

**Paarerzeugung:
Teilchendynamik in elektromagnetischen
Feldern**

Diplomarbeit
zur Erlangung des akademischen Grades
Diplom-Physiker

vorgelegt von

Andreas Otto

geboren am 19. November 1987 in Lichtenstein

Institut für Theoretische Physik
Fachrichtung Physik
Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften
der Technischen Universität Dresden
2013

1. Gutachter: Prof. Dr. Burkhard Kämpfer

2. Gutachter: PD. Dr. Günter Plunien

Eingereicht am 1. August 2013

Kurzfassung

Das Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung der Erzeugung von Elektronen-Positronen-Paaren in elektromagnetischen Hintergrundfeldern, wie sie beispielsweise bei der Kollision zweier Laserstrahlen entstehen. Als Werkzeug dazu nutzen wir zum einen eine quantenkinetische Gleichung und zum anderen verallgemeinerte Volkov-Lösungen. Wir interessieren uns insbesondere für die Phasenraumstruktur der produzierten Teilchen und die Bedingungen, unter denen auch nach Abschalten des Feldes eine sogenannte Residualdichte verbleibt. Wir gewinnen zunächst analytische Resultate, die daraufhin mit numerischen Simulationen verglichen werden.

Abstract

The aim of this thesis is the investigation of electron-positron pair production in electromagnetic background fields, as they result for example from the collision of two laser beams. To this end we utilize a quantum kinetic equation as well as generalized Volkov solutions. We are especially interested in the phase space structure of the produced particles and the conditions, for which a so called residual density remains even after switching off the field. At first we derive analytical results, which we later compare to numerical simulations.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	Kinetische Gleichung	13
2.1	Bogoliubov-Transformation	13
2.2	Quasiteildichte und kinetische Gleichung	17
2.3	Niederdichte-Näherung und Schwinger-Limes	19
2.4	Problemstellung	21
2.4.1	Kinetische Gleichung in dimensionslosen Größen	23
2.4.2	Parameterlandschaft	24
2.5	Akkumulationsstruktur im Phasenraum	24
2.6	Höhere Schalen	27
2.7	Akkumulationszeiten	30
2.8	Dynamisch assistierter Schwinger-Effekt	33
3	Numerische Resultate	35
3.1	Floquet-Theorie	35
3.2	Entwicklung der Phasenraumverteilung	36
3.3	Evolution der Dichte	40
3.4	Langsames Ein- und Ausschalten	42
4	Untersuchungen von verallgemeinerten Volkov-Lösungen	47
4.1	Dirac- und Klein-Gordon-Gleichung	47
4.2	Volkov-Zustände	48
4.3	Verallgemeinerung auf mehrere ebene Wellen	51
4.4	Lösungsansatz	52
4.5	Lösung für konstante Kreuzfelder	54
4.6	Störungsreihe	55
5	Zusammenfassung und Ausblick	59
A	Zu verallgemeinerten Volkov-Lösungen	61
A.1	Explizite Transformationsabfolge für Schwerpunktssystem	61
A.2	Spinorkonventionen	64

A.3 Erster Korrekturterm in der Störungsreihe	65
B Die mathematische Seite der kinetischen Gleichung	67
B.1 Äquivalenz der Differentialgleichungen	67
B.2 Lösungsversuch mit einer Exponentialfunktion	69
B.3 Lösungsversuch mit einem Produktansatz	70
B.4 Analogie zu klassischer Mechanik	72
Bibliografie	73

1 Einleitung

Nach gegenwärtigem Kenntnisstand der Physik rühren alle Kräfte in der Natur von vier fundamentalen Wechselwirkungen her. Diese sind die Schwerkraft, der Elektromagnetismus, sowie die schwache und die starke Wechselwirkung. Dabei sind nur die ersten beiden dem Menschen im Alltag zugänglich, während letztere erst im subatomaren Bereich eine Rolle spielen. Die Schwerkraft wird durch Einsteins Gravitationstheorie, die allgemeine Relativitätstheorie beschrieben. Sie ist eine klassische Theorie, insofern sie keinerlei Quanteneffekte berücksichtigt, verändert aber unsere Vorstellung von Raum und Zeit radikal, noch wesentlich über ihren unmittelbaren Vorläufer, die spezielle Relativitätstheorie, hinausgehend. Dem gegenüber werden die drei anderen Kräfte durch sogenannte Quantenfeldtheorien beschrieben. Sie berücksichtigen also quantenmechanische Prinzipien, beruhen aber in ihrem Verständnis der Raumzeit auf der speziellen Relativitätstheorie. Darüber hinaus sind sie auch Eichtheorien, was bedeutet, dass die Wechselwirkung mit Hilfe von Austauscheteilchen, den Eichbosonen, übertragen wird, deren Eigenschaften durch eine innere Symmetrie festgelegt werden.

Die erste konsistente und erfolgreiche Eich- und Quantenfeldtheorie war jene, die den Elektromagnetismus beschreibt. Sie wird Quantenelektrodynamik oder kurz QED genannt und ihr Eichboson ist besser unter dem Namen Photon bekannt. Sie diente als Prototyp für die Entwicklung aller weiteren Theorien dieses Typus, die mit der Aufstellung und experimentellen Verifikation des Standardmodells ihren vorläufigen Höhepunkt fand.

Die QED entstand bald nach der Entwicklung der Quantenmechanik und der Formulierung ihrer Prinzipien mit den ersten Versuchen Diracs, das elektromagnetische Feld zu quantisieren. Doch bei Rechnungen zu konkreten Problemen traten unendliche Ergebnisse auf, sogenannte Divergenzen. Der entscheidende Durchbruch gelang Tomonaga, Schwinger und Feynman in den vierziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts mit der Entwicklung der Renormierung. Durch dieses Verfahren ließen sich die Divergenzen systematisch beseitigen und analytische Vorhersagen treffen, die mit bemerkenswerter Genauigkeit mit den Messergebnissen übereinstimmen¹.

Die genauesten und bekanntesten Vorhersagen der QED, wie der g -Faktor des Elektrons oder die Lamb-Verschiebung, stammen aus störungstheoretischen Berechnungen, bei denen eine Entwicklung in der Elektronenladung e durchgeführt wird, die die Stärke beschreibt, mit der Photonen an Elektronen und Positronen koppeln [Akh65, Sch61]. Diese perturbative

¹Ein lesenswerter Bericht über die Entstehung der QED aus dem Blickwinkel eines Protagonisten ist z.B. Feynmans Nobelvortrag [Fey65].

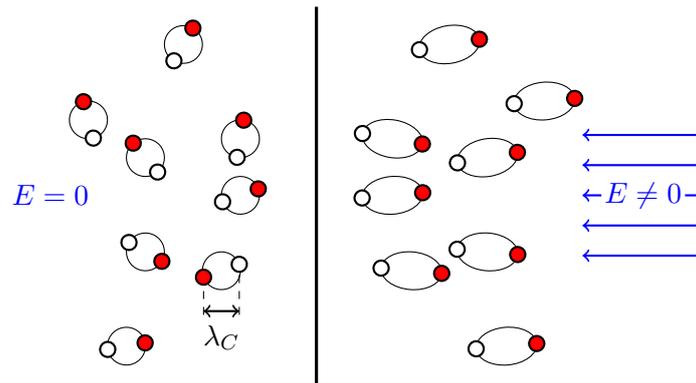


Abbildung 1.1: Illustration der Vakuumpolarisation nach [Sei12]. Im QED-Vakuum ohne äußeres elektrisches Feld, links abgebildet, bilden sich aufgrund der Vakuumschwankungen auf der Größenordnung der Compton-Wellenlänge λ_C virtuelle Dipole aus Elektronen und Positronen. Bei angelegtem Feld, rechts abgebildet, richten sich diese virtuellen Dipole aus und polarisieren so das Vakuum.

Methode ist für starke elektromagnetische Hintergrundfelder nicht mehr anwendbar. Das war lange Zeit in der Hinsicht kein Problem, dass solche Felder in Experimenten, außer in der unmittelbaren Nähe hochgeladener Atomkerne, nicht zu realisieren waren. Doch auch aus rein theoretischer Sicht ist das nicht-perturbative Verhalten von Quantenfeldtheorien sowohl höchst anspruchsvoll als auch interessant.

In den letzten Jahren ist zudem mit der Entwicklung von Lasern mit extrem hohen Intensitäten, wie der „Extreme Light Infrastructure“ (ELI) [ELI] oder des „European X-Ray Free-Electron Lasers“ (XFEL) [XFE], die Untersuchung von neuartigen Phänomenen in greifbare Nähe gerückt [Hei11, Mar09, Bel08, Gie08]. Dazu gehören z.B. die Photon-Photon-Streuung. Klassisch wechselwirkt Licht nicht mit sich selbst, doch bei genügend hohen Feldstärken können zwei Photonen aneinander streuen [Hal33, Eul35]. Diese grundlegende Vorhersage der QED ist noch unbeobachtet. Ein möglicher Test wäre zum Beispiel eine Neuauflage des berühmten Doppelspaltexperiments: Zwei ultrastarke Laser werden parallel zueinander in kurzem Abstand ausgerichtet und ein Probelaser senkrecht zu diesen. Stimmt die Vorhersage, so sollte der Probelaser ein Interferenzmuster erzeugen [Kin13b, Kin13a, DP06, Lun06]. Auch kann man das Vakuum durch einen starken Laser doppelbrechend machen, ähnlich dem Kalkspat [Kle64, Hei06].

Ebenso gibt es Überlegungen, Elektronen mittels kurzer Laserpulse großen Beschleunigungen auszusetzen. Da nach dem Korrespondenzprinzip der allgemeinen Relativitätstheorie Beschleunigung und Gravitation äquivalent sind, könnte hierin ein Zugang zu QED-Effekten in gekrümmten Raumzeiten liegen, z.B. zum Test des Unruh-Effektes [Sch09].

Der Effekt jedoch, der in dieser Arbeit untersucht werden soll, ist die Paarerzeugung oder auch Paarproduktion. Darunter versteht man im allgemeinen Fall jeden Prozess, bei dem Photonen Elektronen-Positronen-Paare erzeugen. Deren einfachster ist der sogenannte

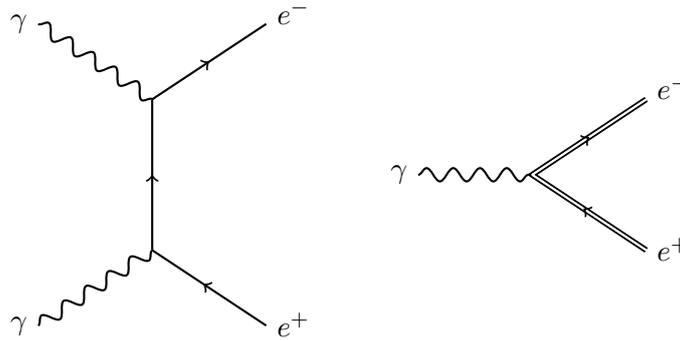


Abbildung 1.2: Feynman-Diagramme für den Breit-Wheeler-Prozess (links) und den stimulierten Breit-Wheeler-Prozess (rechts).

Breit-Wheeler-Prozess [Bre34]: Zwei Photonen kollidieren und erzeugen so ein e^-e^+ -Paar. Dieser Fall lässt sich mit der Störungstheorie behandeln. Beim stimulierten Breit-Wheeler-Prozess hingegen trifft ein einzelnes Photon auf einen Laser, also einen nahezu kohärenten Zustand aus vielen Photonen und zerfällt in ein e^-e^+ -Paar [Rei62]. Diese beiden Prozesse werden in einer modernen Sprache durch die beiden Feynman-Diagramme in Abbildung 1.2 beschrieben. Der Laser wird dabei als klassisches Hintergrundfeld angenommen. Man kann seinen Einfluss vollständig berücksichtigen, indem man für die Fermionen anstatt der freien Wellenfunktionen und Propagatoren die sogenannten Volkov-Lösungen verwendet [Fra91]. In der Tat ist das Analogon des stimulierten Breit-Wheeler-Prozesses im Vakuum kinematisch verboten, und wird erst mit dem Laser als Hintergrundfeld möglich.

Die beiden Prozesse nutzen reelle Photonen. Das ist aber nicht nötig, denn auch ein statisches homogenes elektrisches Feld kann Paare erzeugen. Diese Entdeckung geht auf die Arbeiten von Sauter, Euler, Heisenberg und Schwinger zurück [Sau31, Hei36, Sch51] und wird nach letzterem Schwinger-Effekt genannt. Er geschieht über die Absorption vieler virtueller Photonen des Feldes und dieses Verhalten ist nicht mehr perturbativ beschreibbar. Für die Wahrscheinlichkeit P der Emission eines Paares pro Volumen und Zeit in einem elektrischen Feld der Stärke E gilt danach $P \propto E^2 \exp(-\pi E_c/E)$. Dabei ist $E_c = m^2/e$, mit m der Elektronenmasse und e dessen Ladung, die sogenannte Sauter-Schwinger-Feldstärke, oder auch kritische Feldstärke. In SI-Einheiten beträgt sie $E_c = 1,3 \cdot 10^{18}$ V/m. Sie ist die fundamentale Skala der QED, auf der nichtperturbative Effekte berücksichtigt werden müssen. Anschaulich lässt sich dieser Effekt als das Tunneln eines Teilchens aus dem besetzten Dirac-See in das Kontinuum positiver Energie deuten, wie in Abbildung 1.3 dargestellt.

Die ersten Vorschläge, eine Variante des Schwinger-Effekt direkt zu beobachten, beruhten auf Schwerionenkollisionen. Schießt man zwei Atomkerne hoher Ordnungszahl aufeinander verschmelzen sie kurzzeitig zu einem Kern mit einer so großen Protonenzahl, dass der tiefste gebundene Zustand eine Bindungsenergie $> 2m$ aufweist. Ist er unbesetzt, kommt es zur Paarzeugung. Das dabei entstehende Elektron besetzt den vormals unbesetzten Zustand,

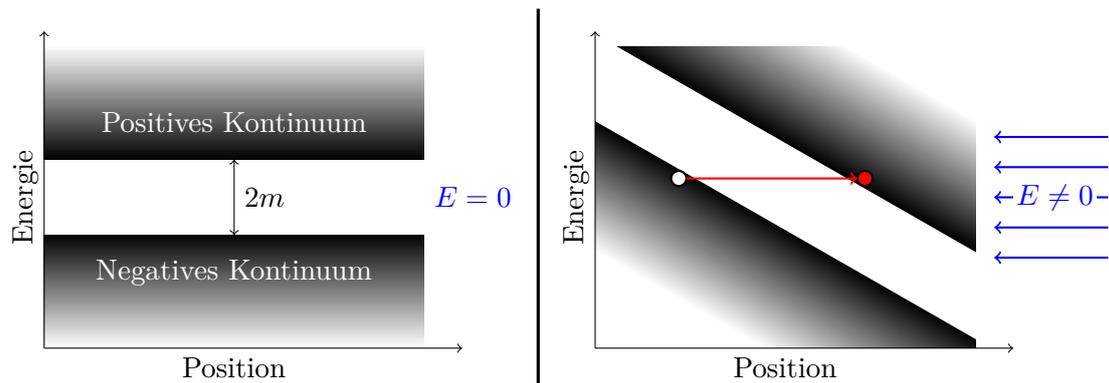


Abbildung 1.3: Das Energiespektrum für Dirac-Teilchen ohne äußeres elektrisches Feld (links) und mit (rechts) nach [Sei12]. Der Abstand der beiden Bänder ist gerade die doppelte Ruhemasse des Elektrons $2m$. Das angelegte Feld verkippt die Bänder und ermöglicht das Tunneln eines Teilchens aus dem negativen ins positive Kontinuum, was sich als Produktion eines e^-e^+ -Paares äußert.

wohingegen das Positron sich ungebunden wegbewegt und so detektiert werden kann, wodurch sich der Effekt nachweisen ließe [Mü76, Rei77, Raf78]. Aus verschiedenen Gründen, aber vor allem weil sich die Kerne wieder voneinander trennen, bevor der Paarproduktionsprozess ablaufen kann, ist dieser Nachweis noch nicht gelungen [Gre98].

Teilchenerzeugung kann auch über gänzlich andere als QED-Effekte ablaufen, beispielsweise als Hawking-Strahlung am Horizont eines schwarzen Loches [Haw74]. Ebenso ist die Möglichkeit aufgezeigt worden, dass durch die bloße inflationäre Ausdehnung des Universums Materie entstehen kann [Bas92]. Für diese beiden Fälle ist die Gravitation die ausschlaggebende Wechselwirkung. In [Mic13] wird Quark-Antiquark-Erzeugung mittels einer chiralen Massenverschiebung analysiert, wobei hier die Quantenchromodynamik, welche die starke Wechselwirkung beschreibt, die treibende Kraft ist. Wir erwähnen diese Effekte aber bloß nebenbei, weil unser Augenmerk auf Verallgemeinerungen des Schwinger-Effektes liegt. Dem Interessierten sei der Übersichtsartikel von Ruffini et al. nahegelegt, der einen Überblick über die verschiedenen Bereiche der Paarproduktion bietet [Ruf10].

Sowohl den Breit-Wheeler-Prozess als auch den Schwinger-Effekt kann man als Grenzfälle eines allgemeineren Vorgangs auffassen. Man stelle sich zwei starke Laser vor, die aufeinander gerichtet werden. Das ist zum einem Breit-Wheeler sehr ähnlich, nur dass jetzt an Stelle von zwei einzelnen Photonen gleich sehr viele kohärent kollidieren. Zum anderen bildet sich, wie später ausführlicher dargestellt, eine stehende Welle, in deren Schwingungsbäuchen man ein elektrisches Feld vorfindet, das auf der Skala der Compton-Wellenlänge homogen ist, allerdings nicht mehr statisch. Das ist eine natürliche Verallgemeinerung des Schwinger-Effektes.

Die möglichen Herangehensweisen an dieses Problem sind zum einen die Verallgemeinerung der Volkov-Lösungen auf den Fall zweier Laser und die Erweiterung der Beschreibung

der Paarerzeugung nach Schwinger auf zeitabhängige elektrische Felder. Das soll in der vorliegenden Arbeit durchgeführt werden. Wir beginnen mit dem dynamischen Schwinger-Effekt, der schon in einigen anderen Arbeiten untersucht wurde, und begeben uns danach auf die Suche nach verallgemeinerten Volkov-Lösungen, für die es noch wenig zufriedenstellende Resultate gibt.

In Kapitel 2 untersuchen wir den dynamischen Schwinger-Effekt. Dazu leiten wir eine kinetische Gleichung her, die die Zahl der produzierten Paare beschreibt. Mit ihrer Hilfe gewinnen wir analytische Resultate über die Phasenraumverteilung produzierter Teilchen in Hintergrundfeldern und untersuchen das Zeitverhalten und die Abhängigkeit von weiteren Parametern. Wir gehen außerdem der Frage nach, ob die Teilchen unter realistischen Bedingungen beobachtbar sind, und wie man die Produktion verstärken kann.

Kapitel 3 dient der Bestätigung der unter bestimmten Näherungen erzielten Ergebnisse aus Kapitel 2 mittels numerischer Simulationen. Außerdem wollen wir hier mit einigen Abbildungen die Paarproduktion anschaulicher machen.

