Ausdruck auf der rechten Seite von (2.2.29) ein Funktional von ϕ_0, hat also die gleiche mathematische Struktur, wie der Ausdruck auf der linken Seite. Aus dem Pfadintegral der Wirkung lassen sich ebenfalls sämtliche Observablen einer Theorie berechnen. Damit bestimmt der Ausdruck auf der rechten Seite von (2.2.24) die Dynamik der AdS-Theorie vollständig.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass sowohl die linke als auch die rechte Seite von (2.2.24) jeweils die volle Information über die jeweilige Theorie (CFT bzw. Stringtheorie) enthalten. Auch sind beide Ausdrücke als Funktionale des Rand-Feldes ϕ_0 formuliert. Hinzu kommt, dass beide Theorien invariant unter der selben Symmetriegruppe ($SO(D,1)$) sind. Die formale Struktur der beiden Theorien ist also gleich. Das genügt zwar im Allgemeinen nicht um sie miteinander zu identifizieren, ist aber für die Zwecke dieser Arbeit ausreichend.

Als einen Konsistenz-Test kann man die numerischen Freiheitsgrade der beiden äquivalenten Theorien abzählen. [10] Aus der Wirkung der AdS-Theorie gewinnt man die Euler-Lagrange-Gleichungen (ELG). Dies sind partielle Differentialgleichungen (PDEs) zweiter Ordnung. Deren allgemeine Lösung hat meist die Struktur (pathologische Fälle seien hier ausgeschlossen), dass sie aus zwei beliebigen Funktionen von $(D-1)$ Variablen besteht, die zweimal stetig differenzierbar sind. Wenn man auf einer $(D-1)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeit (die hinreichend gutartig ist) zwei Randbedingungen vorgibt, bekommt man damit eine eindeutige Lösung. Die Forderung $\phi(x \in \partial AdS) = \phi_0$ liefert bereits eine Randbedingung. Damit hat die AdS-Theorie für jeden Punkt auf dem Rand nur einen Freiheitsgrad. Das entspricht gerade der Anzahl der Freiheitsgrade der CFT. Zwar gibt es für die Feld-Operatoren der CFT eine Zeitentwicklungsgleichung (die Heisenberg-Gleichung, also eine PDE erster Ordnung, für deren eindeutige Lösung man lediglich die Operatoren auf einer $(D-2)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit benötigt). Allerdings gibt es nicht nur einen sinnvollen Feldoperator $\mathcal{O}$, sondern es können auch Operatorprodukte $\mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y)\ldots$

[10] Mit "Anzahl der numerischen Freiheitsgrade" ist hier gemeint, wie viele reelle Zahlen man einem Computer übergeben müsste, damit dieser die zueinander dualen Felder der beiden Theorien in deren gesamten Definitionsbereichen berechnen kann.

betrachtet werden (oder äquivalent: Vielteilchenanregungen). Damit hat eine CFT weitere Freiheitsgrade: An jedem Raumpunkt (zu einer festen Zeit t) müssen, damit die CFT vollständig und eindeutig bestimmt ist, Randbedingungen für sämtliche Operatorprodukte vorgegeben werden. [11] Das bedeutet, dass auf jedem Punkt der $(D-2)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit, unendlich viele Randbedingungen vorgegeben werden müssen. Dies lässt sich auf ein System mit einem Freiheitsgrad auf jedem Punkt einer $(D-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit abbilden. Etwas präziser ist ein Argument, dass die AdS-Theorie und die CFT auf einem endlichen D-dimensionalen Gitter betrachtet und die numerischen Freiheitsgrade zählt. Anschließend geht man zum Grenzwert eines verschwindendes Gitterabstandes über. Bei dieser Betrachtung stellt man ebenfalls die Gleichheit der Anzahl der Freiheitsgrade fest. Eine weitere Abzählmethode ist in [21] dargestellt. Dabei werden die operatorwertigen Freiheitsgrade der CFT mit dem Informationsgehalt der Stringtheorie verglichen, welcher mit der Bekenstein-Hawking-Entropie identifiziert wird.

Näherungen

Mit Hilfe der AdS/CFT Korrespondenz kann man versuchen, Observablen auszurechnen, die sich störungstheoretisch nicht behandeln lassen. In (2.2.24) bedeutet das, dass sich die linke Seite der Gleichung nicht in eine konvergente Potenzreihe umschreiben lässt. Ungünstigerweise steht auf der rechten Seite ein Ausdruck, der ebenfalls nicht gut zu handhaben ist. Man versucht daher die Korrespondenz nicht in der allgemeinen Form, sondern nur in bestimmten Grenzfällen auszuwerten. Der häufigste Grenzfall ist, wenn man statt drei Farbladungen (wie in der QCD) unendlich viele Farbfreiheitsgrade zulässt, also wenn man die Korrespondenz für eine CFT mit der Eichgruppe $SU(N), N \to \infty$ untersucht. Dabei wird der Parameter (die 't Hooft-Kopplungskonstante) $\lambda = g_{CFT}^2 N$ konstant gehalten. Dieser Grenzfall wird in der Literatur häufig 't Hooft-Grenzfall genannt. In der CFT tragen dann nur noch planare Diagramme bei [4], also Feynmangraphen, die man auf eine Ebene zeichnen kann, ohne dass sich die Linien schneiden. Auf der Stringseite der Korrespondenz entspricht dies dem semiklassischen Grenzfall, da die Kopplungskonstante der Stringtheorie $g_s = g_{CFT}^2$ beliebig klein wird. Damit verschwinden die Quantenkorrekturen und eine klassische String-Theorie bleibt übrig. Noch weiter kommt man, wenn man annimmt, dass die 't Hooft-Kopplungskonstante $\lambda \gg 1$ ist. Dies entspricht dem Fall, dass die

[11] Das kann man sich am Beispiel des harmonischen Oszillators plausibel machen. Die Kenntnis des Aufsteige-Operators (der einem Feldoperator der CFT entspricht) genügt noch nicht zur Vorhersage von physikalischen Eigenschaften. Dafür ist die Angabe des genauen Zustands (z.B. in Form von Besetzungszahlen *aller* Energieniveaus) nötig. Im Vielteilchenbild bedeutet das die Kenntnis *aller* Teilchenzahlen, die sich in den Zuständen $(a^+)^n|0\rangle$ befinden.

String-Spannung [12] ebenfalls sehr groß ist [4]. Da diese $\sim l_s^{-2}$ ist (l_s ist die String-Länge) [18], entspricht das dem Übergang zu punktförmigen Objekten ohne innerer Dynamik. Diese degenerierten Strings bewegen sich dann auf Geodäten des Hintergrundfeldes. In diesem Limes hat man also eine Äquivalenz zwischen einer Eichtheorie mit einer großen Anzahl an "Farben" und einer klassischen (Super-)Gravitationstheorie.

Beispiel

Um die Wirkungsweise der Korrespondenz zu demonstrieren, soll hier eine Zweipunkt-Korrelationsfunktion für ein skalares Operatorfeld der CFT berechnet werden. Die genaue Rechnung ist im Anhang D zu finden. Zunächst bestimmt man die Lorentz-Struktur des Quellenfeldes. Da der Quellenterm in (2.2.26) ein Lorentz-Skalar ist und $\mathcal{O}$ ein Skalarfeld sein soll, muss auch ϕ_0 und damit ebenso das zu $\mathcal{O}$ duale Feld ϕ ein Skalarfeld sein. Für ein Skalarfeld ist die AdS-Wirkung bekannt. Damit kann man die Lagrange-Gleichungen aufstellen und die allgemeine Lösung in Abhängigkeit von den Randbedingungen bestimmen. Eine Methode wäre z.B. die Anwendung des Green'schen Satzes. Eine etwas besser angepasste Variante ist die im Anhang D verwendete. Bei dieser findet man die Lösungsfunktion ϕ durch Faltung der Randbedingungen ϕ_0 mit einer Green'schen Funktion $K(x)$ des Ableitungsoperators der Bewegungsgleichung, bei der die δ-förmige Inhomogenität auf dem Rand liegt. Diese Green'sche Funktion findet man dadurch, dass man zunächst eine Lösung der Bewegungsgleichung bestimmt, bei der die δ-förmige Inhomogenität sich am Punkt unendlich befindet. Danach wird das Ergebnis durch Symmetrietransformationen des AdS auf den Fall einer beliebigen Position der Inhomogenität übertragen. Wenn man dies gemacht hat, ist durch

$$\phi[\phi_0](y) := \int\limits_{\partial AdS} d^d x K(x-y)\phi_0(x) \tag{2.2.30}$$

ein Funktional definiert, dass den Randbedingungen ϕ_0 die gesamte Lösung ϕ zuordnet. Dieses Resultat setzt man in die AdS-Wirkung ein und kann mittels (2.2.29) und (2.2.27) die Zweipunkt-Korrelationsfunktion des CFT-Operatorfeldes $\mathcal{O}$ berechnen. Sie ergibt sich zu:

$$\langle 0|\mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y)|0\rangle = \frac{2^{2D-4}\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}D\right)\right)^2}{\pi^D}\frac{(D-1)}{(x-y)^{D-2}}, \tag{2.2.31}$$

wobei die Γ-Funktion durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-z} z^{x-1} dx. \tag{2.2.32}$$

[12] Die Stringspannung T beschreibt den Energiegehalt eines infinitesimal langen Stringstückes $T \sim \frac{dE}{dl_s}$

definiert ist.

2.2.4 Asymptotischer Anti-de Sitter-Raum

Im Kontext der Anwendung der AdS/CFT-Korrespondenz auf Schwerionenstöße am LHC ist man an Systemen interessiert, in denen man thermodynamische Größen definieren kann. Wenn die fundamentalen Felder des Mediums, das man beschreiben will, konforme Symmetrie haben, kann man die AdS/CFT-Korrespondenz anwenden. In einem thermodynamischen System sind sehr viele Freiheitsgrade angeregt. Da die AdS/CFT-Korrespondenz eine exakte Äquivalenz sein soll, muss sich jede Anregung der CFT in eine Anregung der String-Freiheitsgrade übersetzen. Statt makroskopisch viele Anregungen vor einem (statischen) AdS-Hintergrund zu berechnen, ist es geschickter, eine effektive Theorie zu betrachten, bei der die Anregungen in die Metrik absorbiert werden. Jedoch ist dabei nicht jede effektive Metrik möglich. Die Eigenschaft, dass die Isometrie-Gruppe der effektiven D-dimensionalen Raumzeit auf dem Rand wie die konforme Gruppe wirkt, bleibt bestehen. [13]. Wenn man ein System betrachtet, das sich durch Angabe seines Energie-Impuls-Tensors bereits vollständig beschreiben lässt, so entspricht diesem ein String-System, dessen Anregungen sich vollständig in die Metrik absorbieren lassen. Man bekommt effektiv ein System, dass in einem deformierten AdS "lebt", in dem aber keine Strings angeregt sind. Damit erfüllt die Hintergrundmetrik die Vakuum-Einstein-Gleichungen (2.2.6). Dies motiviert folgende Definition:

Def.: asymptotischer Anti-de Sitter-Raum

Unter einem asymtotischen Anti-de Sitter-Raum (aAdS) versteht man eine Raumzeit, die die Vakuum-Einstein-Gleichungen (2.2.6) mit negativer kosmologischer Konstante erfüllt und auf ihrem Rand lokal isometrisch zu einem Anti-de Sitter-Raum ist. Insbesondere gilt für den Krümmungstensor

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\mathcal{B}^2}(g_{\rho\nu}g_{\mu\sigma} - g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho}) + \mathcal{O}(z - z_0),$$

wobei z eine Koordinate darstellt, die überall auf dem Rand den Wert z_0 hat. (Ein solches Koordinatensystem lässt sich immer finden). Damit haben alle Krümmungsgrößen auf dem Rand das gleiche Aussehen, das die entsprechenden Größen für einen AdS haben.

[13] Sonst könnte man durch Anwenden eines Elements der Isometriegruppe die String-Konfiguration in eine ununterscheidbare Konfiguration transformieren; in der CFT würde diese Transformation aber das Medium verändern. Das würde die Äquivalenz der beiden Theorien verletzen.

2.3 Relativistische Schwerionenstöße

2.3.1 Das Quark-Gluon-Plasma

Im Large Hadron Collider (LHC) am CERN können neben Proton-Proton-Kollisionen auch Kollisionen von schweren Atomkernen untersucht werden. Bei diesen Experimenten hat jedes Nukleon eine Energie von einigen TeV (In der Experimentserie im November 2010: $E = 1.38A\,\mathrm{TeV}$[14]). Bei der Kollision verlieren die Kerne einen großen Teil ihrer kinetischen Energie. In dem Kollisionsbereich ist demnach eine extrem hohe Energie von einigen hundert TeV konzentriert. Dies genügt zur Erzeugung von sehr vielen Sekundärteilchen, sodass man einen Bereich von einigen Femtometern Ausdehnung bekommt, in dessen Inneren man thermodynamische Größen sinnvoll definieren kann. Die Quarkdichte ist sehr viel höher als die in den Nukleonen. Sie ist so hoch, dass der Abstand zum nächsten Nachbarn kleiner ist, als der mittlere Abstand der Valenzquarks in den Nukleonen. Darum verliert die Zuordnung von Quarks zu Nukleonen ihren Sinn. Man erhält vielmehr ein System aus vielen Quarks und Gluonen, die miteinander wechselwirken. Dieser Zustand stark wechselwirkender Materie wird Quark-Gluon-Plasma (QGP) genannt.

Ziel vieler Experimente (und den theoretischen Arbeiten dazu) ist es, diesen Zustand zu verstehen. Das bedeutet einerseits, dass man das zugehörige Phasendiagramm bestimmen und alle darin befindlichen Phasen identifizieren will. Andererseits ist man auch an den Zustandsgleichungen (oder äquivalent: der Gibbs'schen Fundamentalrelation) für jede dieser Phasen interessiert. Damit könnte man alle thermodynamischen Größen des Systems berechnen. Um die Zustandsgleichungen zu bestimmen, kann man die Hydrodynamik verwenden. Aufgrund ihrer Eigenschaft als allgemeine Entwicklung nach Gradienten der makroskopischen Freiheitsgrade, kann man diese für einen gewissen Zeitbereich als Approximation an die tatsächliche Dynamik betrachten und mit ihrer Hilfe die Dynamik des QGP berechnen. Diese Dynamik ist sensitiv auf die Zustandsgleichung des Plasmas. Wenn es gelingt zu berechnen, wie ein für die hydrodynamische Rechnung geeigneter Anfangszustand aussieht, und wenn man versteht, wie der Ausfrier-Vorgang vonstatten geht, so kann man aus der Kenntnis der Detektorsignale und des Aufbaus der stoßenden Kerne bestimmen, mit welcher Zustandsgleichung das Mediums beschrieben werden muss.

2.3.2 Relativistische Hydrodynamik

In diesem Abschnitt sollen die für diese Arbeit wichtigen hydrodynamischen Relationen eingeführt und begründet werden. Für eine ausführliche Einführung sei beispielsweise auf

[22, 23] verwiesen. Wenn man ein System betrachtet, das vollständig durch eine skalare Größe und ein Vierervektorfeld bestimmt ist, so muss man den Energie-Impuls-Tensor dieses Systems aus diesen Größen (und der Metrik) konstruieren können. Die skalare Größe könnte beispielsweise die Temperatur oder die Energiedichte eines Systems und das Vektorfeld sein Geschwindigkeitsfeld sein. Zur Konstruktion des Energie-Impuls-Tensors hat man also folgende Bausteine zur Verfügung:

ϵ ... die Energiedichte,
u_μ ... das Geschwindigkeitsfeld,
∇_μ ... die kovariante Ableitung,
$g_{\mu\nu}$ ... die Metrik.

Aus diesen Größen muss man versuchen, symmetrische Tensoren zweiter Stufe zu konstruieren. Üblicherweise sortiert man die Terme nach dem Grad der Ableitung, den sie enthalten. Als Terme ohne Ableitung sind möglich:

$$g_{\mu\nu}, \quad u_\mu u_\nu. \tag{2.3.1}$$

Der Energie-Impuls-Tensor hat also in nullter Ordnung in den Gradienten folgende Form:

$$T_{\mu\nu} = a_1 g_{\mu\nu} + a_2 u_\mu u_\nu; \tag{2.3.2}$$

hierbei sind a_1 und a_2 skalare Funktionen. Die Landau-Bedingung $\epsilon = T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ [24] erlaubt die Definition des Begriffs "Energiedichte" ϵ:

$$\epsilon := T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = a_1 u^2 + a_2 (u^2)^2 = -a_1 + a_2. \tag{2.3.3}$$

Der Energie-Impuls-Tensor (2.3.2) bekommt dann folgende Form:

$$T_{\mu\nu} = \epsilon u_\mu u_\nu + p(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu), \tag{2.3.4}$$

wobei der Parameter a_1 mit dem Druck p identifiziert wurde (vgl. dazu [24] §133). Energiedichte und Druck sind jedoch keine unabhängigen Größen, da ihr Zusammenhang $p = p(\epsilon)$ aus der zu Grunde liegenden mikroskopischen Theorie (im Falle von relativistischen Schwerionenkollisionen also aus der QCD) abgeleitet werden kann. Der Zusammenhang $p = p(\epsilon)$ wird Zustandsgleichung genannt. Eine Begründung, die dies rechtfertigt, wird in Abschnitt 2.3.3 gegeben.

Als nächstes kann man sich überlegen, wie die Terme aussehen, die genau einen (bzw. zwei) Gradienten enthalten. Die Zahl möglicher Terme wächst schnell (ebenso wie ihre

Komplexität), und es ist wenig erhellend diese Schritte hier vorzuführen. Stattdessen seien hier noch die Terme erster Ordnung in den Gradienten angegeben und zum Nachvollziehen der Konstruktion auf [25] verwiesen:

$$T_{\mu\nu} = \epsilon u_\mu u_\nu + p\Delta_{\mu\nu} + a_3 \left[\Delta^\alpha_\mu \nabla_\alpha u_\nu + \Delta^\alpha_\nu \nabla_\alpha u_\mu - \frac{2}{3}\Delta_{\mu\nu}\nabla_\alpha u^\alpha \right] + a_4 \nabla_\mu u^\mu. \tag{2.3.5}$$

Dabei ist $\Delta^\alpha_\mu = \Delta_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} = \delta^\alpha_\mu + u^\alpha u_\mu$ der Projektor in den Orthogonalraum der Vierergeschwindigkeit. Die beiden skalaren Felder a_3 und a_4, die in dieser Ordnung neu hinzukommen, können mit der Scherviskosität η bzw. Volumenviskosität ζ identifiziert werden. Auch diese Größen sind nicht unabhängig von der Energiedichte, sondern können aus der zu Grunde liegenden mikroskopischen Theorie berechnet werden.

Mit Hilfe der AdS/CFT-Korrespondenz kann man zeigen, dass für ein stark gekoppeltes konformes Medium das Verhältnis η/s den Wert $\frac{1}{4\pi}$ annimmt [26], wobei s die Entropiedichte darstellt. Auch für das QGP gilt ein ähnlich kleiner Wert. Es ist damit von allen bisher untersuchten Substanzen das Medium, das einem idealen Fluid am nächsten kommt [27]. Zum Vergleich: η/s von Wasser bei Raumtemperatur ist etwa um den Faktor 50 größer.

Bei der hydrodynamischen Herangehensweise wird der allgemeine Energie-Impuls-Tensor eines Mediums bestimmt, welches nur durch Energiedichte und Geschwindigkeitsfeld charakterisiert ist. Darum müssen in diesem Grenzfall alle mikroskopischen Theorien auf einen solchen Energie-Impuls-Tensor führen. Also kann man die Hydrodynamik als effektive makroskopische Beschreibung [15] der langreichweitigen Moden aller mikroskopischer Theorien verwenden. Da für Berechnungen die Entwicklung bei einer bestimmten Ableitungsordnung abgebrochen werden muss, besitzt die Hydrodynamik nur in dem Limes Gültigkeit, in dem die vernachlässigten Terme klein sind. Die Dynamik des Systems wird dann durch die Energie-Impuls-Erhaltung bestimmt:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{2.3.6}$$

Das sind vier Gleichungen zur Bestimmung der vier Unbekannten ϵ und u^a. Der lateinische Index hierbei deutet an, dass nur die räumlichen Komponenten der Vierergeschwindigkeit unabhängig sind und die Zeitkomponente durch die Normierung festgelegt wird. Es ist jedoch üblicher, diese Gleichungen in projizierter Form aufzuschreiben:

$$0 = u_\nu \nabla_\mu T^{\mu\nu}, \tag{2.3.7}$$

$$0 = \Delta^\rho_\nu \nabla_\mu T^{\mu\nu}. \tag{2.3.8}$$

[15] Damit die makroskopische Beschreibung sinnvoll ist, muss sich das System nahe am lokalen Gleichgewicht befinden.

(2.3.7) ist dann die relativistische Form der Kontinuitätsgleichung, die dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik entspricht, und (2.3.8) sind die relativistischen Euler-Navier-Stokes-Gleichungen.

2.3.3 Relativistische Thermodynamik

Bei der Formulierung der klassischen Thermodynamik betrachtet man Systeme mit endlichem Volumen. Eine Konsequenz davon ist, dass in den thermodynamischen Relationen nicht-lokale Größen (wie beispielsweise Volumen, innere Energie, Entropie,...) auftreten. Das führt aber bei relativistischen Geschwindigkeiten und großen Raumkrümmungen zu Problemen. Beispielsweise muss man sich über die Behandlung der Systembegrenzung Gedanken machen, da diese durchaus auch raumartig getrennte Punkte umfassen kann sowie in verschiedenen Bezugssystemen unterschiedlich aussieht. Auch die Ersetzung von nicht kovarianten Ausdrücken durch eine relativistische Verallgemeinerung führt zu Problemen. Ebenso können Teile des betrachteten Volumens hinter Horizonten verborgen sein.

Um solche Probleme besser handhaben zu können, wird die Thermodynamik aus lokalen Größen aufgebaut. Dazu kann man mit der Gibbs'schen Fundamentalform der Thermodynamik starten:

$$dE = TdS - pdV + \mu dN, \tag{2.3.9}$$

wobei E die innere Energie, T die Temperatur, S die Entropie, p den Druck, V das Volumen, μ das chemische Potential und N die Teilchenzahl bezeichnen. Beide Seiten der Gleichung dividiert man durch dV und gelangt somit von extensiven nicht-lokalen Größen zu intensiven lokalen Größen:

$$\frac{dE}{dV} = T\frac{dS}{dV} - p\frac{dV}{dV} + \mu\frac{dN}{dV}. \tag{2.3.10}$$

Das führt mit den entsprechenden Dichten $\epsilon = \frac{dE}{dV}$ (Energiedichte), $s = \frac{dS}{dV}$ (Entropiedichte), $n = \frac{dN}{dV}$ (Anzahldichte) auf

$$\epsilon + p = Ts + \mu n. \tag{2.3.11}$$

In den Rechnungen, die in dieser Arbeit vorgestellt werden, wurde meist die Relation ohne den μ-Term verwendet. Man muss also noch herausfinden, welche Art von Materie man auf diese Weise beschreibt. Aus der nichtrelativistischen Thermodynamik ist bekannt:

$$\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{V,S}. \tag{2.3.12}$$

μ gibt also an, wie viel Energie es kostet, die Teilchenzahl des Systems zu ändern. Insbeson-

dere wird $\mu = 0$ (und dieser Term verschwindet aus der Gibbs'schen Fundamentalform), wenn keine Energie nötig ist. Das wiederum kann nur bedeuten, dass die Teilchenzahl nicht erhalten bleibt. Die Relation

$$\epsilon + p = Ts \tag{2.3.13}$$

ist also für Teilchen, deren Anzahl nicht erhalten ist, gültig. Beispiele dafür sind Photonen und Bose-Einstein-Kondensate. In der lokalen Formulierung bedeutet das, dass die Größe $n^\mu := nu^\mu$ keine Kontinuitätsgleichung erfüllt. u^μ ist dabei die lokale Vierergeschwindigkeit des Mediums. Analog zur (Ladungs-) Stromdichte der Maxwell-Theorie (für die gilt $j^\mu = \rho u^\mu$) interpretiert man diese Größe als Teilchenstromdichte. Ein wenig verallgemeinern kann man die Aussage, indem man sich Systeme mit erhaltenen Ladungen (elektrische Ladung, Baryonenzahl, Strangeness...) betrachtet. Die Gibbs'sche Fundamentalform (2.3.9) erhält dann für jede dieser Ladungen einen Term der Form $\mu_i dN_i$, wobei N_i die betreffende Ladung und μ_i deren chemisches Potential ist. In der Dichteformulierung (2.3.11) kommen dann Terme der Form $\mu_i n_i$ hinzu ($n_i := dN_i/dV$). Da diese in (2.3.13) nicht auftreten, kann man (2.3.13) als Gibbs'sche Fundamentalform eines Mediums ohne (lokal) erhaltene Ladungen ansehen.

Da die Terme $\mu_i n_i$ ebenfalls verschwinden, falls die n_i Null sind, kann (2.3.13) auch als Fundamentalform für ein System interpretiert werden, bei dem es zwar erhaltene Ladungen N_i gibt, diese aber identisch verschwinden. Das wären dann Systeme, bei denen es genausoviele Teilchen wie Antiteilchen gibt. In guter Näherung gilt das für das QGP, das sich bei den Schwerionenkollisionen am LHC bildet. Das liegt daran, dass in den seltensten Fällen die stoßenden Protonen und Neutronen all ihre Energie verlieren, sondern sich auch nach der Kollision noch fast mit Lichtgeschwindigkeit vom Kollisionsort entfernen. Das Plasma wird im Wesentlichen von den Sekundärteilchen gebildet, die durch Paar-Erzeugung produziert werden. Damit befindet sich im Plasma die gleiche Anzahl von Quarks und Antiquarks.

Nun kann man sich die Frage stellen, in welcher Form die Zustandsgleichungen angegeben werden. Als Zustandsgleichungen wird ein Satz von Relationen zwischen Zustandsgrößen bezeichnet, aus dessen Kenntnis man ein thermodynamisches Potential bestimmen kann. In der nichtrelativistischen Thermodynamik nennt man für ein System ohne erhaltene Teilchenzahl (bzw. allgemeiner: ohne erhaltene Ladungen) die Relationen

$$T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V, \qquad p = \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S \tag{2.3.14}$$

Zustandsgleichungen des Systems. Die erste Gleichung überträgt sich direkt auf die Dich-

ten:

$$T = \left(\frac{d\epsilon}{ds}\right) \tag{2.3.15}$$

(dazu muss man in (2.3.14) lediglich V infinitesimal wählen, aber während der Ableitung konstant halten). Bei der Gleichung für den Druck ist es nicht so klar, wie sie zu übertragen ist. Hier müsste man sorgfältig die Kettenregel anwenden und bei den Umformungen versuchen das Volumen richtig zu behandeln. Ein viel einfacherer Weg besteht darin, das totale Differential der Gleichung (2.3.13) zu berechnen:

$$d\epsilon + dp = Tds + sdT. \tag{2.3.16}$$

Wegen (2.3.15) ist

$$d\epsilon = Tds \tag{2.3.17}$$

und damit bleibt übrig:

$$dp = sdT. \tag{2.3.18}$$

Also gilt auch folgende Relation:

$$\frac{dp}{d\epsilon} = \frac{s}{T}\frac{dT}{ds}. \tag{2.3.19}$$

Wenn man also den Zusammenhang $p(\epsilon)$ kennt, ist es möglich, das thermodynamische Potential zu berechnen. Dazu nutzt man (2.3.17) und (2.3.19) um s und T in Abhängigkeit von ϵ zu bestimmen. Das kann nach dem gewünschten Potential (z.B. $h = \epsilon + p$ (Enthalpiedichte), s, ϵ, ...) umgestellt werden. Also genügt zur Beschreibung des thermodynamischen Systems die Angabe der Abhängigkeit $p = p(\epsilon)$. Insofern ist nicht nur gerechtfertigt, dass man diesen Zusammenhang Zustandsgleichung nennt, sondern für ein System, das durch (2.3.13) charakterisiert wird, ist es sogar *die* Zustandsgleichung.

3 Eindimensionale Hydrodynamik

3.1 Methode der Charakteristiken

Die Methode der Charakteristiken ist eine Lösungsmethode für partielle Differentialgleichungen (PDEs) erster Ordnung. Sie kann zur Lösung von PDEs der Form

$$a(t,x,f)\partial_t f + b(t,x,f)\partial_x f + c(t,x,f) = 0 \tag{3.1.1}$$

eingesetzt werden. Dazu betrachtet man die Lösung als Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$:

$$(t,x,z)^T = (t,x,f(t,x))^T. \tag{3.1.2}$$

Die Tangentialvektoren an diese Hyperfläche sind

$$v_1 := (1,0,\partial_t f)^T, \qquad v_2 := (0,1,\partial_x f)^T. \tag{3.1.3}$$

Der Normalenvektor ist damit durch das Kreuzprodukt gegeben:

$$v_3 := v_2 x v_1 = (\partial_t f, \partial_x f, -1). \tag{3.1.4}$$

Sei $\mathcal{C}$ eine Kurve, deren Tangentialvektor orthogonal zu v_3 ist. Da der Orthogonalraum an eine Hyperfläche eindimensional ist, muss der Tangentialvektor damit parallel zu der Hyperfläche sein. Ein Vektor, der immer orthogonal zu v_3 ist, ist

$$v_4 := (a(t,x,f), b(t,x,f), -c(t,x,f))^T. \tag{3.1.5}$$

Das Skalarprodukt zwischen v_3 und v_4 verschwindet wegen (3.1.1) immer. Damit liegt eine Kurve, deren Tangentialvektorfeld an jedem Punkte der Kurve parallel zu v_4 ist immer in der Lösungsmannigfaltigkeit, sofern mindestens ein Punkt dort liegt. Man sucht also

Kurven, für die gilt:

$$\frac{d}{dr}\begin{pmatrix} t_c(r) \\ x_c(r) \\ z_c(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t_c(r), x_c(r), z_c) \\ b(t_c(r), x_c(r), z_c) \\ -c(t_c(r), x_c(r), z_c) \end{pmatrix}. \tag{3.1.6}$$

Der Skalierungsparameter, um den sich die beiden Vektoren unterscheiden können, kann dabei in den Kurvenparameter r absorbiert werden. Kurven, die (3.1.6) erfüllen, werden Charakteristiken genannt. Die ersten beiden Gleichungen in (3.1.6) bestimmen den Verlauf der Charakteristik in der (t, x)-Ebene und die dritte Gleichung legt fest, wie sich $f(t, x)$ entlang der Charakteristiken ändert. Das Lösen eines Anfangswertproblems für eine PDE wird damit auf das Lösen eines Anfangswertproblems für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen reduziert. Dies ist numerisch wesentlich stabiler und lässt manchmal auch eine analytische Lösung zu. Wenn das Charakteristikenbündel die gesamte (x, t)-Ebene überdeckt, hat man damit f in der gesamten Ebene bestimmt. Das Verfahren lässt sich problemlos auf PDEs von drei oder mehr Variablen erweitern. In Anhang F wird mit der Methode der Charakteristiken das Riemannproblem in Milne-Koordinaten gelöst.

3.2 Numerische Lösungsmethoden

3.2.1 Methode der Charakteristiken

Der große Vorteil der Methode der Charakteristiken ist, dass man mit ihr eine PDE für eine Funktion von n Variablen in ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen überführt. Diese lassen sich numerisch sehr viel besser berechnen. Es wird jedoch sprunghaft komplizierter, wenn man statt einer PDE ein System bereits aus zwei gekoppelten PDEs lösen will. Um das zu verstehen, werden die räumlich eindimensionalen hydrodynamischen Gleichungen in geeigneten Koordinaten (θ, η) betrachtet:

$$0 = (\partial_\theta + \tilde{v}\partial_\eta)\phi + (\tilde{v}\partial_\theta + \partial_\eta)y, \tag{3.2.1}$$

$$0 = c_s^2(\tilde{v}\partial_\theta + \partial_\eta)\phi + (\partial_\theta + \tilde{v}\partial_\eta)y. \tag{3.2.2}$$

ϕ und y sind dabei Umschreibungen der hydrodynamischen Freiheitsgrade ϵ (Energiedichte) und v (Geschwindigkeit). $c_s = \sqrt{\frac{dp}{d\epsilon}}$ ist die durch die Zustandsgleichung $p = p(\epsilon)$ gegebene Schallgeschwindigkeit und wurde in diesem Fall als konstant angenommen. In (3.2.1) und

(3.2.2) bedeuten:

$$\begin{aligned}
\theta &:= \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{t^2-x^2}{t_0^2}\right), \\
\eta &:= \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{t+x}{t-x} = \operatorname{Artanh}\left(\tfrac{x}{t}\right), \\
y &:= \tanh(v) \Leftrightarrow u^\mu = (\cosh(y), \sinh(y), 0, 0), \\
\phi &:= \tfrac{1}{1+c_s^2}\ln\left(\tfrac{\epsilon}{\epsilon_0}\right), \\
\tilde{v} &:= \tanh(y-\eta).
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

ϵ_0 und t_0 sind dabei positive, ansonsten frei wählbare, reelle Konstanten. Die Gleichungen (3.2.1) und (3.2.2) können in eine Form gebracht werden, die besonders gut für die Methode der Charakteristiken geeignet ist (die einzelnen Rechenschritte befinden sich in Anhang E):

$$0 = \partial_\theta a_\pm \tanh(y - \eta \pm y_s)\partial_\eta a_\pm. \tag{3.2.4}$$

Dabei ist $y_s := \operatorname{Artanh}(c_s)$ die Schallrapidität und $a_\pm$ sind definiert durch:

$$a_\pm := \frac{1}{2}(c_s\phi \pm y). \tag{3.2.5}$$

Mit der Methode der Charakteristiken erhält man aus den zwei PDEs ein System aus sechs gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dr}\theta_\pm^c = 1, \tag{3.2.6}$$

$$\frac{d}{dr}\eta_\pm^c = \tanh(a_+ - a_- - \eta \pm y_s), \tag{3.2.7}$$

$$\frac{d}{dr}a_\pm^c = 0. \tag{3.2.8}$$

Ein Computer-Programm, das die Methode der Charakteristiken anwendet, würde folgendem Algorithmus folgen:

1. Seien $a_\pm$ zu einer Zeit θ_i für alle η_j auf einem Gitter bekannt.
2. Berechne in jedem Gitterpunkt die Richtung der beiden Charakteristiken, die dort starten.
3. Gehe einen kleinen Schritt auf der Charakteristik entlang, und zwar so weit, dass sich $\theta_\pm^c(r)$ um $\Delta\theta$ ändert.
4. Entlang der $+$-Charakteristik ändert sich a_+ nicht, entlang der $-$-Charakteristik bleibt a_- konstant (3.2.8).
5. Interpoliere um die Werte für $a_\pm$ auf den η-Werten, die zum Gitter gehören, zu bestimmen. Wenn das geschehen ist, hat man $a_\pm$ zur Zeit $\theta_{i+1} = \theta_i + \Delta\theta$ bestimmt.

Weiter mit 2.

Allerdings verliert man durch das Interpolieren viel von der Genauigkeit und Rechengeschwindigkeit der Integrationsroutinen für gewöhnliche Differentialgleichungen.

3.2.2 Verwendung von Odeint

Eine andere Methode umgeht dieses Problem, indem sie die partiellen Differentialgleichungen durch ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen annähert. Wenn der Gitterabstand Δ_η hinreichend klein ist, kann man approximieren:

$$\partial_\eta a_\pm(\eta) \approx \frac{a_\pm(\eta+\Delta_\eta) - a_\pm(\eta-\Delta_\eta)}{2\Delta_\eta}. \tag{3.2.9}$$

Die beiden PDEs (3.2.4) werden interpretiert als System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für die $2N$ Funktionen $a^i_\pm(\theta)$, wobei $a^i_\pm(\theta) := a_\pm(\eta_i, \theta)$ ist. η_i symbolisiert dabei die η-Werte, auf denen die Lösung berechnet werden soll, und N ist ihre Anzahl. (3.2.4) nimmt dann folgende Form an:

$$\partial_\theta a^i_\pm = -\tanh(a^i_+ - a^i_- - \eta_i \pm y_s)\frac{a^{i+1}_\pm - a^{i-1}_\pm}{2\Delta_\eta}. \tag{3.2.10}$$

Für die Randpunkte kann man statt der Zentraldifferenz in (3.2.9) eine einseitige Differenz wählen. Dieses System kann dann von einer Lösungsroutine für Systeme gewöhnliche Differentialgleichungen (im Programmpaket 'scipy' der Sprache python heißt diese "odeint") gelöst werden.

3.2.3 Verwendung einer partiellen Lösung

Einen anderen Ansatz für die numerische Lösung bekommt man, indem man die PDEs (3.2.4) teilweise löst. Es gelingt nämlich eine Lösung zu finden, wenn das Argument des Tangens Hyperbolicus nicht von θ abhängt, wenn man also PDEs folgender Form betrachtet:

$$\partial_\theta a_\pm = -\tanh(A(\eta) - \eta \pm y_s)\partial_\eta a_\pm. \tag{3.2.11}$$

Die Lösung ist dann

$$a_\pm = F_\pm\left(\theta - \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{dx}{\tanh(A(x) - x \pm y_s)}\right). \tag{3.2.12}$$

Dabei sind $F_\pm$ beliebige, einmal stetig differenzierbare Funktionen. Die Lösungsmethode besteht darin, dass man folgendes Schema iterativ anwendet:

1. Sei $a_\pm$ zur Zeit θ_i für alle η-Werte des Gitters bekannt.
2. Setze: $A(\eta) := a_+(\theta_i, \eta) - a_-(\theta_i, \eta)$.
3. Passe $F_\pm(x)$ so an, dass $F_\pm\left(-\int_{\eta_0}^{\eta}(...)\right) = a_\pm(\theta_i, \eta)$. Das erreicht man mit $F_\pm := a_\pm(\theta_i, h^{-1}(\eta))$, wobei h^{-1} die inverse Funktion zu $h(\eta) = -\int_{\eta_0}^{\eta} \frac{dx}{\tanh(A(x)-x\pm y_s)}$ ist.
4. Berechne mit (3.2.12) $a_\pm$ einen kleinen Zeitschritt später (bei θ_{i+1}). Weiter mit 1.

Die beiden letzten Methoden wurden implementiert und mit ihnen wurde das Verhalten eines eindimensional strömenden Mediums studiert In Abb. 3.2.1 wird das numerische

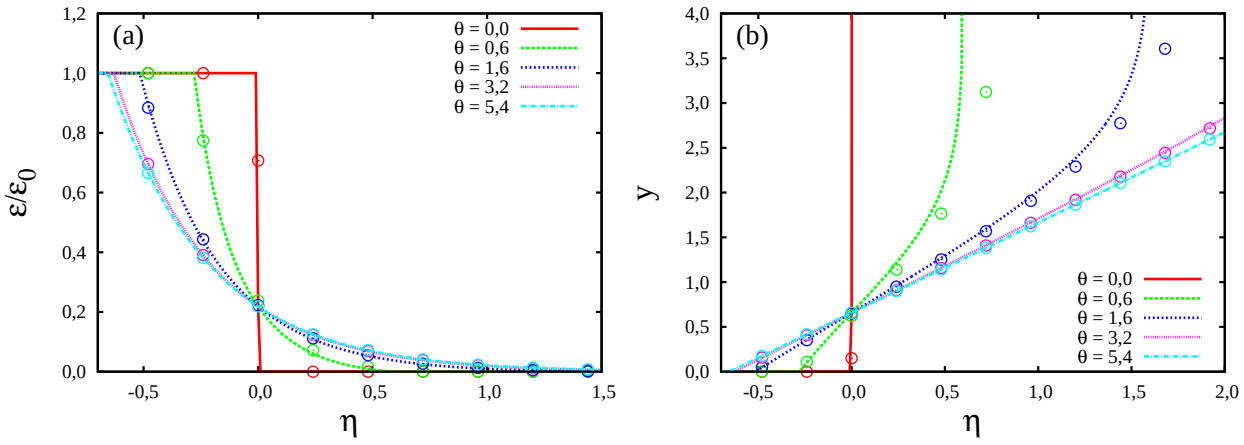

Abbildung 3.2.1: Vergleich des numerischen Ergebnisses mit der analytischen Lösung des Riemann-Problems in Milne- Koordinaten (vgl: Anhang F). In (a) ist die Energiedichte ϵ zu verschiedenen Zeiten dargestellt. Die Linien geben das analytische Ergebnis an, die Kreise sind eine Auswahl der numerischen Punkte. In (b) ist die Fluid- Rapidität y dargestellt. Auch hier stehen Linien für das analytische Ergebnis, und die Kreise für eine Auswahl der numerischen Punkte

Ergebnis verglichen mit dem analytischen Resultat für das Riemann-Problem in Milne-Koordinaten (vgl. Anhang F). [1] Die Θ-förmige Energiedichteverteilung wurde dabei durch

$$\epsilon = \epsilon_0 \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\eta}{B}\right)} + C \tag{3.2.13}$$

[1] Darunter wird in dieser Arbeit folgendes Anfangswertproblem verstanden: Das zu lösende PDE-System sind die beiden Gleichungen (3.2.1) und (3.2.2). Die Anfangsbedingungen sind bei $\theta = 0$ vorgegeben. Sie lauten: $\epsilon(\eta, \theta = 0) = \epsilon_0\Theta(\eta)$ und $y(\eta) = 0$.

mit $B = 0,01$ und $C = 1 \times 10^{-50}$ angenähert. Um unkontrollierte numerische Artefakte zu vermeiden muss die Kantenbreite $\sim B$ einige Gitterabstände $\Delta\eta = 0,0012$ des numerischen Gitters groß sein. Der Parameter C ist nötig, da die numerisch bestimmten Größen Summanden, die proportional zu $\ln(\epsilon)$ sind, enthalten. Wenn also ϵ bei den Anfangsbedingungen so klein wird, dass es numerisch Null ergibt, kann der natürliche Logarithmus nicht mehr berechnet werden. In dem Vektor, der die Werte von $a\pm$ enthält, stehen dann zufällige Zahlen, sodass die Anfangsbedingungen weder reproduzierbar noch physikalisch sinnvoll sind. Um das zu vermeiden, wird mittels C künstlich dafür gesorgt, dass dieser Fall nicht eintreten kann.

Die numerischen und analytischen Ergebnisse für die Energiedichte stimmen sehr gut überein. Der Code kommt also auch mit sehr großen Gradienten recht gut zurecht. Dass es in Abb. 3.2.1 (b) signifikante Unterschiede zwischen berechneter und numerisch bestimmter Rapidität gibt, liegt an der geringen Energiedichte in dem betreffenden Bereich. Die Rapidität bei $\eta > \eta_{div}$ (wobei $\eta_{div} = \theta$ die Stelle angibt, an der die analytisch berechnete Rapidität divergiert; vgl. Anhang F) hat keine physikalische Bedeutung, da sich an dieser Stelle keine Materie befindet. Die Abweichungen bei kleineren η sind tatsächlich numerische Fehler, die in der kleinen Energiedichte an diesen Stellen begründet sind. Dort sind die Gradienten der analytischen Energiedichte-Verteilung vergleichbar mit den Gradienten, die durch numerische Fehler (Diskretisierung, nicht exakte Arithmetik von Gleitkommazahlen,...) verursacht werden. Da diese Fehlerquellen nur bei geringen Energiedichten auftreten sind die Fehler zwar vorhanden, betreffen aber einen so geringen Anteil des Mediums, dass sie vernachlässigbar sind.

In Abb. 3.2.2 sind weitere Tests der Numerik dargestellt. Die Anfangsbedingungen für die in Abb. 3.2.2 dargestellten Simulationen sind die folgenden:

$$\epsilon = \exp\left\{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2} - \left(\frac{|X|}{B}\right)^5\right\}, \qquad y = \eta. \tag{3.2.14}$$

Dabei wurde mit $\sigma = 3,8$ der in [28] angegebene Wert eingesetzt und ein Polynom höherer Ordnung im Exponenten an die dort gegebene Energiedichte gefittet. Der Term fünfter Ordnung mit $B = 6,41$ ist der dominante Korrekturterm und wurde darum als einziger berücksichtigt. In Abb. 3.2.2 (a) ist die Energiedichte, die durch die Bjorken-Lösung (s. Kapitel 5 (5.2.1)) $\epsilon_0 e^{-\frac{4}{3}\theta}$ dividiert wurde. Damit wird der durch das anfängliche Flussmuster verursachte Abfall der Energiedichte herausgerechnet. Übrig bleibt der Effekt, der durch die longitudinale Form der Energiedichteverteilung verursacht wird. In Abb. 3.2.2 (b) wurde die Fluidrapidität dividiert durch η dargestellt. Auch hier dient dies dazu, den Effekt des anfänglichen Flussmusters herauszurechnen und lediglich den Effekt

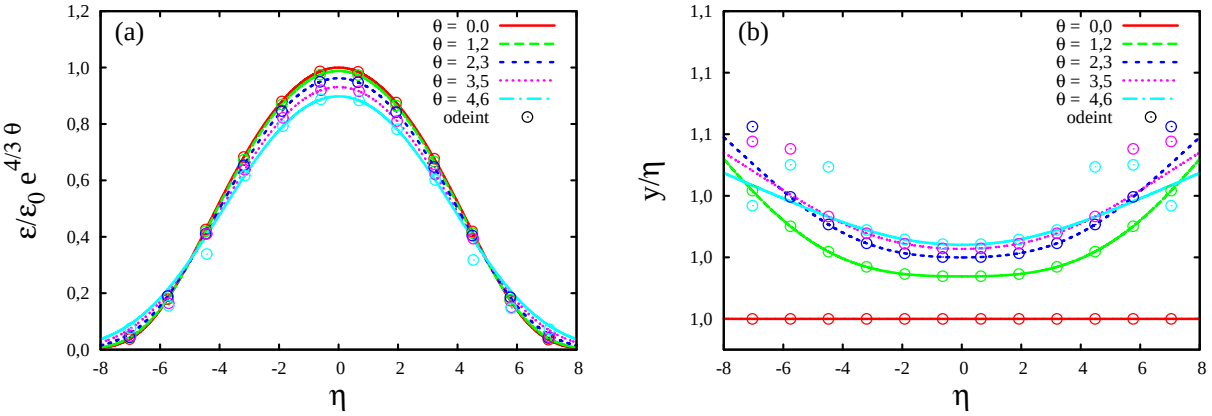

Abbildung 3.2.2: Numerisches Ergebnis mit den Anfangsbedingungen aus [28] in (a) ist die mit $\epsilon_0 e^{-\frac{4}{3}\theta}$ skalierte Energiedichte ϵ gezeigt. In (b) ist die Fluidrapidität dividiert durch $\eta = \frac{1}{2}\ln\frac{t+x}{t-x}$ dargestellt. Die Linien sind das Ergebnis mittels der Methode aus Abschnitt 3.2.3. Zum Vergleich ist das Ergebnis der Lösungsmethode mithilfe von odeint aus Abschnitt 3.2.2 angegeben (Kreise). Die Odeint-Methode ist bei Zeiten $\theta \geq 3$ nicht mehr stabil und verursacht Fluktuationen an den Rändern.

der endlichen Ausdehnung zu sehen. (Die unendlich ausgedehnte Anfangsbedingung die zu der Bjorken-Lösung führt, hat für alle Zeiten die Rapiditätsverteilung $y = \eta$.) Durch Vergleich mit [28] (Abb. (2) und (3)) kann man sehen, dass das prinzipielle Verhalten korrekt reproduziert wird.

4 Holographische Rekonstruktion

4.1 Erläuterung der Methode

Unter "holographischer Rekonstruktion" versteht man Methoden, mit denen man aus Größen der Feldtheorie, die auf dem d-dimensionalen Rand eines $D = d+1$-dimensionalen Raumes definiert sind, die Metrik dieses Raumes berechnen kann. Eine Prozedur, die dies für Räume, die asymptotische AdS sind,(aAdS) leistet, ist folgende: Für einen aAdS kann man das infinitesimale Abstandsquadrat in Feffermann-Graham-Koordinaten [29] aufschreiben als

$$ds^2 = \mathcal{B}^2 \frac{1}{z^2}(g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dz^2). \tag{4.1.1}$$

Der Parameter $\mathcal{B}$ kann durch Reskalieren der Koordinaten $x^A \mapsto x^A/\mathcal{B}$ auf 1 transformiert werden. Die Submetrik $g_{\mu\nu}$ kann dann um $z = 0$ in eine Taylor-Reihe entwickelt werden:

$$g = q_{(0)} + q_{(1)}z + q_{(2)}z^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} q_{(k)}z^k. \tag{4.1.2}$$

Hierbei wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit die Indizes (μ, ν) weggelassen $q_{(k)}$ ist dabei die k-te Ableitung von g nach z. Beim Einsetzen von (4.1.2) in die Einstein-Gleichungen stellt man fest, dass die ungeraden Koeffizienten mit $k < d$ verschwinden. Bei gerader Randdimension $d = 2m$ verschwinden überraschenderweise auch die ungeraden Koeffizienten mit $k > d$, sodass man (4.1.2) schreiben kann als

$$g = \sum_{m=0}^{\infty} g_{(m)}r^m, \tag{4.1.3}$$

wobei $g_{(m)} := q_{(2m)}$ und $r = z^2$. (4.1.1) bekommt dann die Form:

$$ds^2 = \frac{1}{r}(g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \frac{dr^2}{4r}). \tag{4.1.4}$$

Für die Metrik

$$(G_{AB}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}g_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4r^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}g + g_{(1)}r + g_{(2)}r^2 + ... & 0 \\ 0 & \frac{1}{4r^2} \end{pmatrix} \tag{4.1.5}$$

müssen die Einstein-Gleichungen (2.1.1) gelten. Da in (4.1.5) nur die Submetrik $g_{\mu\nu}$ unbestimmt ist, ist es zweckmäßig die Einstein-Gleichungen in Differentialgleichungen für $g_{\mu\nu}$ umzuschreiben.

In den Konstruktionsvorschriften für den Ricci-Tensor bzw. den Ricci-Skalar (vgl. Anhang B) treten Summationen über alle D Indizes auf, beispielsweise:

$$\Gamma^A_{BC} = \frac{1}{2}G^{AE}(G_{BE,C} + G_{CE,B} - G_{BC,E}). \tag{4.1.6}$$

Hierbei nehmen große lateinische Indizes die Werte $0 \dots d, (d = D-1)$ an. Diese Summationen über alle D Koordinaten kann man zerlegen in die Summationen über die ersten d Koordinaten (griechische Indizes) und den Beitrag der noch fehlenden Koordinate (mit dem festen Index d):

$$\Gamma^A_{BC} = \frac{1}{2}G^{A\epsilon}(G_{B\epsilon,C} + G_{C\epsilon,B} - G_{BC,\epsilon}) + \frac{1}{2}G^{Ad}(G_{Bd,C} + G_{Cd,B} - G_{BC,d}). \tag{4.1.7}$$

Wenn die Indizes A, B, C alle den Wert d haben, kann man sämtliche Terme auswerten:

$$\begin{aligned} \Gamma^d_{dd} &= \frac{1}{2}\underbrace{G^{d\epsilon}}_{\overset{(4.1.4)}{=}0}(G_{d\epsilon,d} + G_{d\epsilon,d} - G_{dd,\epsilon}) + \frac{1}{2}\underbrace{G^{dd}}_{4r^2}(\underbrace{G_{dd,d}}_{-1/(2r^3)} + G_{dd,d} - G_{dd,d}) && (4.1.8) \\ &= -\frac{1}{r}. && (4.1.9) \end{aligned}$$

Ganz analog kann man auch für alle anderen Indextripel Ausdrücke finden, die sich aus g, dessen r-Ableitungen und r selbst zusammensetzen. Wenn es gelingt alle Christoffel-Symbole Γ^A_{BC} so auszudrücken, kann man aus diesen den Ricci-Tensor und Ricci-Skalar konstruieren und damit die Einstein-Gleichungen explizieren. Dies ist in Anhang G ausführlich dargestellt. Es bietet sich an, die Einstein-Gleichungen in drei Blöcke zu zerlegen:

(i) Die Gleichungen, bei denen beide Indizes Werte von 0 bis $(d-1)$ haben ("(μ,ν)-Gleichungen"; vgl. (4.1.10)),

(ii) die Gleichungen, bei denen genau ein Index d ist und der andere einen Wert von 0 bis $(d-1)$ hat ("(d,μ)-Gleichungen"; vgl. (4.1.11)),

(iii) und die Gleichung, bei der beide Indizes d sind ("(d,d)-Gleichung"; vgl. (4.1.12)).

Die Einstein-Gleichungen nehmen dann die Form

$$\begin{aligned} 0 &= Ric(g) + r\left(-2g'' - g'Tr((g^{-1})g') + 2g'(g^{-1})g'\right) + (D-3)g' \\ &\quad + gTr((g^{-1})g'), \qquad (4.1.10) \\ 0 &= \nabla Tr(g^{-1}g') - \nabla(g^{-1}g'), \qquad (4.1.11) \\ 0 &= Tr((g^{-1})g'') - \frac{1}{2}Tr((g^{-1})g'(g^{-1})g') \qquad (4.1.12) \end{aligned}$$

an. Die Herleitung ist im Anhang G dokumentiert. Hierbei sind alle Produkte als Matrix-Produkte zu verstehen. g ist wieder die Submetrik in (4.1.5), ∇ die kovariante Ableitung, die man aus der Submetrik g gewinnt und $Ric(g)$ der Ricci-Tensor, den man aus g konstruiert. Im nächsten Schritt macht man für g den Reihenansatz (4.1.3). Damit sind auch die Reihen für g' und g'' (den ersten bzw. zweiten Ableitungen von g nach der Koordinate r) gegeben. Diese Reihenansätze werden in die Gleichungen (4.1.10) bis (4.1.12) eingesetzt. Die Produkte der Reihen werden nach Potenzen von r sortiert. Damit die Einstein-Gleichungen gelten, müssen die Gleichungen (4.1.10) - (4.1.12) in allen Ordnungen der Koordinate r gelten. Somit bekommt man folgenden Sätze von Gleichungen (s. Anhang G):

$$\begin{aligned} 0_{\mu\nu} &= g_{(p+1)}(D-3-2p)(p+1) \\ &\quad + \partial_\rho \sum_{m=0}^{p} (g^{(p-m)})^{\rho\sigma}\gamma_{\nu\mu:\sigma}(g_{(m)}) - \partial_\nu \sum_{m=0}^{p} (g^{(p-m)})^{\rho\sigma}\gamma_{\rho\mu:\sigma}(g_{(m)}) \\ &\quad + \sum_{q=0}^{p}\sum_{m=0}^{p-q}\sum_{k=0}^{q} (g^{(p-q-m)})^{\rho\sigma}\gamma_{\rho\kappa:\sigma}(g_{(m)})(g^{(q-k)})^{\kappa\lambda}\gamma_{\mu\nu:\lambda}(g_{(k)}) \\ &\quad - \sum_{q=0}^{p}\sum_{m=0}^{p-q}\sum_{k=0}^{q} (g^{(p-q-m)})^{\rho\sigma}\gamma_{\nu\kappa:\sigma}(g_{(m)})(g^{(q-k)})^{\kappa\lambda}\gamma_{\mu\rho:\lambda}(g_{(k)}) \qquad (4.1.13) \\ &\quad + \left(\sum_{b=0}^{p} g_{(p-b)}Tr\left[\sum_{m=0}^{b}(b-m+1)g^{(m)}g_{(b-m+1)}\right]\right) \\ &\quad - \left(\sum_{b=0}^{p-1}(p-b)g_{(p-b)}Tr\left[\sum_{m=0}^{b}(b-m+1)g^{(m)}g_{(b-m+1)}\right]\right)(1-\delta_0^p) \\ &\quad + 2\left(\sum_{b=0}^{p-1}(p-b)g_{(p-b)}\sum_{m=0}^{b} g^{(m)}(b-m+1)g_{(b-m+1)}\right)(1-\delta_0^p) \end{aligned}$$

aus den (μ,ν)-Gleichungen und

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{l=0}^{p}\Big((l+1)(l+2)Tr\left[g^{(p-l)}g_{(l+2)}\right] \\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{p-l}\sum_{h=0}^{l}(p-l-m+1)(l-h+1)Tr\left[g^{(m)}g_{(p-l-m+1)}g^{(h)}g_{(l-h+1)}\right]\Big) \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

aus der (d,d)-Gleichung. In 4.1.13 bedeuten $\gamma_{\nu\mu:\sigma}(g_{(m)})$ die Objekte, die man erhält, wenn man in der Konstruktionsvorschrift für die Christoffelsymbole erster Art statt der Metrik des Raumes, die m-te Ableitung der Submetrik g (ausgewertet auf dem Rand) einsetzt. Mit der p-ten Gleichung von (4.1.13) kann man $g_{(p+1)}$ aus $g_{(k)}$ mit $k \leq p$ berechnen. Wenn also $g_{(0)}$ gegeben ist (das ist die Metrik des Randes), kann man (mit der $(p=0)$-Gleichung) $g_{(1)}$ berechnen. Als nächstes kann $g_{(2)}$ aus $g_{(0)}$ und $g_{(1)}$ mithilfe der $(p=1)$-Gleichung berechnet werden, usw. Die (d,d)-Gleichung (4.1.14) stellt Bedingungen an die Spuren der neu berechneten Koeffizienten dar, die auch noch berücksichtigt werden müssen (vgl. Anhang G). Interessanterweise liefern die (μ,d)-Gleichungen keine weiteren Einschränkungen. Die tiefer liegende Ursache dafür ist, dass die Einstein-Gleichungen Tensorgleichungen sind. Sie sind damit unabhängig vom Bezugssystem. Also kann man eine Lösung noch einer beliebigen Koordinatentransformation unterwerfen, und erhält eine weitere Lösung. Mit den $\frac{D(D+1)}{2}$ Gleichungen werden also gar nicht alle $\frac{D(D+1)}{2}$ verschiedenen Komponenten der Metrik bestimmt, sondern man hat noch D frei wählbare Komponenten, die durch die Wahl der Koordinaten festgelegt werden. Die Einstein-Gleichungen bestimmen also lediglich $\frac{D(D-1)}{2}$ metrische Koeffizienten. Für die Feffermann-Graham-Koordinaten hatte man bereits diese Freiheit verwendet, um die (A,d)-Komponenten der Metrik festzulegen (vgl. (4.1.5)). Also sind von den Einstein-Gleichungen nur $\frac{D(D-1)}{2}$ Gleichungen unabhängig. Diese befinden sich in den beiden Gleichungssätzen (4.1.10) und (4.1.11).

4.2 Bedingungen an den Energie-Impuls-Tensor der CFT

Analysiert man die Gleichungen (4.1.13), so fällt auf, dass im Fall $p = \frac{D-3}{2}$ ein Problem auftritt: Der Koeffizient, mit dem die $(p+1)$-te Ableitung von g multipliziert wird, verschwindet. Damit kann man das Gleichungssystem nicht mehr nach dieser Ableitung umstellen. Die $\frac{D-1}{2}$-te Ableitung von $g_{\mu\nu}$ wird also nicht durch niedrigere Ableitungen festgelegt. Allerdings kann man immer noch die Gleichungen (4.1.11) und (4.1.12) auswerten

und bekommt als Bedingungen für die Spur und Divergenz von $g_{((D-1)/2)}$:

$$\begin{aligned} Tr[g^{(0)}g_{((D-1)/2)}] &= \sum_{l=0}^{\frac{D-1}{2}} \sum_{m=0}^{\frac{D-1}{2}-l} \sum_{h=0}^{l} \frac{2((D+1)/2-l-m)(l-h+1)}{(D+1)(D+3)} \\ &\quad \times Tr\left[g^{(m)}g_{((D+1)/2-l-m)}g^{(h)}g_{(l-h+1)}\right] \qquad (4.2.1) \\ &\quad - \sum_{l=0}^{\frac{D-3}{2}} \frac{4(l+1)(l+2)}{(D+1)(D+3)} Tr\left[g^{((D-1)/2-l)}g_{(l+2)}\right], \\ \nabla g^{(0)}g_{((D-1)/2)} &= \nabla Tr[g^{(0)}g_{((D-1)/2)}]. \qquad (4.2.2) \end{aligned}$$

Mit einigem technischen Aufwand kann man zeigen, dass der Energie-Impuls-Tensor der CFT sich aus den niedrigsten Ableitungen der Submetrik $g_{\mu\nu}$ berechnen lässt. Die dafür verwendete Methode wird "holographische Renormierung" genannt und wird in [19] eingeführt und in [30] zur Berechnung des Energie-Impuls-Tensors benutzt. Für einen Rand mit $d < 7$ Dimensionen, sind die Ausdrücke in [30] angegeben. Für den besonders wichtigen Fall eines vierdimensionalen Randes findet man dort:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi G_N}\left[g_{(2)\mu\nu} - \frac{1}{8}g_{(0)\mu\nu}\left(\left(Tr[g^{(0)}g_{(1)}]\right)^2 - Tr[g^{(0)}g_{(1)}g^{(0)}g_{(1)}]\right)\right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{2}(g^{(0)}g_{(1)}g^{(0)}g_{(1)})_{\mu\nu} + \frac{1}{4}g_{(1)\mu\nu}Tr[g^{(0)}g_{(1)}]\right]. \qquad (4.2.3) \end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen (4.2.1) und (4.2.2) können damit als Bedingungen an den Energie-Impuls-Tensor der CFT verstanden werden.

4.3 Die Lösungsmethode von Janik

Von besonderer Bedeutung sind Lösungen, bei denen der Rand ein Minkowski-Raum ist. Mit dieser Forderung verschwindet der erste Entwicklungskoeffizient der Submetrik (vgl. Anhang G). Außerdem wird der Zusammenhang zwischen dem Energie-Impuls-Tensor der CFT und der aAdS-Metrik (4.2.3) sehr viel einfacher:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi G_N}g_{(2)\mu\nu}. \qquad (4.3.1)$$

Die Bedingungen (4.2.1) und (4.2.2) ergeben die Forderung nach Spur- und Divergenzfreiheit des Energie-Impuls-Tensors:

$$T^{\mu}_{\mu} = 0, \tag{4.3.2}$$

$$\nabla_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = 0. \tag{4.3.3}$$

An dieser Stelle tritt die zu Grunde liegende Dualität zu Tage. Daraus, dass die Einstein-Gleichungen gelten, folgt, dass die Spur des Energie-Impuls-Tensors der Feldtheorie, die auf dem Rand "lebt", verschwinden muss. Das gilt im Allgemeinen nicht, wohl aber für konforme Theorien.

Um die Einstein-Gleichungen zu vereinfachen, ist es günstig nicht nach allgemeinen Lösungen zu suchen, sondern nur nach solchen, die zusätzliche Bedingungen erfüllen. Das ist äquivalent dazu, Symmetrien für die Lösung zu fordern. Die Vorgabe von Raumzeitsymmetrien wiederum legt für ein Fluid, das auf sich auf dem Rand befindet, das Flussmuster fest [31]. Wenn man Symmetrien fordert, die auf dem Rand den besonders einfachen Bjorken-Fluss [32] erzeugen, kann man das Aussehen des Energie-Impuls-Tensors in mitbewegten Koordinaten fast vollständig bestimmen (vgl. Anhang G):

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \epsilon(\tau) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau^3 \frac{d}{d\tau}\epsilon(\tau) - \tau^2 \epsilon(\tau) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon(\tau) + \frac{1}{2}\tau \frac{d}{d\tau}\epsilon(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon(\tau) + \frac{1}{2}\tau \frac{d}{d\tau}\epsilon(\tau) \end{pmatrix}. \tag{4.3.4}$$

Als Lösung bekommt man dann folgende Entwicklung:

$$\begin{aligned} g_{00} = &-1 + \epsilon(\tau) r^2 + \frac{3\dot{\epsilon}(\tau) + \tau\ddot{\epsilon}(\tau)}{12\tau} r^3 \\ &+ \left(\frac{\ddot{\epsilon}(\tau)}{128\tau^2} + \frac{\dddot{\epsilon}(\tau)}{64\tau} + \frac{\tau^2 \left(\dot{\epsilon}(\tau)\right)^2}{16} + \frac{\tau\epsilon(\tau)\dot{\epsilon}(\tau)}{6} - \frac{\dot{\epsilon}(\tau)}{128\tau^3} + \frac{\ddddot{\epsilon}(\tau)}{384} - \frac{\left(\epsilon(\tau)\right)^2}{3} \right) r^4 \\ &+ ..., \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

$$\begin{aligned} g_{11} = &\tau^2 - \tau^2 \left(\tau \frac{d}{d\tau}\epsilon(\tau) + \epsilon(\tau) \right) r^2 - \frac{1}{12}\tau^2 \left(4\frac{d^2}{d\tau^2}\epsilon(\tau) + \tau \frac{d^3}{d\tau^3}\epsilon(\tau) \right) r^3 \\ &+ \tau^2 \left(\frac{5\tau\epsilon(\tau)\dot{\epsilon}(\tau)}{6} + \frac{\left(\epsilon(\tau)\right)^2}{3} + \frac{\ddot{\epsilon}(\tau)}{64\tau^2} - \frac{\dddot{\epsilon}(\tau)}{128\tau} + \frac{7\tau^2 \left(\dot{\epsilon}(\tau)\right)^2}{16} - \frac{\dot{\epsilon}(\tau)}{64\tau^3} \right. \\ &\left. - \frac{7\ddddot{\epsilon}(\tau)}{384} - \frac{\tau \frac{d^5}{d\tau^5}\epsilon(\tau)}{96} \right) r^4 + ..., \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

$$g_{22} = g_{33} = 1 + \left(\epsilon(\tau) + \frac{1}{2}\tau\frac{d}{d\tau}\epsilon(\tau)\right) r^2 + \frac{3\frac{d}{d\tau}\epsilon(\tau) + 5\tau\frac{d^2}{d\tau^2}\epsilon(\tau) + \tau^2\frac{d^3}{d\tau^3}\epsilon(\tau)}{24\tau} r^3$$
$$+ \left(\frac{\tau\epsilon(\tau)\dot{\epsilon}(\tau)}{3} + \frac{(\epsilon(\tau))^2}{3} - \frac{\ddot{\epsilon}(\tau)}{256\tau^2} + \frac{3\dot{\ddot{\epsilon}}(\tau)}{256\tau} + \frac{\tau^2(\dot{\epsilon}(\tau))^2}{16} + \frac{\dot{\epsilon}(\tau)}{256\tau^3}\right.$$
$$\left. + \frac{\ddot{\ddot{\epsilon}}(\tau)}{96} + \frac{\tau\frac{d^5}{d\tau^5}\epsilon(\tau)}{786}\right) r^4 + \ldots . \tag{4.3.7}$$

Die übrigen Komponenten verschwinden identisch. Hierbei bedeuten $\dot{\epsilon} = \frac{d}{d\tau}\epsilon$, $\ddot{\epsilon} = \frac{d^2}{d\tau^2}\epsilon$ etc. Für große Zeiten τ muss die Energiedichte im mitbewegten Bezugssystem gegen Null gehen. Man kann sie damit in eine Potenzreihe von $1/\tau^s$ entwickeln. Aus der Positivität der Energiedichte im mitbewegten Koordinatensystem folgt $0 < s < 4$. Wenn man die Entwicklungsglieder in (4.3.5)-(4.3.7) analysiert, stellt man fest, dass folgende Terme im Limes $\tau \to \infty$ dominant sind:

$$g_{00} = -1 + \frac{\epsilon_0\tau_0^s}{\tau^s} r^2 + \frac{s(s-2)\epsilon_0\tau_0^s}{12\tau^{s+2}} r^3 + \left(\frac{s^2\epsilon_0^2\tau_0^{2s}}{16\tau^{2s}} + \frac{-s\epsilon_0^2\tau_0^{2s}}{6\tau^{2s}} - \frac{\epsilon_0^2\tau_0^{2s}}{3\tau^{2s}}\right) r^4 + \ldots \tag{4.3.8}$$

$$g_{11} = \tau^2 - \tau^2(1-s)\frac{\epsilon_0\tau_0^s}{\tau^s} r^2 - \tau^2\frac{s(s+1)(2-s)\epsilon_0\tau_0^s}{12\tau^{s+2}} r^3$$
$$+\tau^2\left(\frac{-5s\epsilon_0^2\tau_0^{2s}}{6\tau^{2s}} + \frac{\epsilon_0^2\tau_0^{2s}}{3\tau^{2s}} + \frac{7s^2\epsilon_0^2\tau_0^{2s}}{16\tau^{2s}}\right) r^4 + \ldots , \tag{4.3.9}$$

$$g_{22} = g_{33} = 1 + \frac{(2-s)\epsilon_0\tau_0^s}{2\tau^s} r^2 + \frac{\epsilon_0\tau_0^s}{\tau^{s+2}}\frac{2s^2 - s^3}{24} r^3$$
$$+ \left(\frac{-s\epsilon_0^2\tau_0^{2s}}{3\tau^{2s}} + \frac{\epsilon_0^2\tau_0^{2s}}{3\tau^{2s}} + \frac{s^2\epsilon_0^2\tau_0^{2s}}{16\tau^{2s}}\right) r^4 + \ldots . \tag{4.3.10}$$

Überraschenderweise tauchen τ und r nicht unabhängig auf, sondern nur in der Kombination

$$\xi_s = \frac{r}{\tau^{s/2}}. \tag{4.3.11}$$

Das gilt zumindest, wenn man fordert, dass $0 < s < 2$ ist. Eine Lösung der Einstein-Gleichung, die von r und τ abhängt, wird in diesem Limes nur von dem Verhältnis ξ abhängen und damit asymptotisch mit einer Lösung übereinstimmen, bei der man ein solchen Verhalten von vornherein fordert. Wenn man für $g_{\mu\mu}$ den Ansatz macht, dass diese (statt von τ und r getrennt abzuhängen) nur von ξ abhängen, kann man die Einstein-Gleichungen exakt lösen [12]:

$$g_{00} = \exp\{A(\xi) - 2m(\xi)\}, \tag{4.3.12}$$
$$g_{11} = -\tau^2\exp\{A(\xi) + (2s-2)m(\xi)\}, \tag{4.3.13}$$
$$g_{22} = g_{33} = -\exp\{A(\xi) + (2-s)m(\xi)\}, \tag{4.3.14}$$

wobei,

$$A(\xi) = \frac{1}{2}\Big(\ln(1+\Delta(s)\xi^2) + \ln(1-\Delta(s)\xi^2)\Big), \tag{4.3.15}$$

$$m(\xi) = \frac{1}{4\Delta(s)}\Big(\ln(1+\Delta(s)\xi^2) - \ln(1-\Delta(s)\xi^2)\Big), \tag{4.3.16}$$

$$\Delta(s) = \sqrt{\frac{3s^2-8s+8}{24}}. \tag{4.3.17}$$

Um herauszufinden welcher Wert für s in der Natur realisiert wird, fordert man, dass die Metrik keine Singularitäten aufweisen soll. Als Ergebnis bekommt man

$$s = \frac{4}{3}, \tag{4.3.18}$$

was genau das Ergebnis für ideale Hydrodynamik ist. Analysiert man die nachfolgende Ordnung in (4.3.8)-(4.3.10) und fügt dem Ansatz für $g_{\mu\mu}$ entsprechende Korrekturterme hinzu, kann man die nächste Ordnung in der Entwicklung der Energiedichte berechnen. Aus diesen lässt sich das Verhältnis von Scherviskosität η zu Entropiedichte s bestimmen. Es ergibt sich als:

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi}. \tag{4.3.19}$$

4.4 Krümmungsskalare

Wichtige Vorhersagen für die Hydrodynamik bekommt man bei dem in Abschnitt 4.3 geschilderten Zugang durch Auswerten der Forderung nach Singularitätsfreiheit der Metrik. Es ist jedoch nicht unmittelbar klar, wie man eine solche Forderung zu formulieren hat. Im Allgemeinen wird eine Größe, die in einem Koordinatensystem divergiert, in einem anderen nicht notwendigerweise auch divergieren. In der Sprache der ART sucht man also nach Skalaren, mit denen man zwischen divergenten und regulären Metriken unterscheiden kann. Da die Krümmung der Raumzeit im Krümmungstensor codiert ist, sucht man also nach Skalaren, die sich aus dem Krümmungstensor konstruieren lassen. Zur Verfügung hat man dafür nur den Krümmungstensor $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, die Metrik $g_{\mu\nu}$ den vollständig antisymmetrischen Tensor ϵ und die kovariante Ableitung ∇_μ. Zur Konstruktion von Skalaren, mit denen Singularitäten entdeckt werden sollen, ist die kovariante Ableitung jedoch nicht geeignet. Ursache dafür ist, dass eine divergente Funktion zwar auch divergente Ableitungen hat, jedoch muss nicht jede Funktion mit divergenten Ableitungen selbst divergieren. Wenn ein Skalar, der mit Ableitungen konstruiert wurde, an einem Raumzeitpunkt divergiert, so weiß man immer noch nicht, ob die Krümmung dies ebenfalls tut. Um das zu klären, müsste

man sich andere Skalare an diesem Raumzeitpunkt anschauen. Damit ist ein solcher Skalar aber wertlos für die Suche nach Divergenzen. Durch systematisches Analysieren (s. Anhang H) kann man für Metriken, die die Gleichungen (2.2.6) erfüllen, die Skalare finden, die überhaupt divergieren können. Das sind (bis 2. Ordnung im Krümmungstensor) lediglich zwei Stück:

$$\Re_1 := R_{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\mu\nu\rho\sigma}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}g^{\gamma\rho}g^{\delta\sigma} = R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{4.4.1}$$

$$\Re_2 := R_{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\mu\nu\rho\sigma}g^{\alpha\mu}g^{\beta\rho}g^{\gamma\nu}g^{\delta\sigma} = R^{\mu\rho\nu\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{4.4.2}$$

Der Skalar $\Re_1$ wird auch als Kretschmann-Invariante bezeichnet. Alle übrigen Skalare sind bis auf einen endlichen Faktor (meist ± 1) mit diesen identisch. Da für dieses Resultat die Gültigkeit von (2.2.6) benutzt wurde, gilt die Aussage nur für Metriken, die Vakuum-Einstein-Gleichungen mit einer kosmologischen Konstante erfüllen.