In Kapitel 4 suchen wir nach verallgemeinerten Volkov-Lösungen. Dazu stellen wir zuerst die Theorie der gewöhnlichen Volkov-Lösungen dar. Diese sind aber allein zur Paarproduktion ungeeignet und bedürfen einer Erweiterung in Form allgemeinerer Hintergrundfelder.

Kapitel 5 schließlich fasst die Ergebnisse nocheinmal zusammen und bringt sie miteinander in einen Kontext.

2 Kinetische Gleichung

Als einfachste mögliche Verallgemeinerung des Schwinger-Effektes wollen wir das elektrische Feld nicht mehr statisch, sondern zeitabhängig annehmen. Dementsprechend sprechen wir vom dynamischen Schwinger-Effekt. Das Instrument, das uns zur Untersuchung dient, ist eine quantenkinetische Gleichung. Sie wurde unter anderem von Schmidt et al. für diese spezifische Fragestellung abgeleitet [Sch98]. Die theoretischen Grundlagen, besonders zur Bogoliubov-Transformation, sind in den Monographien [Mos94, Bir82] abgehandelt. Wir wollen diesen Prototyp einer einfachen kinetischen Gleichung als erstes herleiten um mit ihr danach die Dynamik der Paarproduktion zu untersuchen. Die genaue Problemstellung formulieren wir erst, nachdem wir uns durch die Herleitung mit den Zusammenhängen vertraut gemacht haben.

Wir nehmen für das gesamte Kapitel ein homogenes isotropes elektrisches Feld an, d.h. $\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{E}(t) = E(t)\mathbf{e}_z$. Das zugehörige A -Feld legen wir über die Coulomb-Eichung fest, d.h. $A^0 = 0$, $\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(t) = A(t)\mathbf{e}_z$ und es gilt $\mathbf{E}(t) = -\dot{\mathbf{A}}(t)$. Dieses elektromagnetische Feld erfüllt die Maxwell-Gleichungen nicht, aber wir können es uns als Modell für ein realistisches Feld denken, wie wir später besprechen. Wir nehmen weiterhin an, dass es ein klassisches Hintergrundfeld ist, also die Elektronen und Positronen nicht auf das A -Feld zurück-, noch untereinander wechselwirken. Unter diesen Bedingungen lässt sich der volle Hamilton-Operator der QED diagonalisieren, wodurch die Dynamik effektiv gelöst wird.

2.1 Bogoliubov-Transformation

Die Ziele dieses Abschnittes sind die Diagonalisierung des Hamilton-Operators mittels einer Bogoliubov-Transformation und die Herleitung einer Differentialgleichung für die entsprechenden Bogoliubov-Koeffizienten. Wir folgen dabei [Heb11] und [Koh12a], ohne aber jede Rechnung explizit zu wiederholen. Hingegen soll genauer auf die Form der Nichtdiagonalterme des Hamilton-Operators und deren Verschwinden eingegangen werden, da dieser Sachverhalt sowohl in diesen beiden Arbeiten, als auch in dem Originalartikel von Schmidt et al. [Sch98] nur unzureichend erklärt ist.

Von der Lagrange-Dichte für Dirac-Teilchen in einem externen Feld A ,

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m) \Psi, \quad (2.1)$$

geht man zur Hamilton-Dichte

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{\Psi} - \mathcal{L} = \bar{\Psi} (-i\gamma \nabla + e\mathbf{A} + m) \Psi \quad (2.2)$$

über. Dabei ist der kanonische Feldimpuls definiert als $\Pi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\Psi}$. Jetzt benutzt man die spezielle Form des Potentials in Coulomb-Eichung, $A = (0, \mathbf{A}(t))$. Deswegen lässt sich Ψ als $\Psi(t, \mathbf{x}) = \int d^3p/(2\pi)^3 \psi(\mathbf{p}, t)e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}$ schreiben und die Dirac-Gleichung vereinfacht sich zu der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\left(i\gamma^0 \partial_t - \gamma \boldsymbol{\pi}(\mathbf{p}, t) - m \right) \psi(\mathbf{p}, t) = 0 \quad (2.3)$$

mit dem Feldimpuls $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p} - e\mathbf{A}(t)$. Der Hamilton-Operator ist in dieser Zerlegung

$$H(t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \bar{\psi}(\mathbf{p}, t) (\gamma \boldsymbol{\pi}(\mathbf{p}, t) + m) \psi(\mathbf{p}, t). \quad (2.4)$$

Gleichung (2.3) löst man über die iterierte Form, d.h. einen Ansatz

$$\psi = (i\gamma^0 \partial_t - \gamma \boldsymbol{\pi} + m) \eta, \quad (2.5)$$

durch den man

$$\left(\partial_t^2 + \boldsymbol{\pi}^2(\mathbf{p}, t) + m^2 + ie\gamma^0 \gamma \mathbf{E}(t) \right) \eta(\mathbf{p}, t) = 0 \quad (2.6)$$

für η erhält. Dies entspricht der auf ein rein zeitabhängiges A -Feld spezialisierten Form von Gl. (4.4). Wir definieren

$$\omega(\mathbf{p}, t) = \sqrt{\boldsymbol{\pi}^2(\mathbf{p}, t) + m^2} \quad (2.7)$$

und fordern, dass \mathbf{A} und \mathbf{E} entlang der z -Achse zeigen, $\mathbf{E}(t) = E(t)\mathbf{e}_z$ und $\mathbf{A}(t) = A(t)\mathbf{e}_z$. Damit kann man η in einer Eigenbasis R_r der Matrix $\gamma^0 \gamma^3$ zerlegen:

$$\eta(\mathbf{p}, t) = \sum_{r=1}^4 \chi_r(\mathbf{p}, t) R_r. \quad (2.8)$$

Die Spinoren R_r haben dabei den Eigenwert $+1$ für $r = 1, 2$ und -1 für $r = 3, 4$. Somit zerfällt Gl. (2.6) in vier entkoppelte skalare Gleichungen,

$$\begin{aligned} \left(\partial_t^2 + \omega^2(\mathbf{p}, t) + ieE(t) \right) \chi_{1/2}(\mathbf{p}, t) &= 0, \\ \left(\partial_t^2 + \omega^2(\mathbf{p}, t) - ieE(t) \right) \chi_{3/4}(\mathbf{p}, t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Diese haben prinzipiell acht linear unabhängige Lösungen, die wir auf die benötigten vier

reduzieren, indem wir nur die Lösungen der ersten beiden Gleichungen verwenden. Hier sind außerdem die Gleichungen für $r = 1, 2$ und ebenso für $3, 4$ gleich, d.h. die Dynamik ist nicht sensitiv auf den Spin. Das ist auch physikalisch klar, da kein externes Magnetfeld vorhanden ist. Somit bleibt eine Gleichung zweiter Ordnung für die skalaren Modenfunktionen, die zwei linear unabhängige Lösungen, χ^+ zu positiver und χ^- zu negativer Energie, besitzt. Diese beiden Lösungen setzt man in Gl. (2.8) ein, und das resultierende η in Gl. (2.5). Dadurch erhält man die linear unabhängigen Basisspinoren als Lösung der Dirac-Gleichung:

$$\begin{aligned} u_r(\mathbf{p}, t) &= \left(i\gamma^0 \partial_t - \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\pi}(\mathbf{p}, t) + m \right) \chi^+(\mathbf{p}, t) R_r, \\ v_r(-\mathbf{p}, t) &= \left(i\gamma^0 \partial_t - \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\pi}(\mathbf{p}, t) + m \right) \chi^-(\mathbf{p}, t) R_r. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Mit ihnen schreibt sich die allgemeine Lösung für den Feldoperator ψ als

$$\psi(\mathbf{p}, t) = \sum_{r=1}^2 \left(c_r(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}, t) + d_r^\dagger(-\mathbf{p}) v_r(-\mathbf{p}, t) \right). \quad (2.11)$$

Dabei sind c_r und d_r fermionischen Operatoren für Elektronen respektive Positronen, die die Antikommutationsrelationen

$$\begin{aligned} \{c_r(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{q})\} &= (2\pi)^3 \delta_{rs} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \\ \{d_r(\mathbf{p}), d_s^\dagger(\mathbf{q})\} &= (2\pi)^3 \delta_{rs} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

erfüllen. Alle nicht aufgeführten Antikommutatoren verschwinden. Man kann allerdings ebenso gut die Zeitabhängigkeit auf die Operatoren c_r und d_r „umverteilen“. Das erreicht man mittels einer Bogoliubov-Transformation, die durch

$$\begin{pmatrix} C_r(\mathbf{p}, t) \\ D_r^\dagger(-\mathbf{p}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\mathbf{p}, t) & -\beta^*(\mathbf{p}, t) \\ \beta(\mathbf{p}, t) & \alpha^*(\mathbf{p}, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_r(\mathbf{p}) \\ d_r^\dagger(-\mathbf{p}) \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

gegeben ist. Die Transformationsmatrix soll dabei unitär sein, was die Bedingung $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ für die Koeffizienten impliziert. Dadurch erfüllen C_r und D_r dieselben Antikommutationsrelationen wie c_r und d_r . Also sind sie richtige fermionische Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren. Man kann ψ nach diesen Operatoren entwickeln:

$$\psi(\mathbf{p}, t) = \sum_{r=1}^2 \left(C_r(\mathbf{p}, t) U_r(\mathbf{p}, t) + D_r^\dagger(-\mathbf{p}, t) V_r(-\mathbf{p}, t) \right). \quad (2.14)$$

Damit die beiden Zerlegungen (2.11) und (2.14) zur gleichen Wellenfunktion ψ führen, müssen die neuen Basisspinoren, U_r und V_r , mit den alten, u_r und v_r , gerade über die inverse

Bogoliubov-Transformation zusammenhängen:

$$\begin{pmatrix} U_r(\mathbf{p}, t), & V_r(-\mathbf{p}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_r(\mathbf{p}), & v_r(-\mathbf{p}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^*(\mathbf{p}, t) & \beta^*(\mathbf{p}, t) \\ -\beta(\mathbf{p}, t) & \alpha(\mathbf{p}, t) \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Das mag als überflüssige Verkomplizierung erscheinen, doch der entscheidende Trick ist jetzt eine geeignete Wahl der U_r und V_r , durch die der Hamilton-Operator diagonal in C_r und D_r wird, d.h. nur noch Terme $\sim C_r^\dagger C_r$ und $\sim D_r D_r^\dagger$ enthält. Um das einzusehen, setzen wir (2.14) in (2.4) ein und erhalten

$$\begin{aligned} H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_{r,s} & \left[C_r^\dagger C_s \bar{U}_r(\gamma\boldsymbol{\pi} + m) U_s + D_r D_s^\dagger \bar{V}_r(\gamma\boldsymbol{\pi} + m) V_s \right. \\ & \left. + C_r^\dagger D_s^\dagger \bar{U}_r(\gamma\boldsymbol{\pi} + m) V_s + D_r C_s \bar{V}_r(\gamma\boldsymbol{\pi} + m) U_s \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Der Übersichtlichkeit halber sind die jeweiligen Argumente, \mathbf{p} und t , weggelassen. Da, wie bereits erwähnt, das Magnetfeld verschwindet, kann man für U_r und u_r sowie V_r und v_r dieselbe Spinstruktur annehmen. Man macht daher in Analogie zu (2.10) den Ansatz

$$\begin{aligned} U_r(\mathbf{p}, t) &= (\gamma^0 \omega(\mathbf{p}, t) - \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\pi}(\mathbf{p}, t) + m) \kappa^+(\mathbf{p}, t) R_r, \\ V_r(-\mathbf{p}, t) &= (-\gamma^0 \omega(\mathbf{p}, t) - \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\pi}(\mathbf{p}, t) + m) \kappa^-(\mathbf{p}, t) R_r \end{aligned} \quad (2.17)$$

mit den noch unbestimmten neuen Modenfunktionen κ^+ und κ^- . Die Richtigkeit dieses Ansatzes wollen wir am Beispiel eines Terms verifizieren:

$$\bar{U}_r(\gamma\boldsymbol{\pi} + m) V_s = \kappa^{+*} \kappa^- \bar{R}_r(\gamma^0 \omega - \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\pi} + m)(\boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\pi} + m)(-\gamma^0 \omega - \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\pi} + m) R_s. \quad (2.18)$$

Dieser Ausdruck muss Null werden, weil der ihm proportionale Ausdruck im Hamilton-Operator (2.16) zu Nichtdiagonaltermen führt. Man erhält in der Tat für den Term zwischen \bar{R}_r und R_s in der vorigen Gleichung:

$$\begin{aligned} & (\gamma^0 \omega - \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\pi} + m)(\boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\pi} + m)(-\gamma^0 \omega - \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\pi} + m) \\ &= (\omega^2 + \gamma^0 \omega \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\pi} + m \gamma^0 \omega)(-\gamma^0 \omega - \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\pi} + m) \\ &= \gamma^0 \omega (\gamma^0 \omega + \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\pi} + m)(-\gamma^0 \omega - \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\pi} + m) = \gamma^0 \omega (m^2 - (\gamma^0 \omega + \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\pi})^2) \\ &= \gamma^0 \omega (-\omega^2 + \boldsymbol{\pi}^2 + m^2) = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Durch geeignete Wahl¹ von κ^+ und κ^- bringt man den Hamilton-Operator auf die Form

$$H(t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_r \omega(\mathbf{p}, t) \left(C_r^\dagger(\mathbf{p}, t) C_r(\mathbf{p}, t) - D_r(-\mathbf{p}, t) D_r^\dagger(-\mathbf{p}, t) \right) \quad (2.20)$$

¹Deren genaue Form findet sich in [Koh12a].

mit dem ω aus Gl. (2.7). Damit ist die Diagonalisierung abgeschlossen.

Nachdem u_r , v_r , U_r und V_r bestimmt sind, lassen sich die Bogoliubov-Koeffizienten α und β aus Gl. (2.15) berechnen. Um aber deren explizite Form angeben zu können, müsste man zuerst die Differentialgleichung (2.9) lösen und in Gl. (2.10) einsetzen. Es ist daher praktischer, für die Koeffizienten selbst eine Differentialgleichung herzuleiten², die die Grundlage für alles folgende bildet:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(\mathbf{p}, t) &= \frac{1}{2}Q(\mathbf{p}, t)e^{2i\Theta(\mathbf{p}, t)}\beta(\mathbf{p}, t), \\ \dot{\beta}(\mathbf{p}, t) &= -\frac{1}{2}Q(\mathbf{p}, t)e^{-2i\Theta(\mathbf{p}, t)}\alpha(\mathbf{p}, t).\end{aligned}\tag{2.21}$$

Wir nehmen an, dass das Feld zu einer Zeit t_0 eingeschaltet wird, also $E(t \leq t_0) = 0$ gilt. Dann müssen die transformierten Erzeuger und Vernichter gerade identisch mit denen für freie Elektronen und Positronen sein: $C_r(\mathbf{p}, t \leq t_0) = c_r(\mathbf{p})$ und entsprechend für D_r . Ein Vergleich mit Gl. (2.13) ergibt die Anfangsbedingungen $\alpha(\mathbf{p}, t_0) = 1$ und $\beta(\mathbf{p}, t_0) = 0$. Es verbleibt noch, die Definitionen der Größen Q und Θ anzugeben:

$$Q(\mathbf{p}, t) = \frac{eE(t)\epsilon_{\perp}}{\omega^2(\mathbf{p}, t)}, \quad \Theta(\mathbf{p}, t) = \int_{t_0}^t dt' \omega(\mathbf{p}, t').\tag{2.22}$$

Dabei ist $\epsilon_{\perp} = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_{\perp}^2} = \sqrt{m^2 + p_x^2 + p_y^2}$ der Anteil der kinetischen Energie senkrecht zur Feldrichtung. Man nennt Θ auch die dynamische Phase.

Wir können die Herleitung so zusammenfassen: Für den Spezialfall eines homogenen elektrischen Feldes kann man neue Operatoren einführen, in denen der Hamilton-Operator diagonal ist. Sie hängen mit den Erzeugern und Vernichtern freier Elektronen und Positronen über die Bogoliubov-Transformation (2.13) zusammen. Die Bogoliubov-Koeffizienten erfüllen dabei die Differentialgleichung (2.21). Dieses Ergebnis wird benutzt, um eine Observable zu definieren, die im Weiteren genauer untersucht wird.

2.2 Quasiteilchendichte und kinetische Gleichung

Wie erwähnt kann ein elektrisches Feld Teilchen erzeugen. Das nennt man auch den Zerfall des Vakuums und bedeutet quantenmechanisch, dass das Fock-Raum-Vakuum nicht invariant gegenüber der Zeitentwicklung ist. Wird das elektrische Feld bei t_0 eingeschaltet, so bezeichnen wir mit $|\Omega\rangle$ den Vakuumzustand vor dieser Zeit. Er ist durch $c_r(\mathbf{p})|\Omega\rangle = C_r(\mathbf{p}, t_0)|\Omega\rangle = d_r(\mathbf{p})|\Omega\rangle = D_r(\mathbf{p}, t_0)|\Omega\rangle = 0$ definiert. Entsprechend sei das Vakuum zur Zeit t , bezeichnet mit $|\Omega(t)\rangle$, durch $C_r(\mathbf{p}, t)|\Omega\rangle = D_r(\mathbf{p}, t)|\Omega\rangle = 0$ gegeben. Weil der Hamilton-Operator diagonal in C_r und D_r ist, ist dieses Vakuum auch gerade der

²Diese Herleitung ist langwierig; eine Darstellung ist in [Koh12a] zu finden.

Grundzustand des Systems zur Zeit t .

Wir betrachten die Anzahl erzeugter Elektronen mit Spin r und Impuls \mathbf{p} zur Zeit t , d.h. die Größe $f_r(\mathbf{p}, t) := \langle \Omega(t) | c_r^\dagger(\mathbf{p}) c_r(\mathbf{p}) | \Omega(t) \rangle$. Wir setzen für c_r und c_r^\dagger die (invertierte) Bogoliubov-Transformation (2.13) ein:

$$\begin{aligned} f_r(\mathbf{p}, t) &= \langle \Omega(t) | c_r^\dagger(\mathbf{p}) c_r(\mathbf{p}) | \Omega(t) \rangle \\ &= \langle \Omega(t) | \left(|\alpha|^2 C_r^\dagger C_r + \alpha \beta^* C_r^\dagger D_r^\dagger + \alpha^* \beta D_r C_r + |\beta|^2 D_r D_r^\dagger \right) | \Omega(t) \rangle \\ &= |\beta|^2 \langle \Omega(t) | D_r D_r^\dagger | \Omega(t) \rangle = |\beta(\mathbf{p}, t)|^2 \{ D_r(-\mathbf{p}, t), D_r^\dagger(-\mathbf{p}, t) \}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Der Antikommutator $\{D_r, D_r^\dagger\}$ hängt dabei von der Normierung ab. Er enthält den divergenten Faktor $\delta(\mathbf{0})$, der sich dadurch „beseitigen“ lässt, indem man sich das System in einem Kasten des Volumens V vorstellt, und die Dichte $f_r \rightarrow f_r/V$ im Limes $V \rightarrow \infty$ betrachtet. Summieren wir außerdem über den Spin r , erhalten wir eine Gleichung für die Quasiteilchendichte $f = \sum_r f_r$:

$$f(\mathbf{p}, t) = 2|\beta(\mathbf{p}, t)|^2. \quad (2.24)$$

Diese so definierte Größe lässt sich nur bei ausgeschaltetem Feld als Elektronendichte interpretieren. Für ein E mit $E(t \leq t_0) = E(t \geq t_\infty) = 0$ ergeben sich so drei Fälle:

1. $t \leq t_0$: Hierfür ist $f = 0$ und das Vakuum ist der Grundzustand der freien Theorie.
2. $t_0 < t < t_\infty$: Im Allgemeinen ist $f \neq 0$, beschreibt aber nicht die Dichte messbarer erzeugter Elektronen. Das Vakuum ist nicht mehr identisch dem Grundzustand der freien Theorie.
3. $t \geq t_\infty$: Je nach den Eigenschaften des E -Feldes kann f wieder auf Null absinken, oder eine sogenannte Residualdichte verbleiben. Diese lässt sich dann als Elektronen-Positronendichte interpretieren.