4.5 Verallgemeinerte Kajantie-Lösung

Mit der in Abschnitt 4.3 beschriebenen Methode lässt sich für eine zweidimensionale CFT eine recht allgemeine duale Lösung finden. Diese kann man als Modell früher Expansionsphasen nach einer relativistischen Schwerionenkollision verwenden [13], wenn die Kerne in transversaler Richtung als unendlich groß angenommen werden können. Besonders interessant ist natürlich der Fall, dass die CFT in einem zweidimensionalen Minkowski-Raum "lebt". Diesen kann man mit Milne-Koordinaten beschreiben, die relativ zum kartesischen Koordinatensystem definiert sind durch:

$$\tau = \sqrt{t^2 - x^2}, \tag{4.5.1}$$

$$\eta = \frac{1}{2}\ln\frac{t+x}{t-x}. \tag{4.5.2}$$

Die Metrik hat dann die Gestalt

$$g_{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau^2 \end{pmatrix}. \tag{4.5.3}$$

Die Metrik des aAdS, der diesen 2d-Minkowski-Raum als Rand hat, wird in eine Taylor-Reihe entwickelt:

$$(G_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 + r g_{(1)11}(\tau,\eta) + \ldots & r g_{(1)12}(\tau,\eta) + \ldots \\ r g_{(1)12}(\tau,\eta) + \ldots & \tau^2 + r g_{(1)22}(\tau,\eta) + \ldots \end{pmatrix}. \tag{4.5.4}$$

$g_{(1)}$ muss allerdings noch so eingeschränkt werden, dass es die Einstein-Gleichungen in niedrigster Ordnung erfüllt. Gleichung (4.1.10) liefert

$$Tr[g^{(0)}g_{(1)}] = 0. \tag{4.5.5}$$

Das erfordert, dass sich ${g_{(1)}}_{22}$ schreiben lässt als $\tau^2 {g_{(1)}}_{11}$. Mit dieser Ersetzung ergibt (4.1.11) folgende zwei PDEs:

$$0 = \tau^2 \frac{\partial}{\partial\tau} {g_{(1)}}_{11}(\tau,\eta) + 2\tau\, {g_{(1)}}_{11}(\tau,\eta) - \frac{\partial}{\partial\eta} {g_{(1)}}_{12}(\tau,\eta), \tag{4.5.6}$$

$$0 = -\tau \frac{\partial}{\partial\tau} {g_{(1)}}_{12}(\tau,\eta) + \tau \frac{\partial}{\partial\eta} {g_{(1)}}_{11}(\tau,\eta) - {g_{(1)}}_{12}(\tau,\eta). \tag{4.5.7}$$

Die allgemeine Lösung dieses Systems ist:

$${g_{(1)}}_{12}(\tau,\eta) = \frac{F_1(\eta+\ln(\tau)) - F_2(\eta-\ln(\tau)) + C_1}{\tau}, \tag{4.5.8}$$

$${g_{(1)}}_{11}(\tau,\eta) = \frac{F_1(\eta+\ln(\tau)) + F_2(\eta-\ln(\tau))}{\tau^2}. \tag{4.5.9}$$

Dabei sind F_1 und F_2 beliebige reellwertige zweimal differenzierbare Funktionen einer Variablen und C_1 eine reelle Konstante. Nachdem die Bedingungen an $g_{(2)}$ erfüllt sind, kann man mit den Randbedingungen

$$g_{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau^2 \end{pmatrix}, \tag{4.5.10}$$

$$g_{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{F_1(\eta+\ln(\tau))+F_2(\eta-\ln(\tau))}{\tau^2} & \frac{F_1(\eta_+\ln(\tau))-F_2(\eta-\ln(\tau))+C_1}{\tau} \\ \frac{F_1(\eta+\ln(\tau))-F_2(\eta-\ln(\tau))+C_1}{\tau} & \tau^2(F_1(\eta+\ln(\tau)) + F_2(\eta-\ln(\tau))) \end{pmatrix} \tag{4.5.11}$$

durch Anwenden des iterativen Schemas aus Abschnitt 4.3 und Anhang G die höheren Ordnungen berechnen. Überraschenderweise bricht die Taylor-Reihe in r bereits nach der 2. Ordnung ab und man erhält als exaktes Ergebnis

$$\begin{aligned} g_{1\,1} &= -1 + \frac{rF_1(\eta_+) + rF_2(\eta_-)}{\tau^2} \\ &\quad + \frac{4r^2F_1(\eta_+)F_2(\eta_-) - 2r^2F_1(\eta_+)C_1 + 2r^2F_2(\eta_-)C_1 - r^2C_1^2}{4\tau^4}, \\ g_{1\,2} &= g_{21} = \frac{r\,(F_1(\eta_+) - F_2(\eta_-) + C_1)}{\tau}, \\ g_{2\,1} &= \tau^2 + rF_1(\eta_+) + rF_2(\eta_-) \\ &\quad + \frac{4r^2F_1(\eta_+)F_2(\eta_-) - 2r^2F_1(\eta_+)C_1 + 2r^2F_2(\eta_-)C_1 - r^2C_1^2}{4\tau^2}. \end{aligned} \tag{4.5.12}$$

Dabei ist $\eta_\pm = \eta \pm \ln(\tau)$. Dass dies ein exaktes Ergebnis ist, kann man durch Berechnen der Einstein-Gleichungen für die aAdS-Metrik G_{AB} (4.1.5) überprüfen. Für die Lösung (4.5.12) lässt sich der duale Energie-Impuls-Tensor der CFT bestimmen [30]:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi G_N}(g_{(1)\mu\nu} - g_{(0)\mu\nu} Tr[g^{(0)} g_{(1)}]). \tag{4.5.13}$$

Wie oben schon erwähnt, folgt aus (4.1.10), dass die Spur von $g_{(1)}$ verschwinden muss. Es gilt also:

$$(T_{\mu\nu}) = \frac{1}{8\pi G_n} g_{(1)} \tag{4.5.14}$$

$$= \frac{1}{8\pi G_N} \begin{pmatrix} \frac{F_1(\eta_+)+F_2(\eta_-)}{\tau^2} & \frac{F_1(\eta_+)-F_2(\eta_-)+C_1}{\tau} \\ \frac{F_1(\eta_+)-F_2(\eta_-)+C_1}{\tau} & \tau^2(F_1(\eta_+)+F_2(\eta_-)) \end{pmatrix}. \tag{4.5.15}$$

Wenn das konforme Medium hydrodynamisch beschreibbar ist, kann man daraus dessen Energiedichte und Vierergeschwindigkeit berechnen. Dazu muss man nur (4.5.15) und (2.3.4) gleichsetzen und nach ϵ bzw. u^0 auflösen. Ein einfacherer Weg ist es allerdings, die Eigenwerte von T^μ_ν zu berechnen, was bei einer 2x2-Matrix problemlos möglich ist. Die Eigenwerte sind $p, -\epsilon$. Wegen der Spurbedingung für $g_{(2)}$ (aus dem Blickwinkel der Gravitation) bzw. wegen der Konformität und damit Spurfreiheit des Energie-Impuls-Tensors (aus dem Blickwinkel der CFT) muss gelten: $p = \epsilon$. Aus der Eigenwertgleichung bekommt man damit

$$p = \epsilon = \frac{1}{\tau^2}\sqrt{-{C_1}^2 + 4F_1(\eta_+)^2 F_2(\eta_-)^2 - 2F_1(\eta_+)^2 C_1 + 2F_2(\eta_-)^2 C_1}. \tag{4.5.16}$$

Um die Geschwindigkeit des Fluids zu berechnen, kann man den Eigenvektor zu ϵ bestimmen. Besser ist es diesmal jedoch, die konstitutiven Gleichungen für das Fluid (2.3.4) zu nehmen und z.B. die Gleichung mit $\mu = \nu = 0$ nach u_0 umzustellen. Dann erhält man:

$$u_0 = \sqrt{\frac{T_{00}}{2\epsilon} + \frac{1}{2}}. \tag{4.5.17}$$

Die 0-Komponente der Vierergeschwindigkeit kann man in Milne-Koordinaten mit der Fluidrapidität y in Beziehung setzen:

$$u_0 = \cosh(y - \eta). \tag{4.5.18}$$

Damit sind die dynamischen Größen bestimmt. Da der Ausdruck für die Fluidrapidität recht kompliziert ist, sei hier darauf verzichtet ihn anzugeben.

4.6 Verbesserter 2D-Ansatz

Ein großer Nachteil des eben geschilderten Modells für frühe Expansionsphasen nach einer relativistischen Schwerionenkollision ist, dass aufgrund der Spurbedingung (4.5.5) das Fluid die Zustandsgleichung $p = \epsilon$ haben muss. Die Schallgeschwindigkeit c_s ist damit:

$$c_s = \sqrt{\frac{d}{d\epsilon}p(\epsilon)} = 1. \tag{4.6.1}$$

Diese Beschränkung lässt sich beheben, indem man auf dem Rand eine Raumkrümmung erlaubt. Die nullte Ordnung der $(\mu\nu)$- Einstein-Gleichungen (4.1.13) lautet nämlich:

$$\begin{aligned} 0_{\mu\nu} \;=\; & +\partial_\rho g^{(0)\,\rho\sigma}\gamma_{\nu\mu:\sigma}(g_{(0)}) - \partial_\nu g^{(0)\,\rho\sigma}\gamma_{\rho\mu:\sigma}(g_{(0)}) \\ & +g^{(0)\,\rho\sigma}\gamma_{\rho\kappa:\sigma}(g_{(0)})g^{(0)\,\kappa\lambda}\gamma_{\mu\nu:\lambda}(g_{(0)}) \\ & -g^{(0)\,\rho\sigma}\gamma_{\nu\kappa:\sigma}(g_{(0)})g^{(0)\,\kappa\lambda}\gamma_{\mu\rho:\lambda}(g_{(0)}) \\ & +g_{(0)}Tr\left[g^{(0)}g_{(1)}\right], \end{aligned} \tag{4.6.2}$$

bzw. übersichtlicher:

$$0 = Ric(g_{(0)}) + g_{(0)}Tr\left[g^{(0)}g_{(1)}\right]. \tag{4.6.3}$$

Spurbilden liefert:

$$Tr\left[g^{(0)}g_{(1)}\right] = -\frac{1}{2}RS(g_{(0)}). \tag{4.6.4}$$

Hierbei bedeuten $\gamma_{\nu\mu:\sigma}(X)$, $Ric(X)$, $RS(X)$ Christoffelsymbole erster Art, Ricci-Tensor und Ricci-Skalar, die man aus dem Tensor X gewinnt, indem man in den entsprechenden Konstruktionsvorschriften die Metrik durch X ersetzt. Durch Spurbilden in (4.5.13) bekommt man:

$$T^\mu_\mu = -\epsilon + p = -\frac{1}{8\pi G_N}Tr[g^{(0)}g_{(1)}] = \frac{1}{16\pi G_N}RS(g_{(0)}). \tag{4.6.5}$$

Da die vierdimensionale Theorie, die für frühe Expansionsphasen mit diesem Modell approximiert wird, konform sein soll, gilt $p = \frac{1}{3}\epsilon$. Man erhält also zwischen dem Ricci-Skalar des Randes R und der Energiedichte ϵ des Mediums die Relation

$$\epsilon = -\frac{3}{32\pi G_N}R. \tag{4.6.6}$$

Man kann sich fragen, ob es widersprüchlich ist, dass die zweidimensionale Näherung in einem gekrümmten Raum "lebt", während die vierdimensionale Theorie in einem flachen Raum formuliert wurde. Dass dies kein Widerspruch ist, sieht man z.B. an einem dreidimen-

sionalen Euklidischen Raum, der mit Kugelkoordinaten beschrieben wird. Wenn man aus irgendeinem Grund feststellt, dass es in erster Näherung genügt, nur den Bereich $r = r_0$ zu betrachten, dann findet diese Betrachtung in einem zweidimensionalen gekrümmten Raum statt (unabhängig davon, dass der vollständige Raum flach ist).

Doch nun zurück zum ursprünglichen Problem. Dazu berechnet man die kovariante Divergenz des zweidimensionalen-Energie-Impuls-Tensors

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu \overset{(4.5.13)}{=} \frac{1}{8\pi G_N}(\nabla_\mu[g^{(0)^{\mu\alpha}} g_{(1)_{\alpha\nu}}] - \nabla_\mu \delta^\mu_\nu Tr[g^{(0)} g_{(1)}]) \tag{4.6.7}$$

$$= \frac{1}{8\pi G_N}(\nabla_\mu[g^{(0)^{\mu\alpha}} g_{(1)_{\alpha\nu}}] - \nabla_\nu Tr[g^{(0)} g_{(1)}]) \tag{4.6.8}$$

$$\overset{(4.1.11)\text{bei } r=0}{=} 0. \tag{4.6.9}$$

Die Metrik hat in zwei Dimensionen drei verschiedene Komponenten: $g_{(0)_{00}}, g_{(0)_{01}}, g_{(0)_{11}}$. Da sie ein Tensor ist, hat man noch die Freiheit eine (nahezu) beliebige Koordinatentransformation durchzuführen. Damit können zwei Komponenten auf einen beliebigen Wert transformiert werden. Betrachten wir also das Problem in solchen Koordinaten, in denen die Metrik die Form $g_{(0)} = \text{diag}(-1, f(x_1, x_2))$ annimmt. Der Ricci-Skalar ist dann folgende Funktion von f:

$$R = -\frac{2f(x_1,x_2)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}f(x_1,x_2) - \left(\frac{\partial}{\partial x_1}f(x_1,x_2)\right)^2}{2(f(x_1,x_2))^2} \overset{(4.6.6)}{=} -\frac{32\pi g_N}{3}\epsilon. \tag{4.6.10}$$

(4.6.9) und (4.6.10) bilden damit ein System aus drei Gleichungen für die drei unbekannten Funktionen f, ϵ, u_0. Es gestaltet sich schwierig, einen geschlossenen Ausdruck für die drei Lösungsfunktionen zu finden. Allerdings ist dieses zweidimensionale Modell ohnehin nur für eine kurze Zeit nach der Kollision gültig. Damit ist eine iterative Lösung, bei der die führenden Ordnungen der Lösungsfunktionen bestimmt werden, sinnvoll.

5 Iterative Lösung der Hydrodynamischen Gleichungen

5.1 Erläuterung des Vorgehens

Analog zum Fall der Einsteingleichungen kann man ein iteratives Schema aufstellen, mit dem die hydrodynamischen Gleichungen bis zu einer endlichen Ordnung berechnet werden können. Zunächst soll aber ein allgemeineres Schema zur Lösung der Energie-Impuls-Erhaltungsgleichungen erklärt werden. Gelöst werden soll also das PDE-System (2.3.6). Das sind lediglich vier Gleichungen zur Bestimmung von zehn unbekannten Funktionen [1] (in d Dimensionen sind dies d Gleichungen zur Bestimmung von $\frac{d(d-1)}{2}$ unbekannten Funktionen). Damit das System bei Vorgabe von Anfangs- oder Randbedingungen eindeutig lösbar ist, werden weitere sechs (bzw. $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$) Relationen benötigt. Zum Beispiel könnte man fordern, dass das Medium ein ideales Fluid ist, also einen Energie-Impuls-Tensor der Form (2.3.4) hat. Das würde fünf Relationen liefern. Wenn man noch eine Zustandsgleichung der Form $p = p(\epsilon)$ vorgibt, hat man die sechs gewünschten Gleichungen. Unabhängig davon, welche sechs zusätzlichen Relationen man wählt, kann man diese nutzen, um Funktionen $f^{\mu\nu}$ zu definieren, die folgendes leisten:

$$T^{\mu\nu} = f^{\mu\nu}(T^{\alpha 0}), \tag{5.1.1}$$

d.h. alle Komponenten des Energie-Impuls-Tensors können aus den vier (bzw. d) Komponenten $T^{\alpha 0}$ bestimmt werden. Garantiert wird dies (zumindest lokal) durch den Satz von der impliziten Funktion, sofern die zusätzlichen Relationen hinreichend gutartig [2] sind.

[1] Die Funktionen sind die zehn Komponenten des Energie-Impulstensors, die nicht durch Index-Vertauschen ineinander übergehen können, also z.B.: $T^{\mu\nu}(x^\alpha)$ mit $\mu \geq \nu$

[2] Seien F^i diese Relationen, dann müssen diese stetig differenzierbar sein und die Matrix $M^i_j := \frac{\partial F^i}{\partial T^{ab}}$ muss invertierbar sein. $j := j(ab)$ ordnet dem Indexpaar (a, b) dabei einen einzelnen Index zu. Also beispielsweise: $(1, 1) \mapsto 0$, $(1, 2) \mapsto 1$, ... (siehe [33]).

(2.3.6) bekommt dann folgende Gestalt:

$$0 = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma} T^{\sigma\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\beta} T^{\mu\beta}, \tag{5.1.2}$$

$$\partial_0 T^{0\nu} = -\frac{\partial f^{e\nu}}{\partial T^{\rho 0}} \partial_e T^{\rho 0} - \Gamma^\mu_{\mu\sigma} f^{\sigma\nu}(T^{\alpha 0}) - \Gamma^\nu_{\mu\beta} f^{\mu\beta}(T^{\alpha 0}). \tag{5.1.3}$$

Wegen der Symmetrie des Energie-Impulstensors $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ sind das tatsächlich vier (d) Gleichungen für lediglich vier (d) unbekannte Funktionen. Nun entwickelt man $T^{\alpha 0}$ in eine Taylor-Reihe:

$$T^{\alpha 0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^{\alpha 0}_{(k)} (x^0)^k. \tag{5.1.4}$$

Damit ist auch die Taylor-Entwicklung der Ableitungen von $T^{\alpha 0}$ gegeben:

$$\partial_0 T^{\alpha 0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^{\alpha 0}_{(k+1)} (x^0)^k, \tag{5.1.5}$$

$$\partial_e T^{\alpha 0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\partial_e T^{\alpha 0}_{(k)}\right) (x^0)^k. \tag{5.1.6}$$

(5.1.4) - (5.1.6) kann man in (5.1.3) einsetzen. Dann sortiert man alle Summanden nach Potenzen von x^0. Da (5.1.3) gelten soll, macht man einen Koeffizientenvergleich und bekommt für jede Ordnung von x^0 eine Gleichung zwischen den Koeffizienten von $T^{\alpha 0}$. In k-ter Ordnung gilt (Details der Herleitung findet man im Anhang I):

$$\begin{aligned} T^{\alpha 0}_{(k+1)} &= -\sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q} \left(\frac{\partial^{k-q}}{\partial {x^0}^{k-q}} \frac{\partial f^{e\nu}}{\partial T^{\rho 0}} \right)\Big|_{x^0=0} \partial_e T^{\rho 0}_{(q)} - \sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q} \Gamma^\mu_{(k-q)\mu\sigma} f^{\sigma\nu}_{(q)}(T^{\alpha 0}) \\ &\quad - \sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q} \Gamma^\nu_{(k-q)\mu\beta} f^{\mu\beta}_{(q)}(T^{\alpha 0}) \qquad (5.1.7) \\ &= -\sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q} \left(\frac{\partial f^{e\nu}_{(k-q)}}{\partial T^{\rho 0}} \partial_e T^{\rho 0}_{(q)} + \Gamma^\mu_{(k-q)\mu\sigma} f^{\sigma\nu}_{(q)}(T^{\alpha 0}) + \Gamma^\nu_{(k-q)\mu\beta} f^{\mu\beta}_{(q)}(T^{\alpha 0}) \right). \qquad (5.1.8) \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet $X_{(m)} := \frac{\partial^m}{\partial {x^0}^m} X\big|_{x^0=0}$. Dieses Gleichungssystem löst man iterativ, beginnend mit der nullten Ordnung, die man aus den Anfangsbedingungen gewinnt. Durch die Wahl eines bestimmten Koordinatensystems sind die Christoffelsymbole und damit auch ihre Ableitungen $\Gamma^\mu_{(m)\nu\rho}$ bekannt. Durch das Festlegen des physikalischen Systems (beispielsweise indem man fordert, dass das Medium ein ideales Fluid mit der Zustandsgleichung $\epsilon = \frac{1}{3}p$ sein soll) ist $f^{\mu\nu}$ und damit auch dessen Ableitungen $f^{\mu\nu}_{(m)}$ bekannt. Auf der rechten Seite von (5.1.8) stehen neben diesen bekannten Termen nur Ableitungen maximal k-ter Ordnung von $T^{\alpha 0}$. Mit (5.1.8) lässt sich also die $(k+1)$-te Ableitung von

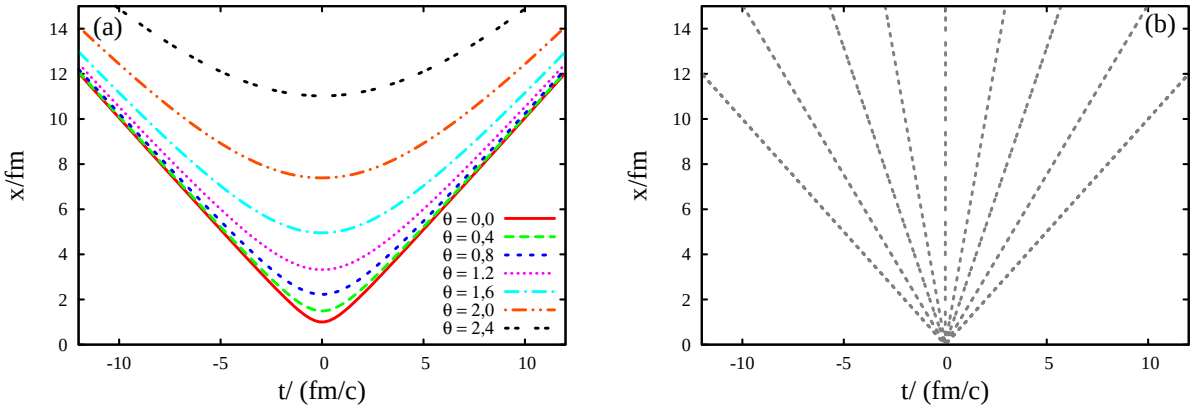

Abbildung 5.1.1: Überdeckung des für die hydrodynamischen Rechnungen relevanten Abschnittes der Minkowski-Raumzeit mit den verwendeten Koordinaten. In (a) sind die Kurven mit konstantem θ gezeigt. Die Farbe entspricht der Farbgebung der Energiedichte- und Rapiditäts-Kurven in dieser Arbeit. In (b) sind die Kurven mit konstantem η dargestellt.

$T^{\alpha 0}$ aus niedrigeren Ableitungen berechnen. Im folgenden wird mit dem Begriff "iteratives Lösungsschema" diese Methode zur (beliebig genauen) Lösung der hydrodynamischen Gleichungen bezeichnet. In Anhang I werden sowohl diese allgemeinen Gleichungen hergeleitet, als auch für den Fall eines idealen Fluids angegeben.

5.1.1 Beschreibung der Koordinaten

Die iterative Berechnung der Lösung wird im Koordinatensystem $(\theta, \eta, \rho, \phi)$ durchgeführt. Die Koordinaten θ und η sind die gleichen wie im Abschnitt 3.2. Damit lassen sich die iterativen Resultate einfach mit den Ergebnissen der numerischen Berechnungen vergleichen. In transversaler Richtung wurden zumeist Polarkoordinaten verwendet. Einzige Ausnahme in dieser Arbeit ist der Fall der triaxialen Expansion im Abschnitt 5.5.2, wo zur Beschreibung der transversalen Dynamik die kartesischen Koordinaten x_2 und x_3 verwendet werden. Da die folgenden Rechnungen Modelle für relativistische Schwerionenkollisionen sind, wird ein Koordinatensystem gewählt, dass dem Rechnung trägt. Die Strahlrichtung wird mit "longitudinal" bezeichnet. Die Ausrichtung der transversalen Koordinatenachsen ist beliebig, wenn rotationssymmetrische Systeme betrachtet werden, was meist der Fall ist. Die einzige Ausnahme bildet der Fall der triaxialen Expansion im Abschnitt 5.5.2, in dem die transversalen Achsen in Richtung der beiden Hauptachsen der anfänglichen Materieverteilung zeigen. Relativ zu dem so orientierten kartesischen Koordinatensystem ist das verwendete Koordinatensystem definiert.

In Abb. 5.1.1 sind die Koordinaten dargestellt, die die longitudinale Position und die Zeit codieren. Auf den Kurven mit konstantem θ (in (a)) ist die Zeit, die in einem longitudinal mitbewegten Koordinatensystem gemessen wird konstant. Die Farbgebung und der Linientyp in diesem Plot stimmen mit den Farben und Linientypen der übrigen Diagramme in diesem Kapitel überein. Im Falle relativistischer Schwerionenkollisionen, findet die Kollision zur Zeit t am Ort $x = 0$ (gemessen im Laborsystem) statt. Die Kurve $\theta = 0$ stellt die Kurve dar, bei der das System lokal thermalisiert ist. Das entspricht für einen mitbewegten Beobachter einer Eigenzeit von etwa $\tau \approx 1 fm/c$. In (b) sind die Kurven mit konstantem η dargestellt. Da in die Berechnung von η nur das Verhältnis x/t eingeht, sind dies Geraden, die einer gleichförmigen Bewegung ausgehend vom Ursprung entsprechen. In einer wechselwirkungsfreien Theorie wären dies die Trajektorien von Teilchen, die am Kollisionsort starten und nach einer gewissen Zeit (im Laborsystem) t am Ort x sind. Wechselwirkungen deformieren die Trajektorien, allerdings kann man die Kurven mit konstantem η immer noch als Orientierung verwenden, um die Geschwindigkeit in longitudinaler Richtung abschätzen zu können.

Da unter dem Begriff “Rapidität” häufig verschiedene Größen verstanden werden, soll hier die in dieser Arbeit verwendeten Begriffe definiert werden

Def.: Rapidität, Rapidität in bestimmte Richtung y

Unter Rapidität wird hier verstanden:

$$y = \mathrm{Artanh}(|\vec{v}|)$$

wobei $\vec{v}$ die in kartesischen Koordinaten gemessene Dreiergeschwindigkeit ist. Zur Verdeutlichung wird diese Größe auch absolute Rapidität $y_{\mathrm{abs}} \equiv y$ genannt. Im Unterschied dazu wird unter longitudinaler Rapidität y_{long} bzw. transversaler Rapidität y_{trans}

$$y_{\mathrm{long}} = \mathrm{Artanh}(v_{\mathrm{long}}), \qquad y_{\mathrm{trans}} = \mathrm{Artanh}(v_{\mathrm{trans}})$$

verstanden.

5.2 Bjorken-Anfangsbedingungen

Wie Bjorken 1984 hergeleitet hat [32], gilt für Systeme, die in transversaler Richtung translationsinvariant und in longitudinaler Richtung boostinvariant sind, dass sich Energiedichte

und Fluidrapidität wie folgt verhalten:

$$\epsilon = \epsilon_0 e^{-\frac{4}{3}\theta}, \qquad y = \eta. \tag{5.2.1}$$

Mit diesem analytischen Ergebnis kann man die iterativen Resultate vergleichen und findet tatsächlich Übereinstimmung: In Abb. 5.2.1 sieht man, bis zu welcher Ordnung

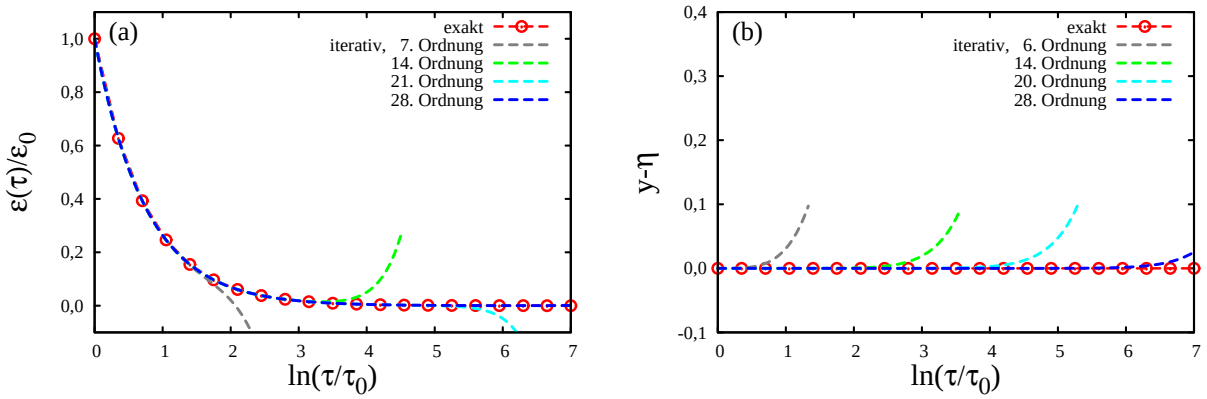

Abbildung 5.2.1: Vergleich des exakten Ergebnisses (5.2.1) mit dem iterativen, dass bis zu verschiedenen Ordnungen berechnet wurde. Die Kreise stellen die exakte Lösung dar und die Linien zeigen die iterativ gewonnene Lösung bis zu verschiedenen Ordnungen. Aus Gründen der einfacheren Darstellbarkeit sind in (b) nur die Ergebnisse gerader Entwicklungsordnungen angegeben

man die Lösung Taylor-entwickeln muss, um bis zur Zeit $\tau \approx 1000\,\tau_0$, oder äquivalent $\theta = \ln \frac{\tau}{\tau_0} = 7$, eine verlässliche Lösung zu erhalten. Bei $\tau = 1000\,\tau_0$ ist die Energiedichte auf $10^{-4}\epsilon_0$ gefallen. Das bedeutet bei einer für den LHC typischen Start-Energiedichte von $\epsilon_0 = 1000\,\mathrm{GeVfm}^{-3}$, dass diese so weit gesunken ist, dass Pionen ausfrieren und damit das Fluid in nicht mehr stark wechselwirkende Hadronen zerfällt. Den Darstellungen in Abb. 5.2.1 kann man entnehmen, dass für eine gute Approximation an die exakte Lösung im gewünschten Zeitbereich etwa 30 Ordnungen benötigt werden. Die ersten Ordnungen der Lösungen sind in der Tabelle I.1 im Anhang I angegeben.