Physikalisch relevant ist demnach der Fall, wenn nach dem Ausschalten des Feldes $f \neq 0$ gilt. Ihm soll besondere Beachtung geschenkt werden.

Mit Hilfe von Gl. (2.21) und den Hilfsgrößen

$$u := -2 \operatorname{Re}(\alpha^* \beta e^{2i\Theta}) \quad \text{und} \quad v := 2 \operatorname{Im}(\alpha^* \beta e^{2i\Theta}) \quad (2.25)$$

kann man durch eine elementare Rechnung das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{f}(\mathbf{p}, t) \\ \dot{u}(\mathbf{p}, t) \\ \dot{v}(\mathbf{p}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Q(\mathbf{p}, t) & 0 \\ -Q(\mathbf{p}, t) & 0 & -2\omega(\mathbf{p}, t) \\ 0 & 2\omega(\mathbf{p}, t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\mathbf{p}, t) \\ u(\mathbf{p}, t) \\ v(\mathbf{p}, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Q(\mathbf{p}, t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

für f gewinnen. Es ist eine Form der quantenkinetischen Gleichung. Zusammen mit den Anfangsbedingungen $f(\mathbf{p}, t_0) = u(\mathbf{p}, t_0) = v(\mathbf{p}, t_0) = 0$ bestimmt es die Quasiteilchendichte vollständig. Die Lösung dieser Gleichung ist nicht auf einfache Integrale zurückführbar. Einige Lösungsversuche und weitere Bemerkungen zur mathematischen Seite der kinetischen Gleichung und der entsprechenden Gleichung für die Bogoliubov-Koeffizienten α und β finden sich im Anhang B.

Die über den Impulsraum abintegrierte Dichte

$$n(t) = \int d^3p f(\mathbf{p}, t) \quad (2.27)$$

hat die Einheit $\text{Energie}^3 = 1/\text{Länge}^3$ und beschreibt die Anzahl der erzeugten Elektronen/Positronen pro Volumen.

Eine ebenfalls nützliche Form von Gl. (2.26) ist die Integro-Differentialgleichung

$$\dot{f}(\mathbf{p}, t) = Q(\mathbf{p}, t) \int_{t_0}^t dt' Q(\mathbf{p}, t') [1 - f(\mathbf{p}, t')] \cos 2[\Theta(\mathbf{p}, t) - \Theta(\mathbf{p}, t')]. \quad (2.28)$$

Der sogenannte Pauli-Term $1 - f$ rührt dabei von der Fermi-Statistik der Elektronen her und realisiert das Paulische Ausschlussprinzip: Wie in Anhang B gezeigt, muss mit den angegebenen Anfangsbedingungen $0 \leq f(t) \leq 2$ gelten. Diese Form der Gleichung motiviert auch eine naheliegende Näherung. Für $f \ll 1$ kann man $1 - f \approx 1$ setzen. Mit dieser sogenannten Niederdichte-Näherung³ wollen wir uns im nächsten Abschnitt befassen.

2.3 Niederdichte-Näherung und Schwinger-Limes

Mit der beschriebenen Näherung $f \ll 1$ wird Gl. (2.28) zu

$$\dot{f}(\mathbf{p}, t) = Q(\mathbf{p}, t) \int_{t_0}^t dt' Q(\mathbf{p}, t') \cos 2[\Theta(\mathbf{p}, t) - \Theta(\mathbf{p}, t')]. \quad (2.29)$$

Sie lässt sich einfach integrieren und ihre Lösung lautet

$$f(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} \left| \int_{t_0}^t dt' Q(\mathbf{p}, t') e^{2i\Theta(\mathbf{p}, t')} \right|^2, \quad (2.30)$$

was man durch einfaches Differenzieren und Vergleich mit Gl. (2.28) verifiziert. Dieses Ergebnis lässt sich nutzen, um Schwingers berühmtes Ergebnis für den Fall eines statischen elektrischen Feldes [Sch51] leicht nachzuvollziehen.

³Im Englischen „Low-Density-Approximation“.

Hierzu setzen wir $A(t) = -E_0 t$ und entsprechend $E(t) = E_0$, d.h. das E -Feld ist zeitlich konstant. Damit gilt $\omega(\mathbf{p}, t) = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_\perp^2 + (p_\parallel + eE_0 t)^2}$. Es erweist sich als nützlich, die neue Variable $s = (p_\parallel + eE_0 t)/\epsilon_\perp$ mit dem bereits oben eingeführten $\epsilon_\perp = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_\perp^2}$ zu definieren. Durch sie wird $\omega = \epsilon_\perp \sqrt{1 + s^2}$, und wir finden für die dynamische Phase

$$\Theta(\mathbf{p}, t) = \int_{t_0}^t dt' \omega(\mathbf{p}, t') = \int_{s_0}^s ds' \frac{\epsilon_\perp}{eE_0} \epsilon_\perp \sqrt{1 + s'^2} = \frac{\epsilon_\perp^2}{2eE_0} (\theta(s) - \theta(s_0)) \quad (2.31)$$

mit der Funktion $\theta(s) = \ln(s + \sqrt{1 + s^2}) + s\sqrt{1 + s^2}$. Wir wollen jetzt die Paarproduktionsrate \dot{n} in Analogie zu Definition (2.27)

$$\dot{n}(t) = \int d^3 p \dot{f}(\mathbf{p}, t) \quad (2.32)$$

mit dem Ergebnis von Schwinger [Sch51] vergleichen. Diesem Zwecke dient die folgende Rechnung. Da $p_\parallel \propto t$ ist, hebt die Integration über p_\parallel durch geeignete Variablentransformation gerade die Zeitableitung weg:

$$\begin{aligned} \dot{n} &= \int d^3 p \frac{d}{dt} f = 2\pi \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \int_{-\infty}^\infty dp_\parallel \frac{eE_0}{\epsilon_\perp} \frac{df}{ds} = 2\pi \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \int_{-\infty}^\infty ds eE_0 \frac{df}{ds} \\ &= 2\pi \int_0^\infty dp_\perp p_\perp eE_0 f(s \rightarrow \infty) = 2\pi \int_0^\infty dp_\perp p_\perp eE_0 f(t \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Jetzt setzt man für $f(t \rightarrow \infty)$ die Niederdichte-Näherung (2.30) ein:

$$\begin{aligned} \dot{n} &= 2\pi \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \frac{eE_0}{2} \left| \int_{-\infty}^\infty dt \frac{eE_0 \epsilon_\perp}{\omega^2(\mathbf{p}, t)} e^{-2i\Theta(\mathbf{p}, t)} \right|^2 \\ &= \pi eE_0 \int_m^\infty d\epsilon_\perp \epsilon_\perp \left| \int_{-\infty}^\infty ds \frac{e^{-\frac{i\epsilon_\perp^2}{eE_0} \theta(s)}}{1 + s^2} \right|^2. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Die Integration über die Variable s lässt sich über den Residuensatz berechnen. Man wählt einen Weg in der unteren komplexen Halbebene, der das Residuum bei $s = -i$ umschließt. Dadurch erhält man

$$S = \pi eE_0 \int_m^\infty d\epsilon_\perp \epsilon_\perp \left| -\pi e^{-\frac{\pi \epsilon_\perp^2}{2eE_0}} \right|^2 = \frac{\pi^3 eE_0}{2} \int_{m^2}^\infty d\xi e^{-\frac{\pi \xi}{eE_0}} = \frac{\pi^2 e^2 E_0^2}{2} e^{-\frac{\pi m^2}{eE_0}}. \quad (2.35)$$

Das Ergebnis ist gerade⁴ der erste Term in der Reihe von Schwinger für die Vakuumpersistenz-

⁴Bis auf den normierungsabhängigen Vorfaktor. Siehe Gl. (6.41) in [Sch51].

amplitude. Dass die kinetische Gleichung (2.26) dieses wohlbekannte Ergebnis reproduzieren kann, ist ein gutes Zeichen dafür, dass sie die Physik der Paarproduktion korrekt beschreibt.

2.4 Problemstellung

Nachdem in den vergangenen Abschnitten die kinetische Gleichung hergeleitet und an einem bereits bekannten Ergebnis verifiziert wurde, sollen hier die Kriterien dargelegt und motiviert werden, nach denen mit dieser Gleichung die Paarproduktion untersucht wird.

Dazu wollen wir uns zuerst die Frage stellen, in welcher physikalischen Situation die in der Herleitung gemachten Angaben realisiert sein könnten. Ein im ganzen Raum homogenes elektrisches Feld ist natürlich unrealistisch. Allerdings kann man sich zwei aufeinander zulaufende ebene Wellen der gleiche Amplitude und Polarisationsrichtung vorstellen, ähnlich wie in Abschnitt 4.3. Diese überlagern sich, wie in Abbildung 2.1 dargestellt, zu einer stehenden Welle. In den Antinoden, d.h. den Schwingungsbäuchen, ist das elektrische Feld dann auf Skalen der Größenordnung der Wellenlänge λ homogen, aber immernoch zeitabhängig. Die für die Paarerzeugung relevante Längenskala ist die Compton-Wellenlänge des Elektrons λ_C . Falls $\lambda \gg \lambda_C$ ist, so stellt die kinetische Gleichung eine gute Näherung zur Beschreibung der Paarproduktion in dem Feld der sich überlagernden Wellen dar.

Somit kann man sich ein gegebenes $E(t)$ bzw. $A(t)$ als das Ergebnis der Überlagerung zweier Laser vorstellen. Das stellt aber eine wichtige Forderung an das Feld, nämlich dass $A(t \rightarrow -\infty) = A(t \rightarrow \infty)$ ist, denn sonst besäße das Feld eine Gleichspannungskomponente $U \propto (A(t \rightarrow \infty) - A(t \rightarrow -\infty))$, was im ladungsfreien Raum, d.h. auch im Laserfeld, nicht vorkommen kann. Wir setzen daher das A -Feld zu den Ein- und Ausschaltzeiten auf eine Konstante (die wir meist zu Null wählen), d.h. $A(t \leq t_0) = A(t \geq t_\infty) (= 0)$.

Das ist in diesem Zusammenhang eine sinnvolle Forderung, aber für die kinetische Gleichung per se nicht nötig. Zum Beispiel gibt es viele Studien zum sogenannten Sauterpuls $E(t) \sim 1/\cosh^2(\nu t)$, der ebenso wie der statische Fall diese Bedingung offenbar nicht erfüllt. Die kinetische Gleichung bleibt anwendbar, nur können diese Fälle nicht durch die Überlagerung von Lasern verwirklicht werden und sind daher von geringerer praktischer Relevanz.

Wir nehmen daher für das A -Feld die Form $A(t) = E_0/\nu g(\nu t) \cos(\nu t)$ an. Hierbei ist ν die Energie bzw. Frequenz des Feldes, E_0 die Amplitude und g eine Funktion, die das Ein- und Ausschalten realisiert. Einige Möglichkeiten der Parametrisierung der Ein- und Ausschaltfunktionen sind gegeben durch:

$$g(\nu t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \nu t \leq 2n\pi, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.36)$$

d.h. eine Rechteckfunktion, innerhalb derer das Feld über n Perioden schwingt. Die Feldamplitude ist stückweise konstant. Diesen Fall werden wir als das abrupte Ein- und Ausschalten

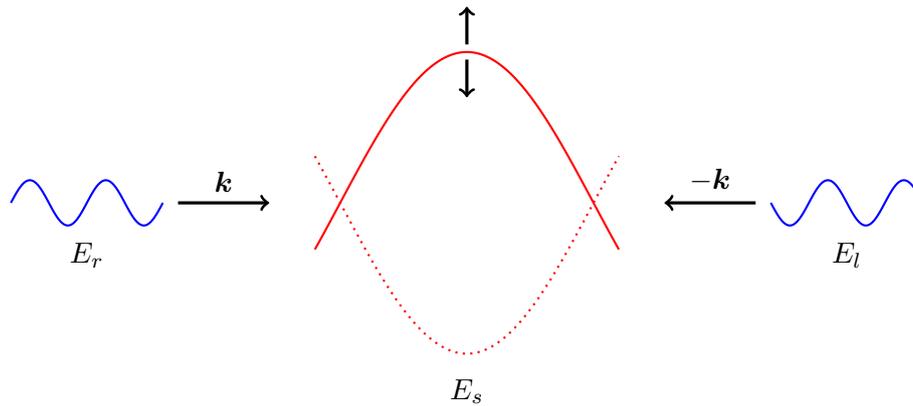


Abbildung 2.1: Eine nach rechts laufende Welle, $E_r(t, x) = E_0 \sin(\omega(t - x))$, und eine nach links laufende Welle, $E_l(t, x) = E_0 \sin(\omega(t + x))$, überlagern sich zu einer stehenden Welle, $E_s(t, x) = 2E_0 \sin(\omega t) \cos(\omega x)$.

bezeichnen. Sie hat den erheblichen Nachteil, dass in ihr beliebig hohe Fourier-Frequenzen enthalten sind und der Ein- und Ausschaltvorgang dadurch unrealistisch ist. Man benötigt einen „weichen“ Übergang, wie er beispielsweise durch die Gauß-Kurve

$$g(\nu t) = \exp\left(-\frac{(\nu t)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.37)$$

realisiert wird. Sie hat einen Parameter, Breite und Steilheit sind gekoppelt, und ist vor allem für kurze Pulse interessant. Wir konzentrieren uns aber auf längere und benötigen eine Funktion, die exakt bei Null anfängt, einen „flat top“ Abschnitt enthält, und wieder auf Null absinkt. Das kann die Gauß-Kurve nicht liefern, da sie für jeden Parameter σ sich ähnlich ist, und man nie einen flachen Abschnitt erhält. Eine bessere Wahl wäre z.B. die symmetrisierte Fermi-Funktion

$$g(\nu t) = \frac{1 + \cosh(a/b)}{\cosh(\nu t/b) + \cosh(a/b)}. \quad (2.38)$$

Ihre Breite ist durch den Parameter a und die Steilheit des Abfallens durch b gegeben. Die Funktion (2.36) ist als Grenzfall enthalten. Sie erfüllt unsere Forderungen aber nur asymptotisch, d.h. $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} g(\tau) = 0$ und nur für $\tau = 0$ gilt $g(\tau = 0) = 1$. Wir benötigen diese Eigenschaften aber, um uns später, wie in Abschnitt 3.1 erklärt, das Floquet-Theorem zu Nutze zu machen. Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, nutzen wir stattdessen die Technik des C^∞ -Anschließens. Dazu definieren wir uns die Funktion

$$h(\tau) := \begin{cases} 0 & \tau \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{\tau}} & \tau > 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

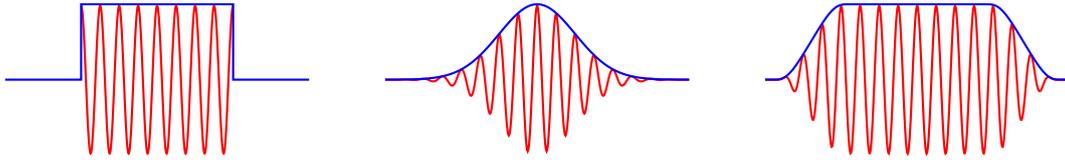


Abbildung 2.2: Die drei verschiedenen Ein- und Ausschaltfunktionen (blau, Gl. (2.36)–links, Gl. (2.37)–mitte, Gl. (2.41)–rechts), zusammen mit den resultierenden A -Feldern (rot).

und mit ihrer Hilfe die Einschaltfunktion g_{ein} und die Ausschaltfunktion g_{aus} mittels

$$g_{\text{ein}}(\tau) := \frac{h(\tau)}{h(\tau) + h(1 - \tau)}, \quad g_{\text{aus}}(\tau) := \frac{h(1 - \tau)}{h(\tau) + h(1 - \tau)}. \quad (2.40)$$

Schließlich definiert man die Formfunktion g , die noch von zwei Parametern a und b abhängt,

$$g(\nu t) := g_{\text{ein}}\left(\frac{\nu t}{b}\right) \cdot g_{\text{aus}}\left(\frac{\nu t - a - b}{b}\right). \quad (2.41)$$

Diese Funktion ist dem Fermi-Puls optisch sehr ähnlich, hat ihm aber folgende Eigenschaften voraus: Für $\tau \leq 0$ und $\tau \geq a + 2b$ ist die Funktion exakt Null und zwischen $\tau = b$ und $\tau = a + b$ ist sie exakt Eins. Darüber hinaus ist sie überall beliebig oft differenzierbar (daher der Name, C^∞). Sie erfüllt alle gewünschten Eigenschaften, und wir sprechen, wenn wir diese Funktion benutzen, vom langsamen Ein- und Ausschalten. Insbesondere ist dann das elektrische Feld und das A -Feld frei von Sprüngen, die zu unphysikalischen Phänomenen führen könnten. Die Funktionen (2.36), (2.37) und (2.41) sind in Abbildung 2.2 dargestellt.

Die beiden Fragen, denen wir im Weiteren nachgehen lauten: Unter welchen Bedingungen verbleibt auch nach Ausschalten des Feldes eine Residualdichte $f \neq 0$? Und wie geschieht diese Akkumulation im Phasenraum? Dafür wird vorrangig der Fall des abrupten Ein- und Ausschaltens, d.h. eines rein sinusförmigen E -Feldes betrachtet. Beobachtet man dabei Akkumulation, muss man überprüfen, ob diese auch bei realistischeren Formfunktionen erhalten bleibt. Die Erforschung der Phasenraumstruktur ist dabei ein aktuelles und aktives Forschungsgebiet [Heb09, Bla13b, Bla13a, Smo12, Dum10].

2.4.1 Kinetische Gleichung in dimensionslosen Größen

Um die kinetische Gleichung numerisch zu behandeln, aber auch für analytische Betrachtungen, ist es nützlich, sie in dimensionslose Größen umzuschreiben. Unmittelbar einsichtig ist die Definition des dimensionslosen Impulses $\boldsymbol{\pi} := \mathbf{p}/m$ und der dimensionslosen Zeit $\tau := \nu t$. Mit diesen Größen definieren wir neue Koeffizientenfunktionen:

$$\omega(\mathbf{p}, t) =: m\tilde{\omega}(\boldsymbol{\pi}, \tau) \quad \text{mit} \quad \tilde{\omega}(\boldsymbol{\pi}, \tau) = \sqrt{1 + \pi_{\perp}^2 + (\pi_{\parallel} - \kappa g(\tau) \cos \tau)^2}, \quad (2.42)$$

$$\Theta(\mathbf{p}, t) =: \chi \tilde{\Theta}(\boldsymbol{\pi}, \tau) \quad \text{mit} \quad \tilde{\Theta}(\boldsymbol{\pi}, \tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \tilde{\omega}(\boldsymbol{\pi}, \tau'), \quad (2.43)$$

$$Q(\mathbf{p}, t) =: \nu \kappa \tilde{Q}(\boldsymbol{\pi}, \tau) \quad \text{mit} \quad \tilde{Q}(\boldsymbol{\pi}, \tau) = \frac{(g(\tau) \sin \tau - g'(\tau) \cos \tau) \sqrt{1 + \pi_{\perp}^2}}{\tilde{\omega}^2(\boldsymbol{\pi}, \tau)}. \quad (2.44)$$

Damit sind $\tilde{\omega}$, $\tilde{\Theta}$ und \tilde{Q} die dimensionslosen Analoga von ω , Θ und Q , die zudem nur von den dimensionslosen Variablen $\boldsymbol{\pi}$ und τ abhängen. Die dimensionslosen Parameter sind

$$\chi = \frac{m}{\nu} = \frac{\lambda}{\lambda_C} \quad \text{und} \quad \kappa = \frac{eE_0}{m\nu} = \frac{E_0}{E_c} \chi. \quad (2.45)$$

Letzterer ist gerade das Inverse des sogenannten Keldysh-Parameters, der häufig in der Literatur mit γ bezeichnet wird, d.h. $\gamma = \kappa^{-1}$.

Mit diesen so definierten Größen lässt sich die kinetische Gleichung (2.26) umschreiben als

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} f \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \tilde{Q} & 0 \\ -\kappa \tilde{Q} & 0 & -2\chi \tilde{\omega} \\ 0 & 2\chi \tilde{\omega} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa \tilde{Q} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Die unterdrückten Funktionsargumente sind jeweils $\boldsymbol{\pi}$ und τ .

2.4.2 Parameterlandschaft

Der Parameterraum der kinetischen Gleichung (2.26) ist zweidimensional und wird entweder durch E_0 und $\nu = 2\pi/\lambda$, oder durch die in Gl. (2.45) eingeführten dimensionslosen Größen κ und χ charakterisiert. Blaschke et al. [Bla13b] zeichnen dabei folgendes Bild dieser „Landschaft“: Es gibt zwei ausgezeichnete Akkumulationsregionen. Eine für kleine Wellenlängen λ bzw. hohe Frequenzen ν und eine für hohe Feldstärken E_0 . Für andere Bereiche findet keine Akkumulation statt. Abbildung 2.3 stellt dies dar. Im Unterschied zu [Bla13b] ist das Multiphotonen-Regime weiter in Richtung größerer Wellenlängen ausgedehnt. Das lässt sich, wie weiter unten gezeigt, auf die höheren Akkumulationsschalen zurückführen, die in [Bla13b] nicht berücksichtigt werden.

2.5 Akkumulationsstruktur im Phasenraum

Wir betrachten zunächst den Fall eines abrupt ein- und ausgeschalteten Feldes, was mit g_1 aus Gl. (2.36) korrespondiert. Dazu benutzen wir die Niederdichte-Näherung (2.30) mit den

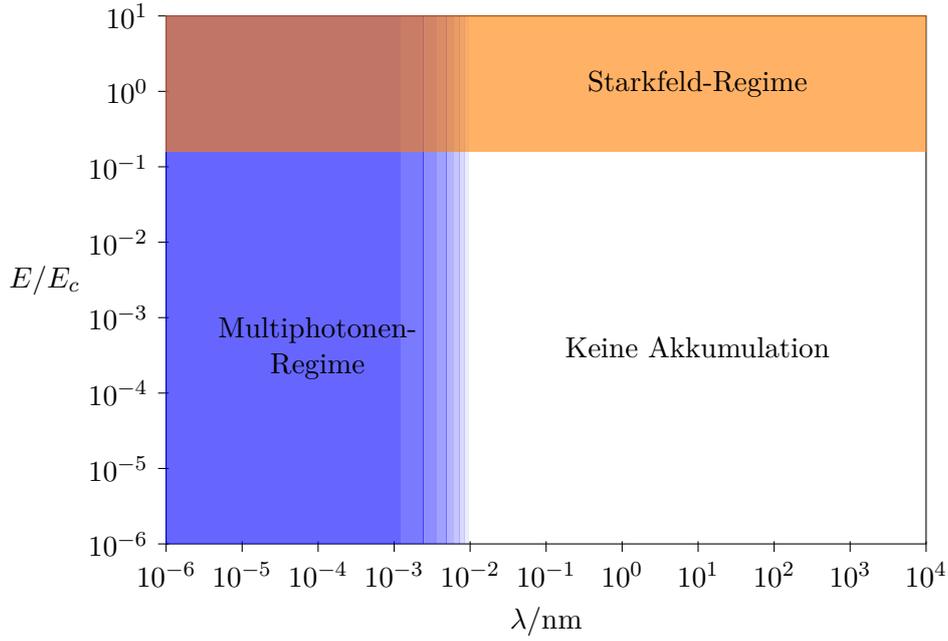


Abbildung 2.3: Das qualitative Verhalten der Teilchendichte f in Abhängigkeit von den Parametern λ und E (die sogenannte Parameterlandschaft, nach [Bla13b]). Im **blauen** Bereich (in [Bla13b] „Resonance-Regime“ genannt) kommt es zur Akkumulation aufgrund von Multiphotonenprozessen, im **orangefarbenen** („Strong-Field-Regime“) geschieht dies durch Tunneln und im Rest („Calm Valley“) gibt es keine Akkumulation.

oben eingeführten dimensionslosen Größen

$$\begin{aligned}
 f(\boldsymbol{\pi}, \tau) &= \frac{1}{2} \left| \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \kappa \tilde{Q}(\boldsymbol{\pi}, \tau') e^{2i\chi\tilde{\Theta}(\boldsymbol{\pi}, \tau')} \right|^2 \\
 &= \frac{\kappa^2}{2} (1 + \pi_{\perp}^2) \left| \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \frac{\sin \tau'}{\tilde{\omega}^2(\boldsymbol{\pi}, \tau')} \exp \left(2i\chi \int_{\tau_0}^{\tau'} d\tau'' \tilde{\omega}(\boldsymbol{\pi}, \tau'') \right) \right|^2.
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Für $\kappa \ll 1$, d.h. schwache Felder E_0 oder hohe Frequenzen ν , kann man $\tilde{\omega}$ durch $\tilde{\omega}_0 = \sqrt{1 + \pi_{\perp}^2 + \pi_{\parallel}^2}$ annähern, wodurch das Integral der dynamischen Phase einfach wird und sich f analytisch berechnen lässt. Wir setzen außerdem $\xi := 2\chi\tilde{\omega}_0$ und $\tau_0 = 0$ und erhalten

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{\kappa^2}{2} \frac{1 + \pi_{\perp}^2}{\tilde{\omega}_0^4} \left| \int_0^{\tau} d\tau \sin \tau e^{2i\chi\tilde{\omega}_0\tau} \right|^2 \\
 &= 8\kappa^2 \chi^4 \frac{1 + \pi_{\perp}^2}{\xi^4} \left| \frac{1 + e^{i\xi\tau} (i\xi \sin \tau - \cos \tau)}{1 - \xi^2} \right|^2 \\
 &= 8\kappa^2 \chi^4 \frac{1 + \pi_{\perp}^2}{\xi^4 (1 - \xi^2)^2} F(\xi, \tau),
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

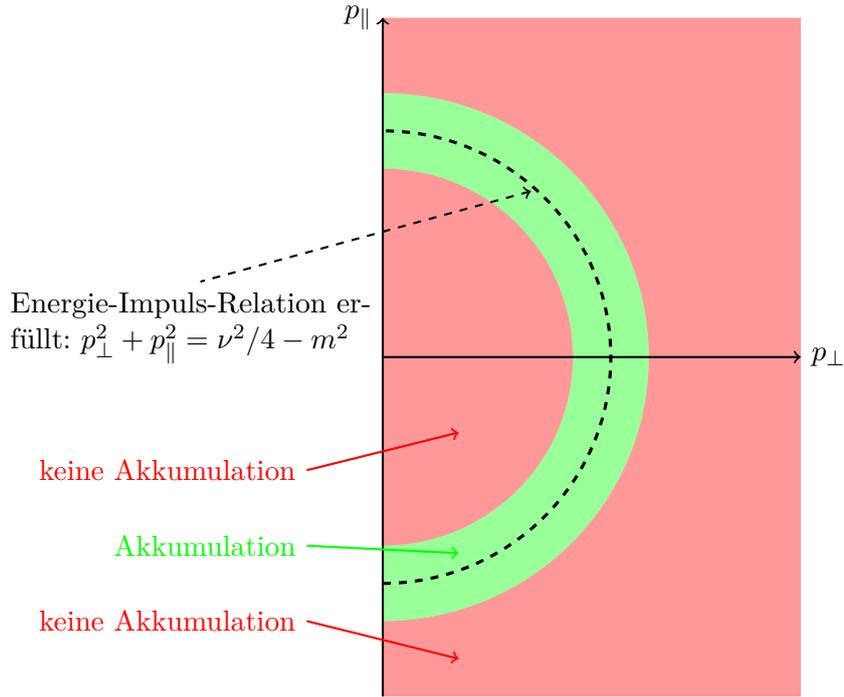


Abbildung 2.4: Eine schematische Darstellung der Teilchendichte f über dem Phasenraum $(p_{\perp}, p_{\parallel})$. In dem **grünen** Bereich findet Akkumulation statt, in dem **roten** nicht. Auf der gestrichelten Linie gilt die Energie-Impuls-Relation, wobei die Teilchen gerade die halbe Energie des Lasers haben.

wobei $F(\xi, \tau) = 1 - 2\xi \sin \tau \sin \xi\tau - 2 \cos \tau \cos \xi\tau + \xi^2 \sin^2 \tau + \cos^2 \tau$, welches nur zeitlich oszillierende Terme enthält⁵. Die Dichte f zeigt dadurch für $\xi \rightarrow 1$ resonantes Verhalten

$$f|_{\xi \rightarrow 1} = 2\kappa^2 \chi^4 \left(1 + \pi_{\perp}^2\right) \left(\tau^2 - 2\tau \sin \tau \cos \tau + \sin^2 \tau\right) \quad (2.49)$$

mit einem nichtoszillierenden Anteil. Demnach gibt es zwei unterschiedliche Regionen im Phasenraum:

1. Für alle $\boldsymbol{\pi}$ mit $\xi(\boldsymbol{\pi}) \neq 1$ oszilliert⁶ f mit unterschiedlichen Frequenzen. Die Funktion $F(\xi, \tau)$ lässt sich einfach durch $\xi^2 + 2\xi + 4$ nach oben abschätzen. Damit fällt f mit genügend großer Potenz für $\pi_{\perp} \rightarrow \infty$ und $\pi_{\parallel} \rightarrow \infty$ ab, sodass bei Integration über diesen Phasenraumbereich n endlich bleibt und zwischen 0 und dieser oberen Schranke oszilliert.
2. Hingegen oszilliert $f|_{\xi \rightarrow 1}$ nicht nur, sondern wächst asymptotisch wie τ^2 . Wir werden

⁵Man vergleiche diesen Ausdruck z.B. mit der Gleichung (104) in [Mic13]. Dort wird ein anderer Zugang zur Beschreibung von Paarproduktion gewählt, aber die Ergebnisse ähneln sich. Der entscheidende Unterschied liegt jedoch im Nenner, der in dem Artikel nicht Null werden kann, wie hier.

⁶Die Dichte $f(\boldsymbol{\pi}, \tau)$ ist nur dann streng periodisch bezüglich der Abhängigkeit von τ , wenn $\xi(\boldsymbol{\pi}) \in \mathbb{Q}$. Ansonsten liegt ein „fast periodisches“ Verhalten vor. Das ist hier mit „Oszillation“ gemeint.

später diesen Anteil von f als den identifizieren, der auch nach dem Ausschalten des Feldes nicht wieder auf Null absinkt.

Was bedeutet $\xi \rightarrow 1$ aber physikalisch? Man setzt die Definitionen ein und erkennt

$$\xi^2 = 4\chi^2 \tilde{\omega}_0^2 = 4 \frac{m^2}{\nu^2} \left(1 + \pi_{\perp}^2 + \pi_{\parallel}^2\right) \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow m^2 + p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2 = \frac{\nu^2}{4}. \quad (2.50)$$

Das ist gerade die Energie-Impuls-Relation für ein Elektron der Energie $\nu/2$. Wir interpretieren diese Gleichung so, als würde ein Photon der Energie ν aus dem Reservoir des Lasers ein Paar erzeugen. Dieser Prozess ist im Vakuum kinematisch ausgeschlossen, aber im Hintergrundfeld des Lasers möglich. Zusammengefasst ergibt sich aus dem mit den beiden Näherungen $f \ll 1$ und $\kappa \ll 1$ verbundenen analytischen Resultat das in Abbildung 2.4 dargestellte Schema der Phasenraumverteilung. Die Akkumulation geschieht auf einer „Schale“, die durch den Radius

$$\pi_r = \sqrt{\pi_{\parallel}^2 + \pi_{\perp}^2} = \frac{\sqrt{1 - 4\chi^2}}{2\chi} \quad \text{bzw.} \quad p_r = \sqrt{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2} = m\pi_r \quad (2.51)$$

gegeben ist, und kann daher nur erfolgen, wenn $\pi_r > 0$ gilt. Das bedeutet aber einfach $\chi < 1/2$ oder $\nu > 2m$, d.h. das einzelne Laserphoton muss mindestens die doppelte Ruheenergie des Elektrons, also $\approx 1,022$ MeV, aufbringen. Wir befinden uns daher in der Parameterlandschaft (Abbildung 2.3) im unteren blauen Bereich, d.h. $\lambda \leq 2,43 \cdot 10^{-3}$ nm und $E \leq 0,1 E_c$.

2.6 Höhere Schalen

Es ist naheliegend anzunehmen, dass auch mehrere Photonen gleichzeitig ein Paar erzeugen können⁷, was mit der allgemeineren Energie-Impuls-Relation

$$\sqrt{m^2 + p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2} = n \frac{\nu}{2}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.52)$$

einhergeht. Wir würden daher aus unseren bisherigen Überlegungen weitere Akkumulationschalen im Phasenraum erwarten. Deren Radien sind dementsprechend

$$\pi_{r_n} = \frac{\sqrt{n^2 - 4\chi^2}}{2\chi} \quad \text{bzw.} \quad p_{r_n} = m\pi_{r_n}. \quad (2.53)$$

Der Index $n \in \mathbb{N}$ zähle im Folgenden diese Schalen ab.

Um diese Vermutung zu überprüfen, streben wir eine Entwicklung in dem Parameter κ an. Die erste Schale ließ sich analytisch durch die nullte Approximation von $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 = \sqrt{1 + \pi_{\perp}^2 + \pi_{\parallel}^2}$ ableiten und die logische Vorgehensweise wäre, in Gl. (2.47) eine Taylor-Reihe

⁷Ein sogenannter Multiphotonenprozess.

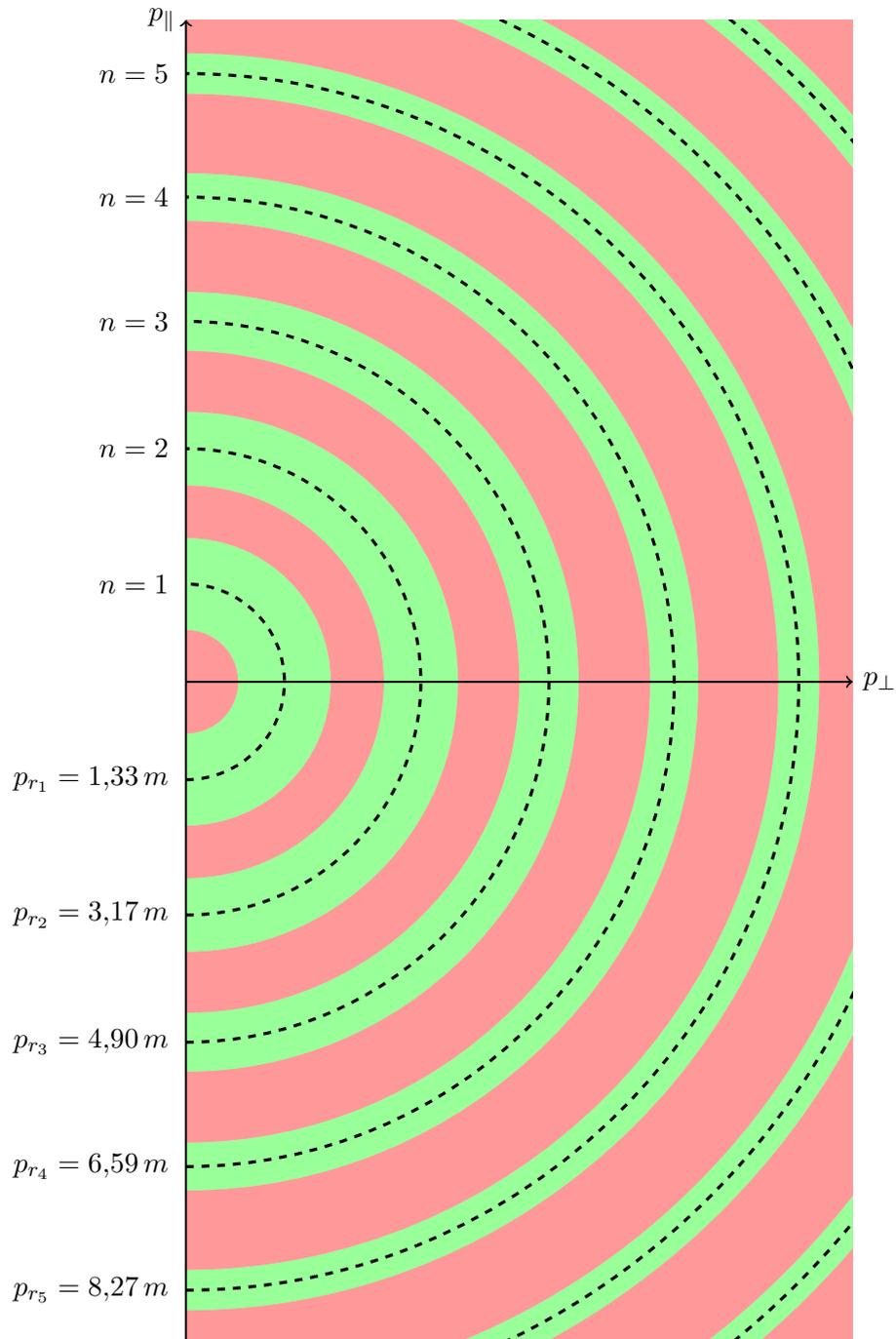


Abbildung 2.5: Eine schematische Darstellung der Teilchendichte f über dem Phasenraum $(p_{\perp}, p_{\parallel})$ analog zu Abbildung 2.4 unter Berücksichtigung der höheren Schalen. Hierbei ist $\chi = 0,3$ gewählt.

für $\tilde{\omega}$ in $\kappa = 0$ anzusetzen⁸. Dieses Vorgehen wird allerdings durch den Term $\exp(2i\chi\tilde{\Theta})$ analytisch erschwert. Wir entwickeln daher unsystematisch nur den Term $1/\tilde{\omega}^2$ und sichern unsere Ergebnisse nachfolgend durch numerische Simulationen der vollen kinetischen Gleichung ab.