5.3 Gradienten in longitudinaler Richtung

Zunächst sollen Anfangsbedingungen, bei denen nur Gradienten in longitudinaler Richtung auftreten, betrachtet werden. Auch in diesem Fall kann man die iterativen Ergebnisse überprüfen, da wie im Abschnitt 3.2 beschrieben, numerische Ergebnisse zur Verfügung stehen. Darum wurden auch in diesem Fall als Anfangsbedingungen $\epsilon = \epsilon_0 \exp\left\{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right\}$,

$y_{\text{long}} = \eta$ und $y_{\text{trans}} = 0$ mit $\sigma = 3,8$ gewählt. Die ersten Ordnungen der Lösung sind in Tabelle I.2 im Anhang I zu finden. Man findet Übereinstimmung bei den Energiedichten bis zu $\theta = 2,8$. In Abb. 5.3.1 sind die Kurven mit $\theta = 2,8$ nicht gezeigt, um die Abbildung nicht zu überladen. Bei den longitudinalen Rapiditäten tauchen erste Abweichungen schon bei $\theta \approx 2,0$ auf. Abb. 5.3.1 soll als Beispiel dafür genügen, dass das iterative Schema

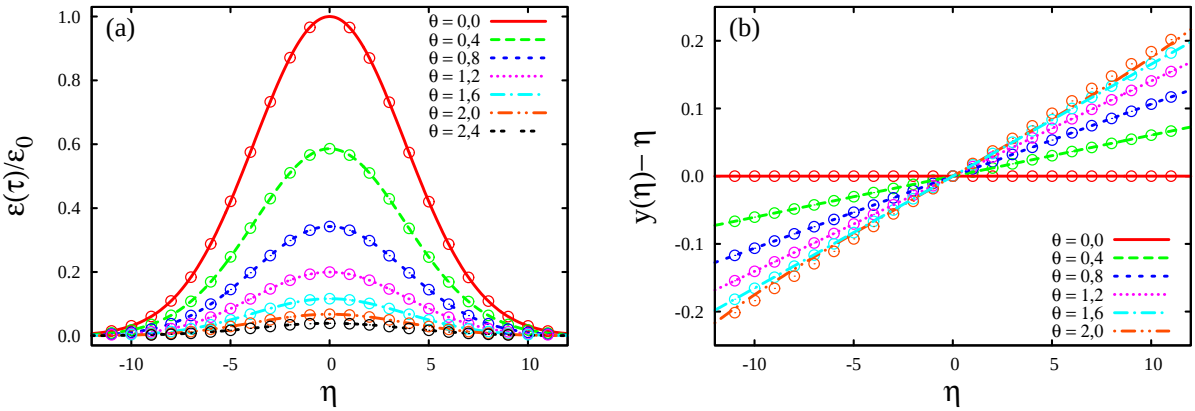

Abbildung 5.3.1: Vergleich des numerischen Ergebnisses mit dem iterativen Resultat für eine in longitudinaler Richtung gaußförmige Anfangs-Energiedichte-Verteilung. Dargestellt sind in (a) die Energiedichte ϵ und in (b) die longitudinale Rapidität y_{long} zu verschiedenem θ, Durchgezogene Linien geben das iterative Ergebnis an, die Kreise sind eine Auswahl der numerischen Datenpunkte

sinnvolle Ergebnisse liefert. Was natürlich immer geht, ist, dass man das iterative Ergebnis für die Energiedichte und Vierergeschwindigkeit bis zur n-ten Ordnung in die Bewegungsgleichung für den Energie-Impuls-Tensor einsetzt. Man erhält tatsächlich in den in dieser Arbeit vorgestellten Fällen, dass die Gleichung bis zur n-ten Ordnung exakt erfüllt sind und lediglich Korrekturen höherer Ordnung auftreten. Die Übereinstimmung der numerischen Daten mit dem iterativen Resultat verifiziert daher eher numerische Ergebnis statt umgekehrt.

5.4 Gradienten in transversaler Richtung

Wenn die Anfangs-Energiedichteverteilung rotationssymmetrisch um die longitudinale Achse und in longitudinaler Richtung konstant ist, so erhält man für die Energiedichteverteilung den Verlauf, der in Abb. 5.4.1 (a) dargestellt ist. Interessanterweise fällt die Energiedichte hier viel schneller, als im Fall mit nur longitudinalen Gradienten. Ursache dafür ist der anfängliche Fluss $y_{\text{long}} = \eta$, der die Dynamik in longitudinaler Richtung dominiert.

Damit ist die Bewegung, die durch die longitudinalen Gradienten in Abschnitt 5.3 verursacht wurde, lediglich eine kleine Störung der Bewegung in dieser Richtung. Somit ist die relative Änderung beim Vergleich der Bjorken-Lösung mit dem Resultat für longitudinale Grandienten relativ klein. Da die anfängliche Geschwindigkeit in transversaler Richtung aber Null ist, kann man die transversalen Gradienten nicht vernachlässigen. Somit kommt durch die transversale Expansion ein nicht vernachlässigbarer Beitrag zur Energiedichte-Änderung hinzu. Die für Abb. 5.4.1 gewählten Anfangsbedingungen sind:

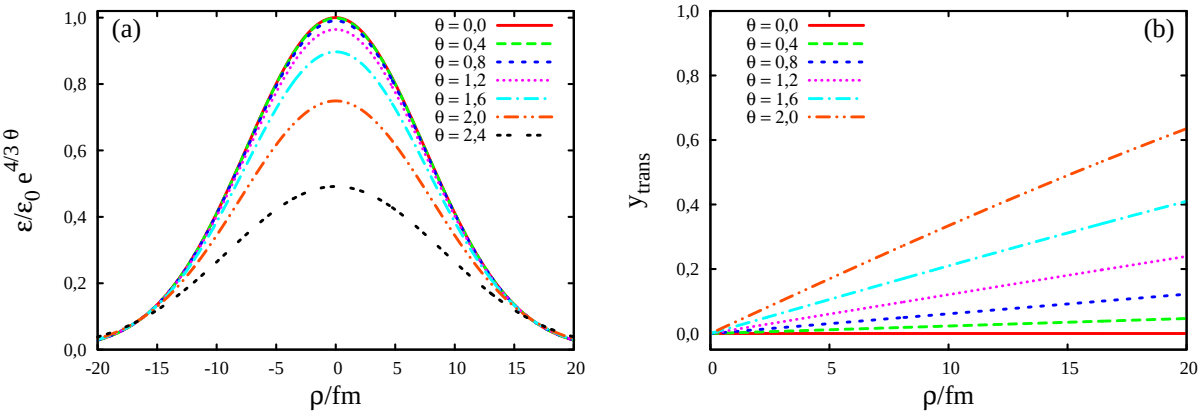

Abbildung 5.4.1: In (a) ist das normierte Energiedichteprofil zu verschiedenen Zeiten bei transversal gaußförmiger Anfangs-Energiedichte-Verteilung gezeigt. In longitudinaler Richtung hingegen ist die Anfangsenergiedichte konstant. Der anfängliche Fluss ist durch $y_{\text{long}} = \eta$ und $y_{\text{trans}} = 0$ gegeben. Normiert wurde in (a) auf die Energiedichte der Bjorken-Lösung (5.2.1). In (b) ist die transversale Rapidität y_{trans} entlang der transversalen Koordinatenachse zu verschiedenen Zeiten dargestellt.

$\epsilon = \epsilon_0 \exp\left\{-\frac{\rho^2}{2\kappa^2}\right\}$, $y_{\text{long}} = \eta$ und $y_{\text{trans}} = 0$ mit $\kappa = 7,5$ fm. Der Wert für κ entspricht in etwa dem Radius eines Bleikerns, da diese in den Schwerionenexperimenten am LHC verwendet werden.

In Abb. 5.4.1 wird die longitudinale Rapidität y_{long} nicht dargestellt. Das liegt darin begründet, dass diese von der transversalen Form der Energiedichte nicht beeinflusst wird. Damit ist sie identisch mit der longitudinalen Rapidität der Bjorken-Lösung (5.2.1). Ebenfalls nicht dargestellt ist die Energiedichteverteilung in longitudinaler Richtung, da ϵ in dieser Richtung konstant ist.

Dass die transversale Geschwindigkeit mit dem Abstand vom Zentrum nahezu linear zunimmt, ist typisch für gaußförmige Anfangsbedingungen. Das kann man folgendermaßen verstehen: Die Dynamik wird durch die Druckgradienten angetrieben. Folglich ist die beschleunigende Kraft proportional zur Ableitung der Energiedichte in der jeweiligen Rich-

tung. Die Beschleunigung $\vec{a}$ der Materie ist invers proportional zur trägen Masse, was sich übersetzt in inverse Proportionalität zur Energiedichte. Es gilt also:

$$a_x(r) \sim \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \epsilon}{\partial x}. \tag{5.4.1}$$

Analog gilt dies für die anderen Raumrichtungen. Lässt sich die Geschwindigkeit $\vec{v}$ zu einem Zeitpunkt t schreiben als $\vec{v} = f(t)\vec{r}$, dann gilt einen infinitesimalen Zeitschritt später:

$$v_x(t + dt) = f(t)x + \frac{g(t)}{\epsilon}\frac{\partial \epsilon}{\partial x}dt. \tag{5.4.2}$$

Für eine Gauß-Verteilung gilt: $\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \epsilon}{\partial x} = -x/\sigma^2$, wobei σ die Standardabweichung ist. Damit ist auch die Beschleunigung proportional zur Ortskoordinate. Für die x-Komponente der Geschwindigkeit gilt damit zum Zeitpunkt $t + dt$:

$$v_x = f(t)x - \frac{g(t)}{\sigma^2}xdt = x\left(f(t) - \frac{g(t)}{\sigma^2}dt\right). \tag{5.4.3}$$

Die Geschwindigkeit bleibt proportional zur Ortskoordinate. Es liegt nahe zu vermuten, dass bei Berücksichtigung der relativistischen Effekte die Geschwindigkeit durch die Rapidität ersetzt werden muss. Diese Überlegung war natürlich sehr heuristisch und außerdem nichtrelativistisch. Für eine sichere Aussage müssten die hydrodynamischen Gleichungen analysiert werden um zu zeigen, dass die Beschleunigung proportional zum Druckgradienten ist. Außerdem müsste man die Aussage, dass die Beschleunigung invers proportional zur Energiedichte ist, überprüfen und die Überlegung relativistisch formulieren. Da dies alles sehr aufwendig ist und nicht wirklich weiterhilft, soll diese Plausibilitätsbetrachtung genügen. In Tabelle I.3 sind die führenden Ordnungen der Lösung angegeben.

5.5 Gradienten in longitudinaler und transversaler Richtung

5.5.1 Zylindersymmetrischer Fall

Nun soll ein Modell für zentrale Stöße betrachtet werden. Die Energiedichteverteilung ist dabei symmetrisch unter Rotationen um die longitudinale Achse. Sowohl in longitudinaler Richtung als auch in transversaler Richtung wird eine gaußförmige Anfangs-Verteilung der Energiedichte $\epsilon = \epsilon_0 \exp\left\{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2} - \frac{\rho^2}{2\kappa^2}\right\}$ angenommen (für Abb. 5.5.1 wurde $\sigma = 3,8$ und $\kappa = 7,5$ gewählt). Die ersten Ordnungen der Lösung sind in Tabelle I.4 notiert. Die

anfängliche Rapiditätsverteilung ist wieder $y_{\text{long}} = \eta$, $y_{\text{trans}} = 0$. In Abb. 5.5.1 wird die Lösung veranschaulicht. In Abb. 5.5.1 (a) wird die Energiedichte ϵ entlang der longitudinalen Koordinatenachse zu verschiedenen θ mit Linien dargestellt. Die Kreise geben die Energiedichte für den Fall unendlicher transversaler Breite (das entspricht dem Fall aus Abschnitt 5.3) an. Damit ist es möglich den Einfluss der transversalen Form abzuschätzen. In (c) ist die Energiedichte in transversaler Richtung aufgetragen. Linien geben wieder die Energiedichte für den hier diskutierten Fall an. Kreise stehen für die Energiedichte bei longitudinal unendlicher Ausdehnung ("$\sigma = \infty$"). Durch Vergleich von (a) und (c) stellt man fest, dass die Kreise in (c) wesentlich dichter an den zugehörigen Linien liegen, als in (a). Das bedeutet, dass das Einschalten longitudinaler Gradienten (darin unterscheiden sich Kreise und Linien in (c)) einen wesentlich kleineren Einfluss auf die Energiedichte hat als das Einschalten transversaler Gradienten (vgl. (a)).

In (a) und (c) kann man erkennen, dass die Energiedichte im zylindersymmetrischen Fall schneller fällt, als in den Fällen rein transversaler bzw. rein longitudinaler Gradienten. Dies ist darin begründet, dass die Materie in einem Volumenelement in die zusätzlichen Richtungen strömen und sich somit in einem größeren Volumen verteilen kann.

In Abb. 5.5.1 (b) und (d) sind die longitudinale bzw. die transversale Rapidität dargestellt. Wie in den Darstellungen der Energiedichte geben Linien das Ergebnis für den hier diskutierten zylindersymmetrischen Fall und Kreise das Ergebnis für die transversal unbegrenzte Materieverteilung aus Abschnitt 5.3 (in (b)) bwz. für die longitudinal unbegrenzte Verteilung aus Abschnitt 5.4 (in (d)) an.

Durch Betrachten von (b) und (d) kann die heuristische Überlegung zur Linearität der Rapiditäsverteilung untermauert werden. In diesen Darstellungen zeigt sich, dass das zusätzliche Auftreten eines Gradienten in orthogonaler Richtung keinen Einfluss auf die Rapiditätsprofile hat, dass also jede Dimension getrennt behandelt werden kann. Außerdem kann man erkennen, dass die Beschleunigung tatsächlich einen Faktor enthält, der invers proportional zur Energiedichte ist. Dies lässt sich daraus ablesen, dass die Rapiditätsprofile unverändert sind, (also auch die Beschleunigungsprofile), obwohl die Energiedichte im zylindersymmetrischen Fall wesentlich schneller abfällt, als z.B. im rein longitudinalen Fall (vgl. (a)). Dadurch fallen die Gradienten, welche die Dynamik antreiben ebenfalls schneller ab und es wird ein Faktor benötigt, der diesen Effekt für die Beschleunigungen korrigiert. Die Beschleunigung ist somit invers proportional zur Energiedichte.

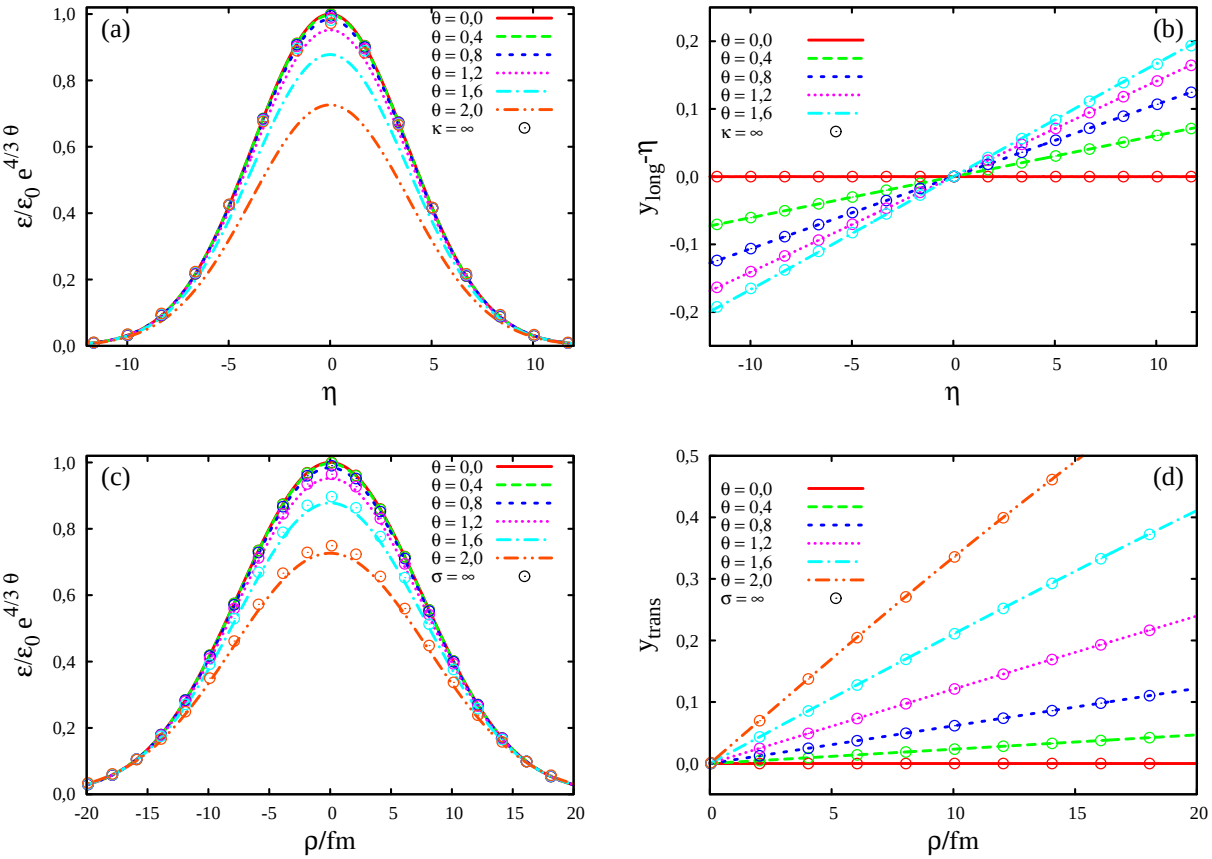

Abbildung 5.5.1: Darstellung der Evolution der Materieverteilung bei zylindersymmetrischen Anfangsbedingungen. In longitudinaler Richtung hat das Medium zum Startzeitpunkt eine gaußförmige Energiedichteverteilung mit der Breite $\sigma = 3,8$ (a). In transversaler Richtung ist die anfängliche Verteilung (c) ebenfalls gaußförmig mit Breite $\kappa = 7,5\,\mathrm{fm}$. Die Linien stellen die Lösung für den zylinderförmigen Fall dar. Verglichen werden sie mit den Lösungen aus den letzten beiden Abschnitten, die durch Kreise symbolisiert werden. Die longitudinale Energiedichte- und Rapiditätsverteilung wird in (a) bzw. (b) verglichen mit der aus Abschnitt 5.3, d.h. mit dem Fall unendlicher Breite ("$\kappa = \infty$" in der Legende). Die transversale Energiedichte- und Rapiditätsverteilung wird in (c) bzw. (d) hingegen mit der rein transversalen Expansion aus Abschnitt 5.4 verglichen. Das entspricht dem Fall unendlicher longitudinaler Ausdehnung ("$\sigma = \infty$").

5.5.2 Triaxiale Expansion

Als letzter Fall werden dezentrale Stöße behandelt. Bei solchen ist die Ausdehnung des Mediums zum Startzeitpunkt in allen drei Raumrichtungen im allgemeinen verschieden und damit auch die Energiedichtegradienten. Ein steilerer Gradient führt zu stärkerer Beschleunigung in die Richtung, in die er zeigt. Damit übersetzt sich eine anfänglich asymmetrische Verteilung der Energiedichte in eine asymmetrische Verteilung der Impulse.

Die dadurch verursachte Formveränderung wird mit dem Begriff der v_2-Dynamik beschrieben. Sei $f(\phi)$ die Impulsverteilung einer Teilchensorte in Abhängigkeit vom azimutalen Winkel. Dann kann man diese in eine Fourier-Reihe zerlegen. Die Koeffizienten nennt man dabei v_k:

$$f(\phi) = v_0 + v_1 cos(\phi) + v_2 cos(2\phi) + \dots \ . \tag{5.5.1}$$

Da die Zustandsgleichung beeinflusst, wie sich eine anfängliche Asymmetrie in die Koeffizienten v_k übersetzt, kann man die Impulsverteilung nutzen um $p(e)$ zu bestimmen (oder zumindest einzuschränken). In Experimenten am RHIC [34] und LHC [35] wurden die Koeffizienten v_k mit $k \leq 5$ in Abhängigkeit vom transversalen Impuls $p_\perp$ bestimmt. Durch Vergleich mit Modellrechnungen (vgl. Heinz *et al.*[37] und Luzum *et al.*[38]) wurden aus den experimentellen Daten realistische Zustandsgleichungen und Schranken für das Verhältnis $\frac{\eta}{s}$ extrahiert. Der am einfachsten zugängliche Koeffizient ist v_2, der im Wesentlichen die Elliptizität der Impulsverteilung beschreibt. Daher wird seine Dynamik auch als elliptischer Fluss bezeichnet.

In Abb. 5.5.2 wird ein Überblick über die Energiedichte-Verteilung und die Rapiditätsverteilung gegeben. In den Abb. 5.5.2 (a), (c) und (e) ist die Energiedichte ϵ entlang der Koordinaten-Achsen η, x_1 und x_2 dargestellt. In (b), (d) und (f) sind die longitudinale bzw. die transversale Rapidität entlang der jeweiligen Koordinatenachsen dargestellt. Aus Symmetriegründen verschwinden dort die jeweils anderen Rapiditäten. In Abb. 5.5.3 (a) und (c) werden die durch das Bjorken-Ergebnis (5.2.1) dividierten Energiedichten entlang der longitudinalen und entlang der ersten transversalen Koordinatenachse dargestellt. In dieser Diskussion der triaxialen Expansion bezieht sich "erste Koordinatenachse" auf die Achse, die in Richtung der großen Halbachse der Anfangs-Energiedichte (ausgewertet bei $\eta = 0$) zeigt. Die "zweite Koordinatenachse" ist die Achse, die in Richtung der kleinen Halbachse zeigt. Bei Vergleich der Energiedichten in (a) und (c) mit den entsprechenden Darstellungen 5.5.1 (a) und (c) stellt man fest, dass sich qualitativ nichts geändert hat.

Interessant ist jedoch, ob es gelingt die Dynamik der Asymmetrie zu verfolgen. Dazu kann man Abb. 5.5.3 (b) und (d) betrachten. In diesen ist die Verteilung der transversalen Rapiditäten $y_{\text{trans1,2}}$ (Abb. 5.5.2 (d) und (f)) gewichtet mit der Energiedichte dargestellt.

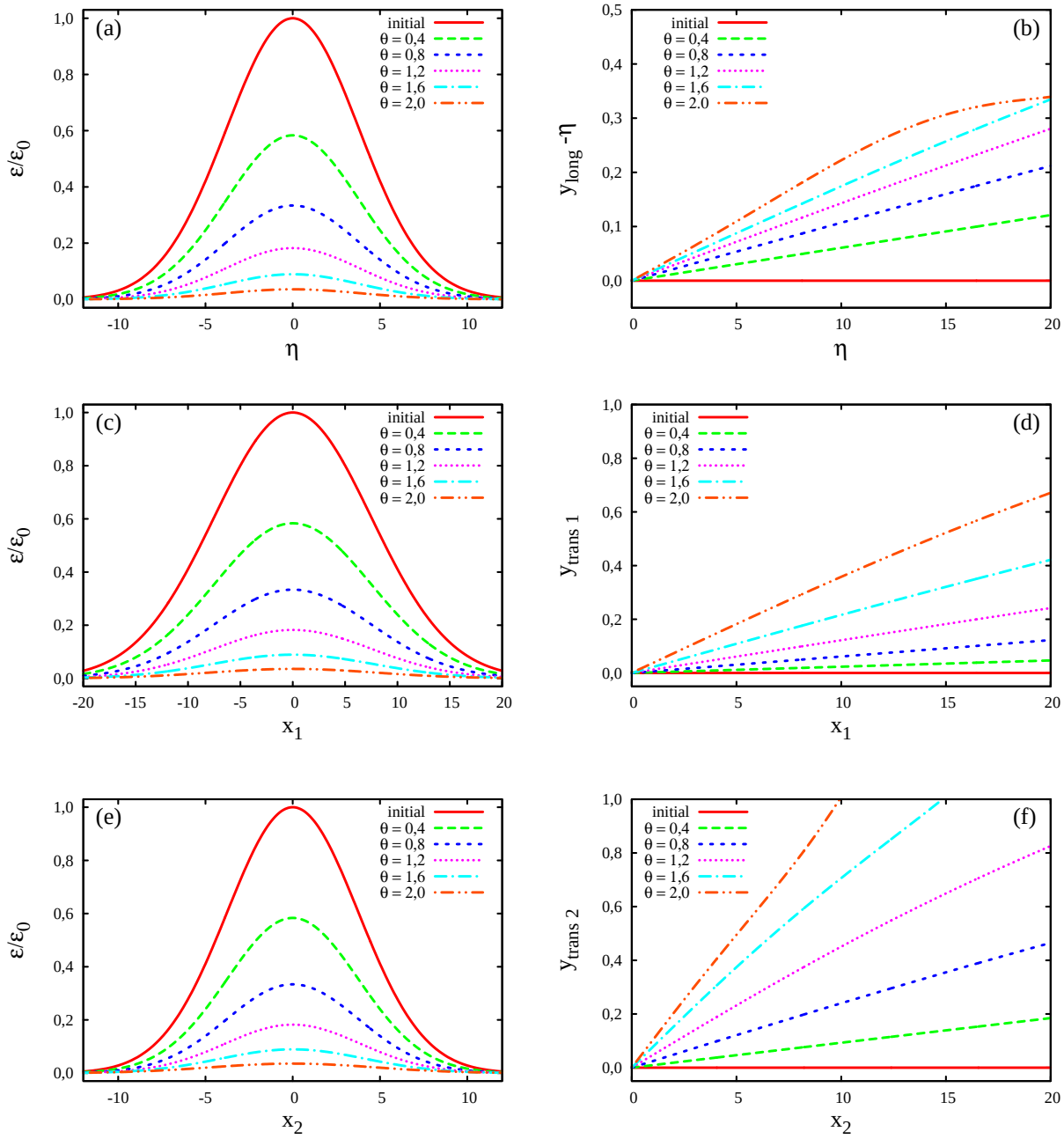

Abbildung 5.5.2: Triaxiale Expansion. In (a), (c) und (e) ist die Energiedichte ϵ entlang der Koordinatenachsen dargestellt: In (a) entlang der η-Achse, in (c) entlang der ersten und in (e) entlang der zweiten transversalen Achse. Als anfängliche Breiten der Gauß-Verteilungen wurden für die longitudinale Verteilung $\sigma = 3,8$, und für die transversalen Verteilungen $\sigma = 7,5\,\mathrm{fm}$ bzw. $\sigma = 3,75\,\mathrm{fm}$ gewählt. In (b) ist die longitudinale Rapidität $y_{\mathrm{long}} = \mathrm{Artanh}(v_x)$ dargestellt. Das Abknicken der Kurve für $\theta = 2,0$ bei $\eta \approx 13$ liegt daran, dass die abgebrochene Taylor-Reihe für die Geschwindigkeit bei diesem Wert nicht mehr hinreichend genau ist. In (d) und (f) sind die transversalen Rapiditäten $y_{\mathrm{trans1,2}} = \mathrm{Artanh}(v_{\mathrm{trans1,2}})$ dargestellt.

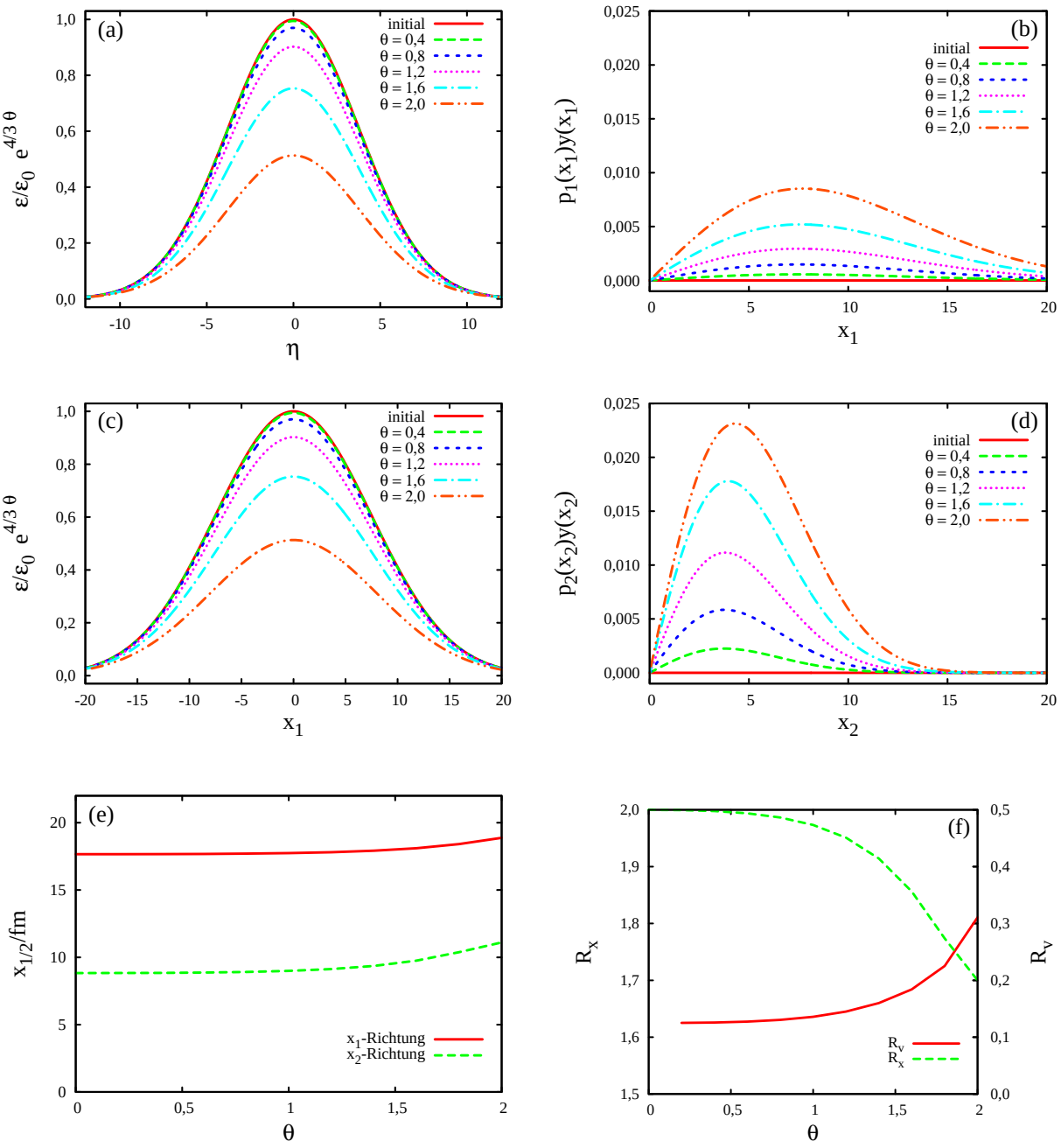

Abbildung 5.5.3: In (a) ist die Energiedichte ϵ entlang der Strahlachse aufgetragen. In (c) sieht man die Energiedichte entlang einer transversalen Richtung. in (b) und (d) ist die transversale Rapidität $y_{\mathrm{trans}1,2} = \mathrm{Artanh}(v_{\mathrm{trans}1,2})$ gewichtet mit der normierten Energiedichte (s. Text) dargestellt. Um die Ausdehnung des Mediums und das Verhältnis der Geschwindigkeiten quantifizieren zu können, sind in (e) die Halbwertsbreiten im Verlauf der Evolution dargestellt. In (f) ist ihr Verhältnis R_x und das Verhältnis der mittleren Geschwindigkeiten R_v dargestellt.

Die Wichtung wurde realisiert, indem die Rapidität mit

$$p_i := \frac{\epsilon(x_i)}{\int dx_i \epsilon(x_i)}, \qquad i = 1, 2 \tag{5.5.2}$$

multipliziert wurde. Dabei ist $\epsilon(x_i) := \epsilon(\eta = 0, x_{j\neq i} = 0, x_i)$. $p_i(x_i)$ ist also die Energiedichte entlang der i-ten transversalen Koordinatenachse, die so normiert wurde, dass das Integral über die gesammte Achse eins ergibt. Es kann damit als Wahrscheinlichkeit interpretiert werden, dass sich ein Testteilchen gerade am Ort x_i befindet. Einen besonders hohen Wert wird die so gewichtete Rapiditätsverteilung nahe der Ränder der Materie-Verteilung haben. Das liegt daran, dass sich dort einerseits noch relativ viel Materie befindet und diese außerdem wegen der Nähe zum Rand (wo die Gradienten am größten sind) relativ stark beschleunigt wird. Die Lage des Maximums gibt also einen Anhaltspunkt wie breit die Verteilung ist. Die Höhe des Maximums gibt hingegen einen Anhaltspunkt wie schnell die Materie strömt. Da p_i normiert ist, sind die beiden Diagramme (b) und (d) miteinander vergleichbar. Man sieht, dass die Verteilung in (b) ihr Maximum bei größeren Werten hat und dass dieses weniger hoch ist. Die Materieverteilung ist also einerseits breiter und andererseits strömt sie langsamer. Aus den Diagrammen (b) und (d) lässt sich jedoch nicht ohne weiteres ablesen, wie groß die mittlere Geschwindigkeit ist, und wie sich diese zur Exzentrizität der Verteilung verhält. Dafür wurde in (f) das Verhältnis der Halbwertsbreiten $R_x := \frac{x_1^{1/2}}{x_2^{1/2}}$ und das Verhältnis der mittleren Geschwindigkeiten $R_v := \frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_2}$ dargestellt. Man sieht in der Tat, dass die Materie, in die Richtung der kleineren Ausdehnung schneller strömt. Das Verhältnis der Halbwertsbreiten nimmt im Laufe der Expansion ab, was auch erwartet wurde. Die iterative Methode kann man also auch zum Studium des elliptischen Flusses verwenden. Die führenden Ordnungen in der Entwicklung der Energiedichte und den räumlichen Komponenten der Vierergeschwindigkeit nach θ ist in Tabelle I.5 in Anhang I gegeben.

5.6 Grenzen der iterativen Methode

Ein offensichtliches Problem der iterativen Methode ist, dass man die Entwicklung bei einer endlichen Ordnung abbrechen muss. Damit stellt sich sofort die Frage, ob man ein Kriterium finden kann, mit dem es möglich ist einzuschätzen, bis zu welchem Wert der Entwicklungskoordinate (hier θ) das exakte Resultat gut von dem iterativen Ergebnis approximiert wird. Die üblichen Restgliedabschätzungen helfen nicht weiter, da man für diese die exakte Lösung bereits kennen muss. Eine Abschätzung, die hingegen gut funktioniert, ist den Wert von θ zu bestimmen, ab dem die höchste Ordnung der Taylor-Entwicklung

dominant wird. Sei also a eine analytische Funktion. $b := \sum_{n=0}^{N} a_n \theta^n$ Sei deren in N-ter Ordnung abgebrochene Taylorentwicklung. Um herauszufinden, bis zu welchem Wert von θ die Funktion a gut von b approximiert wird, findet man den kleinsten Wert von θ bei dem gilt:

$$b(\theta) = 2a_N \theta^N \tag{5.6.1}$$

An dieser Stelle ist die höchste Entwicklungsordnungen genau so groß wie alle übrigen Ordnungen zusammen. Bis zu diesem θ-Wert kann man sich auf die abgebrochene Entwicklung verlassen. Die Abschätzung geht davon aus, dass die Anfangsbedingungen hinreichend gutartig sind. Allerdings lässt sich nicht einfach formulieren, was "gutartig" genau bedeutet. Ein etwas präziseres Kriterium nimmt an, dass die erste nicht mehr bestimmte Ableitung (bei einer Entwicklung bis zur n-ten Ordnung die $(n+1)$-te Ableitung) monoton fällt. Damit kann man den Beitrag des Restgliedes in den Standard-Restgliedabschätzungen nach oben abschätzen und eine Obergrenze der Ungenauigkeit bestimmen. Allerdings gibt es keine Garantie, dass die Annahme (die $(n+1)$-te Ableitung fällt monoton) zutrifft.

Dass die Taylor-Reihe nach einer endlichen Ordnung abgebrochen werden muss, ist kein schwerwiegendes Problem, da die Hydrodynamik ohnehin nur für einen gewissen Zeitraum ($0 \leq \theta \lesssim 7$) eine gute Näherung für die Dynamik darstellt. Im Beispiel der Bjorken-Lösung wurde gezeigt, dass in diesem Fall etwa 30 Entwicklungsordnungen genügen. In den expliziten Rechnungen hat sich allerdings gezeigt, dass es für den iterativen Algorithmus engere Grenzen gibt. Grund dafür ist, dass die Komplexität der Ausdrücke, die während eines Iterationsschrittes berechnet werden, sehr schnell wächst. Die Ursache liegt darin, dass der n-te Entwicklungskoeffizient selbst aus $\sim n$ Summanden besteht. $T^{\alpha 0}$ hat damit $\sim n^2$ Summanden. Während jeder Iterationsstufe muss zudem $f^{\mu\nu}$ berechnet werden. Dabei werden komplizierte Ausdrücke berechnet, die Wurzeln und dreifache Produkte von $T^{\alpha 0}$ enthalten. Diese Terme enthalten vor dem Vereinfachen nach dieser etwas groben Abschätzung $\sim n^6$ Terme. Für den 18. Iterationsschritt sind das immerhin $\sim 34 \times 10^6$ Terme (für jede der 10 verschiedenen Komponenten von $f^{\mu\nu}$). Für jeden dieser Terme werden einige Bytes Speicher benötigt, sodass ein solches Zwischenergebnis 1-2 Gigabyte Arbeitsspeicher belegt. Hinzu kommt noch zusätzlicher Speicherplatz, der für die effiziente Durchführung der Vereinfachungsroutinen nötig ist. Durch eine optimierte Berechnung ist es vermutlich möglich, erheblich mehr Iterationsschritte zu machen.

Eine weitere Einschränkung ist, dass die Anfangsbedingungen sehr oft differenzierbar sein müssen. Damit kann man die Methode nicht auf Standard-Anfangsbedingungen wie z.B. $\epsilon = \epsilon_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ anwenden. Jedoch ist es meist möglich, gute, beliebig oft differenzierbare Approximationen für unstetige Funktionen zu finden.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden zunächst numerische Lösungen für eindimensionale Probleme der relativistischen Hydrodynamik eines ideale Fluids behandelt. Deren Funktionsfähigkeit wurde einerseits durch Vergleich mit der Literatur, andererseits auch durch Vergleich mit einem analytischen Ergebnis überprüft.

Inspiriert durch die Arbeiten von de Haro *et al.* [30] und Janik [12] wurde eine Methode entwickelt und begründet, mit der die Einsteingleichungen iterativ gelöst werden können. Auf den Fall eines (1+1)-dimensionalen Randes angewendet, ergab sich eine Verallgemeinerung des "Gravity-Duals" aus [13]. Wegen der für die exakte Lösbarkeit notwendigen (unrealistischen) Zustandsgleichung hat dieses Ergebnis aber geringen Wert für das Studium von relativistischen Schwerionenkollisionen. Eine realistische Zustandsgleichung erfordert dass der (1+1)-dimensionale Rand des dreidimensionalen dualen aAdS gekrümmt ist. Jedoch geht bei den Umformungen die exakte Lösbarkeit verloren. Allerdings ließen sich die ersten Terme der Entwicklung mit einem iterativen Schema bestimmen, das analog zu den hier beschriebenen funktioniert. Das ist kein großer Fortschritt, da mit dem iterativen Schema für die (3+1)-dimensionale Hydrodynamik bereits eine Methode mit größerem Gültigkeitsbereich zur Verfügung steht. Allerdings ist zu vermuten, dass die Reduktion auf zwei Dimensionen die nötige Rechenzeit stark verringert.

Im letzten Kapitel wurde das iterative Schema auf die Gleichungen der relativistischen Hydrodynamik angewandt und Lösungen dieses Systems aus PDEs in Form einer Taylor-Reihe bestimmt. Getestet werden konnte die Methode mit den numerischen Ergebnissen aus dem dritten Kapitel. Abgesehen davon ist es immer möglich die Lösungen in die PDEs einzusetzen und sich zu vergewissern, dass die Gleichungen bis zur Entwicklungsordnung der Lösung exakt erfüllt sind. Mit dem iterativen Schema gelang es für gaußförmige Anfangsverteilungen der Energiedichte die physikalischen Freiheitsgrade (Energiedichte, Geschwindigkeitsfeld) bis zur 18. Ordnung in der Zeitkoordinate zu entwickeln. Der limitierende Faktor bei dieser Prozedur liegt im Speicherbedarf des Computer Algebra Systems (in diesem Fall MAPLE) begründet. Das ist insofern überraschend, als dass der Speicherbedarf für das Ergebnis selbst nicht besonders hoch ist.

Alles in allem bleibt festzustellen, dass durch Optimierungen bzw. Anpassung des allgemeinen Schemas auf das zu lösende Problem noch sehr viel höhere Ordnungen der Lösungsfunktion bestimmt werden können. Wenn dies geschehen ist, ist es möglich die hydrodynamische Entwicklung von realistischen Anfangsbedingungen bis zum Freeze-Out-Zeitpunkt zu berechnen. Durch Anwenden des Cooper-Frye-Formalismus können dann die Impulsverteilungen der verschiedenen Teilchenspezies berechnet und mit den experimentellen Daten verglichen werden. Der Vorteil gegenüber üblichen numerischen Codes ist, dass das Ergebnis analytisch und damit korrekt bis zur jeweiligen Entwicklungsordnung ist. Im Interesse der Berechenbarkeit muss dabei aber ein Kompromiss zwischen möglichst einfachen Anfangsbedingungen (z.B. gaußförmig), möglichst einfachen Zustandsgleichungen (z.B. der eines idealen Gases) und möglichst realistischen Bedingungen gefunden werden. Eine weitere Erweiterung des Schemas würde die Berücksichtigung der Viskosität und anderer Transportkoeffizienten bedeuten. Da die Lösung bis zur jeweiligen Entwicklungsordnung exakt ist, kann die iterative Methode benutzt werden, um Referenzlösungen zu berechnen, an denen numerische Codes getestet werden können.

A Konventionen und Abkürzungen

A.1 Liste der verwendeten Konventionen

Einheitenkonventionen

$\hbar$	$= 1$	Planckscher Wirkungsquantum
c	$= 1$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
k_B	$= 1$	Boltzmann-Konstante
$\mathcal{B}$	$= 1 \Leftrightarrow \Lambda = -\frac{(D-1)(D-2)}{2}$	AdS-Skalenparameter
	$\Leftrightarrow R = -D(D-1)$	

Vorzeichenkonventionen in der ART

$R^{\rho}_{\lambda\mu\nu}$	$= \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\rho}_{\mu\tau}\Gamma^{\tau}_{\lambda\nu} - (\nu \leftrightarrow \mu)$	Riemannscher Krümmungstensor
Λ	$= \frac{\kappa}{D} T^{\mu}_{\mu} + \frac{D-2}{2D} R$	Kosmologische Konstante
$\eta_{\mu\nu}$	$= \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$	Minkowski-Metrik
(p, m)		Signatur: erster Eintrag: Anzahl der positiven Eigenwerte von g zweiter Eintrag: Anzahl der negativen Eigenwerte von g

Daraus abgeleitete "Konventionen"

$u_\mu u^\mu$	= -1	Normierung der Vierergeschwindigkeit

Schreibweise

$T_{,\mu}$	$= \partial_\mu T$	partielle Ableitung
$T_{;\mu}$	$= \nabla_\mu T$	kovariante Ableitung
g	$= \det(g_{\mu\nu})$	Determinante der Metrik - bei Verwendung in Integralen
g	$= (g_{\mu\nu})$	metrischer Tensor (Im Unterschied zu $g_{\mu\nu}$, welches die Komponenten des metrischen Tensors sind) - bei Verwendung in algebraischen Ausdrücken

Indexkonventionen

$a, b, c, \ldots$	(kleine lat. Indizes)	räumliche Koordinaten; für D-dimensionalen AdS: $1...(D-2)$
$\mu, \nu, \rho, \ldots$	(kleine griech. Indizes)	räumliche & zeitliche Koordinaten; für D-dimensionalen AdS: $0...(D-2)$
$A, B, C, \ldots$	(große lat. Indizes)	alle Raumzeitkoordinaten; für D-dimensionalen AdS: $0...(D-1)$

A.2 Liste der verwendeten Abkürzungen

ART	Allgemeine Relativitätstheorie
AdS	Anti-de Sitter-Raum
aAdS	asymptotischer Anti-de Sitter-Raum
CFT	konforme Feldtheorie
LHC	Large Hadron Collider am CERN (Schweiz, Frankreich)
CERN	Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire
QGP	Quark-Gluon-Plasma
PDE	partielle Differentialgleichung
o.E.d.A.	ohne Einschränkung der Allgemeinheit
ELG	Euler-Lagrange-Gleichungen
RHIC	Relativistic Heavy Ion Collider am Brookhaven National Laboratory (USA)

B Einführung der Begriffe der ART

B.1 Begriffe aus der Tensorrechnung

Um zu definieren, was ein Tensor ist, ist es zunächst nötig, den Begriff des Dualraums einzuführen. Im Folgenden ist es sehr wichtig, ob Indizes oben oder unten stehen. Stehen sie unten, interpretiert man das indizierte Objekt als Vektor, stehen sie oben, interpretiert man es als lineares Funktional.

Def.: Dualraum $\mathbf{V^*}$

Der Dualraum V^* zu einem Vektorraum V ist der Raum der linearen Funktionale auf V

$$V^* := \{f : V \to \mathbb{R} | f ...\text{linear}\}.$$

Der Dualraum ist selbst wieder ein Vektorraum gleicher Dimension. Das lässt sich leicht zeigen, ist allerdings für die Zwecke dieser Arbeit wenig erhellend und wird daher nicht bewiesen. Für V^* kann man eine beliebige Basis festlegen. Insbesondere für das Rechnen mit den Komponentendarstellungen der Tensoren ist es aber nötig eine Basis zu wählen, die auf kanonische Weise mit der Vektorraumbasis zusammenhängt. Diese Basis wird die duale Basis genannt.

Def.: duale Basis $(\mathbf{f^j})$

Sei (e_i) eine Basis von V. Dann kann man sich mit der Bedingung

$$f^j(e_i) = \delta_i^j \tag{B.1}$$

eine Basis (f^j) des Dualraums V^* definieren. Diese Basis heißt die zu (e_i) duale Basis.

Ein Tensor k-ter Stufe ist eine lineare Abbildung, die einer bestimmten Anzahl von Elementen aus V und V^* eine reelle Zahl zuordnet. Man unterscheidet dabei zwischen kovarianten und kontravarianten Tensoren bzw. Mischformen.

Def.: n-fach kovarianter und m-fach kontravarianter Tensor $\mathbf{T^{s_1\dots s_m}{}_{r_1\dots r_n}}$

Ein n-fach kovarianter und m-fach kontravarianter Tensor auf dem Vektorraum V ist eine Abbildung, die m Elementen des Dualraums V^* und n Elementen des Vektorraums V eine reelle Zahl zuordnet. Sie ist dabei in jedem Argument linear.

$$T := V^{*n} \times V^m \to \mathbb{R}, \quad \text{mit: } T(\dots a\vec{x} + b\vec{y} \dots) = aT(\dots \vec{x} \dots) + bT(\dots \vec{y} \dots)$$

Seien x_i^b die Komponenten des i-ten (vektorartigen) Arguments von T und y_a^j die Komponenten des j-ten Arguments aus V^* bezüglich der dualen Basis, dann kann man schreiben:

$$T(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m) = T^{s_1\dots s_m}{}_{r_1\dots r_n} y^1_{s_1} \cdots y^m_{s_m} x^{r_1}_1 \cdot x^{r_n}_n.$$

(Beachte: über $s_1 \dots r_n$ wird summiert). Damit wird durch $T^{s_1\dots s_m}{}_{r_1\dots r_n} y^1_{s_1}$ die Komponentendarstellung des Tensors T definiert.

Nun ist es interessant zu erfahren, wie sich die Komponenten eines Tensors bei einem Basiswechsel transformieren. Betrachtet man zunächst den Ausdruck $T(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$. Dieser wird auch nach einem Basiswechsel unverändert sein, da es sich lediglich um eine reelle Zahl handelt. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass man die Komponenten der Vektoren in der neuen Basis bestimmen kann, indem man den alten Koordinatenvektor mit der Transformationsmatrix A^i_j multipliziert[16]. Aus diesem Transformationsgesetz für Vektoren aus V lässt sich dasjenige für die dualen Vektoren aus V^* ableiten. Aus (B.1) folgt für die Komponenten $(f^j)_k$ des j-ten Vektors der dualen Basis (wenn $(e_i)^l$ die l-te Komponente des Vektorraumbasiselements (e_i) ist):

$$(f^j)_k (e_i)^k = \delta^j_i. \tag{B.2}$$

Hieran sieht man, dass die Koeffizientenmatrizen der beiden Basen zueinander invers sind. In (B.2) kann man eine Eins einfügen:

$$(f^j)_l (A^{-1})^l_k A^k_m (e_i)^m = \delta^j_i. \tag{B.3}$$

Da $A^k_m (e_i)^m$ die Koeffizienten des i-ten Basisvektors in der transformierten Basis sind, muss das Inverse dieser Matrix (also $(f^j)_l (A^{-1})^l_k$) die Koeffizientenmatrix der transformierten dualen Basis sein. Die Koeffizienten der dualen Basis transformieren sich also mit der inversen Transformationsmatrix. Das Transformationsgesetz für die Koeffizienten eines Ten-

sors findet man ganz analog, indem man in

$$T^{s_1\dots s_m}{}_{r_1\dots r_n} y^1_{s_1}\cdots y^m_{s_m} x^{r_1}_1\cdots x^{r_n}_n = r \in \mathbb{R}$$

für jedes Argument $A^{-1}A$ einfügt und jeweils eine dieser Matrizen zur Transformation der Argumente benutzt. Der Rest bildet das Transformationsgesetz für einen solchen Tensor. Es lautet:

$$\tilde{T}^{s_1\dots s_m}_{r_1\dots r_n} = T^{t_1\dots t_m}{}_{u_1\dots u_n} A^{u_1}_{r_1}\cdots A^{u_n}_{r_n} (A^{-1})^{s_1}_{t_1}\cdots (A^{-1})^{s_m}_{t_m}. \tag{B.4}$$

Häufig wird das Transformationsgesetz (B.4) für die Definition des Tensorbegriffes herangezogen, indem man *definiert*, dass ein Objekt, das sich entsprechend (B.4) transformiert, ein Tensor ist. Häufig muss man aus bekannten Tensoren weitere Tensoren konstruieren. In den meisten Fällen geschieht dies indem man eine oder mehrere der folgenden Operationen anwendet:

Def.: Tensorprodukt $\circ$

Seien S ein n-fach kovarianter und m-fach kontravarianter Tensor und T ein r-fach kovarianter und s-fach kontravarianter Tensor. Dann ist das Tensorprodukt $S\circ T$ ein $(n+r)$-fach kovarianter und $(m+s)$-fach kontravarianter Tensor, der folgendermaßen wirkt:

$$\begin{aligned} &S\circ T(x^1,\dots,x^{n+r},y_1,\dots,y_{m+s}) \\ &\qquad := S(x^1,\dots,x^n,y_1,\dots,y_m)\cdot T(x^{n+1}\dots x^{n+r},y_{m+1}\dots y_{m+s}), \end{aligned}$$

wobei $\cdot$ die Multiplikation in den reellen Zahlen symbolisiert. Es lässt sich zeigen, dass dann für seine Komponentendarstellung gilt:

$$(S\circ T)^{a_1\cdots a_{n+r}}_{b_1\cdots b_{m+s}} = S^{a_1\cdots a_n}_{b_1\cdots b_m} T^{a_{n+1}\cdots a_{n+r}}_{b_{m+1}\cdots b_{m+s}}$$

Dass $S\circ T$ ein Tensor ist folgt direkt aus der Tensoreigenschaft von S bzw. T, ebenso dessen Komponentendarstellung.

Def.: Kontraktion

Sei T ein r-fach kovarianter und s-fach mit $r,s\geq 1$. Dann ist die Kontraktion bzgl. des k-ten Vektor-artigen und l-ten Funktional-artigen Arguments der Tensor $(r-1)$-fach kovariante und $(s-1)$-fach kontrahierte Tensor S, der fol-

gendermaßen wirkt:

$$S(x^1, \dots x^{r-1}, y_1, \dots, y_{s-1}) \\ := \mathrm{Spur}(T(x^1, \dots, x^{k-1}, \cdot, x^{k+1}, \dots x^{r-1}, y_1, \dots, y_{l-1}, \cdot, y_{l+1}, \dots y_{s-1})$$

In Komponentendarstellung bedeutet das:

$$S^{a_1 \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_r}_{b_1 \dots b_{l-1} b_{l+1} \dots b_s} = T^{a_1 \dots a_{k-1} n \;\; a_{k+1} \dots a_r}_{b_1 \dots b_{l-1} n \;\; b_{l+1} \dots b_s}$$

Dabei wird entsprechend der Einstein'schen Summenkonvention über alle n summiert.

Eine Tensormultiplikation gefolgt von einer oder mehrerer Kontraktionen nennt man auch Überschiebung. Eine Überschiebung mit dem metrischen Tensor und anschließender doppelter Kontraktion nennt man auch Verjüngung eines Tensors. Überschiebt man einen Tensor mit dem metrischen Tensor erhält man einen Tensor, dessen kontravariante Stufe um eins verringert und dessen kovariante Stufe um eins vergrößert wurde. In der Komponentendarstellung sieht das so aus, als ob ein Index von oben nach unten verschoben wurde. Darum bezeichnet man diese Operation als "Herunterziehen von Indizes". Analog nennt man das Überschieben mit dem inversen metrischen Tensor und anschließendes Kontrahieren "Hochziehen von Indizes".

B.2 Grundbegriffe der ART

B.2.1 Tensoren

Das allgemeine Relativitätsprinzip fordert die Kovarianz von grundlegenden Gleichungen, d.h. die Feldgleichungen sollen forminvariant (kovariant) unter beliebigen, invertierbaren Koordinatentransformationen sein. Das ist eine Verallgemeinerung zur Forderung der Speziellen Relativitätstheorie, die nur forminvariant unter Poincaré-Transformationen ist (oder äquivalent: forminvariant unter Transformationen, die zwischen Inertialsystemen vermitteln). Dies impliziert, dass die auftretenden Größen entweder Tensoren sind, oder sich aus solchen konstruieren lassen.

B.2.2 Metrik

Das der ART zu Grunde liegende Feld ist der metrische Tensor, oder kurz die Metrik. Um zu verstehen, was für ein Objekt dies ist, kann man sich das Abstandsquadrat zweier infinitesimal benachbarter Raumzeit-Punkte anschauen. Um den einen der Punkte wird das Quadrat der Abstandsfunktion $s^2(y^\mu)$ in eine Taylor-Reihe entwickelt (Zur Vereinfachung der Notation wurde $s^2(x^\nu, y^\mu) =: s^2(y^\mu)$ gesetzt):

$$s^2(x^\mu + dx^\mu) = s^2 \mid_{y^\mu = x^\mu} + \left.\frac{\partial s^2}{\partial y^\mu}\right|_{y^\mu = x^\mu} dx^\mu + \left.\frac{\partial^2 s^2}{\partial y^\mu y^\nu}\right|_{y^\mu = x^\mu} dx^\mu dx^\nu + O((dx^\mu)^3). \tag{B.5}$$

Der Abstand eines Punktes von sich selbst ist Null. Damit verschwindet der Term nullter Ordnung. Nun betrachtet man Abstände zwischen zwei Punkten, die sich nur in einer Koordinate (hier der ν-Komponente des Koordinatenvektors) und dort nur infinitesimal unterscheiden. In führender Ordnung bleibt von obigem Ausdruck lediglich

$$s^2(x^\mu + dx^\mu \delta^\nu_\mu) = \left.\frac{\partial s^2}{\partial y^\nu}\right|_{y^\mu = x^\mu} dx^\nu. \tag{B.6}$$

Wenn man die Abweichung dx^ν ver-k-facht, dann sollte auch der Abstand s sich ver-k-fachen:

$$s^2(x^\mu + dx^\mu \delta^\nu_\mu) k^2 = \left.\frac{\partial s^2}{\partial y^\nu}\right|_{y^\mu = x^\mu} k dx^\nu. \tag{B.7}$$

Das hat als einzige Lösung $k = 1$ und $k = 0$. Damit erfüllt es nicht die Anforderungen, die man an eine Norm stellt. Die Forderung kann man nur erfüllen, indem man die quadratische Ordnung mitnimmt. Wenn man das tut, bekommt man schließlich:

$$s^2(x^\mu + dx^\mu \delta^\nu_\mu) = \left.\frac{\partial^2 s^2}{\partial y^\mu \partial y^\nu}\right|_{y^\mu = x^\mu} dx^\mu dx^\nu; \tag{B.8}$$

hierbei definiert man noch:

$$g_{\alpha\beta}(x^\mu) = \left.\frac{\partial^2 s^2(y^\mu)}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}\right|_{y^\mu = x^\mu}. \tag{B.9}$$

$g_{\alpha\beta}$ sind die Komponenten des metrischen Tensors. Aufgrund der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen ist dieser symmetrisch unter Vertauschung der Indizes. Der metrische Tensor ist also diejenige Bilinearform, die in führender Ordnung das Abstandsquadrat approximiert. Man kann auch im Dualraum des Tangentialraums des Punktes x^μ einen Abstand definieren. Damit bekommt man auf analoge Weise eine Matrix $g^{\alpha\beta}$, die die Koeffizienten (bzgl. der dualen Basis) der Bilinearform darstellen, die das Abstandsquadrat im

Tangentialraum definiert. Man fordert, dass der Vektorraumabstand zwischen zwei Punkten x und y der gleiche ist wie der Dualraumabstand zwischen f_x und f_y, wobei $f_{x,y}$ definiert ist durch: $f_x := \langle x, \cdot \rangle$. Dabei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt, dass durch die Metrik $g_{\mu\nu}$ induziert wird: $\langle a, b \rangle := a^\mu b^\nu g_{\mu\nu}$. Aufgrund des Zusammenhangs von Vektorraumbasis und dualer Basis, ist die Koeffizientenmatrix $g^{\alpha\beta}$ des Dualraumabstandes gerade die Inverse von $g_{\alpha\beta}$.

B.2.3 Kovariante Ableitung

Wenn man partielle Ableitungen von Tensoren berechnet, stellt man fest, dass das Ergebnis selbst kein Tensor mehr ist. Stattdessen benutzt man die kovariante Ableitung. Um diese zu definieren, benötigt man die Christoffelsymbole:

Def.: Christoffelsymbole $\Gamma_{\nu\rho:\mu}/\Gamma^\mu_{\nu\rho}$

$$\Gamma_{\nu\rho:\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^\rho} g_{\nu\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\rho\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\nu\rho}\right) \tag{B.10}$$

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x^\rho} g_{\nu\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\rho\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\nu\rho}\right). \tag{B.11}$$

$\Gamma_{\nu\rho:\mu}$ bezeichnet man als Christoffelsymbole erster und $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ als Christoffelsymbole zweiter Art.

Wie sich an der Definition direkt ablesen lässt, sind die Christoffelsymbole unter Vertauschung der Indizes ν und ρ symmetrisch. Die kovariante Ableitung eines vollständig kontravarianten Tensors m-ter Stufe ist dann folgendermaßen definiert:

Def.: Kovariante Ableitung eines Tensors m-ter Stufe ∇_μ

$$\nabla_\mu T^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m} := \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m} + \sum_{k=1}^{m} \Gamma^{\alpha_k}_{\mu\beta} T^{\ldots,\beta,\ldots}. \tag{B.12}$$

Das β steht dabei an der k-ten Indexposition. Entsprechend der Einstein'schen Summenkonvention soll auch über β summiert werden.

Man beachte: weder die partielle Ableitung noch die Christoffelsymbole haben Tensorcharakter. Erst, wenn man die Kombination (B.12) bildet, erhält man wieder einen Tensor. Da im folgenden nur Tensoren maximal zweiter Stufe abgeleitet werden müssen, sind diese

Ableitungen hier noch einmal angegeben:

$$\nabla_\mu S = \frac{\partial}{\partial x^\mu} S, \tag{B.13}$$

$$\nabla_\mu V^\nu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\beta} V^\beta, \tag{B.14}$$

$$\nabla_\mu T^{\nu\rho} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\nu\rho} + \Gamma^\nu_{\mu\beta} T^{\beta\rho} + \Gamma^\rho_{\mu\beta} T^{\nu\beta}. \tag{B.15}$$

Ableitungen von Tensoren, die auch kovariante Indizes besitzen, kann man auf diese Ausdrücke zurückführen. Üblicherweise schreibt man kürzer:

$$T^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}{}_{,\mu} := \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}, \tag{B.16}$$

$$T^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}{}_{;\mu} := \nabla_\mu T^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}. \tag{B.17}$$

Wie man durch Einsetzen der Definitionen (B.12) und (B.11) sieht, ergibt die kovariante Ableitung, angewendet auf die Metrik bzw. die inverse Metrik, den Nulltensor (dritter Stufe). Als Konsequenz daraus vertauschen die kovariante Ableitung und das Überschieben mit der Metrik bzw. der inversen Metrik.

B.2.4 Krümmungstensor, Ricci-Tensor, Ricci-Skalar

Die Information über Raumzeitkrümmungen ist im Riemann'schen Krümmungstensor der Raumzeit codiert. Dieser ist definiert durch:

Def.: Riemann'scher Krümmungstensor $\mathbf{R}^\rho_{\lambda\mu\nu}$

$$R^\rho_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\lambda} + \Gamma^\rho_{\mu\tau}\Gamma^\tau_{\lambda\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\tau}\Gamma^\tau_{\lambda\mu}, \tag{B.18}$$

bzw. vollständig kovariant:

$$R_{\rho\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda:\rho} - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda:\rho} + g^{\tau\kappa}\Gamma_{\mu\tau:\rho}\Gamma_{\lambda\nu:\kappa} - g^{\tau\kappa}\Gamma_{\nu\tau:\rho}\Gamma_{\lambda\mu:\kappa}. \tag{B.19}$$

An der kovarianten Form kann man die meisten Symmetrien dieses Tensors erkennen: Der Krümmungstensor ist antisymmetrisch unter Vertauschung der ersten beiden Indizes; ebenso unter Vertauschung der letzten beiden Indizes. Hingegen ist er symmetrisch unter Vertauschung des ersten Indexpaares mit dem zweiten Indexpaar. Außerdem gilt noch eine Jakobi-Identität bezüglich der letzten drei Indizes: $R_{\rho\lambda\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\lambda} + R_{\rho\nu\lambda\mu} = 0$.

In den Einstein'schen Feldgleichungen taucht der Krümmungstensor in kontrahierter Form als Ricci-Tensor bzw. Ricci-Skalar auf:

Def.: Ricci-Tensor $\mathbf{R}_{\mu\nu}$

$$R_{\lambda\nu} = R^{\mu}_{\lambda\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\rho\lambda} + \Gamma^{\rho}_{\rho\tau}\Gamma^{\tau}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\tau}\Gamma^{\tau}_{\lambda\rho} \tag{B.20}$$

Def.: Ricci-Skalar R

$$R = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\nu} = g^{\lambda\nu}\partial_\rho \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} - \partial^\nu \Gamma^{\rho}_{\rho\nu} + g^{\lambda\nu}\Gamma^{\rho}_{\rho\tau}\Gamma^{\tau}_{\lambda\nu} - g^{\lambda\nu}\Gamma^{\rho}_{\nu\tau}\Gamma^{\tau}_{\lambda\rho} \tag{B.21}$$

In einem gekrümmten Raum ist es nicht a priori klar, was Parallelität bedeutet. Man muss darum *definieren*, was man unter Parallelität versteht [14]. Dabei wählt man einen Parallelitätsbegriff, der mit der kovarianten Ableitung verträglich ist. Kurven, die parallel zu sich selbst sind, nennt man Geodäten. Sie besitzen keine eigene Krümmung. Die Krümmung, die sie aufweisen wird ihnen von dem Raum in dem sie definiert sind aufgeprägt [39]. Äquivalent zu der Forderung der Selbstparallelität sind folgende zwei Bedingungen, die mit den bereits definierten Begriffen auskommen:

Def.: Geodäte

Eine Geodäte ist eine Kurve, die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \lambda}\frac{\partial x^\beta}{\partial \lambda}.$$

Dabei ist λ der Kurvenparameter. Dies ist äquivalent zu der Forderung, dass eine Geodäte die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist.

Die Bedeutung der Geodäten für physikalische Fragestellungen liegt darin begründet, dass sich in einem gekrümmten Raum kräftefreie Testteilchen auf Geodäten bewegen[14].

B.2.5 Killing-Vektoren

Symmetrien einer Raumzeit werden üblicherweise durch Killing-Vektorfelder, oder kurz Killing-Vektoren ξ^μ angegeben. Diese zeigen in die Richtung, in der sich die Metrik nicht ändert. Es gilt also:

$$g_{\mu\nu}(x^\alpha + d\lambda \xi^\alpha) = g_{\mu\nu}(x^\alpha). \tag{B.22}$$

Diese Forderung kann man auswerten und erhält ein System aus PDEs, das für die Killing-Vektoren gelten muss [14]:

$$0 = \nabla_\nu \xi^\mu - \nabla_\mu \xi_\nu \Leftrightarrow 0 = g_{\rho\nu}\xi^{\rho}_{,\mu} + g_{\mu\rho}\xi^{\rho}_{,\nu} + g_{\mu\nu,\rho}\xi^\rho. \tag{B.23}$$

Wenn man umgekehrt die Killing-Vektoren eines Raumes kennt, so kann man (B.23) nutzen um die Metrik zu bestimmen.