Die Taylor-Reihe für $1/\tilde{\omega}^2$ lautet

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{\omega}^2} &= \frac{1}{\tilde{\omega}_0^2} + \kappa \frac{2\pi_{\parallel}}{\tilde{\omega}_0^4} \cos \tau + \kappa^2 \frac{3\pi_{\parallel}^2 - \pi_{\perp}^2 - 1}{\tilde{\omega}_0^6} \cos^2 \tau + \mathcal{O}(\kappa^3) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \kappa^{k-1} \frac{\Pi_k}{\tilde{\omega}_0^{2k}} \cos^{k-1} \tau. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Dabei sei Π_k der Phasenraumfaktor, den man aus den Ableitungen gewinnt, d.h. $\Pi_1 = 1$, $\Pi_2 = 2\pi_{\parallel}$, $\Pi_3 = 3\pi_{\parallel}^2 - \pi_{\perp}^2 - 1$, usw. Wir bemerken für spätere Zwecke, dass $\Pi_k \propto \pi_{\parallel}^{k-1}$. Setzt man diese Reihe in Gl. (2.47) ein und nähert $2i\chi\tilde{\Theta}$ durch $2i\chi\tilde{\omega}_0\tau = i\xi\tau$ und setzt außerdem wieder $\tau_0 = 0$, so erhält man

$$f = \frac{\kappa^2}{2} \frac{1 + \pi_{\perp}^2}{\tilde{\omega}_0^4} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\kappa^{k-1} \Pi_k}{\tilde{\omega}_0^{2k-2}} \int_0^{\tau} d\tau' \sin \tau' \cos^{k-1} \tau' e^{i\xi\tau'} \right|^2. \quad (2.55)$$

Über die Relation $\sin x \cos^k x = 1/2^k \sin((k+1)x)$ kann man die Integrale ähnlich wie das für die erste Schale berechnen:

$$\int_0^{\tau} d\tau' \sin \tau' \cos^{k-1} \tau' e^{i\xi\tau'} = \frac{1}{2^{k-1}} \frac{(i\xi \sin(k\tau) - k \cos(k\tau)) e^{i\xi\tau} + k}{k^2 - \xi^2}. \quad (2.56)$$

Ebenso ist der Grenzwert dieses Integrals für $\xi \rightarrow n$, also wenn wir uns im Phasenraum auf eine Schale bewegen, wieder endlich:

$$\lim_{\xi \rightarrow n} \int_0^{\tau} d\tau' \sin \tau' \cos^{n-1} \tau' e^{i\xi\tau'} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - e^{2in\tau} + 2in\tau}{n}. \quad (2.57)$$

Die Interpretation erfolgt analog zu der für die erste Schale (für die $n = 1$ gilt). Für jedes einzelne $n = 1, 2, \dots$ gibt es wieder die beiden Fälle $\xi \neq n$ und $\xi \approx n$. Für den ersten oszilliert jeder Summand in den Betragsstrichen von Gl. (2.55) und ist beschränkt, und somit auch die Dichte f selbst. Für den zweiten führen wir den Grenzübergang $\xi \rightarrow n$ in der Betragsfunktion aus. Dadurch wird für $k = n$ der Summand $\propto \tau$. Dessen Betragsquadrat liefert einen Term $\propto \tau^2$, die Mischterme mit den anderen Summanden einen $\propto O_1\tau$ und der Rest ist $\propto O_2$. Dabei sind O_1 und O_2 beschränkt oszillierende Terme, deren genaue Form

⁸Und damit insbesondere auch für die dynamische Phase $\tilde{\Theta}$.

für das Weitere unerheblich ist. Zusammengefasst ergibt sich

$$f(\tau, \boldsymbol{\pi})|_{\xi \rightarrow n} = \frac{1}{2} \kappa^{2n} \left(\frac{2\chi^2}{n^2} \right)^{2n} (1 + \pi_{\perp}^2) \Pi_n^2 (\tau^2 + O_1\tau + O_2) . \quad (2.58)$$

Die Argumente π_{\parallel} und π_{\perp} für den Phasenraumterm $(1 + \pi_{\perp}^2) \Pi_n^2$ werden dabei durch die Bedingung $\xi(\boldsymbol{\pi}) = n$ auf einen eindimensionalen Unterraum, die n -te Akkumulationsschale, eingeschränkt. Durch diese Erkenntnis erweitert sich das in Abbildung 2.4 gezeichnete Bild des Phasenraumes zu dem in Abbildung 2.5. In den grünen Bereichen ist $\xi \approx n$ für das jeweils angegebene n . Dort findet die Teilchenakkumulation statt und die Dichte ist durch Gl. (2.58) gegeben. In den übrigen roten Gebieten oszilliert f nur.

Aus der physikalischen Überlegung heraus sollten die höheren Schalen, da es sich bei ihnen um n -Photonen-Prozesse handelt, eine geringere Ausbeute an Elektronen-Positronen-Paaren liefern. Das liegt an zwei verschiedenen Sachverhalten. Zum einen werden die Akkumulationsschalen mit steigendem n schmaler, wie in Abbildung 2.5 angedeutet. Das werden wir durch numerische Beispiele bestätigen. Andererseits benötigen sie auch wesentlich länger zur Akkumulation, wie im folgenden Abschnitt dargestellt.

2.7 Akkumulationszeiten

Die Niederdichte-Näherung (Gl. (2.30) bzw. Gl. (2.47)), die unter der Annahme $f \ll 1$ hergeleitet wurde, hat zwei sehr gute Eigenschaften:

1. Da $f(\mathbf{p}, t_0) = 0$ ist, gilt sie immer mindestens für kleine Anfangszeiten $t \in [0, t_{\text{id}}]$ mit einem bestimmten t_{id} . Es kann ebenso $t_{\text{id}} = t_{\infty}$ vorkommen.
2. Sie gibt von sich aus Auskunft über ihre Gültigkeit, denn wenn für das genäherte f gilt $f \sim 1$, ist sie offenbar nicht mehr gültig.

Diese beiden Tatsachen machen wir uns zu Nutzen, um die Akkumulationszeit τ_n der n -ten Schale zu definieren. Auf einer Schale wächst f gemäß Gl. (2.58) zuerst mit τ^2 . Daher ist zur Zeit⁹

$$\tau_n = \left(\frac{n^2}{2\kappa\chi^2} \right)^n \quad (2.59)$$

die Dichte f so groß geworden, dass die Niederdichte-Näherung keine Gültigkeit mehr besitzt, und man sich mit Numerik behelfen muss.

Die n -te Schale existiert nur, wenn $\chi < n/2$, was aus der Energie-Impuls-Relation (2.52) folgt. Damit folgt auch $2 < n^2/2\chi^2$, wodurch die Akkumulationszeit für höhere Schalen

⁹Da dies eine Definition darstellt und zur Illustration von Zeitskalen dient, ist es opportun, die Faktoren $1/2$, $(1 + \pi_{\perp}^2) \Pi_n^2$ sowie die oszillierenden Terme in Gl. (2.58) nicht zu berücksichtigen.

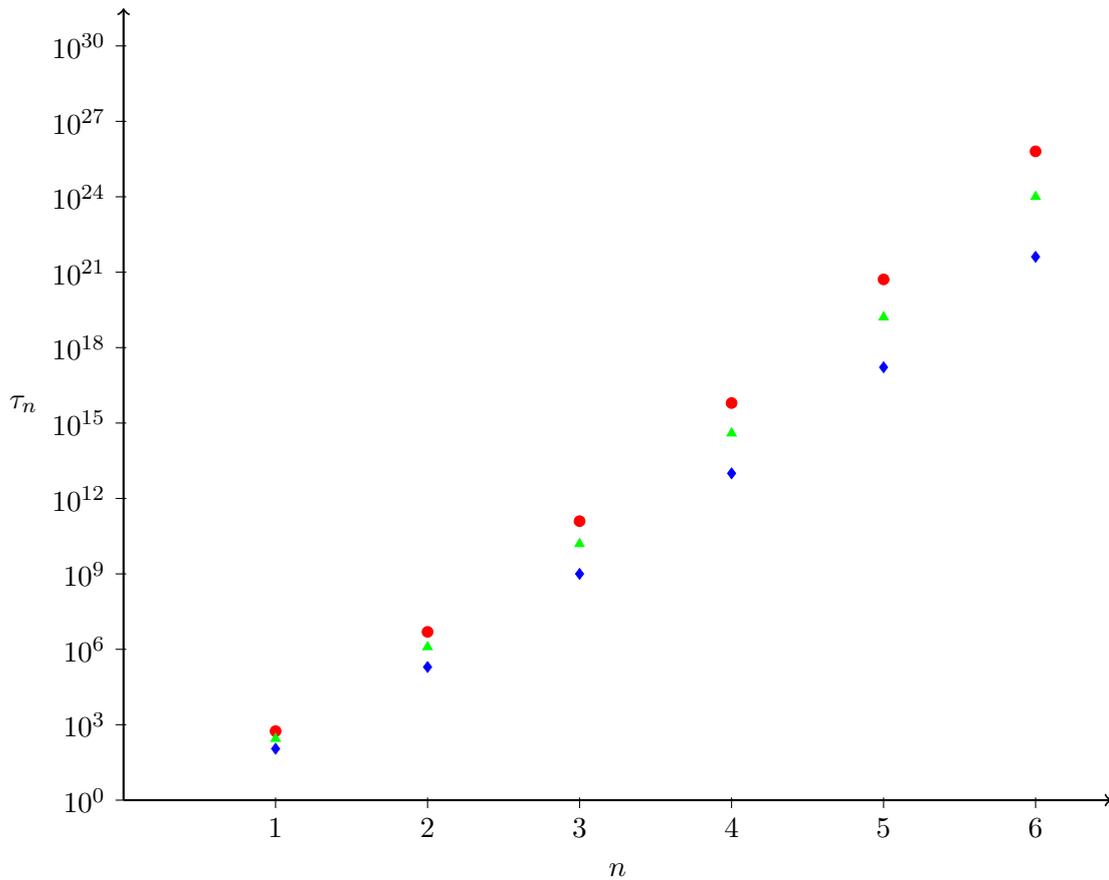


Abbildung 2.6: Die Akkumulationszeiten der n -ten Schalen für $\chi = 0.3$. Die verschiedenen Symbole entsprechen unterschiedlichen Werten für den Parameter κ . Für \bullet ist $\kappa = 0,01$, für \blacktriangle $0,02$ und für \blacklozenge $0,05$.

sehr schnell größer wird, wie man Abbildung 2.6 entnimmt. Die Erzeugung von Paaren aus diesen Schalen ist für kurze Zeiten stark unterdrückt. Bis zu $\kappa \approx 1$ trägt nur die kleinste erlaubte Schale signifikant zur Paarproduktion bei. Trotzdem ändert dies den Charakter des Multiphotonen-Regimes in Abbildung 2.3. Im tiefblauen Bereich bis $\lambda \leq 2,43 \cdot 10^{-3}$ nm geschieht die Akkumulation auf der $n = 1$ -Schale. Er reicht daher bis $\chi = 1/2$ bzw. $\lambda = \lambda_C/2$ mit der Compton-Wellenlänge¹⁰ $\lambda_C = 2,426 \cdot 10^{-3}$ nm. Im nächsthelleren Bereich bis $\lambda \leq 4,86 \cdot 10^{-3}$ nm ist diese Schale kinematisch verboten, sodass die Akkumulation bei wesentlich längeren Zeitskalen auf der $n = 2$ -Schale, ab $\lambda = \lambda_C$, erfolgt. Dementsprechend schließen sich weitere Bereiche für $n = 3, 4, \dots$ bei $\lambda = 3/2\lambda_C, 2\lambda_C, \dots$ an. Mit steigendem

¹⁰Man mag fragen, warum wir so kleine Wellenlängen betrachten, war doch unser Modell, das wir zur Realisierung der Annahmen der kinetischen Gleichung (ein homogenes, rein zeitabhängiges elektrisches Feld) verwenden, davon ausgegangen, die sich überlagernden Laser hätten eine Wellenlänge $\gg \lambda_C$, sodass die resultierende stehende Welle auf der Skala der Compton-Wellenlänge homogen ist, siehe Abbildung 2.1. Das Ziel dieses Kapitels ist aber die Untersuchung der kinetischen Gleichung, auch in Grenzbereichen der Parameterlandschaft, nicht deren realistische Implementierung. Die kinetische Gleichung gilt unabhängig von einer konkreten physikalischen Situation, in der sie verwirklicht sein könnte.

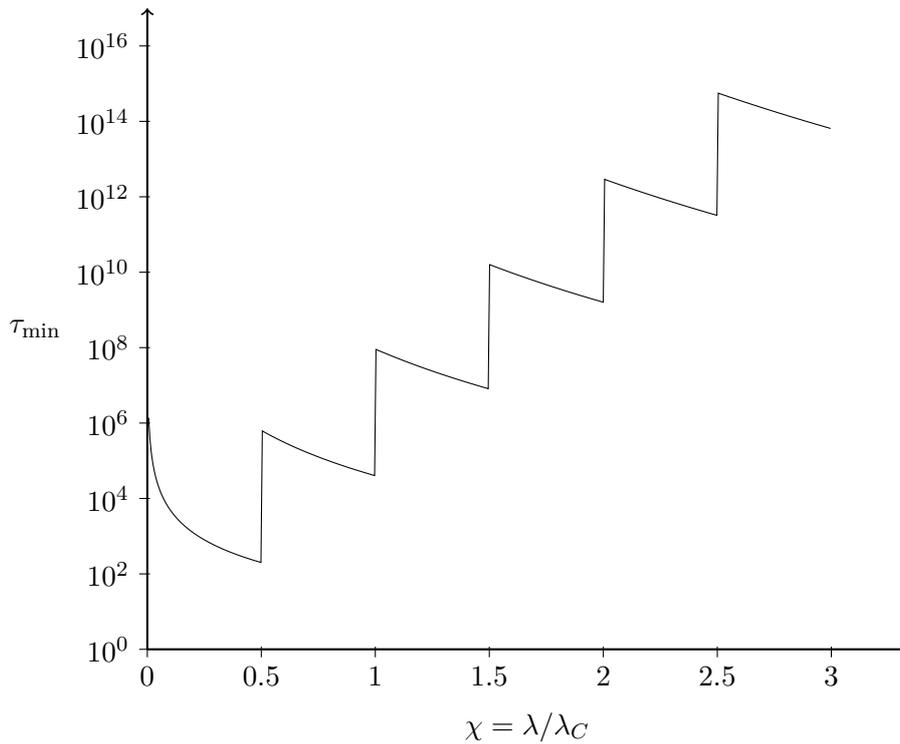


Abbildung 2.7: Akkumulationszeit τ_{\min} der kleinsten erlaubten Schale in Abhängigkeit von χ bei $\kappa = 0,01$.

n bzw. λ ist in ihnen jedoch die Teilchenproduktion so stark unterdrückt, bzw. sind die Akkumulationszeiten gegenüber realistischen experimentellen Bedingungen oder sogar den Möglichkeiten der Computernumerik so lang, dass wir vereinfachend sagen, es gebe in diesen Regionen keine Akkumulation. Dies ist in der Abbildung 2.3 dadurch ausgedrückt, dass das blaue Multiphotonen-Regime mit jeder höheren erlaubten Schale heller wird, bis es in das weiße „Calm Valley“ übergeht.

Im Artikel [Bla13b] ist der Übergang vom Multiphotonen-Regime zum „Calm Valley“ scharf bei $\lambda = \lambda_C/2$. Das zeichnet aber ein vereinfachtes Bild, denn wie wir gesehen haben, modifizieren die höheren Schalen den Übergang. Er ist zum einen nicht mehr scharf, sondern kontinuierlich und er ist in Richtung größerer Wellenlängen verschoben.

Wir können ein Gefühl für diesen Übergang entwickeln, indem wir die Größe τ_{\min} betrachten. Diese sei definiert als die Akkumulationszeit τ_n (siehe Gl. (2.59)) der für den Wert χ kleinsten erlaubten Schale, d.h. $\tau_{\min} = \tau_n|_{n=\lceil 2\chi \rceil}$. Wie man in Abbildung 2.7 sieht, wächst sie sehr schnell, wobei $\tau_{\min} \rightarrow \infty$ das „Calm Valley“ charakterisiert. Die Sprünge der Funktion rühren von den Übergängen zwischen einer erlaubten Schale und der nächsten her. Rechnet man in SI-Einheiten um, so ist t_{\min} schon für $\chi \approx 5$ von der Größenordnung einer Sekunde. Da es auf absehbare Zukunft experimentell unrealistisch erscheint, zwei Laser solch hoher Frequenzen über makroskopische Zeitskalen zu überlagern, um das benötigte E - bzw. A -Feld

zu erzeugen, kann man ab diesen Wellenlängen schon von keiner Akkumulation sprechen.

2.8 Dynamisch assistierter Schwinger-Effekt

Die Ergebnisse der vorangegangenen Abschnitte lassen wenig Hoffnung, den dynamischen Schwinger-Effekt mittels eines einfachen Sinus-förmigen elektrischen Feldes zu beobachten, da die dafür nötigen Feldstärken bzw. Frequenzen für gegenwärtig verfügbare Technologien zu hoch sind. Aus diesem Grund wurde von verschiedenen Autoren vorgeschlagen, zwei Felder mit unterschiedlichen Parametern zu nutzen, siehe z.B. [Sch08, Fey12, Ort11, Koh12b, Dun09]. In diesen Arbeiten wird ein Effekt aufgezeigt, der dynamisch assistierter Schwinger-Effekt genannt wird. Dabei wird einem starken, langsam veränderlichen Feld ein schwächeres, dafür aber sehr schnell veränderliches überlagert. Als Resultat daraus wird die Teilchenproduktion um bis zu einen Faktor ≈ 100 verstärkt.

Die Ansätze [Ort11, Koh12b] arbeiten mit der Überlagerung zweier Sauter-Pulse der Form $E(t) = E_0 / \cosh^2(\nu t)$. Wie in Abschnitt 2.4 erwähnt, ist dieser Sauter-Puls aber kein gutes Modell für einen Laser, da er eine Gleichspannungskomponente enthält. Wir wollen daher untersuchen, ob der Verstärkungseffekt auch für zwei sich überlagernde Sinus-förmige elektrische Felder auftritt. Wir geben uns daher die Felder folgendermaßen vor:

$$E(t) = E_0 \sin(\nu t) + E'_0 \sin(\nu' t), \quad A(t) = \frac{E_0}{\nu} \cos(\nu t) + \frac{E'_0}{\nu'} \cos(\nu' t). \quad (2.60)$$

Für die Feldstärken gelte $E_0 \ll E'_0$ und für die Frequenzen $\nu' \ll \nu$. Es ist wieder nützlich, dimensionslose Größen wie in Gl. (2.47) zu benutzen:

$$f(\boldsymbol{\pi}, \tau) = \frac{1 + \pi_{\perp}^2}{2} \left| \int_0^{\tau} d\tau' \frac{\kappa \sin \tau' + \kappa' \sigma \sin(\sigma \tau')}{\tilde{\omega}^2(\boldsymbol{\pi}, \tau')} \exp \left(2i\chi \int_0^{\tau'} d\tau'' \omega(\boldsymbol{\pi}, \tau'') \right) \right|^2. \quad (2.61)$$

Die dimensionslosen Größen sind bis auf das neue σ völlig analog zu den bisher gebrauchten, κ und χ , aus Gl. (2.45).

$$\begin{aligned} \kappa' &= \frac{eE'_0}{m\nu'}, & \kappa &= \frac{eE_0}{m\nu}, & \chi &= \frac{m}{\nu}, & \sigma &= \frac{\nu'}{\nu}, & \tau &= \nu t, \\ \tilde{\omega}(\boldsymbol{\pi}, \tau) &= \sqrt{1 + \pi_{\perp}^2 + (\pi_{\parallel} - \kappa \cos \tau - \kappa' \cos(\sigma \tau))^2}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Für diese Größen gilt $\kappa \ll \kappa' \ll 1$ und $\sigma \ll 1$. Ähnlich wie in den Abschnitten 2.5 und 2.6 entwickelt man den Nenner $\tilde{\omega}^2$ in den Parametern κ und κ' und führt dann den Grenzübergang $\xi = 2\tilde{\omega}_0\chi \rightarrow 1$ durch, betrachten also die Dichte f auf der ersten Schale *des hochfrequenten Feldes*. So ergibt sich

$$f(\tau, \boldsymbol{\pi})|_{\xi \rightarrow 1} = 2\kappa^2 \chi^4 (1 + \pi_{\perp}^2) \left[\left(1 + 8\pi_{\parallel} \kappa' \chi^2 \right)^2 \tau^2 + O_1 \tau + O_2 \right]. \quad (2.63)$$

Die Akkumulation wird also im Vergleich zu Gl. (2.49) um den Faktor

$$\left(1 + 8\pi_{\parallel}\kappa'\chi^2\right)^2 \tag{2.64}$$

verstärkt, bzw. die Akkumulationszeit τ_1 um ebendiesen Faktor reduziert. Die Frequenz des starken Feldes ist eigentlich zu niedrig, um auf dieser Schale direkt beizutragen, doch das schwache Feld wirkt hier gewissermaßen als Katalysator und gibt dieser Möglichkeit Raum.

Obwohl die Herleitung unter der Annahme $\kappa' \ll 1$ durchgeführt wurde, lässt sich ein generischer Zusammenhang vermuten, der mittels starker Erhöhung von κ' eine unter realistischen experimentellen Bedingungen beobachtbare Dichte f ermöglichte. Es gibt unseres Wissens nach noch keine Veröffentlichung zum dynamisch assistierten Schwinger-Effekt, bei dem zwei Sinus-förmige Felder überlagert werden. Insofern ist dieser Abschnitt ein erster Schritt zu dessen Verständnis, der weiterer Untersuchung bedarf.

3 Numerische Resultate

Die Ziele der folgenden numerischen Untersuchungen werden sein, die analytischen Resultate zu bestätigen, in Parameterbereichen zu testen, in denen die für die Herleitung erforderlichen Näherungen keine Gültigkeit mehr haben, und offen gebliebene Fragen zu beantworten. Insbesondere soll die Existenz der Akkumulationsschalen, ihre Lage im Phasenraum und das Verhalten der Akkumulationszeiten überprüft werden.

Die über den Impulsraum integrierte Dichte n wurde im analytischen Teil vernachlässigt, da selbst in Fällen, in denen man f berechnen kann, die Abhängigkeit von p_{\perp} und p_{\parallel} zu kompliziert ist, um die Integration über diese Variablen durchzuführen. Es ist daher noch offen, welchen Beitrag die jeweiligen Schalen liefern und ob die Vernachlässigung der Phasenraumfaktoren in der Definition der Akkumulationszeiten nicht zu stark vereinfachend war.

3.1 Floquet-Theorie

Grundlage für die numerische Simulation ist die dimensionslose kinetische Gleichung (2.46). Die Implementierung erfolgte in C++ mit Hilfe von *odeint*¹, welches Lösungsroutinen für gewöhnliche Differentialgleichungen bereitstellt, und der Bibliothek für lineare Algebra *eigen*².

Man kann die Simulation, bei der Gl. (2.46) z.B. einfach mittels eines Runge-Kutta-Verfahrens integriert wird, um Größenordnungen beschleunigen, indem man das Floquet-Theorem anwendet. Dazu bringen wir Gl. (2.46) mittels der Substitution $w := 1 - f$ auf die Form (siehe auch Anhang B)

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} w \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \tilde{Q} & 0 \\ \kappa \tilde{Q} & 0 & -2\chi \tilde{\omega} \\ 0 & 2\chi \tilde{\omega} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ u \\ v \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Diese Gleichung hat drei linear unabhängige Lösungen [Tes12]. Ordnen wir diese als drei Spalten nebeneinander an, erhalten wir eine 3×3 -Matrix, die man auch die Fundamentalmatrix des Systems nennt. Wir bezeichnen sie mit O , und es sei $O(\tau_0) = \mathbb{1}$. So ist Gl. (3.1)

¹<http://www.odeint.com>

²<http://eigen.tuxfamily.org>

äquivalent zu

$$\frac{dO(\boldsymbol{\pi}, \tau)}{d\tau} = M(\boldsymbol{\pi}, \tau) O(\boldsymbol{\pi}, \tau), \quad O(\boldsymbol{\pi}, \tau_0) = \mathbb{1}, \quad (3.2)$$

wobei die Koeffizientenmatrix M durch

$$M(\boldsymbol{\pi}, \tau) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \tilde{Q}(\boldsymbol{\pi}, \tau) & 0 \\ \kappa \tilde{Q}(\boldsymbol{\pi}, \tau) & 0 & -2\chi \tilde{\omega}(\boldsymbol{\pi}, \tau) \\ 0 & 2\chi \tilde{\omega}(\boldsymbol{\pi}, \tau) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

gegeben ist. Weil als Formfunktion die einfache Rechteckfunktion g_1 aus Gl. (2.36) gewählt wurde, sind die Felder periodisch: $A(\tau+2\pi) = A(\tau)$ und $E(\tau+2\pi) = E(\tau)$. Damit gilt auch für die Koeffizientenmatrix $M(\tau+2\pi) = M(\tau)$ und das Floquet-Theorem ist anwendbar [Tes12]. Es besagt, dass sich die Fundamentalmatrix als ein Produkt

$$O(\tau) = P(\tau)e^{R\tau} \quad (3.4)$$

schreiben lässt (o.B.d.A. $\tau_0 = 0$). Dabei ist P periodisch, $P(\tau+2\pi) = P(\tau)$, und R ist konstant (siehe z.B. Kapitel 3.6 in [Tes12]). Die Lösung einer periodischen linearen Differentialgleichung ist also i.A. nicht selbst periodisch, sondern das Produkt einer periodischen Funktion und eines Exponentialterms. Aus Gl. (3.4), der Anfangsbedingung und der Periodizität von P folgt unmittelbar $O(\tau + 2\pi n) = O(\tau)e^{2\pi n R} = O(\tau)O(2\pi)^n$. Man muss also die Differentialgleichung (3.3) nur bis $\tau = 2\pi$ lösen. Für $\tau > 2\pi$ lässt sich $O(\tau)$ dann einfach durch Matrixmultiplikation bestimmen, was wesentlich weniger Rechenaufwand erfordert, als die Integrationsroutinen für gewöhnliche Differentialgleichungen.

Noch wichtiger ist aber das Komplexitätsverhalten. Will man z.B. f bei $\tau = 2^k \cdot 2\pi$ berechnen, muss man nur $O(2\pi)$ mittels der Differentialgleichungsroutinen berechnen und danach k Matrixmultiplikationen durchführen. Somit hängt die Rechenzeit logarithmisch von τ ab, d.h. sie wächst wie $\mathcal{O}(\log \tau)$. Da O stets eine orthogonale Matrix sein soll (siehe Anhang B), lässt sich der Fehler leicht kontrollieren, indem die einzelnen Spalten von O nach einer gewissen Anzahl an Multiplikationen wieder auf eins normiert werden. Alternativ multipliziert man O dazu mit $(\det O)^{-1/3}$.

Unser so optimiertes Rechenverfahren benutzen wir im Weiteren für die Simulation der kinetischen Gleichung.

3.2 Entwicklung der Phasenraumverteilung

Als erstes wollen wir betrachten, wie sich die Schalen über die Zeit formieren. In Abbildung 3.1 ist die Teilchendichte jeweils nach 10, 20, 50, 100, 200 und 500 vollen Perioden dargestellt. Die Parameter sind $\kappa = 0.1$ und $\chi = 0.2$. Damit ist unsere Näherung $\kappa \ll 1$ noch gültig und

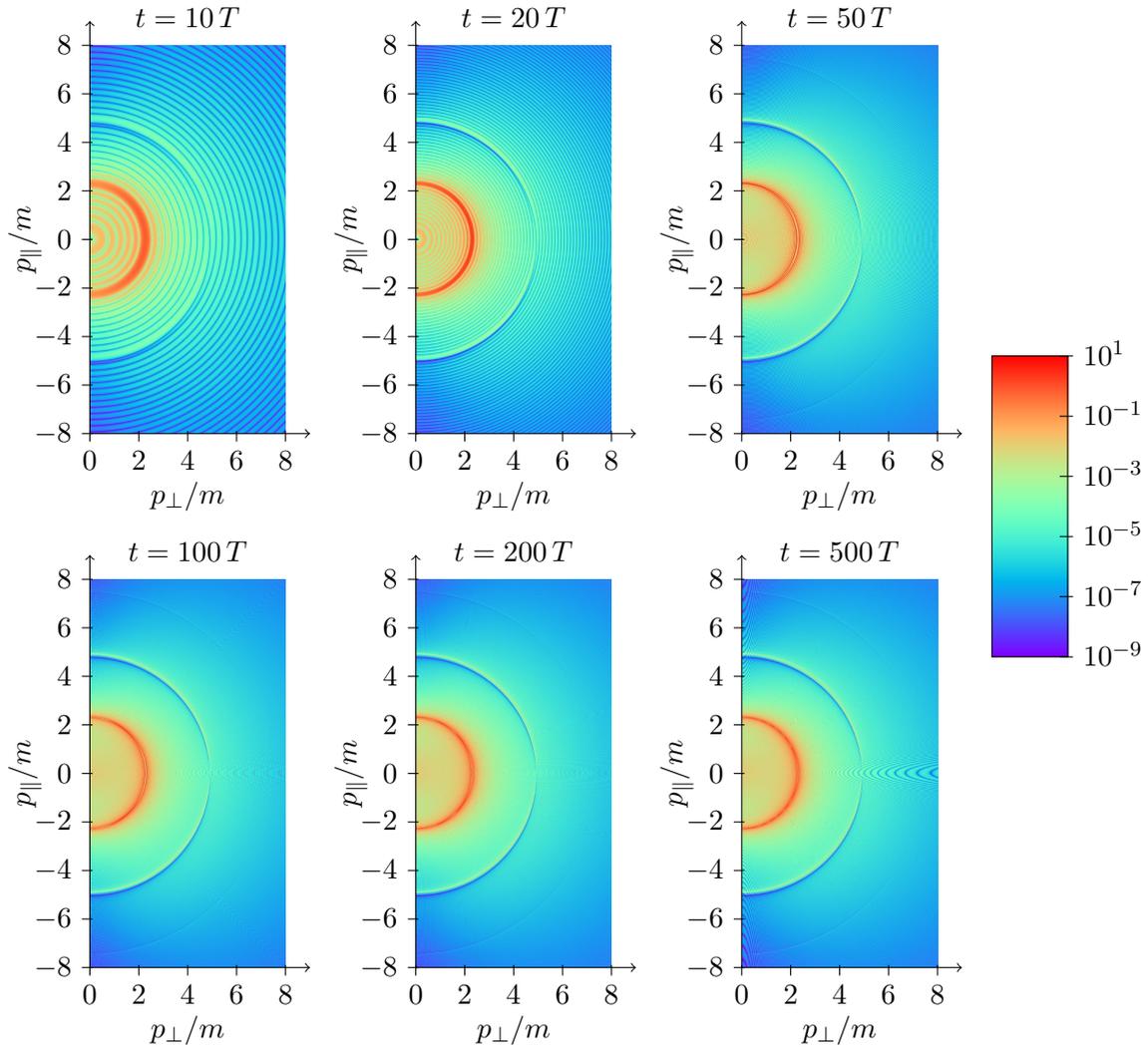


Abbildung 3.1: Die Teilchendichte f in Abhängigkeit des Impulses zu verschiedenen Zeiten. Die dimensionslosen Parameter sind $\kappa = 0,1$ und $\chi = 0,2$. Man beachte die logarithmische Auftragung der Farbskala (rechtes Panel).

da $\chi < 0,5$ ist, sind alle Akkumulationsschalen erlaubt. Aus Gl. (2.53) folgt für die ersten drei Radien: $p_{r_1} = 2,29 m$, $p_{r_2} = 4,90 m$ und $p_{r_3} = 7,43 m$. Das stimmt augenscheinlich mit der Abbildung sehr gut überein. Die erste Schale ist nach 10, die zweite nach 20 und die dritte nach 50 Perioden deutlich auszumachen, obwohl sie zu diesen Zeiten noch nicht saturiert, d.h. $f \approx 2$ sind. Das bedeutet auch, dass die Akkumulationszeit aus Gl. (2.59) nur eine Obergrenze für die Zeit setzt, ab der man produzierte Teilchen beobachten kann. Tatsächlich ist das, wie man anhand der Abbildung sieht, schon wesentlich früher möglich.

Als nächstes soll f zu gleichen Zeiten, aber bei variierendem Parameter χ betrachtet werden. Wenn die Vorhersage stimmt, müssten die Radien der Schalen mit größer werdendem χ kleiner werden. Außerdem sollte bei $\chi = 0,5$ die erste und bei $\chi = 1$ die zweite Schale

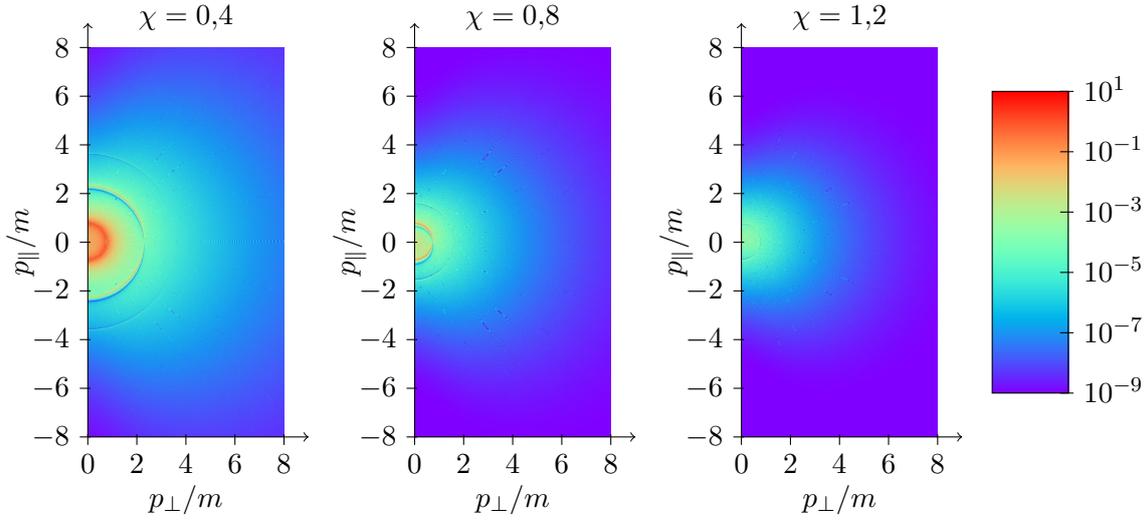


Abbildung 3.2: Die Teilchendichte f in Abhängigkeit des Impulses zur Zeit $t = 1000T$, für $\kappa = 0,1$ und verschiedene Werte $\chi = 0,4$ (links), $0,8$ (mitte), $1,2$ (rechts).

verschwinden. Um das zu illustrieren, wählen wir für χ die Werte $0,4$, $0,8$ und $1,2$. Die Dichten sind in Abbildung 3.2 dargestellt. Man erkennt in dem linken Graphen für $\chi = 0,4$ noch die drei Schalen, wobei deren Radien kleiner sind, als für $\chi = 0,2$ in Abbildung 3.1. Im mittleren Graphen ist die erste Schale verschwunden und die beiden verbliebenen nach innen gerückt, und im letzten ist nur noch die dritte übrig. Die Numerik bestätigt also auch hier die Ergebnisse der analytischen Rechnung.

Es verbleibt noch die Abhängigkeit von κ aufzuzeigen. Wir gehen nach demselben Muster vor, halten t konstant und setzen $\chi = 0,2$, sodass wir alle Schalen sehen können. Für κ wählen wir $0,1$, $0,5$ und 1 . Die Graphen der resultierenden Dichten finden sich wiederum in Abbildung 3.3. Die Übereinstimmung mit der aus den analytischen Betrachtungen gewonnenen schematischen Abbildung 2.5 ist besonders für den rechten Graphen evident. Bei genauerer Betrachtung aller bisherigen Abbildungen fällt die Tatsache ins Auge, dass $f = 0$ auf der zweiten Schale bei $p_{\parallel} = 0$ gilt. Im rechten Graphen (für $\kappa = 1$) von Abbildung 3.3 erkennen wir zudem auf der dritten Schale zwei Punkte, und bei genauem Hinsehen auf der vierten Schale drei Punkte, bei denen die Dichte verschwindet. Das ist eine Konsequenz des Phasenraumfaktors Π_n in Gl. (2.58). Dieser besitzt gerade $n - 1$ Nullstellen. Beispielsweise ist $\Pi_2 = 2\pi_{\parallel}$ und daraus folgt die verschwindende Dichte auf der zweiten Schale bei $p_{\parallel} = 0$.