C Symmetrien des Anti-de Sitter-Raums

Im Folgenden wird gezeigt, wie man die Symmetriegruppe des AdS bestimmen kann. Um die Notation nicht unnötig kompliziert zu machen, wird nur der dreidimensionale AdS betrachtet. Die Erweiterung auf eine höhere Dimension ist ohne Schwierigkeiten möglich. Der AdS wird in diesem Anhang in seiner euklidischen Form behandelt. Die Punktmenge (2.2.2) kann man auf folgende Art beschreiben:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b * \begin{pmatrix} \sinh(\phi_0)\sin(\phi_1)\sin(\phi_2) \\ \sinh(\phi_0)\sin(\phi_1)\cos(\phi_2) \\ \sinh(\phi_0)\cos(\phi_1) \\ \cosh(\phi_0) \end{pmatrix}. \tag{C.1}$$

Hierbei sind $\phi_1, \phi_2 \in [0, 2\pi)$ und $\phi_0 \in \mathbb{R}$. Durch Einsetzen von (C.1) in (2.2.2) kann man überprüfen, dass dies tatsächlich eine Parametrisierung des AdS ist:

$$\begin{aligned} -b^2 &= x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, \\ &= \underbrace{b^2\sinh^2(\phi_0)\sin^2(\phi_1)\sin^2(\phi_2) + b^2\sinh^2(\phi_0)\sin^2(\phi_1)\cos^2(\phi_2)}_{b^2\sinh^2(\phi_0)\sin^2(\phi_1)} \\ &\quad + b^2\sinh^2(\phi_0)\cos^2(\phi_1) - b^2\cosh^2(\phi_0), \\ -1 &= \underbrace{\sinh^2(\phi_0)\cos^2(\phi_1) + \sinh^2(\phi_0)\sin^2(\phi_1)}_{\sinh^2(\phi_0)} - \cosh^2(\phi_0), \\ &= \sinh^2(\phi_0) - \cosh^2(\phi_0) = -1. \end{aligned}$$

Mit dem Zusammenhang

$$g_{ab} = \left\langle \frac{\partial x_A}{\partial \phi_a}, \frac{\partial x_A}{\partial \phi_b} \right\rangle \tag{C.2}$$

kann man die durch das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ des Einbettungsraumes induzierte Metrik des AdS bestimmen. Sie lautet:

$$g = b \begin{pmatrix} \sinh^2(\phi_0)\sin^2(\phi_1) & 0 & 0 \\ 0 & \sinh^2(\phi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{C.3}$$

Für diese Metrik kann man die Killing-Gleichungen (B.23) notieren und mit diesen die Killing-Vektoren bestimmen. Geschickter ist es jedoch, in ein anderes Koordinatensystem zu wechseln, in dem die Metrik eine noch einfachere Struktur hat. Das kann man in zwei Schritten machen. Zunächst transformiert man das infinitesimale Abstandsquadrat ds^2, das der Metrik (C.3) entspricht,

$$ds^2 = \sinh(\phi_0)^2 d\Omega^2 + d\phi_0^2 \tag{C.4}$$

($d\Omega$ ist das infinitesimale Raumwinkelelement in drei Dimensionen) in folgende Form:

$$ds^2 = \frac{1}{z(r)^2} r^2 d\Omega^2 + \frac{1}{z(r)^2} dz^2. \tag{C.5}$$

Dies ist möglich, wenn gilt:

$$\sinh(\phi_0) = \pm\frac{r}{z(r)}, \tag{C.6}$$

$$d\phi_0 = \pm\frac{1}{z(r)} dz. \tag{C.7}$$

Aus (C.6) folgt

$$\phi_0 = \pm \mathrm{Arsinh}\left(\frac{r}{z(r)}\right). \tag{C.8}$$

Für das Differential gilt also:

$$d\phi_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{z(r)^2}+1}} d\frac{r}{z}, = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{z(r)^2}+1}} \left(\frac{dr}{z(r)} - \frac{r}{z(r)^2} dz\right). \tag{C.9}$$

Mit der Kettenregel $dz = z'(r)dr$ kann eine Relation zwischen den Differentialen $d\phi_0$ und dz hergestellt werden:

$$d\phi_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{z(r)^2}+1}} \left(\frac{1}{z(r)z'(r)} - \frac{r}{z(r)^2}\right) dz. \tag{C.10}$$

Wegen (C.7) gilt also:

$$\pm\frac{1}{z(r)} = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{z(r)^2}+1}}\left(\frac{1}{z(r)z'(r)} - \frac{r}{z(r)^2}\right). \tag{C.11}$$

Das kann noch vereinfacht werden zu:

$$1 = \frac{1}{\sqrt{r^2+z(r)^2}}\left(\frac{z(r)}{z'(r)} - r\right). \tag{C.12}$$

Diese Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung

$$z(r) = \pm 2\frac{\sqrt{1+Cr}}{C}. \tag{C.13}$$

Dabei ist $C \in \mathbb{R}_+$ eine beliebige positive reelle Zahl. Mit (C.6) und (C.13) kann der Zusammenhang von ϕ_0 und $z(r)$ bestimmt werden. Der Winkelteil $r^2 d\Omega$ in (C.5) kann nun Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten transformiert werden. Dann bekommt man als infinitesimales Abstandsquadrat für den AdS:

$$ds^2 = \frac{1}{z^2}\Big((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + dz^2\Big). \tag{C.14}$$

Diese Metrik eignet sich sehr gut zum Bestimmen der Raumzeitsymmetrien. Mit ihr kann man die Killing-Gleichungen (B.23) aufstellen und die Killing-Vektoren berechnen. Das allgemeine Vektorfeld, dass (B.23) löst, wenn das infinitesimale Abstandsquadrat die Form (C.14) hat, ist:

$$(\xi^\mu) = \begin{pmatrix} (z^2 - (x^1)^2 + (x^2)^2)C_2 + 2x^2(C_4 - C_1x^1) + 2C_3x^1 + C_5 \\ (z^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2)C_1 + 2x^2(C_3 - C_2x^1) - 2C_4x^1 + C_6 \\ 2z(-C_2x^1 - C_1x^2 + C_3) \end{pmatrix}. \tag{C.15}$$

Damit sind

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2x^1x^2 \\ z^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 \\ -2x^2z \end{pmatrix},\ \xi_2 = \begin{pmatrix} z^2 - (x^1)^2 + (x^2)^2 \\ -2x^1x^2 \\ -2x^1z \end{pmatrix},$$
$$\xi_3 = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ z \end{pmatrix},\ \xi_4 = \begin{pmatrix} x^2 \\ -x^1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \xi_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \xi_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{C.16}$$

Basisvektoren des Lösungsraumes, also Killing-Vektoren. Für Randpunkte ergeben die infinitesimalen Bewegungen entlang der Killing-Vektorfelder gerade die infinitesimalen konformen Transformationen. Um das zu erkennen berechnet man die infinitesimalen konformen Transformationen. Für die Gruppe der "speziellen" konformen Transformationen $x^\mu \mapsto x'^\mu = \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1+2b_\mu x^\mu + b^2 x^2}$ (vgl. Abschnitt 2.2.2) erhält man:

$$\begin{aligned}
x'^\mu &\approx x^\mu + \left.\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right|_{b^\rho=0} db^\nu \\
&= x^\mu + db^\nu \left.\frac{\partial}{\partial b^\nu}\frac{x^\mu + b^\mu x^\alpha x_\alpha}{1+2b_\mu x^\mu + b^\beta b_\beta x^\alpha x_\alpha}\right|_{b^\rho=0} \\
&= x^\mu + db^\nu \left.\frac{\frac{\partial b^\mu}{\partial b^\nu}x^\alpha x_\alpha(1+2b_\mu x^\mu + b^\beta b_\beta x^\alpha x_\alpha) - (x^\mu + b^\mu x^2)(2\frac{\partial b^\mu}{\partial b^\nu}x_\mu + \frac{\partial b^\beta b_\beta}{\partial b^\nu}x^\alpha x_\alpha)}{(1+2b_\mu x^\mu + b^2x^2)^2}\right|_{b^\rho=0} \\
&= x^\mu + db^\nu \left.\frac{\delta^\mu_\nu x^\alpha x_\alpha(1+2b_\mu x^\mu + b^\beta b_\beta x^\alpha x_\alpha) - (x^\mu + b^\mu x^2)(2\delta^\mu_\nu x_\mu + 2b_\nu x^\alpha x_\alpha)}{(1+2b_\mu x^\mu + b^2x^2)^2}\right|_{b^\rho=0} \\
&= x^\mu + db^\nu \frac{\delta^\mu_\nu x^\alpha x_\alpha - x^\mu(1+2\delta^\mu_\nu x_\mu)}{1} \\
&= x^\mu + db^\nu(\delta^\mu_\nu x^\alpha x_\alpha - 2x^\mu x_\nu).
\end{aligned}$$

Hierbei ist $db^\mu \equiv b^\mu \ll 1$. Betrachte nun solche Transformationen, bei denen $db\mu$ in Richtung der x^1-Achse zeigt, für die also $db^\mu = \delta^\mu_1 d\lambda$ mit $\lambda \ll 1$ gilt. Dann ist.

$$\begin{aligned}
x'^\mu &= x^\mu + \delta^\nu_1 d\lambda(\delta^\mu_\nu x^\alpha x_\alpha - 2x^\mu x_\nu) + \mathcal{O}((db^\mu)^2) && \text{(C.17)} \\
&= x^\mu + d\lambda(\delta^\mu_1 x^\alpha x_\alpha - 2x^\mu x_1) + \mathcal{O}((db^\mu)^2). && \text{(C.18)}
\end{aligned}$$

Für einen Euklidischen Raum gilt: $x^\mu = x_\mu$. Damit kann man (C.18) folgendermaßen schreiben:

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (x^1)^2 + (x^2)^2 - 2(x^1)^2 \\ -2x^2x^1 \end{pmatrix} d\lambda + \mathcal{O}(d\lambda^2). \qquad \text{(C.19)}$$

Das ist in führender Ordnung identisch mit der durch den Killing-Vektor ξ_2 erzeugten Transformation, wenn man $z = 0$ setzt. Analog kann man jede der infinitesimalen konformen Transformationen auf einem Euklidischen Raum mit den infinitesimalen Bewegungen entlang der Killing-Vektoren in einem Euklidischen AdS identifizieren. Somit ist die Isometriegruppe des Euklidischen AdS isomorph zur Gruppe der Konformen Transformationen auf dem Rand [1] des AdS.

[1] Das ist im Falle des Euklidischen AdS der Dimension D ein Euklidischer Raum der Dimension $d = D-1$.

D Berechnung eines Propagators mittels der AdS/CFT-Korrespondenz

In diesem Anhang soll der Propagator für ein skalares Feld einer stark gekoppelten CFT mit Hilfe der AdS-CFT-Korrespondenz berechnet werden. Weitere Details zur Rechnung kann man in [17] finden. Die starke Kopplung der CFT übersetzt sich in eine schwache Kopplung auf der AdS-Seite der Korrespondenz. In diesem Limes tragen Quantenkorrekturen nicht bei und das Pfadintegral auf der rechten Seite in (2.2.24) wird zu

$$\int \mathcal{D}\phi \exp\left\{ -\int\limits_{AdS} d^D x \mathcal{L}\left(\phi\right)\Big|_{\phi(x\in\partial AdS)=\phi_0} \right\} \approx \exp(-S_{kl}[\phi_0]), \tag{D.1}$$

wobei S_{kl} die klassische Wirkung darstellt. In diesem Anhang sei diese zur Vereinfachung der Notation trotzdem mit $S \equiv S_{kl}$ bezeichnet. Der Quellenterm $\phi_0\mathcal{O}$ in (2.2.24) muss bezüglich der Raumzeitsymmetrie den gleichen tensoriellen Charakter wie die Lagrangedichte haben (muss also ein Skalar sein). Wenn $\mathcal{O}$ ein Skalar ist, muss dies auch für ϕ_0 gelten. Da ϕ_0 die Randwerte von ϕ repräsentiert, muss auch das AdS-Feld ϕ ein Skalar sein. Für ein Skalarfeld ist die Wirkung:

$$S(\phi) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{P}^D} d^D x \sqrt{|g|}\partial^A\phi\partial_A\phi. \tag{D.2}$$

Dabei ist $\mathbb{P}^D \subseteq \mathbb{R}^D$ der D-Dimensionale Parameterbereich mit dem der AdS beschrieben wird. (Beachte: große lateinische Indizes laufen über alle AdS-Koordinaten: $A = 0 \ldots d$ mit $d = (D-1)$). Die Wirkung ist trotz des Auftretens von (nicht tensoriellen) partiellen Ableitungen ein Skalar. Der Grund dafür liegt darin, dass der Faktor $\sqrt{|g|}$ den Fehler korrigiert, den man macht, wenn man partielle Ableitungen statt kovarianter verwendet. Die Bewegungsgleichung für ϕ ist damit:

$$0 = \partial_A\left(\sqrt{|g|}\partial^A\phi\right). \tag{D.3}$$

Zum Lösen von (D.3) sucht man eine Funktion $K(x, x')$, die für $z \neq 0$ folgende PDE erfüllt:

$$0 = \partial_A \sqrt{g} \partial^A K(x, x'). \tag{D.4}$$

Auf dem Rand hingegen soll K wie eine δ-Distribution wirken. Dann ist

$$\phi(x) = \int\limits_{\mathbb{Q}^d} d^d x' K(x, x') \phi_0(x') \tag{D.5}$$

eine Lösung von (D.4), die auf dem Rand ϕ_0 wird. $\mathbb{Q}^d \in \mathbb{R}^{D-1}$ ist dabei der Parameterbereich, der den Rand des AdS beschreibt. Am elegantesten findet man K, indem man das Koordinatensystem $(z, \xi_1, \ldots, \xi_d)$ verwendet, in dem die Metrik die Form $G_{AB} = \frac{1}{z^2}\mathrm{diag}(1, \ldots, 1)$ annimmt (vgl. Anhang C, insbesondere (C.14)). $K(x, x')$ schreibt man am besten als: $K(z, \vec{\xi}, \vec{\xi}')$. Sei x' der Punkt unendlich der Rand-Mannigfaltigkeit (symbolisiert durch ∞). Für diesen speziellen Fall, darf $K(z, \vec{\xi}, \vec{\xi}')$ nicht von $\vec{\xi}$ abhängen. Anschaulich gesprochen liegt es daran, dass jeder Punkt gleich weit von $x' = \infty$ entfernt ist. Damit darf sich $K(z, \vec{\xi}, \infty)$ unter Translationen im Unterraum konstanter z nicht ändern. Das bedeutet, dass K nicht von $\vec{\xi}$ abhängen darf. man sucht also eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$0 = z^D \partial_z z^{-D} \partial^z K_\infty(z). \tag{D.6}$$

In den verwendeten Koordinaten ist $\partial^z = G^{dA}\partial_A = G^{dd}\partial_z = z^2\partial_z$. Dabei ist $d = D - 1$. Also wird (D.6) zu

$$0 = \partial_z z^{-D+2} \partial_z K_\infty(z). \tag{D.7}$$

Das lässt sich nun problemlos integrieren:

$$\begin{aligned} z^{2-D}\partial_z K_\infty(z) &= C_1, & \text{(D.8)} \\ \partial_z K_\infty(z) &= C_1 z^{D-2}, & \text{(D.9)} \\ K_\infty(z) &= \frac{C_1}{D-1} z^{D-1} + C_2. & \text{(D.10)} \end{aligned}$$

Da $K_\infty(0)$ eine Deltadistribution sein soll, die im Unendlichen ihren singulären Punkt hat, muss $K_\infty(0)$ bei allen endlichen $\vec{\xi}$ Null sein. Also gilt $C_2 = 0$. Setze außerdem $C := C_1/(D-1)$. Damit hat man $K_\infty(0)$ bestimmt zu

$$K_\infty(z) = C z^{D-1}. \tag{D.11}$$

Nun wendet man Symmetrietransformationen des AdS auf das Ergebnis an. Wie man durch Nachrechnen überprüfen kann, ist

$$z \mapsto \frac{z}{z^2 + \vec{\xi}}, \qquad \vec{\xi} \mapsto \frac{\vec{\xi}}{z^2 + \vec{\xi}} \tag{D.12}$$

eine Symmetrietransformation. $K(z, \vec{\xi}, \infty) = K_\infty(z)$ wird unter dieser Transformation zu

$$K(z, \vec{\xi}, 0) = C \left(\frac{z}{z^2 + \vec{\xi}^2} \right)^{D-1}. \tag{D.13}$$

Auf dieses Ergebnis kann man noch eine Translation um den Vektor $\vec{x'}$ anwenden. Das ist erlaubt, da Translationen ebenfalls Symmetrietransformationen sind. Als Ergebnis erhält man den gewünschten Propagator K:

$$K(z, \vec{\xi}, \vec{\xi'}) = C \left(\frac{z}{z^2 + (\vec{\xi} - \vec{\xi'})^2} \right)^{D-1}. \tag{D.14}$$

Mittels

$$\int\limits_{\mathbb{Q}^d} d^{D-1}\xi C \left(\frac{z}{z^2 + (\vec{\xi} - \vec{\xi'})^2} \right)^{D-1} \stackrel{!}{=} 1 \tag{D.15}$$

kann man die Integrationskonstante C bestimmen. Substituiere dazu $y^\mu = \frac{\xi^\mu - \xi'^\mu}{z}$ und erhalte damit $z dy^\mu = d\xi^\mu$. Also:

$$\begin{aligned} 1 &= C \int\limits_{\mathbb{Q}^d} d^{D-1} y z^{D-1} \left(\frac{z}{z^2 + (\vec{\xi} - \vec{\xi'})^2} \right)^{D-1} && \text{(D.16)} \\ &= C \int\limits_{\mathbb{Q}^d} d^{D-1} y \left(\frac{1}{1 + \vec{y}^2} \right)^{D-1} && \text{(D.17)} \\ &= C\Omega \int_0^\infty d|y| |y|^{D-2} \frac{1}{(1 + |y|^2)^{D-1}}. && \text{(D.18)} \end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde das Integral $d^{D-1}y$ in Kugelkoordinaten umgeschrieben. Ω ist der volle Raumwinkel (in einem $(D-1)$-dimensionalen Raum). Nach dem Auswerten des Integrals erhält man:

$$1 = C\Omega \, 2^{1-D} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}D - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}D)}. \tag{D.19}$$

Dabei ist die Γ-Funktion, definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-z} z^{x-1} dx. \tag{D.20}$$

Ω kann man ebenfalls durch Γ ausdrücken,

$$\Omega = \frac{2\pi^{(D-1)/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}(D-1))}, \tag{D.21}$$

und erhält schließlich für C:

$$C = \frac{2^{D-2}\Gamma(\frac{1}{2}D)}{\sqrt{\pi}^D}. \tag{D.22}$$

ϕ ist damit folgendes Funktional von ϕ_0:

$$\phi[\phi_0] = C \int\limits_{\mathbb{Q}^d} d^{D-1}\xi \left(\frac{z}{z^2 + (\vec{\xi} - \vec{\xi'})^2} \right)^{D-1} \phi_0(\vec{\xi'}). \tag{D.23}$$

Die AdS-Wirkung (D.2) kann mit Hilfe partieller Integration umgeformt werden:

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{g} (\partial_A \phi)(\partial^A \phi) && \text{(D.24)} \\ &= \frac{1}{2} \int d^D x \partial_A (\sqrt{g} \phi \partial^A \phi) - \frac{1}{2} \int d^D x \phi \partial_A (\sqrt{g} \partial^A \phi). && \text{(D.25)} \end{aligned}$$

Der zweite Term verschwindet wegen der Bewegungsgleichung (D.3). Auf den verbleibenden Term wird der allgemeine Satz von Stokes angewendet:

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{P}^D} d^D x \partial_A (\sqrt{g} \phi \partial^A \phi) = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{Q}^d} d^{D-1} x \sqrt{|g|} \phi \partial^z \phi. \tag{D.26}$$

Hierbei wurde verwendet, dass das Oberflächenelement in z-Richtung zeigt. Das kann man daran erkennen, dass sich der Rand in diesen Koordinaten bei $z = 0$ befindet. Die infinitesimalen Vektoren $dy^A = (0, d\zeta^\mu)$ sind damit parallel zum Rand (denn sie verbinden zwei infinitesimal benachbarte Randpunkte). Da das Oberflächenelement orthogonal auf dem Rand steht, muss es parallel zu einem infinitesimalen Vektor $dx^A = (dz, d\xi^\mu)$ sein, der zu dy^A orthogonal ist. Orthogonal bedeutet, dass

$$0 = \cos(\theta) = \frac{G_{AB} dx^A dy^B}{\sqrt{G_{CE} dx^C dx^E} \sqrt{G_{FH} dy^F dy^H}} = \frac{dz \cdot 0 + d\vec{\xi} d\vec{\zeta}}{\sqrt{(dz^2 + d\vec{\xi}^2)(d\vec{\zeta}^2)}} \tag{D.27}$$

ist. Die Normierung ist nötig, da in der Metrik ein divergierender Faktor $\frac{1}{z^2}$ auftritt, weswegen die Forderung, dass das Skalarprodukt orthogonaler Vektoren verschwindet bei $z = 0$ keinen Sinn ergibt. Sauberer, aber umständlicher ist die Transformation in Koordinaten, die auf dem Rand regulär sind. Damit (D.27) Null werden kann, muss der Term $d\vec{\xi}d\vec{\zeta}$ für alle $d\vec{\zeta}$ verschwinden. Es muss also $d\vec{\xi} = 0$ gelten. Damit ist das Oberflächenelement parallel zu dem Vektor $(dx^A) = (dz, \vec{0})$. Dies wurde in (D.26) verwendet. $\partial^z\phi$ kann man unter Berücksichtigung der in diesen Koordinaten gültigen Beziehung $\partial^z = z^2\partial_z$ durch Ableiten von (D.23) berechnen:

$$\partial^z\phi = z^2\partial_z C \int\limits_{\mathbb{Q}^d} d\xi'^{D-1} \left(\frac{z}{z^2 + (\vec{\xi} - \vec{\xi'})^2}\right)^{D-1} \phi_0(\vec{\xi'}) \tag{D.28}$$

$$= z^2 C(D-1) \int\limits_{\mathbb{Q}^d} d\xi'^{D-1} \left(\frac{z}{z^2 + (\vec{\xi} - \vec{\xi'})^2}\right)^{D-2} \frac{-z^2 + (\vec{\xi} - \vec{\xi'})^2}{(z^2 + (\vec{\xi} - \vec{\xi'})^2)^2} \phi_0(\vec{\xi'}) \tag{D.29}$$

$$= z^D C(D-1) \int\limits_{\mathbb{Q}^d} d\xi'^{D-1} \left(\frac{1}{z^2 + (\vec{\xi} - \vec{\xi'})^2}\right)^{D} \left(-z^2 + (\vec{\xi} - \vec{\xi'})^2\right) \phi_0(\vec{\xi'}). \tag{D.30}$$

Damit kann die Wirkung (D.26) als Funktional der Randbedingungen geschrieben werden (Beachte: in diesen Koordinaten ist $\sqrt{|g|} = z^{-D}$):

$$S[\phi_0] = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{Q}^d} d^{D-1}\xi \sqrt{|g|} \phi \partial_z \phi \tag{D.31}$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{Q}^d} d^{D-1}\xi \frac{1}{z^D} C \int\limits_{\mathbb{Q}^d} d\xi'^{D-1} \left(\frac{z}{z^2 + (\vec{\xi} - \vec{\xi'})^2}\right)^{D-1} \phi_0(\vec{\xi'})$$
$$\times z^D C(D-1) \int\limits_{\mathbb{Q}^d} d\xi''^{D-1} \frac{-z^2 + (\vec{\xi} - \vec{\xi''})^2}{(z^2 + (\vec{\xi} - \vec{\xi''})^2)^D} \phi_0(\vec{\xi''}) \tag{D.32}$$

$$= \frac{C^2(D-1)}{2} \int\limits_{\mathbb{Q}^d} d^{D-1}\xi \int\limits_{\mathbb{Q}^d} d\xi'^{D-1} \left(\frac{z}{z^2 + (\vec{\xi} - \vec{\xi'})^2}\right)^{D-1} \phi_0(\vec{\xi'})$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{Q}^d} d\xi''^{D-1} \frac{-z^2 + (\vec{\xi} - \vec{\xi''})^2}{(z^2 + (\vec{\xi} - \vec{\xi''})^2)^D} \phi_0(\vec{\xi''}). \tag{D.33}$$

Nun kann man die AdS/CFT-Korrespondenz anwenden und die Zweipunkt-Korrelations-

funktion für $\mathcal{O}$ berechnen:

$$\langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y)\rangle = -\left.\frac{\delta^2}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}\exp(-S[\phi_0])\right|_{\phi_0=0}. \tag{D.34}$$

Da x und y Punkte auf dem Rand sind, muss man (D.33) bei $z = 0$ auswerten. Dabei wird (D.33) zu

$$S[\phi_0] = \frac{C^2(D-1)}{2}\int\limits_{\mathbb{Q}^d} d^{D-1}\xi \int\limits_{\mathbb{Q}^d} d\xi''^{D-1}\phi_0(\xi)\frac{1}{(\xi-\xi'')^{D-2}}\phi_0(\xi''). \tag{D.35}$$

Damit kann man (D.34) auswerten und erhält (2.2.31).

E Umstellen der hydrodynamischen Gleichungen

Ziel dieses Anhangs ist es zu zeigen, wie (3.2.1) und (3.2.2) in die charakteristische Form (3.2.4) überführt werden können: Ausgehend von (3.2.1) und (3.2.2) bildet man durch Linearkombination die neuen Gleichungen $c_s \cdot (3.2.1) \pm (3.2.2)$:

$$0 = (\partial_\theta + \tilde{v}\partial_\eta)(c_s\phi \pm y) \pm c_s(\tilde{v}\partial_\theta + \partial_\eta)(c_s\phi \pm y). \tag{E.1}$$

Nun substituiert man $a_\pm := \frac{1}{2}(c_s\phi \pm y)$ und sortiert nach den beiden Ableitungen:

$$0 = (1 \pm c_s\tilde{v})\partial_\theta a_\pm + (\tilde{v} \pm c_s)\partial_\eta a_\pm. \tag{E.2}$$

Weiter dividiert man durch den Faktor vor der θ-Ableitung und wendet das Additionstheorem für tanh an ($\tilde{v} = \tanh(y - \eta)$):

$$0 = \partial_\theta a_\pm + \tanh(y - \eta \pm y_s)\partial_\eta a_\pm, \tag{E.3}$$

wobei $y_s := \mathrm{Artanh}(c_s)$ ist. Damit hat man (3.2.1) und (3.2.2) in die charakteristische Form (3.2.4) überführt.

F Lösung des Riemann-Problems in Milne-Koordinaten

In diesem Anhang soll gezeigt werden, wie man das Riemann-Problem in Milne-Koordinaten mit Hilfe der Methode der Charakteristiken lösen kann.

Problemstellung
Gesucht ist die Antwort auf die Frage, wie die Dynamik eines eindimensionalen idealen Fluids aussieht, dass auf dem Hyperboloid $\tau = \tau_0$ eine Θ-förmige Energiedichte-Verteilung hat und sich in Ruhe befindet. Die Anfangsbedingungen sind also die folgenden:

$$\epsilon(\tau = \tau_0) = \epsilon_0 \Theta(\eta), \qquad y(\tau = \tau_0) = y_0 \Theta(-\eta). \tag{F.1}$$

Dabei ist Θ die Heaviside-Funktion und ϵ_0 und y_0 sind beliebige positive reelle Zahlen. τ ist definiert durch $\tau = \sqrt{t^2 - x^2}$. Die Kurven mit konstantem τ stellen damit die Kurven konstanter Eigenzeit für Teilchen dar, die sich gleichförmig vom Ursprung des Koordinatensystems entfernen. Diese Anfangsbedingungen sind damit wesentlich realistischer als die, die im "konventionellen" Riemann-Problem verwendet werden. Bei diesem ist die Energiedichte und Geschwindigkeit auf einer Achse konstanter Laborzeit t vorgegeben [40]. Statt der Variable τ wird im Folgenden $\theta = \ln\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)$ verwendet.

Lösung
Die zweite Bedingung in (F.1) setzt die Geschwindigkeit bei positiven η-Werten auf einen beliebigen Wert. Das ist möglich und beeinflusst die Physik nicht, da sich dort keine Materie befindet. Die Anfangsbedingungen für die Funktionen $a_\pm$ sind also:

$$\begin{aligned} a_\pm(\tau = \tau_0) &= \frac{c_s}{1 + c_s^2} \ln(\Theta(-\eta)) \pm y_0 \Theta(\eta) && \text{(F.2)} \\ &= \frac{c_s}{1 + c_s^2} \ln(0) \Theta(\eta) \pm y_0 \Theta(\eta) && \text{(F.3)} \\ &= \Theta(\eta) \left(\frac{c_s}{1 + c_s^2} \ln(0) \pm y_0 \right). && \text{(F.4)} \end{aligned}$$

Wählt man $y_0 := -\frac{c_s}{1+c_s^2}\ln(0)$, so erhält man $a_+ = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} a_+ &= 0, \\ a_- &= -\Theta(\eta)\infty. \end{aligned} \tag{F.5}$$

Diese "Herleitung" ist natürlich mathematisch heikel, da dabei Terme der Form $0 \cdot \infty$ auftreten, die nicht wohldefiniert sind. Was aber möglich ist, ist die Heaviside- Funktion durch eine Funktion zu approximieren, die bei negativen Argumenten nicht Null, sondern lediglich klein gegen 1 ist. Dann lassen sich alle Umformungen durchführen und y_0 kann ein Wert zugeordnet werden, sodass für alle η $a_+ = 0$ gilt. Statt diesem eher konstruktiven Zugang, kann man auch einfach bei den Anfangsbedingungen (F.5) starten und feststellen, dass diese Bedingungen an $a_\pm$ äquivalent zu den gewünschten Anfangsbedingungen (F.1) für ϵ und y sind. Der Ausdruck für a_- in (F.5) soll bedeuten, dass a_- für negative η verschwindet und für positive η unendlich wird. Die Θ-Funktion ist somit lediglich eine Kurzschreibweise für eine Fallunterscheidung. Mit $a_+(\eta, \tau = \tau_0) = 0$ lässt sich die $+$-Gleichung in (3.2.4) lösen und man erhält $a_+ = 0\ \forall(\eta, \tau)$. Es muss dann lediglich noch die $-$-Gleichung gelöst werden. Diese nimmt folgende Gestalt an:

$$0 = \partial_\theta a_\pm + \tanh(-a_- - \eta - y_s)\partial_\eta a_\pm. \tag{F.6}$$

Zur Lösung definiert man $b := -a_- - y_s$ und erhält

$$0 = \partial_\theta b - \tanh(b - \eta)\partial_\eta b, \tag{F.7}$$

was man mit der Methode der Charakteristiken lösen kann. Das äquivalente System gewöhnlicher Differentialgleichungen (vgl. 3.2.1) ist das folgende:

$$\frac{\partial \theta_c}{\partial r} = 1, \tag{F.8}$$

$$\frac{\partial \eta_c}{\partial r} = \tanh(b - \eta_c), \tag{F.9}$$

$$\frac{\partial b(\theta_c, \eta_c)}{\partial r} = 0. \tag{F.10}$$

Gleichung (F.10) besagt, dass sich b entlang einer Charakteristik nicht ändert. Damit ist b für (F.9) eine Konstante ($\equiv b_0(\eta_0) = b(\theta_c = 0, \eta_0)$). Wegen (F.8) kann der Kurvenparameter r auch durch θ_c ersetzt werden. Die verbleibende Gleichung (F.9) kann gelöst werden, indem

man umschreibt:

$$\frac{\partial \eta_c}{\partial \theta_c} = \frac{\sinh(b_0(\eta_0) - \eta_c)}{\cosh(b_0(\eta_0) - \eta_c)}, \tag{F.11}$$

$$\cosh(b_0(\eta_0) - \eta_c)\frac{\partial \eta_c}{\partial \theta_c} = \sinh(b_0(\eta_0) - \eta_c), \tag{F.12}$$

$$\frac{\partial \sinh(b_0(\eta_0) - \eta_c)}{\partial \theta_c} = -\sinh(b_0(\eta_0) - \eta_c). \tag{F.13}$$

Das hat die Struktur $\dot{f} = -f$ mit der Lösung $f = Ce^{-\theta_c}$, wobei $f = \sinh(b_0(\eta_0) - \eta_c)$. Damit gilt:

$$\eta_c = b_0(\eta_0) - \text{Arsinh}(f), \tag{F.14}$$

$$\eta_c = b_0(\eta_0) - \text{Arsinh}(Ce^{-\theta_c}). \tag{F.15}$$

Die Konstante C kann durch die Forderung $\eta_c(\theta_c = 0) = \eta_0$ fixiert werden; am besten dadurch, dass man umstellt

$$\sinh(b_0(\eta_0) - \eta_c) = Ce^{-\theta_c} \tag{F.16}$$

und diese Gleichung bei $\theta_c = 0$ betrachtet. Man liest ab

$$C = \sinh(b_0(\eta_0) - \eta_0) \tag{F.17}$$

und erhält als Gleichung für die Charakteristikenschar:

$$\eta_c = b_0(\eta_0) - \text{Arsinh}\Big(\sinh(b_0(\eta_0) - \eta_0)e^{-\theta_c}\Big). \tag{F.18}$$

Der Scharparameter $b_0(\eta_0) \in \mathbb{R}$ indiziert dabei die einzelnen Kurven dieser Schar. Sei $0 < \delta \ll 1$. Dann kann man folgende drei Bereiche der Kurve $\theta = 0$ getrennt untersuchen:

1. $\eta < -\delta$
2. $\eta > \delta$
3. $-\delta \leq \eta \leq \delta$

Fall 1

Auf Charakteristiken, die durch diesen Bereich der Kurve $\theta = 0$ verlaufen, hat b den Wert $-y_s$. Durch Analyse von (F.18) mit $b_0(\eta_0) < \delta$ stellt man fest, dass diese Charakteristiken nur das Gebiet $(\theta, \eta < -y_s - \text{Arsinh}(\sinh(-y_s + \delta)e^{-\theta}))$ überdecken. Damit gilt überall in diesem Gebiet $b = -y_s$.

Fall 2

Auf Charakteristiken, die durch diesen Bereich der Kurve $\theta = 0$ verlaufen, hat b den Wert ∞. Statt über die explizite Form der Lösungsgleichung für die Charakteristiken zu gehen, ist es günstiger, einen Schritt zurückzugehen und (F.9) zu betrachten. Da $b = \infty$, erfüllen die Charakteristiken die Gleichung

$$\frac{d\eta_c}{d\theta_c} = 1. \tag{F.19}$$

Es sind also Geraden mit Anstieg eins. Da $\eta_0 > \delta$ sein soll, können durch diese Charakteristiken nur Punkte im Gebiet $(\theta, \eta > \delta + \theta)$ erreicht werden. In diesen Punkten hat b den Wert ∞.

Fall 3

Um die Lösungsfunktion in dem restlichen Gebiet definieren zu können, wird zunächst für b statt eines sprunghaften Übergangs von $-y_s$ nach ∞ betrachtet ein stetiger betrachtet. $b_0(\eta_0)$ sei also im Bereich $[-\delta, \delta]$ eine stetige Funktion, die auf das Intervall $[-y_s, \infty]$ abbildet, also z.B.

$$b_0(\eta_0) = f(\eta_0) = \frac{1}{\eta_0 - \delta} + \frac{1}{2\delta} - y_s. \tag{F.20}$$

Die zugehörige Charakteristik lässt sich dann wie folgt berechnen:

$$\eta_c = f(\eta_0) - \mathrm{Arsinh}\left(\sinh\left(f(\eta_0) - \eta_0\right) e^{-\theta_c}\right). \tag{F.21}$$

Da $-\delta \leq \eta_0 \leq \delta$ und $\delta \ll 1$, gilt an den meisten Stellen $f(\eta_0) \gg \eta_0$. Im Grenzübergang $\delta \to 0$ gilt dies sogar überall, außer an den Nullstellen von $f(\eta_0)$. Im Argument des sinh lässt sich dann η_0 vernachlässigen und man kann $b_0 := f(\eta_0) \in [-y_s, \infty]$ als reellen Parameter betrachten. Die Charakteristikenschar, die bei $\eta_0 = 0$ startet, erfüllt damit:

$$\eta_c = b_0 - \mathrm{Arsinh}(\sinh(b_0)e^{-\theta_c}). \tag{F.22}$$

An den Nullstellen von $f(\eta_0)$ lässt sich η_0 nicht vernachlässigen. Allerdings kann man die Charakteristikengleichung aber sehr einfach hinschreiben, indem man in (F.21) $f(\eta_0) = 0$ und $\eta_0 = 0$ [1] setzt. Sei θ fest und η zwischen $(-y_s - \mathrm{Arsinh}(\sinh(-y_s)e^{-\theta}))$ und θ. Dann verläuft durch den Punkt (θ, η) eine der Charakteristiken (F.22):

$$\eta = b_0 - \mathrm{Arsinh}(\sinh(b_0)e^{-\theta}). \tag{F.23}$$

[1] Das geht, da $|\eta_0| < \delta \to 0$ ist.

Diesen Ausdruck stellt man um:

$$\sinh(b_0 - \eta) = \sinh(b_0)e^{-\theta}, \tag{F.24}$$

wendet das Additionstheorem $\sinh(b_0-\eta) = \sinh(b_0)\cosh(\eta) - \sinh(\eta)\cosh(b_0)$ an und löst nach b_0 auf:

$$b_0 = \text{Artanh}\left(\frac{\sinh(\eta)}{\cosh(\eta) - e^{-\theta}}\right). \tag{F.25}$$

Diesen Wert nimmt b auf dieser Charakteristik bei $\theta = 0$ an. Da er sich entlang einer Charakteristik nicht ändert (vgl. (F.10)), ist das auch der Wert, den b an der Stelle (θ, η) hat. Damit ist b im gesamten Parameterbereich bekannt:

$$b(\theta,\eta) = \begin{cases} -y_s & \text{für } \eta \in I_1, \\ \text{Artanh}\left(\frac{\sinh(\eta)}{\cosh(\eta)-e^{-\theta}}\right) & \text{für } \eta \in I_2, \\ \infty & \text{für } \eta \in I_3. \end{cases} \tag{F.26}$$

Hierbei sind:

$$I_1 = \left(\infty, -y_s - \text{Arsinh}\left(\sinh\left(-y_s\right)e^{-\theta}\right)\right], \tag{F.27}$$

$$I_2 = \left(-y_s - \text{Arsinh}\left(\sinh\left(-y_s\right)e^{-\theta}\right), \theta\right], \tag{F.28}$$

$$I_3 = \left(\theta, \infty\right). \tag{F.29}$$

Damit ergibt sich für die Energiedichte und das Geschwindigkeitsfeld:

$$\epsilon(\theta,\eta) = \begin{cases} \epsilon_0 & \text{für } \eta \in I_1, \\ \epsilon_0 \exp\left\{-\frac{1+c_s^2}{c_s}\left(\text{Artanh}\left(\frac{\sinh(\eta)}{\cosh(\eta)-e^{-\theta}}\right) + y_s\right)\right\} & \text{für } \eta \in I_2, \\ 0 & \text{für } \eta \in I_3. \end{cases} \tag{F.30}$$

$$v(\theta,\eta) = \begin{cases} 0 & \text{für } \eta \in I_1, \\ \frac{\sinh(\eta)+c_s\cosh(\eta)-c_s e^{-\theta}}{\cosh(\eta)-e^{-\theta}+c_s\sinh(\eta)} & \text{für } \eta \in I_2, \\ 1 & \text{für } \eta \in I_3. \end{cases} \tag{F.31}$$

(F.30) und (F.31) stellen somit die analytischen Lösungen des Riemannproblems in Milne-Koordinaten dar.

G Lösung der Einstein-Gleichungen in Feffermann-Graham-Koordinaten

G.1 Herleitung der Gleichungen für die Submetrik

Ziel dieses Abschnittes ist es, die Differentialgleichungen aufzustellen, die die Submetrik $g_{\mu\nu}$ erfüllen muss, damit für die vollständige Metrik eines aADS die Einstein-Gleichungen (2.2.8) gelten. In Feffermann-Graham Koordinaten gilt (vgl: (4.1.5)):

$$(G_{AB}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} g_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4r^2} \end{pmatrix}, \tag{G.1}$$

bzw. für die inverse Metrik

$$(G^{AB}) = \begin{pmatrix} r g^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 4r^2 \end{pmatrix}. \tag{G.2}$$

Daraus lassen sich einige, im Folgenden häufig verwendete, Ausdrücke ablesen:

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu} &= r g^{\mu\nu}, \\ G^{d\mu} = G^{\mu d} &= 0, \\ G^{dd} &= 4r^2, \\ G_{\mu\nu,\rho} &= r g_{\mu\nu,\rho}, \\ G_{\mu d,\rho} = G_{d\mu,\rho} = G_{dd,\rho} &= 0 \\ G_{\mu\nu,d} &= -\tfrac{1}{r^2} g_{\mu\nu} + \tfrac{1}{r} g_{\mu\nu,d}, \\ G_{\mu d,d} = G_{d\mu,d} &= 0, \\ G_{dd,d} &= -\tfrac{1}{2r^3}. \end{aligned} \tag{G.3}$$

Außer der Metrik kommt in den Einstein-Gleichungen noch der Ricci-Tensor vor. Dieser lässt sich berechnen durch (B.20):

$$R_{AB} = \partial_E \Gamma^E_{BA} - \partial_B \Gamma^E_{EA} + \Gamma^E_{EF} \Gamma^F_{AB} - \Gamma^E_{BF} \Gamma^F_{AE}. \tag{G.4}$$

Dabei wird über die Indizes E und F von 0 bis d summiert. Diese Summation zerlegt man in eine Summation von 0 bis $(d-1)$ (griechische Indizes) und den übrigen Summanden:

$$\begin{aligned} R_{AB} &= \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{BA} + \partial_d \Gamma^d_{BA} - \partial_B \Gamma^\alpha_{\alpha A} - \partial_B \Gamma^d_{dA} + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{AB} + \Gamma^d_{d\beta}\Gamma^\beta_{AB} && \text{(G.5)} \\ &\quad + \Gamma^\alpha_{\alpha d}\Gamma^d_{AB} + \Gamma^d_{dd}\Gamma^d_{AB} - \Gamma^\alpha_{B\beta}\Gamma^\beta_{A\alpha} - \Gamma^d_{B\beta}\Gamma^\beta_{Ad} - \Gamma^\alpha_{Bd}\Gamma^d_{A\alpha} - \Gamma^d_{Bd}\Gamma^d_{Ad}. && \text{(G.6)} \end{aligned}$$

Für die $(\mu\nu)$-Komponenten gilt damit:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\nu\mu} + \partial_d \Gamma^d_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\alpha\mu} - \partial_\nu \Gamma^d_{d\mu} + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\mu\nu} + \Gamma^d_{d\beta}\Gamma^\beta_{\mu\nu} && \text{(G.7)} \\ &\quad + \Gamma^\alpha_{\alpha d}\Gamma^d_{\mu\nu} + \Gamma^d_{dd}\Gamma^d_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\mu\alpha} - \Gamma^d_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\mu d} - \Gamma^\alpha_{\nu d}\Gamma^d_{\mu\alpha} - \Gamma^d_{\nu d}\Gamma^d_{\mu d}. && \text{(G.8)} \end{aligned}$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite lassen sich alle aus der Submetrik konstruieren. Das geschieht, indem man zunächst die Definition der Christoffelsymbole betrachtet:

$$\begin{aligned} \Gamma^A_{BC} &= \frac{1}{2} G^{AE}(G_{BE,C} + G_{CE,B} - G_{BC,E}) && \text{(G.9)} \\ &= \frac{1}{2} G^{A\kappa}(G_{B\kappa,C} + G_{C\kappa,B} - G_{BC,\kappa}) + \frac{1}{2} G^{Ad}(G_{Bd,C} + G_{Cd,B} - G_{BC,d}). && \text{(G.10)} \end{aligned}$$

Nun betrachtet man der Reihe nach alle Christoffelsymbole (bzw. deren Ableitung), die in (G.8) auftauchen und überführt sie mit Hilfe der Gleichungen (G.3) in Ausdrücke, die sich aus der Submetrik $g_{\mu\nu}$ konstruieren lassen:

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} G^{\alpha\kappa}(G_{\alpha\kappa,\beta} + G_{\beta\kappa,\alpha} - G_{\alpha\beta,\kappa}) + \frac{1}{2} G^{\alpha d}(G_{\alpha d,\beta} + G_{\beta d,\alpha} - G_{\alpha\beta,d}) && \text{(G.11)} \\ &\overset{\text{(G.3)}}{=} \frac{1}{2} r g^{\alpha\kappa}(\frac{1}{r} g_{\alpha\kappa,\beta} + \frac{1}{r} g_{\beta\kappa,\alpha} - \frac{1}{r} g_{\alpha\beta,\kappa}) && \text{(G.12)} \\ &=: \gamma^\alpha_{\alpha\beta}. && \text{(G.13)} \end{aligned}$$

Hierbei sind $\gamma^\alpha_{\alpha\beta}$ die Christoffelsymbole, die aus der Submetrik (anstatt der vollen Metrik G_{AB}) gebildet werden. Einige der Christoffelsymbole verschwinden in Feffermann-Graham-Koordinaten, z.B.:

$$\begin{aligned} \Gamma^d_{d\beta} &= \frac{1}{2} G^{d\kappa}(G_{d\kappa,\beta} + G_{\beta\kappa,d} - G_{d\beta,\kappa}) + \frac{1}{2} G^{dd}(G_{dd,\beta} + G_{\beta d,d} - G_{d\beta,d}) && \text{(G.14)} \\ &\overset{\text{(G.3)}}{=} 0. && \text{(G.15)} \end{aligned}$$

Die übrigen Christoffelsymbole kann man durch die Radialkoordinate r und die Submetrik ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}_{\alpha d} &= \frac{1}{2}G^{\alpha\kappa}(G_{\alpha\kappa,d}+G_{d\kappa,\alpha}-G_{\alpha d,\kappa})+\frac{1}{2}G^{\alpha d}(G_{\alpha d,d}+G_{dd,\alpha}-G_{\alpha d,d}) && \text{(G.16)}\\
&\overset{\text{(G.3)}}{=} \frac{1}{2}rg^{\alpha\kappa}(-\frac{1}{r^2}g_{\alpha\kappa}+\frac{1}{r}g_{\alpha\kappa,d}) = -\frac{D-1}{2r}+\frac{1}{2}g^{\alpha\kappa}g_{\alpha\kappa,d} && \text{(G.17)}\\
&= -\frac{D-1}{2r}+\frac{1}{2}Tr[(g^{-1})g']. && \text{(G.18)}
\end{aligned}$$

g, g', g'' bedeuten hier, wie auch in der folgenden Herleitung, diejenigen Matrizen, deren Komponenten $g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu,d}$ bzw. $g_{\mu\nu,d,d}$ sind. g^{-1} ist die zu g inverse Matrix. Diese Schreibweise soll verdeutlichen, dass zu diesem Zeitpunkt noch eine freie Koordinatenwahl der ersten d Koordinaten möglich ist (anders gesprochen: Die Gleichungen sind invariant unter Koordinatentransformationen, die lediglich die ersten d Koordinaten mischen). Damit sind es Tensorgleichungen in jedem Subraum des aAdS, in dem r =konst gehalten wird. Analog bekommt man durch Anwenden von (G.10) und (G.3) die restlichen in (G.8) auftretenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{d}_{\mu\nu} &= 2g_{\mu\nu}-2rg_{\mu\nu,d}, && \text{(G.19)}\\
\Gamma^{d}_{dd} &= -\frac{1}{r}, && \text{(G.20)}\\
\Gamma^{\beta}_{\mu d} &= -\frac{1}{2r}\mathbb{1}+\frac{1}{2}(g^{-1})g', && \text{(G.21)}\\
\partial_\alpha\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} &= \partial_\alpha\gamma^{\alpha}_{\nu\mu}, && \text{(G.22)}\\
\partial_d\Gamma^{d}_{\nu\mu} &= -2rg'', && \text{(G.23)}\\
\partial_\nu\Gamma^{d}_{d\mu} &= 0. && \text{(G.24)}
\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke werden in (G.8) eingesetzt und zusammengefasst:

$$R_{\mu\nu} = Ric(g)-2rg''-\frac{D-1}{r}g+(D-3)g'+(g-rg')Tr[(g^{-1})g']+2rg'(g^{-1})g'. \quad \text{(G.25)}$$

Dies wird in die Einstein-Gleichungen

$$0 = R_{AB}+(D-1)G_{AB}. \quad \text{(G.26)}$$

eingesetzt (vgl (2.2.8)). Die $(\mu\nu)$-Gleichungen nehmen dann die in (4.1.10) gegebene Form an: Ganz analog geht man bei den (dd)- und (μd)-Gleichungen vor und erhält schließlich (4.1.11) und (4.1.12). Das sind die gesuchten PDEs für die Submetrik $g_{\mu\nu}$.

G.2 Aufstellen eines algebraischen Gleichungssystems zur Lösung der PDEs

Das Gleichungssystem (4.1.10) - (4.1.12) soll nun gelöst werden. Eine Methode dafür ist die folgende:

1. Schreibe g und g^{-1} als Taylor-Reihe um $r = 0$ (also auf dem Rand) auf $g = \sum g_{(k)} r^k$, $g^{-1} = \sum g^{(k)} r^k$.

2. Damit sind auch die Entwicklungen für g' und g'' gegeben: $g' = \sum (k+1) g_{(k+1)} r^k$ bzw. $g'' = \sum (k+1)(k+2) g_{(k+2)} r^k$.

3. Das setzt man in die PDEs (4.1.10)-(4.1.12) für die Submetrik ein.

4. Die so erhaltenen Gleichungen müssen in allen Ordnungen gelten. Man bekommt damit ein System aus unendlich vielen algebraischen Gleichungen, die die Entwicklungskoeffizienten der Submetrik erfüllen müssen. Die höheren Entwicklungsterme werden dabei von den niedrigeren bestimmt.

5. Ausgehend von den Randbedingungen konstruiert man die Lösung bis zu einer beliebig hohen Ordnung.

Dass man das Gleichungssystem Schritt für Schritt lösen kann, indem man bei einer niedrigen Ordnung anfängt und sich sukzessive zu höheren Ordnungen hoch arbeitet, wie im Punkt 4 behauptet wird, soll nun gezeigt werden. Zunächst bietet es sich an, jeden Summanden in (4.1.10)-(4.1.12) getrennt zu behandeln. Wähle beispielsweise

$$
\begin{aligned}
2rg'(g^{-1})g' &= 2r \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) g_{(k+1)} r^k \sum_{l=0}^{\infty} g^{(l)} r^l \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) g_{(m+1)} r^m && \text{(G.27)} \\
&= 2r \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) g_{(k+1)} r^k \sum_{l=0}^{\infty} r^l \sum_{m=0}^{l} g^{(l-m)} (m+1) g_{(m+1)} && \text{(G.28)} \\
&= 2r \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{l=0}^{k} \sum_{m=0}^{l} (k-l+1) g_{(k-l+1)} g^{(l-m)} (m+1) g_{(m+1)} && \text{(G.29)} \\
&= \sum_{p=1}^{\infty} r^p \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{l} 2(p-l)(m+1) g_{(p-l)} g^{(l-m)} g_{(m+1)} && \text{(G.30)} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} r^p \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{l} 2(p-l)(m+1) g_{(p-l)} g^{(l-m)} g_{(m+1)} (1 - \delta_1^p). && \text{(G.31)}
\end{aligned}
$$

In den ersten beiden Schritten wurde die Cauchy'sche Produktreihe verwendet

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l}_{c_k} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k. \tag{G.32}$$

Analog kann man auch die restlichen Terme umschreiben:

$$\begin{aligned}
-2rg'' &= \sum_{p=0}^{\infty} r^p (-2)p(p+1) g_{(p+1)}, \\
-rg' Tr((g^{-1})g') &= \sum_{p=0}^{\infty} r^p \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{l} (-1)(p-l)(m+1) g_{(p-l)} Tr[g^{(l-m)} g_{(m+1)}], \\
(D-3)g' &= \sum_{p=0}^{\infty} r^p (D-3)(p+1) g_{(p+1)}, \\
gTr[(g^{-1})g'] &= \sum_{p=0}^{\infty} r^p \sum_{l=0}^{p} \sum_{m=0}^{l} g_{(p-l)} (m+1) Tr[g^{(l-m)} g_{(m+1)}], \\
Ric(g)_{\mu\nu} &= \sum_{p=0}^{\infty} r^p \partial_\alpha \sum_{m=0}^{p} (g^{(p-m)})^{\alpha\kappa} \gamma_{\nu\mu:\kappa}(g_{(m)}) \\
&\quad - \sum_{p=0}^{\infty} r^p \partial_\nu \sum_{m=0}^{p} (g^{(p-m)})^{\alpha\kappa} \gamma_{\alpha\mu:\kappa}(g_{(m)}) \\
&\quad + \sum_{p=0}^{\infty} r^p \sum_{l=0}^{p} \sum_{m=0}^{p-l} \sum_{k=0}^{l} (g^{(p-l-m)})^{\alpha\kappa} \gamma_{\alpha\beta:\kappa}(g_{(m)}) (g^{(l-k)})^{\beta\lambda} \gamma_{\mu\nu:\lambda}(g_{(k)}) \\
&\quad - \sum_{p=0}^{\infty} r^p \sum_{l=0}^{p} \sum_{m=0}^{p-l} \sum_{k=0}^{l} (g^{(p-l-m)})^{\alpha\kappa} \gamma_{\nu\beta:\kappa}(g_{(m)}) (g^{(l-k)})^{\beta\lambda} \gamma_{\mu\alpha:\lambda}(g_{(k)}), \\
Tr[(g^{-1})g''] &= \sum_{p=0}^{\infty} r^p \sum_{m=0}^{p} Tr[g^{(p-m)} (m+1)(m+2) g_{(m+2)}], \\
-\frac{1}{2} Tr((g^{-1})g'(g^{-1})g') &= -\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} r^p \sum_{l=0}^{p} \sum_{m=0}^{p-l} \sum_{h=0}^{l} (p-l-m+1)(l-h+1) \\
&\quad \times Tr\left[g^{(2m)} g_{(2p-2l-2m+2)} g^{(2h)} g_{(2l-2h+2)}\right].
\end{aligned}$$

Im Ausdruck für den Ricci-Tensor stehen Terme der Art $\gamma_{\mu\nu:\kappa}(g_{(k)})$. Das sind die Christoffelsymbole erster Art, die man statt aus der Metrik aus $g_{(k)}$ konstruiert. Wenn man die gewonnenen Ausdrücke in (4.1.10) einsetzt und benutzt, dass die Gleichungen in jeder Ordnung von r gelten, bekommt man für jedes p das Gleichungssystem (4.1.13). Tut man das auch für die Gleichung (4.1.12), so erhält man als weitere Gleichung (4.1.14). In (4.1.13)

und (4.1.14) sieht es so aus, als ob $g_{(k)}$ und $g^{(k)}$ unabhängige Objekte sind. Das ist aber nicht der Fall; vielmehr zeigt es sich, dass bei Kenntnis von g bis zur Ordnung k auch g^{-1} bis zu dieser Ordnung bestimmt ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{1} &= g g^{-1} && \text{(G.33)}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} g_{(k)} r^k \sum_{l=0}^{\infty} g^{(l)} r^l && \text{(G.34)}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{l=0}^{k} g_{(k-l)} g^{(l)} && \text{(G.35)}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{l=0}^{k-1} \left(g_{(k-l)} g^{(l)} + g_{(0)} g^{(k)} \right). && \text{(G.36)}
\end{aligned}$$

(G.36) muss in allen Ordnungen von r gelten, da ansonsten (G.33) nicht erfüllt ist. In nullter Ordnung gilt:

$$\mathbb{1} = g_{(0)} g^{(0)}. \tag{G.37}$$

In $(k > 0)$-ter Ordnung kann man (G.36) umstellen

$$g^{(k)} = -\sum_{l=0}^{k-1} \left(g^{(0)} g_{(k-l)} g^{l}(l) \right). \tag{G.38}$$

Damit hat man $g^{(k)}$ auf $g^{(m<k)}$ und $g_{(m\leq k)}$ zurückgeführt. (G.38) kann man iterativ immer wieder in sich einsetzen und $g^{(k)}$ zunächst auf $g^{(0)}$ und $g_{(m\leq k)}$ zurückführen. Wegen (G.37) kann man $g^{(k)}$ sogar nur durch die Koeffizienten von g, die höchstens von gleicher Ordnung sind, ausdrücken. Bis zur dritten Ordnung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
g^{(0)} &= (g_{(0)})^{-1}, && \text{(G.39)}\\
g^{(1)} &= -g^{(0)} g_{(1)} g^{(0)}, && \text{(G.40)}\\
g^{(2)} &= g^{(0)} g_{(1)} g^{(0)} g_{(1)} g^{(0)} - g^{(0)} g_{(2)} g^{(0)}, && \text{(G.41)}\\
g^{(3)} &= -g^{(0)} g_{(1)} g^{(0)} g_{(1)} g^{(0)} g_{(1)} g^{(0)} + g^{(0)} g_{(1)} g^{(0)} g_{(2)} g^{(0)} + g^{(0)} g_{(2)} g^{(0)} g_{(1)} g^{(0)}\\
&\quad - g^{(0)} g_{(3)} g^{(0)}. && \text{(G.42)}
\end{aligned}$$

Damit tauchen in (4.1.13) und (4.1.14) nur noch Koeffizienten von g (und nicht mehr von g^{-1}) auf. Betrachtet man (4.1.13), so fällt auf, dass der höchste Koeffizient in genau zwei Summanden auftritt: Zum einen ganz offensichtlich in der ersten Zeile und zum anderen in der fünften Zeile (in der Spur), bei dem Summand mit $(b, m) = (p, 0)$. Die Spur, die $g^{(0)} g_{(p+1)}$ haben muss, wird durch die Gleichung (4.1.14) festgelegt. Bei dem

Berücksichtigen der Spur gibt es allerdings noch eine technische Schwierigkeit: Wenn man nämlich in der fünften Zeile für $Tr[g^{(0)}g_{(p+1)}]$ den Wert einsetzt, den man mit (4.1.14) bestimmt hat, so stellt man fest, dass die Spur von $g_{(p+1)}$ im allgemeinen *nicht* damit übereinstimmt. Die Ursache dafür liegt darin begründet, dass von den $(\mu\nu)$-Gleichungen, die nicht symmetrie-äquivalent sind, nicht alle unabhängig voneinander sind. Deshalb wird das iterative Lösen einen reellen Parameter unbestimmt lassen, nämlich $Tr[g^{(0)}g_{(p+1)}]$. Wenn man dort den Wert aus der (dd)-Gleichung einsetzt, hat man die Gleichung (4.1.14) noch nicht berücksichtigt. Man muss vielmehr in (4.1.13) die Spur $Tr[g^{(0)}g_{(p+1)}]$ als Parameter a betrachten. Das Auswerten von (4.1.13) liefert dann den Koeffizienten $g_{(p+1)}$, der bis auf diesen Parameter vollständig bestimmt ist: $g_{(p+1)}(a)$. Der Wert für a wird so gewählt, dass (4.1.14) erfüllt ist. Dann ist der $(p+1)$-te Taylor-Koeffizient der Submetrik vollständig bestimmt.

G.3 Iterative Lösung

Wertet man (4.1.13) auf dem Rand (d.h. bei $r = 0$) aus so erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &= Ric(g_{(0)}) + (D-3)g_{(1)} + Tr[g^{(0)}g_{(1)}]g_{(0)}, && \text{(G.43)} \\ 0 &= RS(g_{(0)}) + (D-3)Tr[g^{(0)}g_{(1)}] + (D-1)Tr[g^{(0)}g_{(1)}] && \text{(G.44)} \\ &= RS(g) + 2(D-2)Tr[g^{(0)}g_{(1)}]. && \text{(G.45)} \end{aligned}$$

Im ersten Schritt wurde die Spur bzgl. der Randmetrik $g_{(0)}$ gebildet. Mit (G.45) kann der Spurausdruck in (G.43) ersetzt werden und man bekommt eine Gleichung, die $g_{(1)}$ mit Krümmungsgrößen verknüpft, die aus $g_{(0)}$ gebildet werden:

$$g_{(1)} = \frac{1}{D-3}\left(-Ric(g_{(0)}) + \frac{RS(g_{(0)})}{2(D-2)}g_{(0)}\right). \qquad \text{(G.46)}$$

Insbesondere verschwindet $g_{(1)}$ immer dann, wenn der Rand ein Minkowski-Raum ist – unabhängig davon, mit welchen Koordinaten man diesen beschreibt. Doch nicht nur $g_{(1)}$ bekommt in diesem Fall eine einfache Struktur; auch der Energie-Impuls-Tensor sieht sehr viel einfacher aus. Aus (4.2.3) wird dann

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi G_N}g_{(2)\mu\nu}. \qquad \text{(G.47)}$$

Die Bedingungen (4.2.1) und (4.2.2) werden zur Spur bzw. Divergenzfreiheit des Energie-Impuls-Tensors:

$$T^{\mu}_{\mu} = 0, \tag{G.48}$$

$$\nabla_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = 0. \tag{G.49}$$

Betrachtet man auf dem Rand ein Medium, das man hydrodynamisch beschreiben kann, und fordert Bjorken-Symmetrie, so ist das Geschwindigkeitsfeld dieses Mediums bereits vollständig bestimmt [31]. Die Gleichungen (G.48) und (G.49) bestimmen den Energie-Impuls-Tensor dann beinahe vollständig. Man kann diesen dann mit nur einer Funktion vollständig charakterisieren. In Milne-Koordinaten hat der Energie-Impuls-Tensor die Gestalt (4.3.4). Diese erhält man durch die Feststellung, dass in Milne-Koordinaten, das Flussmuster die besonders einfache Struktur $u^{\mu} = (1, 0, 0, 0)^T$ besitzt. Mit den konstitutiven Gleichungen (2.3.4) berechnet man das Aussehen des Energie-Impuls-Tensors für ein ideales Fluid und erhält (2.3.4). Dann fordert man (G.48) und (G.49) und bekommt (4.3.4). Die Milne-Metrik hat die folgende Gestalt: $g_{(0)} = \mathrm{diag}(-1, \tau^2, 1, 1)$. Damit und mit (4.3.4) bestimmt man beliebig hohe Ordnungen der vollständigen aAdS-Metrik mittels des oben geschilderten Verfahrens. In den ersten Ordnungen bekommt man als Lösung (4.3.5)-(4.3.7): Bis zur Ordnung z^8 kann man das für g_{00} mit dem Ergebnis in der Literatur [12] vergleichen. Dafür muss man aber die Komponenten g_{00} der Metrik in eine Taylor-Reihe für die dort gewählte Parametrisierung der Metrik umrechnen ($g_{00} = e^a(z, \tau)$ mit $a(z, \tau) = -1 + a_{(4)} z^4 + a_{(6)} z^6 + \dots$). Man kann sich auch vergewissern, dass die für die Konstruktion nicht verwendeten Gleichungen (4.1.11) bis zur Entwicklungsordnung der Metrik immer identisch erfüllt sind.

H Krümmungsskalare

Wichtige Eigenschaften der konformen Feldtheorie findet man, indem man für die duale Metrik fordert, dass deren Krümmung nicht divergieren soll. Da scheinbare Singularitäten der Metrik auch durch die Koordinatenwahl verursacht werden, ist es nötig Größen zu finden, die unabhängig vom Koordinatensystem die Krümmung des Raumes beschreiben. In der Sprache der ART bedeutet dies, dass diese Größen Skalare sein sollen. Zweck dieses Anhangs ist es, diejenigen Skalare zu finden, an denen man eine divergierende Krümmung erkennen kann. Dafür werden solche Skalare betrachtet, die sich nur aus dem Krümmungstensor und der Metrik bilden lassen. Zunächst werden für die Analyse wichtige Gleichungen angegeben und danach werden die Skalare bestimmt, die den Krümmungstensor in nullter, erster und zweiter Ordnung enthalten. Im Zusammenhang mit der AdS/CFT-Korrespondenz werden Einsteingleichungen der Form (2.2.6) betrachtet. Der Ricci-Skalar R lässt sich mit (2.2.7) berechnen. Da die kosmologische Konstante Λ endlich ist, muss auch R eine endliche Konstante sein. Der Ricci-Tensor ist in einem AdS bzw. aAdS ein Vielfaches der Metrik (vgl. (2.2.8)). Für die Überlegungen in diesem Anhang ist es außerdem wichtig festzustellen, dass der Proportionalitätsfaktor zwischen dem Ricci-Tensor und der Metrik eine endliche Konstante ist:

$$R_{\mu\nu} = kG_{\mu\nu} \tag{H.1}$$

Außerdem wird noch benötigt, dass die Kontraktion bzgl. des ersten und zweiten Indexpaares wegen deren Asymmetrie [1] verschwindet:

$$G^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = G^{\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0. \tag{H.2}$$

Für ein übersichtlicheres Bild wird folgende Schreibweise für eine Kontraktion mit der Metrik benutzt:

$$G^{\kappa\lambda}T_{\alpha\beta\ldots\kappa\ldots\lambda\ldots\omega} =: T_{\alpha\ldots\underbrace{\kappa\ldots\lambda}\ldots\omega}. \tag{H.3}$$

[1] Vgl. Abschnitt B.2.4.

Nullte Ordnung

In nullter Ordnung im Krümmungstensor gibt es nur einen Skalar, nämlich

$$G_{\underbrace{\mu\nu}} = G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = D. \tag{H.4}$$

Dieser ist endlich und damit nicht divergent.

Erste Ordnung

In erster Ordnung im Krümmungstensor kann es auch noch keine divergenten Krümmungsenskalare geben. Um das zu sehen, berechnet man zunächst nur eine Kontraktion des Krümmungstensors. Man erhält

$$R_{\underbrace{\mu\nu\rho\sigma}} = R_{\mu\nu\underbrace{\rho\sigma}} \overset{(H.2)}{=} 0. \tag{H.5}$$

Die nicht verschwindenden Kontraktionen ergeben (bis auf ein eventuelles Vorzeichen) den Ricci-Tensor

$$R_{\underbrace{\rho\mu\sigma\nu}} = -R_{\underbrace{\rho\nu\mu\sigma}} = -R_{\mu\underbrace{\sigma\rho\nu}} = R_{\mu\underbrace{\rho\nu\sigma}} = R_{\mu\nu} \overset{(H.1)}{=} kG_{\mu\nu}. \tag{H.6}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gibt eine nützliche Reduktionsformel für die Suche nach divergenten Krümmungsskalaren: Wenn bei einem Ausdruck, der n-ten Ordnung im Krümmungstensor eine dieser Kontraktionen auftritt, dann weiß man sofort, dass sich dieser Ausdruck bis auf einen endlichen Faktor nicht von dem unterscheidet, bei dem der so kontrahierte Krümmungstensor durch eine Metrik ersetzt wird. Dieser Ausdruck ist allerdings von $(n-1)$-ter Ordnung im Krümmungstensor. Da hier systematisch von kleinen zu großen Ordnungen gegangen werden soll, bedeutet das, dass sich jener Ausdruck n-ter Ordnung nur bis auf einen endlichen Faktor von einem bereits gefundenen Ausdruck unterscheidet. Zur Verdeutlichung betrachte man:

$$\underbrace{R_{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\epsilon\kappa\lambda\omega}R_{\mu\nu\rho\sigma}}. \tag{H.7}$$

Der mittlere Krümmungstensor enthält eine der Kontraktionen in (H.6), kann also durch k mal die Metrik ersetzt werden:

$$\underbrace{kR_{\alpha\beta\gamma\delta}G_{\epsilon\omega}R_{\mu\nu\rho\sigma}}. \tag{H.8}$$

Wenn man beachtet, dass die Klammern eine Multiplikation mit der inversen Metrik $G^{\mu\nu}$ bedeuten, kann man den Ausdruck noch weiter vereinfachen zu

$$\underbrace{kR_{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\mu\nu\rho\sigma}}. \tag{H.9}$$

Bis auf einen endlichen Faktor k stimmt also der Ausdruck mit drei Krümmungstensoren mit einem Ausdruck mit zwei Krümmungstensoren überein. Damit kann man diesen Ausdruck ignorieren, wenn man nach divergenten Skalaren sucht (er divergiert nur dann, wenn der einfachere Ausdruck auch schon divergiert). Betrachte man nun wieder (H.2) und (H.1). Um Skalare zu gewinnen, müssen die Tensoren noch einmal kontrahiert werden. Das ergibt aber Null (bei (H.2)) bzw. $\pm R$ (bei (2.1.1)) und somit einen endlichen Wert (s. oben). Damit sind alle möglichen Skalare, die man aus einem einzelnen Krümmungstensor konstruieren kann, abgehandelt und man hat gefunden, dass keiner davon divergieren kann.

Zweite Ordnung

Aus der Reduktionsformel (H.1) und dem verschwinden der übrigen Kontraktionen wegen der Antisymmetrie (H.2) folgt, dass alle Ausdrücke, bei denen mindestens ein Krümmungstensor mindestens einmal mit sich selbst kontrahiert ist, keine neuen divergenten Skalare liefern können. Zu betrachten bleiben also nur die Skalare, bei denen alle Indizes des einen Krümmungstensors mit Indizes des anderen kontrahiert wurden, also beispielsweise

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{H.10}$$

Da jedoch der Krümmungstensor eine Vielzahl an Symmetrien aufweist, gibt es nur zwei Äquivalenzklassen von Skalaren, wobei sich in jeder Klasse die Skalare nur um ein Vorzeichen unterscheiden. Repräsentanten dieser beiden Klassen sind:

$$\Re_1 := R_{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\mu\nu\rho\sigma} = R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{H.11}$$

$$\Re_2 := R_{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\mu\nu\rho\sigma} = R^{\mu\rho\nu\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{H.12}$$

$\Re_1$ ist die sog. Kretschmann-Invariante.

höhere Ordnungen

Die systematische Suche nach Skalaren, welche divergieren können kann weiter fortgesetzt werden. Auf diese Weise ist es möglich, alle solche Skalare, die sich nur aus dem Krümmungstensor und der Metrik bilden lassen zu finden. Da der Krümmungstensor nur endlich viele unabhängige Komponenten hat, wird die Liste der Skalare, die eine Divergenz anzeigen können ebenfalls endlich sein.

Kontraktionen mit dem ϵ-Tensor

Theoretisch könnte man auch mit dem vollständig antisymmetrischen Tensor ϵ Skalare bilden. Da für dies Arbeit aber vor allem fünfdimensionale Geometrien (also solche mit

vierdimensionalem Rand) interessant sind, bedeutet das, dass der ϵ-Tensor ein Tensor fünfter Stufe ist. Da alle übrigen Kontraktionen mit Tensoren gerader Stufe gemacht werden, sind mindestens zwei ϵ-Tensoren nötig, um einen Skalar herzustellen. Das ist erst ab der dritten Ordnung im Krümmungstensor möglich.

I Iteratives Lösungsschema für die relativistische Hydrodynamik

I.1 Herleitung des Gleichungssystems

In diesem Anhang soll gezeigt werden, wie man aus (5.1.3) - (5.1.6) das Gleichungssystem gewinnt, mit dem man die Gleichungen für lokale Energie-Impulserhaltung iterativ lösen kann.