Die höheren Schalen werden nicht nur durch höhere Akkumulationszeiten unterdrückt, sondern vor allem nimmt ihre Dicke und damit die Zahl der produzierten Teilchen mit steigendem n ab. Um dem entgegenzuwirken, muss man κ erhöhen, weil dadurch die Schalen wieder breiter werden, wie man in Abbildung 3.3 gut erkennt. Effektive Paarproduktion ist demnach ein Wechselspiel zwischen den Parametern χ und κ : Bei kleinem χ , d.h. hoher Laserenergie, sind die Schalen mit kleinem n erlaubt, und selbst bei kleinem κ und damit

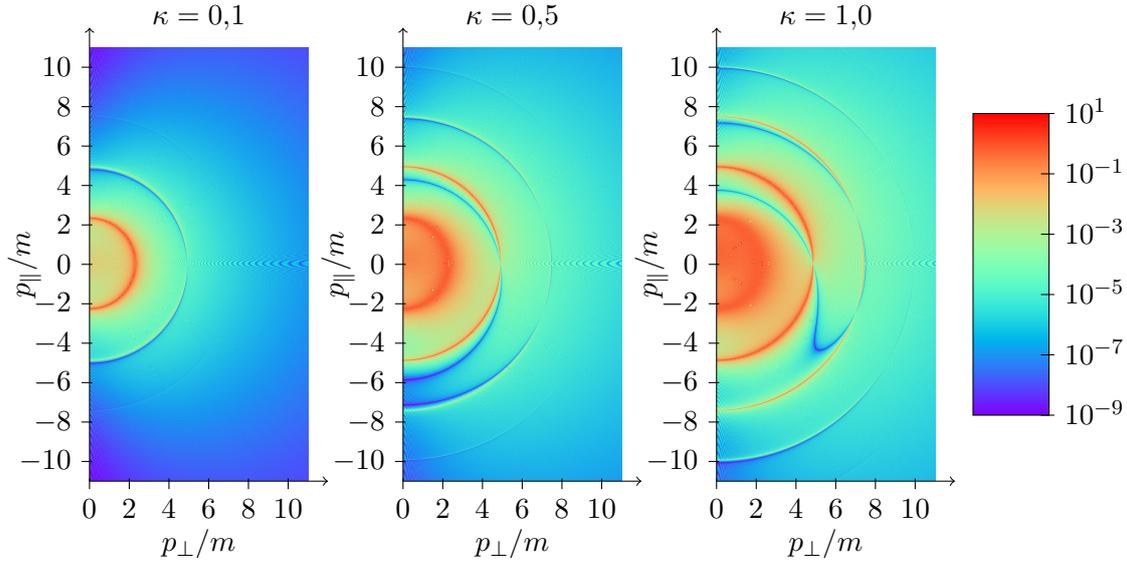


Abbildung 3.3: Die Teilchendichte f in Abhängigkeit des Impulses zur Zeit $t = 1000T$, für $\chi = 0,2$ und verschiedene Werte $\kappa = 0,1$ (links), $0,5$ (mitte), 1 (rechts).

kleinen Feldstärken findet Akkumulation statt. Ist χ hingegen groß, hat man nur die höheren Schalen zur Verfügung, und κ muss dementsprechend größer gewählt werden.

Bisher war die analytische Betrachtung sehr erfolgreich und stimmte mit der Numerik gut überein, selbst wenn nicht mehr $f \ll 1$ galt, was für die Niederdichte-Näherung erforderlich war. Ebenso beeinträchtigte die Idee, zwar $\tilde{\omega}$ im Nenner von Gl. (2.47) nach κ zu entwickeln, nicht aber im Exponenten, die Übereinstimmung nicht. Bemerkenswerterweise bleiben die Schalen auch bei saturiertem f , d.h. $f \approx 2$, in ihrer Form konstant. Man hätte hier wesentliche Abänderungen, resultierend aus der vollen Gleichung, gegenüber der Niederdichte-Näherung erwarten können.

Erhöhen wir die Feldstärke und damit den Parameter κ noch weiter, verformen sich die Schalen sukzessive so stark, dass sie nicht mehr zu erkennen sind. Dazu betrachten wir Abbildung 3.4. Für $\kappa = 2,0$ ist nur die $n = 1$ -Schale etwas deformiert, aber noch erkennbar, die anderen Schalen sind „intakt“. Für $\kappa = 4,0$ ist die erste Schale nicht mehr auszumachen, die zweite deformiert und die restlichen intakt. Bei $\kappa = 6,0$ schließlich sind die ersten beiden nicht zu erkennen, die dritte deformiert und die restlichen intakt. Man kann sehen, wie mit steigendem κ die Näherung förmlich „zusammenbricht“, was daran liegt, dass $\tilde{\omega}$ im Exponenten von Gl. (2.47) nicht mehr durch $\tilde{\omega}_0$ genähert werden kann. Ebenso nimmt die Zahl erzeugter Paare mit steigendem κ augenscheinlich deutlich zu. Das liegt nicht nur an den steigenden Beiträgen höherer Schalen, sondern vor allem an dem „Verschmieren“ der niedrigen, die sich jetzt über einen wesentlich größeren Bereich im Phasenraum erstrecken.

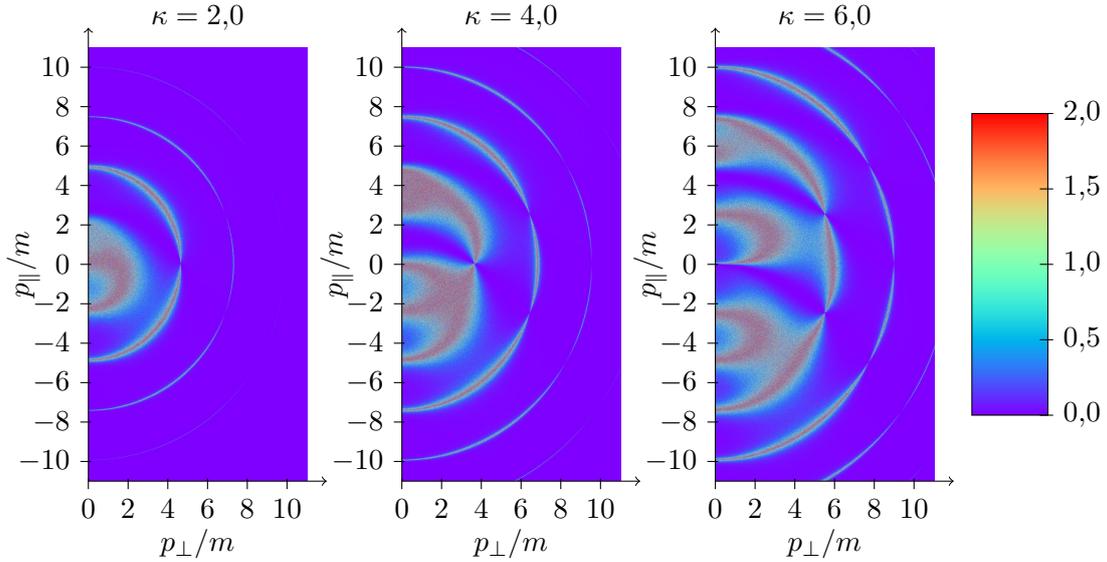


Abbildung 3.4: Die Teilchendichte f in Abhängigkeit des Impulses zur Zeit $t = 10^6 T$, für $\chi = 0,2$ und verschiedene Werte $\kappa = 2,0$ (links), $4,0$ (mitte), $6,0$ (rechts). Die Farbskala ist hier linear (rechtes Panel), nicht logarithmisch wie in den übrigen Abbildungen.

3.3 Evolution der Dichte

Nach der Klärung der Phasenraumstruktur von f wenden wir uns der über den Impulsraum integrierten Dichte n , definiert in Gl. (2.27), zu. Es stellt sich aber numerisch sofort die Frage, wie weit man die Impulsintegration ausführen möchte. Denn um n zu berechnen, diskretisieren wir den Impulsraum, lösen die Differentialgleichung (2.26) an jeder dieser Stützstellen, und gewichten und summieren das Ergebnis schließlich. Daher müssen wir eine Grenze für die Impulse festlegen³, d.h. $0 \leq p_{\perp} \leq p_{\perp\max}$ und $-p_{\parallel\max} \leq p_{\parallel} \leq p_{\parallel\max}$. Diese Grenzen hängen von den Parametern κ und χ ab, und müssen so gewählt werden, dass über die wichtigsten Beiträge abintegriert wird. Diese Wahl lässt sich nur schwer automatisieren und wird daher von Fall zu Fall „von Hand“ eingestellt. Aus den bisherigen Abbildungen erschließt sich z.B., dass bis ca. $\kappa \leq 4,0$ eine Integration bis $p_{\perp\max} = p_{\parallel\max} = 11 m$ ausreichend ist.

Betrachten wir also Abbildung 3.5. Die kleinen Oszillationen besitzen gerade die doppelte Frequenz 2ν des äußeren Feldes (bzw. sind von der Form $\sim \sin^2(\nu t)$). Sie rühren von Oszillationen der Dichte in einer Region um den $p_{\perp} = p_{\parallel} = 0$ Punkt im Phasenraum her⁴. Für die rote Kurve ist $\chi = 0,2$ und für die grüne ist $\chi = 0,4$. Somit ist auf ihnen die

³Man kann zwar durch Variablentransformation auch numerisch bis $p_{\parallel}, p_{\perp} \rightarrow \infty$ integrieren, das ist aber hier nicht praktikabel, da für jeden Zeitpunkt t i.A. neue Stützstellen ausgewählt werden, die dann erst bis t integriert werden müssten.

⁴Dieses Verhalten ist in gedruckter Form schlecht zu dokumentieren, aber im Rahmen dieser Arbeit entstanden einige Videos von Simulationen der kinetischen Gleichung, die man unter <http://www.hzdr.de/db/Cms?p0id=37842&pNid=248> abrufen kann.

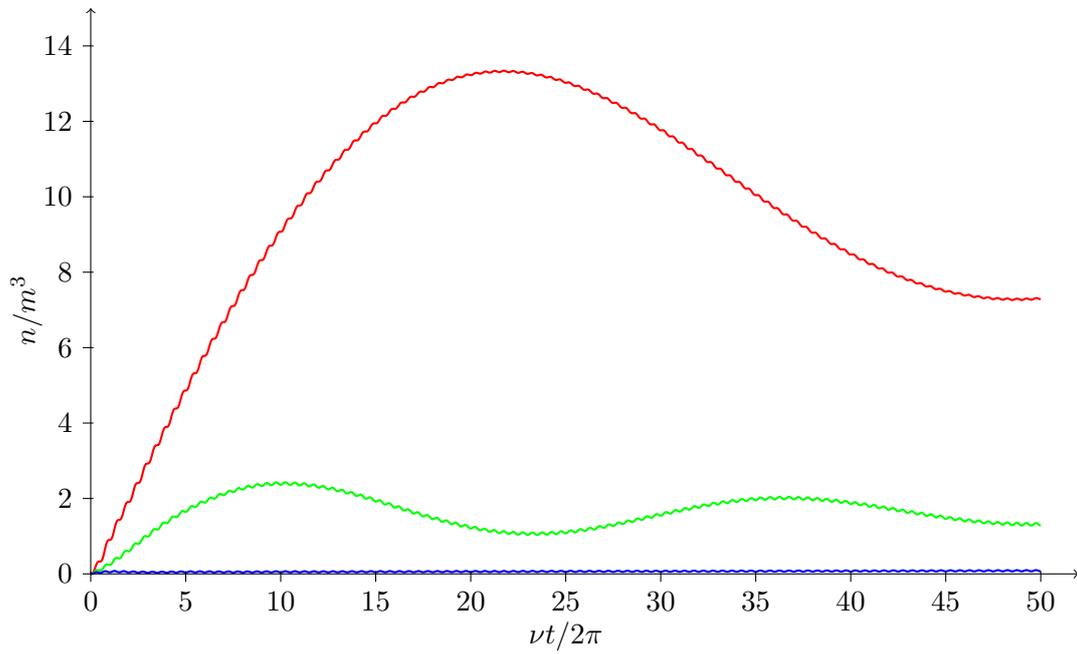


Abbildung 3.5: Die integrierte Teilchendichte in Abhängigkeit der Zeit für $\kappa = 0,1$ und verschiedene Werte $\chi = 0,2$ (rot), $\chi = 0,4$ (grün), $\chi = 0,6$ (blau)

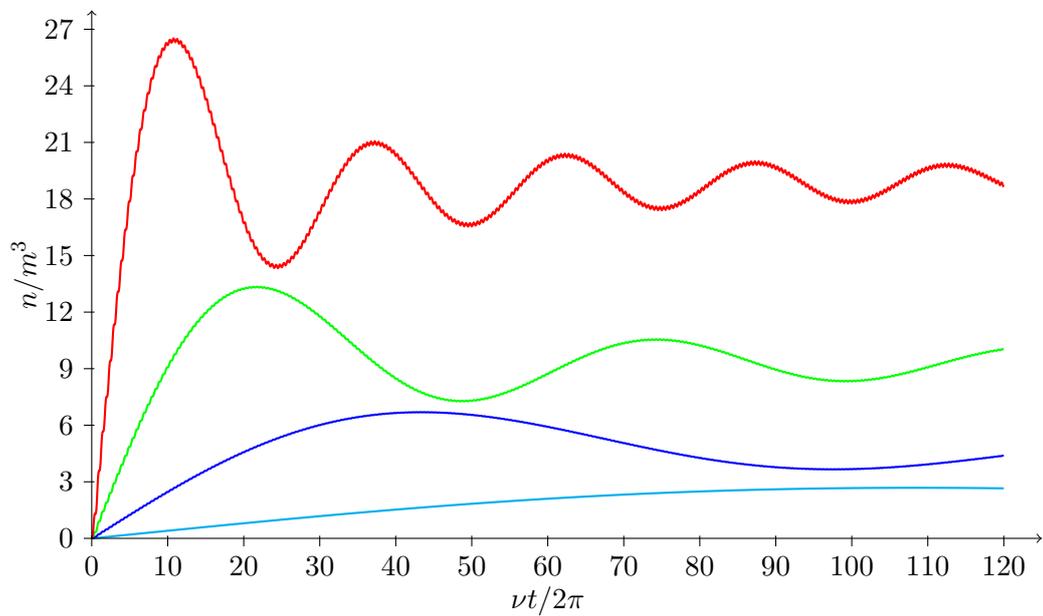


Abbildung 3.6: Die integrierte Teilchendichte in Abhängigkeit der Zeit für $\chi = 0,2$ und verschiedene Werte $\kappa = 0,02$ (türkis), $\kappa = 0,05$ (blau), $\kappa = 0,1$ (grün), $\kappa = 0,2$ (rot)

κ	$\tau_1/2\pi$	$\nu t_{\max}/2\pi$
0,02	99,47	107
0,05	39,79	43
0,1	19,89	22
0,2	9,95	11

Tabelle 3.1: Die Akkumulationszeit τ_1 der ersten Schale verglichen mit der Zeit νt_{\max} bei der die integrierte Dichte n ihr erstes Maximum erreicht, bei konstantem $\chi = 0,2$ und verschiedene Werte κ .

erste Schale erlaubt und liefert einen großen Beitrag zur Dichte. Diese steigt bis zu einem Maximum an, bei dem die erste Schale gesättigt ist. Der Pauli-Term in Gl. (2.28) lässt dann die Punkte in der Umgebung der Schale Oszillationen mit wesentlich kleineren Frequenzen durchführen, die zu der langsamen Oszillation von n führt. Die Dichte ist für $\chi = 0,4$ vor allem darum kleiner als für $\chi = 0,2$, weil der Schalenradius kleiner ist ($0,75 m$ gegen $2,29 m$) und so das Phasenraumvolumen geringer ist.

Für die **blaue** $\chi = 0,6$ -Kurve ist hingegen erst die zweite Schale erlaubt, die nur wesentlich geringere Beiträge liefert und auch langsamer akkumuliert. Trotzdem erkennt man bei genauem hinsehen, dass auch diese Kurve ansteigt.

In Abbildung 3.6 vergleichen wir die integrierte Dichte n für konstantes $\chi = 0,2$ und variierende κ . Mit steigendem κ wächst die Dichte und das erste Maximum wird bei früheren Zeiten erreicht. Wir wollen nun betrachten, wie sich dieses Maximum zu den analytisch abgeschätzten Akkumulationszeiten verhält. In Tabelle 3.1 ist die Akkumulationszeit der ersten Schale gemäß Gl. (2.59) zusammen mit der Zeit, bei der das erste Maximum auftritt, dargestellt. Die Übereinstimmung mit der sehr groben Abschätzung der Akkumulationszeit ist bemerkenswert gut. Wenn $\chi > 0,5$ ist, d.h wenn die erste Schale nicht mehr erlaubt ist, wird die Übereinstimmung schlechter als in unserem Fall, weil dann die Phasenraumfaktoren, die bei der Definition von τ_n vernachlässigt wurden, stärker ins Gewicht fallen.

3.4 Langsames Ein- und Ausschalten

Im letzten Abschnitt haben wir Ergebnisse der numerischen Simulation der kinetischen Gleichung betrachtet, wenn das Feld abrupt ein- und wieder ausgeschaltet wird. Das korrespondiert mit der Formfunktion (2.36). Wir wollen jetzt betrachten, ob die dabei erzielten Ergebnisse auch bestehen bleiben, wenn man das Feld langsam ein- und ausschaltet, d.h. die Formfunktion (2.41) verwendet.

Wegen der besonderen Eigenschaften des C^∞ -Pulses können wir das Floquet-Theorem leicht abgewandelt weiter verwenden. Wie im Abschnitt 2.4 erwähnt, gilt

$$g(b \leq \tau \leq a + b) = 1, \tag{3.5}$$

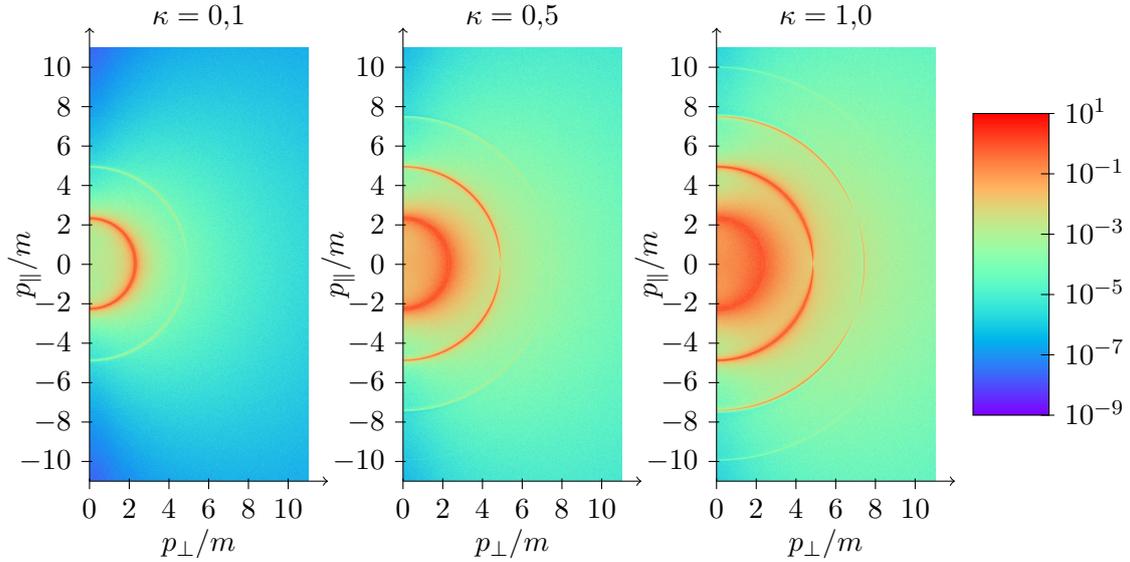


Abbildung 3.7: Die Teilchendichte f in Abhängigkeit des Impulses für $\chi = 0,2$ und verschiedene Werte $\kappa = 0,1$ (links), $0,5$ (mitte), $2,0$ (rechts). Das Feld wurde über 50 Perioden langsam ein- und ausgeschaltet und war dazwischen über 10^{10} Perioden an.

also ist die Koeffizientenmatrix für diese Zeiten periodisch. Wir müssen die Differentialgleichung daher nur für das Anschalten, für eine Periode des „flat top“ und das Ausschalten lösen. Die Zwischenwerte erhält man über Matrixmultiplikation. Damit hängt der Rechenaufwand nur logarithmisch von der Breite des Pulses, aber linear von der Länge des Ein- und Ausschaltvorgangs ab, ist also von der Ordnung $\mathcal{O}(b + \ln a)$.