Ausgehend von (5.1.3), in das bereits die formalen Taylor-Entwicklungen von $T^{\alpha 0}$ und dessen Ableitungen eingesetzt wurden, sortiert man die auftretenden Terme nach Potenzen von x^0:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^{\alpha 0}_{(k+1)} (x^0)^k &= -\frac{\partial f^{e\nu}}{\partial T^{\rho 0}} \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \left(\partial_e T^{\rho 0}_{(q)} \right) (x^0)^q \right) \\
&\quad -\Gamma^{\mu}_{\mu\sigma} f^{\sigma\nu}(T^{\alpha 0}) - \Gamma^{\nu}_{\mu\beta} f^{\mu\beta}(T^{\alpha 0}) \qquad \text{(I.1)} \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial^k}{\partial {x^0}^k} \frac{\partial f^{e\nu}}{\partial T^{\rho 0}} \right) \Big|_{x^0=0} (x^0)^k \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \left(\partial_e T^{\rho 0}_{(q)} \right) (x^0)^q \right) \\
&\quad -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Gamma^{\mu}_{(k)\mu\sigma} (x^0)^k \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} f^{\sigma\nu}_{(q)}(T^{\alpha 0}) (x^0)^q \\
&\quad -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Gamma^{\nu}_{(k)\mu\beta} (x^0)^k \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} f^{\mu\beta}_{(q)}(T^{\alpha 0}) (x^0)^q \qquad \text{(I.2)} \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} (x^0)^k \sum_{q=0}^{k} \frac{1}{(k-q)!} \left(\frac{\partial^{k-q}}{\partial {x^0}^{k-q}} \frac{\partial f^{e\nu}}{\partial T^{\rho 0}} \right) \Big|_{x^0=0} \left(\frac{1}{q!} \left(\partial_e T^{\rho 0}_{(q)} \right) \right) \\
&\quad -\sum_{k=0}^{\infty} (x^0)^k \sum_{q=0}^{k} \Gamma^{\mu}_{(k-q)\mu\sigma} \frac{1}{(k-q)!} \frac{1}{q!} f^{\sigma\nu}_{(q)}(T^{\alpha 0}) \\
&\quad -\sum_{k=0}^{\infty} (x^0)^k \sum_{q=0}^{k} \Gamma^{\nu}_{(k-q)\mu\beta} \frac{1}{(k-q)!} \frac{1}{q!} f^{\mu\beta}_{(q)}(T^{\alpha 0}). \qquad \text{(I.3)}
\end{aligned}$$

(I.3) muss in jeder Ordnung von x^0 gelten. Also gilt in der k-ten Ordnung (5.1.8). Hierbei wurden auch die Christoffelsymbole in eine Taylor-Reihe um $x^0 = 0$ entwickelt:

$$\Gamma^{\nu}_{\mu\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Gamma^{\nu}_{(k)\mu\beta} (x^0)^k. \tag{I.4}$$

Die Funktionen $f^{\mu\nu}$ hängen nur über ihr Argument von x^0 ab. Für die Ableitungen nach x^0 muss also die Kettenregel angewandt werden. Mit der Formel von Faà di Bruno [41] kann man die höheren Ableitungen dieser verketteten Funktion explizit angeben. Da jedoch bei Funktionen mehrerer Variablen die Notation sehr aufwendig ist und auch das Verständnis nicht fördert, sei hier darauf verzichtet diese anzugeben. Stattdessen werden die ersten Ableitungen angegeben:

$$f^{\kappa\lambda}_{(1)}(T^{\alpha 0}) = \left.\frac{\partial f^{\kappa\lambda}}{\partial T^{\mu 0}}\right|_{T^{\alpha 0}=T^{\alpha 0}_{(0)}} T^{\mu 0}_{(1)}, \tag{I.5}$$

$$f^{\kappa\lambda}_{(2)}(T^{\alpha 0}) = \left.\frac{\partial^2 f^{\kappa\lambda}}{\partial T^{\mu 0}\partial T^{\nu 0}}\right|_{T^{\alpha 0}=T^{\alpha 0}_{(0)}} T^{\mu 0}_{(1)} T^{\nu 0}_{(1)} + \left.\frac{\partial f^{\kappa\lambda}}{\partial T^{\mu 0}}\right|_{T^{\alpha 0}=T^{\alpha 0}_{(0)}} T^{\mu 0}_{(2)}, \tag{I.6}$$

$$\begin{aligned} f^{\kappa\lambda}_{(3)}(T^{\alpha 0}) = {} & \left.\frac{\partial^3 f^{\kappa\lambda}}{\partial T^{\mu 0}\partial T^{\nu 0}\partial T^{\rho 0}}\right|_{T^{\alpha 0}=T^{\alpha 0}_{(0)}} T^{\mu 0}_{(1)} T^{\nu 0}_{(1)} T^{\rho 0}_{(1)} \\ & + 6 \left.\frac{\partial^2 f^{\kappa\lambda}}{\partial T^{\mu 0}\partial T^{\nu 0}}\right|_{T^{\alpha 0}=T^{\alpha 0}_{(0)}} T^{\mu 0}_{(2)} T^{\nu 0}_{(1)} + 6 \left.\frac{\partial f^{\kappa\lambda}}{\partial T^{\mu 0}}\right|_{T^{\alpha 0}=T^{\alpha 0}_{(0)}} T^{\mu 0}_{(3)}, \end{aligned} \tag{I.7}$$

$$\vdots \quad .$$

Wie man hieran bereits erahnen kann (und eine Analyse der expliziten Formel von Faà di Bruno bestätigt), enthält die k-te Ableitung von $f^{\kappa\lambda}$ maximal die k-ten Ableitung von $T^{\alpha 0}$. Da die funktionale Abhängigkeit von $f^{\kappa\lambda}$ von seinen Argumenten bekannt ist, sobald man das Medium, dessen Energie-Impuls-Tensor man berechnet, spezifiziert hat, lassen sich die partiellen Ableitungen von $f^{\kappa\lambda}$ nach $T^{\alpha 0}$ ausrechnen. Schaut man sich die rechte Seite von (5.1.8) an, so stellt man fest, dass dort nur die Entwicklungskoeffizienten von $T^{\alpha 0}$ bis zur Ordnung k stehen. Damit wird der $(k+1)$-te Entwicklungskoeffizient vollständig durch die niedrigeren Entwicklungskoeffizienten bestimmt. Gibt man Anfangsbedingungen vor (also $T^{\alpha 0}(x^0 = 0) = T^{\alpha 0}_{(0)}$), so kann man $T^{\alpha 0}_{(1)}$ bestimmen. Sobald man das kennt, kann man zusätzlich $T^{\alpha 0}_{(2)}$ bestimmen, etc. prinzipiell bis zu beliebig hoher Ordnung.

I.2 $\mathbf{f}^{\mu\nu}$ für ideale Fluide

Für ein ideales Fluid mit der Zustandsgleichung $\epsilon = 3p$, wobei ϵ die Energiedichte und p der Druck ist, sollen im Folgenden die Funktionen $f^{\mu\nu}$ angegeben werden. Dazu betrachtet man die $(\mu, 0)$-Komponenten von (2.3.4) als eigenständiges Gleichungssystem für p und u^a. Unter Zuhilfenahme der Zustandsgleichung bekommt man folgendes Gleichungssystem:

$$T^{00} = 4p(u^0)^2 - pg^{00}, \tag{I.8}$$

$$T^{a0} = 4pu^a u^0, \tag{I.9}$$

$$-1 = (u^0)^2 g_{00} + 2g_{a0}u^0 u^a + u^a u^b g_{ab}. \tag{I.10}$$

Die Normierungsbedingung (I.10) muss nach u^0 umgestellt und in die anderen beiden Gleichungen eingesetzt werden. Der lineare Term in (I.10) sorgt allerdings dafür, dass man zum Umstellen des Gleichungssystems nach p und u^a allgemeine Gleichungen vierten Grades lösen muss. Das macht das explizite Aufschreiben sehr aufwendig (aber nicht unmöglich). Da für jede Ordnung, in der das iterative Schema angewandt wird, dann ein komplizierter Ausdruck berechnet und (sehr oft) abgeleitet werden muss, ist es vorteilhaft, an dieser Stelle schon den Ausdruck zu vereinfachen. O.E.d.A kann man die Metrik in zeitorthogonalen Koordinaten betrachten. Dann sind $g_{a0} = 0$ und $g^{00} = 1/g_{00}$. Das Gleichungssystem bekommt dann das Aussehen:

$$T^{00} = -4p\frac{1 + g_{ab}u^a u^b}{g_{00}} + p\frac{1}{g_{00}}, \tag{I.11}$$

$$(T^{a0})^2 = -16p^2(u^a)^2\frac{1 + g_{ab}u^a u^b}{g_{00}}. \tag{I.12}$$

Aus (I.12) kann man das Verhältnis der Komponenten der Vierergeschwindigkeit bestimmen:

$$\frac{u^1}{T^{10}} = \frac{u^2}{T^{20}} = \frac{u^3}{T^{30}}. \tag{I.13}$$

Das setzt man in (I.11) und (I.12) ein und erhält ein System aus zwei Gleichungen, in dem nur noch p und u^1 (und die $T^{\alpha 0}$) vorkommen. (I.11) stellt man nach p um und setzt das Ergebnis in die verbleibende Gleichung ein. Diese löst man durch Substituieren $z := u^1$ und Anwenden der Lösungsformel für quadratische Gleichungen nach u^1 auf und benutzt das Ergebnis um $p(T^{\alpha 0}), u^2(T^{\alpha 0}), u^3(T^{\alpha 0})$ zu bestimmen. Diese expliziten Ausdrücke setzt man in die konstitutiven Gleichungen (2.3.4) ein

$$T^{ab} = 3p(T^{\alpha 0})u^a(T^{\alpha 0})u^b(T^{\alpha 0}) + p(T^{\alpha 0})(g^{ab} + u^a(T^{\alpha 0})u^b(T^{\alpha 0})) \tag{I.14}$$

und erhält damit:

$$T^{ab} = f^{ab}(T^{\alpha 0}) = fT^{a0}T^{b0} - pg^{ab}, \tag{I.15}$$

mit

$$f := -\frac{g_{00}\left(-2g_{00}T^{00\,2} - 3A + T^{00}\sqrt{4(g_{00})^2T^{00\,2} + 3g_{00}A}\right)}{\left(g_{00}T^{00} + \sqrt{4(g_{00})^2T^{00\,2} + 3g_{00}A}\right)A}, \tag{I.16}$$

$$A := g_{ab}T^{a0}T^{b0}, \tag{I.17}$$

$$p = \frac{\left(g_{00}T^{00\,2} + A\right)g_{00}}{g_{00}T^{00} + \sqrt{4(g_{00})^2T^{00\,2} + 3g_{00}A}}. \tag{I.18}$$

Die $(\mu 0)$-Komponenten von $f^{\mu\nu}$ sind sehr viel einfacher:

$$f^{\mu 0}(T^{\alpha 0}) = T^{\mu 0}. \tag{I.19}$$

Damit sind sämtliche Ausdrücke, die in der Beschreibung des iterativen Schemas vorkommen, definiert und man kann zumindest im Prinzip bei beliebigen analytischen Anfangsbedingungen beliebig hohe Ordnungen der Taylor-Entwicklung der Lösung berechnen. Einziger limitierender Faktor ist dabei die Leistungsfähigkeit des Computers.

I.3 Einige ausgewählte Lösungsentwicklungen

Tabelle I.1: Führende Ordnungen der Lösung der relativistischen Hydrodynamik mit den Anfangsbedingungen $\epsilon(\theta = 0) = \epsilon_0$, $y_{\text{long}} = \eta$ und $y_{\text{trans}} = 0$. Berechnet wurde die Lösung bis zur 70. Ordnung. Aus Platzgründen werden aber nur die ersten Ordnungen dargestellt.

Koordinatensystem (θ, η, y_2, y_3)			
$\theta = \frac{1}{2}\ln(t^2 - x_1^2)$	$\eta = \frac{1}{2}\ln\frac{t+x_1}{t-x_1}$	$y_2 = x_2$	$y_3 = x_3$
Lösungsentwicklung			
ϵ	$= 1 - \frac{4}{3}\theta + \frac{8}{9}\theta^2 - \frac{32}{81}\theta^3 + \frac{32}{243}\theta^4 - \frac{128}{3645}\theta^5 + \frac{256}{32805}\theta^6 - \frac{1024}{688905}\theta^7 + \frac{512}{2066715}\theta^8$		
	$-\frac{2048}{55801305}\theta^9 + \frac{4096}{837019575}\theta^1 0 + \ldots$		
y_{long}	$= \eta + \mathcal{O}(\theta^{71})$		
y_{trans}	$= 0 + \mathcal{O}(\theta^{71})$		

Tabelle I.2: Führende Ordnungen der Lösung der relativistischen Hydrodynamik mit den Anfangsbedingungen $\epsilon(\theta = 0) = \epsilon_0 \exp\left\{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right\}$, $y_{\text{long}} = \eta$ und $y_{\text{trans}} = 0$, d.h. es gibt in der Anfangsenergiedichte einen Gradienten in longitudinaler Richtung. Die Lösung konnte bis zur 17. Ordnung berechnet werden. Aus Platzgründen sind nur die ersten fünf Ordnungen angegeben.

Koordinatensystem (θ, η, y_2, y_3)

$\theta = \frac{1}{2}\ln(t^2 - x_1^2)$ $\eta = \frac{1}{2}\ln\frac{t+x_1}{t-x_1}$ $y_2 = x_2$ $y_3 = x_3$

Lösungsentwicklung

$$\begin{aligned}
\epsilon &= e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}}\Big(1 - \tfrac{4}{3}\theta + \tfrac{32\sigma^4-6\sigma^2+3\eta^2}{36\sigma^4}\theta^2 - \tfrac{32\sigma^4-21\sigma^2+9\eta^2}{81\sigma^4}\theta^3 \\
&\quad + \tfrac{2048\sigma^8+1056\sigma^4\eta^2+360\sigma^4-288\sigma^2\eta^2-3168\sigma^6+45\eta^4}{15552\sigma^8}\theta^4 \\
&\quad - \tfrac{4096\sigma^8+2592\sigma^4\eta^2+4680\sigma^4-2808\sigma^2\eta^2-12576\sigma^6+477\eta^4}{116640\sigma^8}\theta^5 + \dots\Big) \\
u^1 &= \tfrac{\eta}{4\sigma^2}\theta - \tfrac{\eta}{3\sigma^2}\theta^2 - \tfrac{\eta\left(-784\sigma^4+96\sigma^2+3\eta^2\right)}{3456\sigma^6}\theta^3 + \tfrac{\eta\left(-544\sigma^4+204\sigma^2+3\eta^2\right)}{5184\sigma^6}\theta^4 \\
&\quad + \tfrac{\eta\left(368896\sigma^8+9\eta^4+5184\eta^2\sigma^2-284160\sigma^6+23040\sigma^4+4512\sigma^4\eta^2\right)}{9953280\sigma^{10}}\theta^5 + \dots \\
u^2 &\quad 0 + \mathcal{O}(\theta^{18}) \\
u^3 &\quad 0 + \mathcal{O}(\theta^{18})
\end{aligned}$$

Tabelle I.3: Führende Ordnungen der Lösung der relativistischen Hydrodynamik mit den Anfangsbedingungen $\epsilon(\theta = 0) = \epsilon_0 \exp\left\{-\frac{\rho^2}{2\kappa^2}\right\}$, $y_{\text{long}} = \eta$ und $y_{\text{trans}} = 0$; d.h. es gibt in der Anfangsenergiedichte Gradienten in longitudinaler und radialer Richtung Berechnet werden konnte die Lösung bis zur 18. Ordnung. Aus Platzgründen sind nur die ersten vier Ordnungen angegeben.

Koordinatensystem $(\theta, \eta, \rho, \phi)$

$\theta = \frac{1}{2}\ln(t^2 - x_1^2)$ $\eta = \frac{1}{2}\ln\frac{t+x_1}{t-x_1}$ $\rho = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$ $\phi = \arctan\left(\frac{x2}{x3}\right)$

Lösungsentwicklung

$$\begin{aligned}
\epsilon &= e^{-1/2\frac{\rho^2}{\kappa^2}}\Big(1 - \tfrac{4}{3}\theta + \tfrac{3\rho^2+32\kappa^4-12\kappa^2}{36\kappa^4}\theta^2 - \tfrac{9\rho^2+128\kappa^4-24\kappa^2}{324\kappa^4}\theta^3 \\
&\quad + \tfrac{1080\kappa^4-576\kappa^6+2048\kappa^8+45\rho^4+192\kappa^4\rho^2-468\kappa^2\rho^2}{15552\kappa^8}\theta^4 \\
&\quad + \tfrac{14112\kappa^4+1920\kappa^6-8192\kappa^8+477\rho^4-720\kappa^4\rho^2-4896\kappa^2\rho^2}{233280\kappa^8}\theta^5 + \dots\Big) \\
u^1 &= 0 + \mathcal{O}(\theta^{19}) \\
u^2 &= \tfrac{\rho}{4\kappa^2}\theta + \tfrac{\rho}{6\kappa^2}\theta^2 - \tfrac{\rho\left(-208\kappa^4+3\rho^2+72\kappa^2\right)}{3456\kappa^6}\theta^3 - \tfrac{\rho\left(-40\kappa^4+3\rho^2+90\kappa^2\right)}{2592\kappa^6}\theta^4 \\
&\quad + \tfrac{\rho\left(30976\kappa^8-311040\kappa^6-8160\kappa^4\rho^2+9216\kappa^4+9\rho^4+4176\kappa^2\rho^2\right)}{9953280\kappa^{10}}\theta^5 + \dots \\
u^3 &= 0 + \mathcal{O}(\theta^{19})
\end{aligned}$$

Tabelle I.4: Führende Ordnungen der Lösung der relativistischen Hydrodynamik mit den Anfangsbedingungen $\epsilon(\theta = 0) = \epsilon_0 \exp\left\{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2} - \frac{\rho^2}{2\kappa^2}\right\}$, $y_{\text{long}} = \eta$ und $y_{\text{trans}} = 0$; d.h. es gibt in der Anfangsenergiedichte longitudinale und transversale Gradienten. Berechnet werden konnte die Lösung bis zur 14. Ordnung. Aus Platzgründen sind nur die ersten vier Ordnungen angegeben.

Koordinatensystem $(\theta, \eta, \rho, \phi)$

$\theta = \frac{1}{2}\ln(t^2 - x_1^2)$ $\quad \eta = \frac{1}{2}\ln\frac{t+x_1}{t-x_1}$ $\quad \rho = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$ $\quad \phi = \operatorname{arctanh}\left(\frac{x2}{x3}\right)$

Lösungsentwicklung

$$
\begin{aligned}
\epsilon &= e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}-\frac{\rho^2}{2\kappa^2}}\Bigg(1 - \frac{4}{3}\theta + \frac{32\sigma^4\kappa^4-12\sigma^4\kappa^2-6\sigma^2\kappa^4+3\eta^2\kappa^4+3\rho^2\sigma^4}{36\sigma^4\kappa^4}\theta^2 \\
&\quad - \frac{128\sigma^4\kappa^4-24\sigma^4\kappa^2-84\sigma^2\kappa^4+36\eta^2\kappa^4+9\rho^2\sigma^4}{324\sigma^4\kappa^4}\theta^3 \\
&\quad + \Bigg(\frac{90\eta^2\kappa^4\rho^2\sigma^4+1056\eta^2\kappa^8\sigma^4-360\sigma^4\kappa^6\eta^2-288\eta^2\kappa^8\sigma^2+192\kappa^4\rho^2\sigma^8+45\rho^4\sigma^8-3168\sigma^6\kappa^8}{15552\kappa^8\sigma^8} \\
&\quad + \frac{-576\sigma^8\kappa^6+2048\kappa^8\sigma^8-468\rho^2\kappa^2\sigma^8-180\sigma^6\kappa^4\rho^2+1080\sigma^8\kappa^4+720\sigma^6\kappa^6+360\kappa^8\sigma^4+45\eta^4\kappa^8}{15552\kappa^8\sigma^8}\Bigg)\theta^4 \\
&\quad + \ldots\Bigg) \\
u^1 &= \frac{\eta}{4\sigma^2}\theta - \frac{\eta}{3\sigma^2}\theta^2 - \frac{\eta\left(3\eta^2\kappa^4+96\sigma^2\kappa^4-784\sigma^4\kappa^4-48\sigma^4\kappa^2+3\rho^2\sigma^4\right)}{3456\sigma^6\kappa^4}\theta^3 \\
&\quad + \frac{\eta\left(3\eta^2\kappa^4-544\sigma^4\kappa^4+204\sigma^2\kappa^4-12\sigma^4\kappa^2+3\rho^2\sigma^4\right)}{5184\sigma^6\kappa^4}\theta^4 \\
&\quad + \ldots \\
u^2 &= \frac{\rho}{4\kappa^2}\theta + \frac{\rho}{6\kappa^2}\theta^2 - \frac{\rho\left(3\eta^2\kappa^4-24\sigma^2\kappa^4-208\sigma^4\kappa^4+72\sigma^4\kappa^2+3\rho^2\sigma^4\right)}{3456\sigma^4\kappa^6}\theta^3 \\
&\quad - \frac{\rho\left(3\eta^2\kappa^4-40\sigma^4\kappa^4-6\sigma^2\kappa^4+90\sigma^4\kappa^2+3\rho^2\sigma^4\right)}{2592\sigma^4\kappa^6}\theta^4 \\
&\quad + \ldots \\
u^3 &= 0 + \mathcal{O}(\theta^{15})
\end{aligned}
$$

Tabelle I.5: Führende Ordnungen der Lösung der relativistischen Hydrodynamik mit den Anfangsbedingungen $\epsilon(\theta = 0) = \epsilon_0$, $y = \eta$ und $y_{\text{trans}} = 0$; d.h. es gibt in der Anfangs-Energiedichte Gradienten in allen drei Raumrichtungen. Die Lösung wurde bis zur zwölften Ordnung berechnet.

Koordinatensystem $(\theta, \eta, \rho, \phi)$

$\theta = \frac{1}{2}\ln(t^2 - x_1^2)$ $\quad$ $\eta = \frac{1}{2}\ln\frac{t+x_1}{t-x_1}$ $\quad$ $\rho = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$ $\quad$ $\phi = \operatorname{arctanh}\left(\frac{x2}{x3}\right)$

Lösungsentwicklung

$$
\begin{aligned}
\epsilon &= e^{-1/2\frac{\eta^2\kappa^2\lambda^2+t_2^2\sigma^2\lambda^2+t_3^2\sigma^2\kappa^2}{\sigma^2\kappa^2\lambda^2}}\Bigg(1-\tfrac{4}{3}\theta \\
&\quad +\frac{32\sigma^4\kappa^4\lambda^4-6\sigma^2\kappa^4\lambda^4+3\eta^2\kappa^4\lambda^4-6\sigma^4\kappa^2\lambda^4+3t_2^2\sigma^4\lambda^4-6\sigma^4\kappa^4\lambda^2+3t_3^2\sigma^4\kappa^4}{36\sigma^4\kappa^4\lambda^4}\theta^2 \\
&\quad -\frac{128\sigma^4\kappa^4\lambda^4-84\sigma^2\kappa^4\lambda^4+36\eta^2\kappa^4\lambda^4-12\sigma^4\kappa^2\lambda^4+9t_2^2\sigma^4\lambda^4-12\sigma^4\kappa^4\lambda^2+9t_3^2\sigma^4\kappa^4}{324\sigma^4\kappa^4\lambda^4}\theta^3+\dots\Bigg) \\
u^1 &= \tfrac{\eta}{4\sigma^2}\theta-\tfrac{\eta}{3\sigma^2}\theta^2 \\
&\quad +\frac{\eta(-3t_2^2\sigma^4\lambda^4+784\sigma^4\kappa^4\lambda^4+24\sigma^4\kappa^2\lambda^4-96\sigma^2\kappa^4\lambda^4-3\eta^2\kappa^4\lambda^4+24\sigma^4\kappa^4\lambda^2-3t_3^2\sigma^4\kappa^4)}{3456\lambda^4\kappa^4\sigma^6}\theta^3+\dots \\
u^2 &= \tfrac{t_2}{4\kappa^2}\theta+\tfrac{t_2}{6\kappa^2}\theta^2 \\
&\quad +\frac{t_2(-3t_2^2\sigma^4\lambda^4+208\sigma^4\kappa^4\lambda^4-96\sigma^4\kappa^2\lambda^4+24\sigma^2\kappa^4\lambda^4-3\eta^2\kappa^4\lambda^4+24\sigma^4\kappa^4\lambda^2-3t_3^2\sigma^4\kappa^4)}{3456\lambda^4\kappa^6\sigma^4}\theta^3+\dots \\
u^3 &= \tfrac{t_3\theta}{4\lambda^2}+\tfrac{t_3}{6\lambda^2}\theta^2 \\
&\quad +\frac{t_3(-3t_2^2\sigma^4\lambda^4+208\sigma^4\kappa^4\lambda^4+24\sigma^4\kappa^2\lambda^4+24\sigma^2\kappa^4\lambda^4-3\eta^2\kappa^4\lambda^4-96\sigma^4\kappa^4\lambda^2-3t_3^2\sigma^4\kappa^4)}{3456\lambda^6\kappa^4\sigma^4}\theta^3+\dots
\end{aligned}
$$

Literaturverzeichnis

[1] J. M. Maldacena, *The large N limit of superconformal field theories and supergravity*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998), 231-252, DOI 10.1023/A:1026654312961.

[2] E. Witten, *Anti-de Sitter space and holography*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998), 253-291, available at `arXiv:hep-th/9802150`.

[3] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and Polyakov Alexander M., *Gauge theory correlators from noncritical string theory*, Phys.Lett. **B428** (1998), 105-114, DOI 10.1016/S0370-2693(98)00377-3.

[4] J. Erdmenger, N. Evans, I. Kirsch, and E. Threlfall, *Mesons in Gauge/Gravity Duals - A Review*, Eur. Phys. J. **A35** (2008), 81-133, DOI 10.1140/epja/i2007-10540-1.

[5] J. D. Bekenstein, *Black holes and entropy*, Phys. Rev. **D7** (1973), 2333-2346, DOI 10.1103/PhysRevD.7.2333.

[6] S. W. Hawking, *Particle Creation by Black Holes*, Commun. Math. Phys. **43** (1975), 199-220, DOI 10.1007/BF02345020.

[7] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley-VCH, Weinheim, 2008.

[8] H. Baer and X. Tata, *Weak Scale Supersymmetry*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[9] R. Schulze and B. Kämpfer, *Cold quark stars from hot lattice QCD* (2009), available at `arXiv:nucl-th/0912.2827`.

[10] ATLAS Collaboration, *Observation of a Centrality-Dependent Dijet Asymmetry in Lead-Lead Collisions at* $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}} = 2.76$ TeV *with the ATLAS Detector at the LHC*, Phys. Rev. Lett. **105** (2010), 252303, DOI 10.1103/PhysRevLett.105.252303.

[11] Lyndon Evans and Philip Bryant, *LHC Machine*, Journal of Instrumentation **3** (2008), no. 08, S08001.

[12] R. A. Janik, *The dynamics of quark-gluon plasma and AdS/CFT*, Lect. Notes Phys. **828** (2011), 147-181, DOI 10.1007/978-3-642-04864-7_5.

[13] K. Kajantie, J. Louko, and T. Tahkokallio, *Gravity dual of 1+1 dimensional Bjorken expansion*, Phys. Rev. **D76** (2007), 106006, DOI 10.1103/PhysRevD.76.106006.

[14] H. Stephani, *Relativity - An introduction to Special and General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[15] J. Nash, *Analyticity of the solutions of implicit function problems with analytic data*, Ann. of Math. **84** (1966), 345–355.

[16] G. Fischer, *Lineare Algebra - Eine Einführung für Studienanfänger*, Vieweg, Wiesbaden, 2005.

[17] J. L. Petersen, *Introduction to the Maldacena conjecture on AdS/CFT*, Int. J. Mod. Phys. **A14** (1999), 3597-3672, DOI 10.1142/S0217751X99001676.

[18] K. Becker, M. Becker, and J. H. Schwarz, *String Theory and M-Theory - a modern introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[19] K. Skenderis, *Lecture notes on holographic renormalization*, Class. Quant. Grav. **19** (2002), 5849-5876, DOI 10.1088/0264-9381/19/22/306.

[20] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, 1995.

[21] L. Susskind and E. Witten, *The holographic bound in anti-de Sitter space* (1998), available at `arXiv:hep-th/9805114`.

[22] L. P. Csernai, *Introduction To Relativistic Heavy Ion Collisions*, Wiley, 1994.

[23] D. H. Rischke, *Fluid dynamics for relativistic nuclear collisions* (1998), available at `arXiv:nucl-th/9809044`.

[24] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik Band VI, Hydrodynamik*, Akademie-Verlag GmbH, Berlin, 1991.

[25] P. Romatschke, *Relativistic Viscous Fluid Dynamics and Non-Equilibrium Entropy*, Class. Quant. Grav. **27** (2010), 025006, DOI 10.1088/0264-9381/27/2/025006.

[26] P. Kovtun, D. T. Son, and A. O. Starinets, *Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics*, Phys. Rev. Lett. **94** (2005), 111601, DOI 10.1103/PhysRevLett.94.111601.

[27] T. Schafer and D. Teaney, *Nearly Perfect Fluidity: From Cold Atomic Gases to Hot Quark Gluon Plasmas*, Rept. Prog. Phys. **72** (2009), 126001, DOI 10.1088/0034-4885/72/12/126001.

[28] K. J. Eskola, K. Kajantie, and P. V. Ruuskanen, *Hydrodynamics of nuclear collisions with initial conditions from perturbative QCD*, Eur. Phys. J. **C1** (1998), 627-632, DOI 10.1007/s100520050111.

[29] C. R. Graham, *Volume and area renormalizations for conformally compact Einstein metrics* (1999), available at `arXiv:math/9909042`.

[30] S. de Haro, S. N. Solodukhin, and K. Skenderis, *Holographic reconstruction of spacetime and renormalization in the AdS/CFT correspondence*, Commun. Math. Phys. **217** (2001), 595-622, DOI 10.1007/s002200100381.

[31] S. S. Gubser, *Symmetry constraints on generalizations of Bjorken flow*, Phys. Rev. **D82** (2010), 085027, DOI 10.1103/PhysRevD.82.085027.

[32] J. D. Bjorken, *Highly Relativistic Nucleus-Nucleus Collisions: The Central Rapidity Region*, Phys. Rev. **D27** (1983), 140-151, DOI 10.1103/PhysRevD.27.140.

[33] W. Hackbusch, H. R. Schwarz, and E. Zeidler, *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*, Teubner Verlag, Wiesbaden, 2003.

[34] STAR Collaboration, *Elliptic flow in Au + Au collisions at* $\sqrt{s_{NN}} = 130\,GeV$, Nucl. Phys. **A698** (2002), 193-198, DOI 10.1016/S0375-9474(01)01364-1.

[35] ALICE Collaboration, *Elliptic flow of charged particles in Pb-Pb collisions at 2.76 TeV*, Phys. Rev. Lett. **105** (2010), 252302, available at `arXiv:nucl-ex/1011.3914`.

[36] ALICE Collaboration, *Higher harmonic anisotropic flow measurements of charged particles in Pb-Pb collisions at* $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ *TeV*, Phys.Rev.Lett. **107** (2011), 032301, available at `arXiv:nucl-ex/1105.3865`.

[37] U. W. Heinz, J. S. Moreland, and H. Song, *Viscosity from elliptic flow: the path to precision*, Phys. Rev. **C80** (2009), 061901, DOI 10.1103/PhysRevC.80.061901.

[38] M. Luzum and P. Romatschke, *Conformal Relativistic Viscous Hydrodynamics: Applications to RHIC results at* $\sqrt{s_{NN}} = 200$ *GeV*, Phys. Rev. **C78** (2008), 034915, DOI 10.1103/PhysRevC.78.034915.

[39] W. Kühnel, *Differentialgeometrie – Kurven - Flächen - Mannigfaltigkeiten*, Vieweg, Wiesbaden, 2008.

[40] G. Baym, B. L. Friman, J. P. Blaizot, M. Soyeur, and W. Czyz, *Hydrodynamics of Ultrarelativistic Heavy Ion Collisions*, Nucl. Phys. **A407** (1983), 541-570, DOI 10.1016/0375-9474(83)90666-8.

[41] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming Vol. 1 - Fundamental Algorithms*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1973.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Falk Wunderlich
Dresden, am 04.11.2011

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen, denen zu danken, ohne deren Unterstützung ich diese Arbeit nicht hätte verfassen können.

Darum gilt mein Dank zunächst Prof. Dr. Rüdiger Schmidt für die freundliche Aufnahme in das Institut für Theoretische Physik.

Ganz besonders möchte ich jedoch Herrn Prof. Dr. Burkhard Kämpfer danken, unter dessen geduldiger Anleitung diese Arbeit entstanden ist. In zahlreichen Diskussionen konnte er mein Verständnis für Hydrodynamik, kinetische Theorie, die AdS/CFT-Korrespondenz und Schwerionenstöße erheblich verbessern. Indem er mir die Möglichkeit gab, sowohl vor als auch während der Diplomarbeit die Konferenz TORIC zu besuchen, konnte ich einen Überblick über das Forschungsfeld der theoretischen Beschreibung relativistischer Schwerionenkollisionen bekommen.

Bei Herrn Prof. Dr. Dominik Stöckinger möchte ich mich für die Übernahme des Zweitgutachtens bedanken.

Ich möchte mich auch bei der gesamten Theorie-Gruppe für vielfältige Unterstützung bedanken: Bei Dr. Henry Schade für die geduldige Beantwortung unendlich vieler Fragen zu LaTeX, gnuplot, ART und das kritische Korrekturlesen. Bei Daniel Seipt für Beantwortung selbst kniffliger Fragen über Linux, Symmetrietransformationen, Propagatoren, Freiheitsgrade von Quantenfeldtheorien u.v.a.m. Ebenso möchte ich meinem Ko-Diplomanden Tobias Nousch für zahlreiche Gespräche und Ermunterungen danken. Für die gute Zusammenarbeit und viele Tipps bei der Arbeit mit MAPLE möchte ich mich bei Marco Viebach bedanken. Ebenso gebührt ihm mein Dank für seine maßgebliche Hilfe bei der Behandlung von Krümmungsskalaren, die zum Auffinden von Singularitäten geeignet sind. Auch bei Dr. Robert Schulze möchte ich mich für seine Hilfe bei dem Verständnis der Charakteristiken und für das Beheben von Computer-Problemen bedanken.

Doch nicht nur an der Universität habe ich Unterstützung erfahren. Viel Dank geht auch an meine Eltern, ohne die mein Studium sicher anders verlaufen wäre. Sie haben stets an mich geglaubt und mir nicht nur finanziell, sondern auch tatkräftig zur Seite gestanden.

Am meisten von allen möchte ich mich aber bei meinem lieben Schatz Sarah bedanken. Immer hat sie mir liebevoll zur Seite gestanden und hat dafür gesorgt, dass ich jeden Tag mit einem Lächeln beginnen und mit einem Kuss beenden konnte. Für ihre Sorge um mich, wenn ich krank war und das Sicherstellen meiner Nahrungsversorgung in der Endphase der Diplomarbeit, das Korrekturlesen dieser Arbeit sowie zahllose gemeinsame

Aktivitäten, Diskussionen, Albernheiten und Zärtlichkeiten möchte ich ihr danken. Sarah, ich liebe dich!