In Abbildung 3.7 betrachten wir die Phasenraumverteilung von f für einen sehr langen Puls, $a = 10^{10} \cdot 2\pi$, der über 50 Perioden ein- und wieder ausgeschaltet wird, $b = 50 \cdot 2\pi$. Dies dient dazu, um uns das Langzeitverhalten zu verdeutlichen und sicherzugehen, dass selbst zu sehr späten Zeiten keine Überraschungen lauern. Dieses Bild beantwortet uns auch die Frage, wo im Phasenraum nach dem Ausschalten eine Residualdichte verbleibt. Denn wenn das E -Feld gleich Null ist, wird auch Q in Gl. (2.28) zu Null. Da $\dot{f} \propto Q$ gilt, ist demnach bei ausgeschaltetem Feld $\dot{f} = 0$ bzw. $f = \text{const}$. Somit ist in Abbildung 3.7 eine tatsächlich messbare Elektronen/Positronen-Verteilung im Phasenraum zu sehen. Wie bereits vermutet, verbleibt für kleine κ im Wesentlichen nur auf den Akkumulationsschalen eine Dichte. Die Abbildungen 3.7 und 3.3 sind sich sehr ähnlich, woraus wir schließen, dass der Ausschaltvorgang keinen wesentlichen Einfluss auf die Dichte hat. Tatsächlich lässt er Oszillationen von f , die mit der Frequenz des Feldes ν ablaufen, gegen Null gehen. Das beseitigt auch die Asymmetrien in der Variablen p_{\parallel} aus Abbildung 3.3⁵. Die Akkumulation auf den Schalen bleibt davon aber unberührt und deswegen sind sie nach dem Ausschalten

⁵Diese Asymmetrien liegen daran, dass die Verteilungen zu vollen Perioden abgebildet sind. Zu diesen Zeiten hat A ein Maximum und gibt damit eine Vorzugsrichtung für p_{\parallel} vor. Unsere Formfunktion beseitigt diese Vorzugsrichtung, wenn wir zusätzlich noch eine Phasenverschiebung einbauen, die $\int_{-\infty}^{\infty} A(t)dt = 0$ macht.

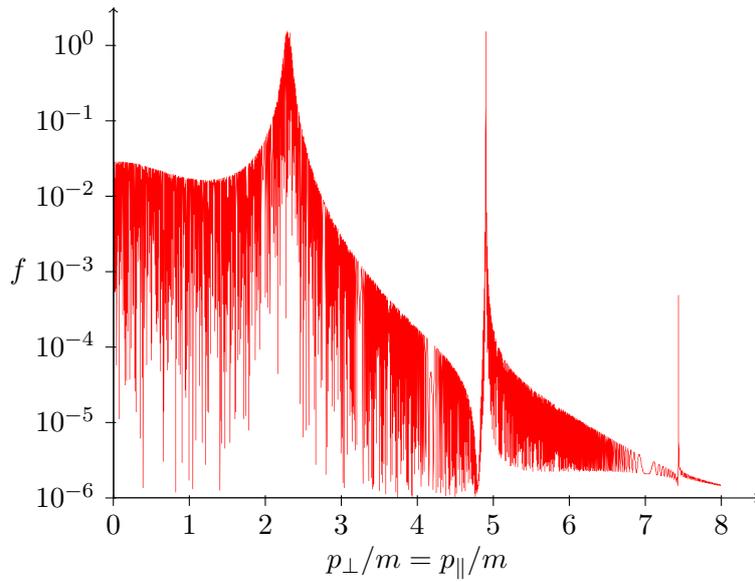


Abbildung 3.8: Die Dichte f auf der $p_{\perp} = p_{\parallel}$ -Geraden im Phasenraum für $\kappa = 0,1$ und $\chi = 0,2$ und für ein abrupt ein- und ausgeschaltetes Feld nach 10^5 Perioden.

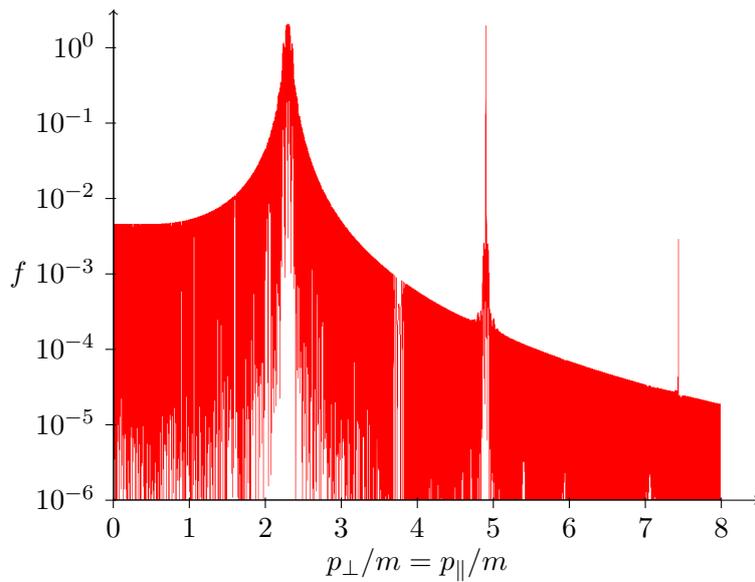


Abbildung 3.9: Die Dichte f auf der $p_{\perp} = p_{\parallel}$ -Geraden im Phasenraum für $\kappa = 0,1$ und $\chi = 0,2$ und für ein langsam ein- und ausgeschaltetes Feld nach 10^5 Perioden.

auch noch vorhanden.

Um das etwas besser zu verstehen, betrachten wir f auf der $p_{\perp} = p_{\parallel}$ -Geraden im Phasenraum. In Abbildung 3.8 ist dieser Schnitt für ein abrupt ein- und ausgeschaltetes Feld zu sehen, und in Abbildung 3.9 für ein langsam ein- und ausgeschaltetes, wobei das Feld in beiden Fällen gleich lang an war. Die ersten drei Schalen sind bei beiden von der selben Gestalt, werden also vom Ausschalten nicht beeinflusst. Hingegen nimmt f für $p_{\perp} = p_{\parallel} < m$

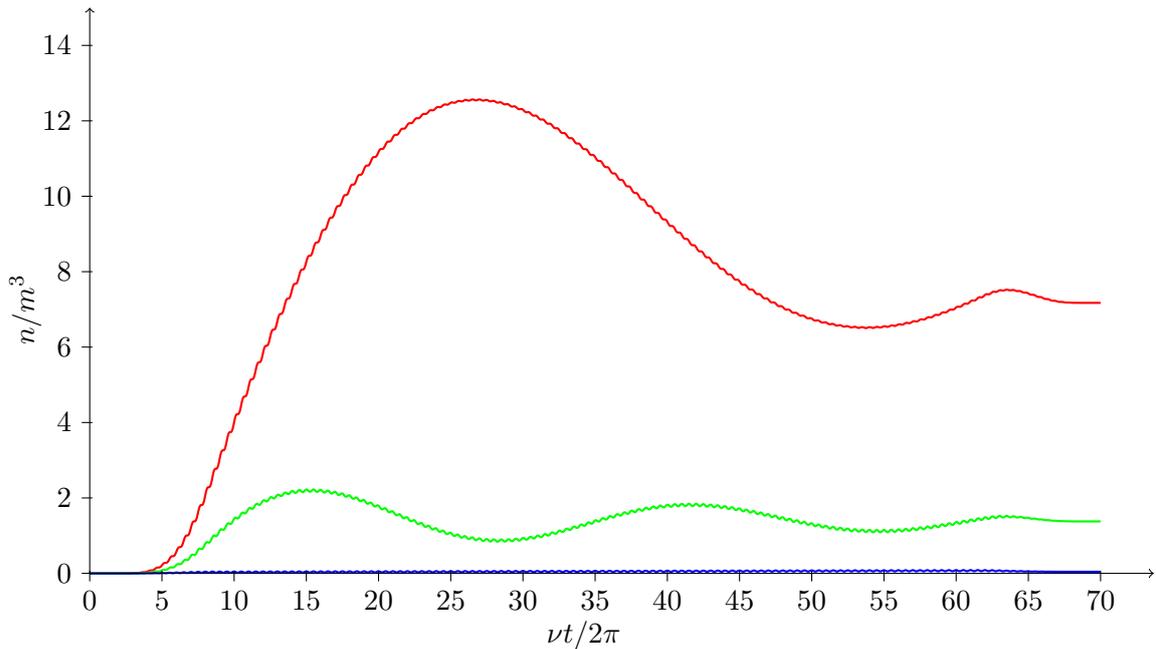


Abbildung 3.10: Die integrierte Teilchendichte in Abhängigkeit der Zeit für $\kappa = 0,1$ und verschiedene Werte $\chi = 0,2$ (rot), $\chi = 0,4$ (grün), $\chi = 0,6$ (blau). Das Feld wurde über 10 Perioden langsam ein- und ausgeschaltet und war dazwischen über 50 Perioden an.

während des Ausschaltens deutlich ab, da die Dichte in diesem Bereich die Oszillationen mit der Frequenz ν durchführt, die durch das Ausschalten verschwinden. Auch die Nullstelle direkt vor der zweiten Schale verschwindet dadurch, da diese ein Resultat der Asymmetrie in p_{\parallel} ist.

Das spiegelt sich auch in der impulsintegrierten Dichte wieder, die in Abbildung 3.10 dargestellt ist. Die gewählten Parameter sind dieselben wie in Abbildung 3.5. Man sieht deutlich, wie die Oszillationen durch das Ausschalten verschwinden und eine konstante, messbare Residualdichte verbleibt. Insbesondere für die blaue $\chi = 0,6$ -Kurve geht n bis auf geringe Beiträge der zweiten Schale wieder auf Null zurück.

Dies beschließt unsere Betrachtungen zum dynamischen Schwinger-Effekt. Im folgenden Kapitel werden wir der für die Starkfeld-QED im allgemeinen und die Paarproduktion im spezifischen sehr wichtigen Frage nach der Existenz von verallgemeinerten Volkov-Lösungen nachgehen.

4 Untersuchungen von verallgemeinerten Volkov-Lösungen

Eine exakte, in analytischer Form angebbare Lösung der Dirac-Gleichung im Feld einer ebenen elektromagnetischen Welle wurde erstmals von Volkov (in deutscher Transkription auch Volkoff) gefunden [Vol37]. Sie wird nach ihm Volkov-Lösung genannt. Ziel dieses Kapitels ist es, die Theorie dieser Wellenfunktionen darzustellen und nach möglichen Verallgemeinerungen zu suchen, die es ggf. ermöglichen, Paarerzeugung zu beschreiben. Die Abschnitte 4.1 und 4.2 folgen dabei [Bag90] und [Lan80].

4.1 Dirac- und Klein-Gordon-Gleichung

Die Dirac-Gleichung mit minimal angekoppeltem Maxwell-Feld lautet

$$\left(i(\not{\partial} + ie\mathcal{A}(x)) - m\right)\psi(x) = 0. \quad (4.1)$$

Sie lässt sich oft besser handhaben, indem man ihre „quadrierte“ Form, d.h. die iterierte Dirac-Gleichung, betrachtet. Diese erhält man, indem man die Gleichung mit dem adjungierten Dirac-Operator $i(\not{\partial} + ie\mathcal{A}(x)) + m$ multipliziert:

$$\left((\not{\partial} + ie\mathcal{A}(x))^2 + m^2\right)\psi(x) = 0. \quad (4.2)$$

Der Term $(\not{\partial} + ie\mathcal{A})^2$ wird wie folgt umgeformt:

$$\begin{aligned} (\not{\partial} + ie\mathcal{A})^2 &= \not{\partial}^2 - (e\mathcal{A})^2 + ie\not{\partial}\mathcal{A} + ie\mathcal{A}\not{\partial} \\ &= \partial^2 - (e\mathcal{A})^2 + ie(\not{\partial}\mathcal{A}) + ie\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}A^\mu\partial^\nu, \end{aligned} \quad (4.3)$$

wobei der auftretende Antikommutator $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$ gerade auf die Metrik $g_{\mu\nu}$ führt. Das Resultat kann man mit der Klein-Gordon-Gleichung vergleichen:

$$\left(\partial^2 - (e\mathcal{A})^2 + 2ie\mathcal{A}\cdot\partial + ie(\not{\partial}\mathcal{A}) + m^2\right)\psi = 0 \quad \text{iterierte Dirac-Gleichung,} \quad (4.4)$$

$$\left(\partial^2 - (e\mathcal{A})^2 + 2ie\mathcal{A}\cdot\partial + m^2\right)\phi = 0 \quad \text{Klein-Gordon-Gleichung.} \quad (4.5)$$

Der Unterschied zwischen den Gleichungen besteht zunächst im Spinorterm $ie(\not{\partial}\mathcal{A})$. Zudem ist ψ ein Dirac-Bispinor mit dem Transformationsverhalten $\psi \rightarrow \psi' = S(\Lambda)\psi$ unter Poincaré-

Transformation, während ϕ eine skalare Wellenfunktion ist. Außerdem ist zu beachten, dass man bei der Lösung von (4.4) doppelt so viele linear unabhängige Lösungen erhält, als die Ursprungsgleichung eigentlich besaß. Die überflüssigen Lösungen kann man durch Einsetzen von ψ in die ursprüngliche Dirac-Gleichung herausprojizieren.

4.2 Volkov-Zustände

Die Volkov-Zustände sind Lösungen der Dirac- (4.4) bzw. Klein-Gordon-Gleichung (4.5) im Feld einer ebenen elektromagnetischen Welle, wobei dieser Begriff hier in etwas weiterer Bedeutung als gewöhnlich gebraucht wird. Das Vierer-Potential einer ebenen Welle soll definiert sein durch

$$A = A(\varphi), \quad \varphi = k \cdot x, \quad \text{mit} \quad k^2 = 0. \quad (4.6)$$

Dabei ist φ die invariante Phase des Feldes. A' soll im Folgenden die Ableitung nach φ bedeuten, d.h. $A'(\varphi) = dA(\varphi)/d\varphi$. Die hier verwendete Lorenz-Eichbedingung wird dadurch zu

$$\partial_\mu A^\mu(\varphi) = (\partial_\mu \varphi) A'^\mu(\varphi) = k_\mu A'^\mu(k \cdot x) = k \cdot A'(k \cdot x) = 0. \quad (4.7)$$

Damit muss $k \cdot A$ gleich einer Konstanten sein, die man Null setzen kann, da die Addition einer Konstanten zu A weder die Observablen verändert noch die Eichbedingung verletzt. Somit erhält man $k \cdot A = 0$. Man kann sich diese Gleichung als die eigentliche Eichbedingung vorstellen, die letztlich nur die Lorenzsche impliziert.

Es verbleibt noch eine weitere frei wählbare Bedingung, um die Zahl der Freiheitsgrade auf die richtige Zahl von zwei zu reduzieren. Man nutzt die verbliebene Eichfreiheit und setzt z.B. $A^0 = 0$. Somit bleibt

$$A(x) = (0, \mathbf{A}(k \cdot x)), \quad k^2 = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = k \cdot A = 0. \quad (4.8)$$

Da das so festgelegte A -Feld nur von einer Variablen, der Lichtkegelkoordinate φ , abhängt, ist es naheliegend, auch ψ in (4.4) ähnlich anzusetzen:

$$\psi(x) = F(\varphi)u(p)e^{-ip \cdot x}, \quad p^2 = m^2. \quad (4.9)$$

Dabei ist $u(p)$ ein Spinor und $F(\varphi)$ eine Dirac-Matrix. Setzt man (4.9) in (4.4) ein und

beachtet (4.8), so findet man

$$\begin{aligned} & \left(k^2 F'' + 2ie(k \cdot A)F' - 2i(p \cdot k)F' + \left(2e(p \cdot A) - (eA)^2 + ie\cancel{k}A' \right) F \right) \\ & \quad \times u(p)e^{-ip \cdot x} = 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$F'(\varphi) = \left[\frac{e\cancel{k}A'(\varphi)}{2p \cdot k} - i \left(\frac{ep \cdot A}{p \cdot k} - \frac{(e \cdot A)^2}{2p \cdot k} \right) \right] F(\varphi).$$

Man beachte insbesondere, dass die hier für spätere Zwecke angegebene zweite Ableitung (erster Term) durch die Lichtkegelbedingung $k^2 = 0$ herausfällt, ebenso der zweite Term $\propto k \cdot A$. Für Anfangsbedingungen $A(\varphi \leq 0) = 0$ integriert man von dieser unteren Grenze und erhält

$$F(\varphi) = \exp \left[-i \int_0^\varphi \left(\frac{ep \cdot A(\varphi')}{p \cdot k} - \frac{(eA(\varphi'))^2}{2p \cdot k} \right) d\varphi' + \frac{e\cancel{k}A(\varphi)}{2p \cdot k} \right]. \quad (4.11)$$

Der spinorielle Term, $\cancel{k}A$, ist nilpotent, weil

$$(\cancel{k}A)^2 = \cancel{k}A\cancel{k}A = 2(k \cdot A)\cancel{k}A - \cancel{k}\cancel{k}AA = -k^2 A^2 = 0. \quad (4.12)$$

Somit bricht die Exponentialfunktion dieses Terms nach der ersten Ordnung ab, wodurch sich folgende Lösung für ψ ergibt:

$$\psi = \left(1 + \frac{e\cancel{k}A}{2p \cdot k} \right) u(p)e^{-iS}, \quad S(x) = p \cdot x + \int_0^{k \cdot x} \left(\frac{ep \cdot A(\varphi)}{p \cdot k} - \frac{(eA(\varphi))^2}{2p \cdot k} \right) d\varphi. \quad (4.13)$$

$S(x)$ nennt man auch die Volkov-Phase. Da bis hierhin noch keine Aussage über den Spinor $u(p)$ getroffen wurde, hätte man noch 4 linear unabhängige Lösungen mit positiver Energie, d.h. für das Elektron. Wie erwähnt werden die überflüssigen Lösungen durch nochmaliges Einsetzen in die einfache Dirac-Gleichung herausprojiziert. Dabei erhält man

$$\left(1 + \frac{e}{2p \cdot k} \cancel{k}A \right) (\not{p} - m)u(p)e^{-iS} = 0, \quad (4.14)$$

also $(\not{p} - m)u = 0$. Damit verbleiben als Lösung für $u(p)$ genau die freien Spinoren für das Elektron, $u_r(p)$, wobei $r = 1, 2$ einen Spin-Index bezeichnet. Deren genaue Form findet man zusammen mit den übrigen Konventionen für Spinoren im Anhang A.2.

Für die Lösungen negativer Energie, die Positronen, führt man den Übergang $p \rightarrow -p$ im Endergebnis durch bzw. ersetzt u_r durch v_r . So erhält man die vier linear unabhängigen

Volkov-Lösungen für Elektronen (+) und Positronen (-):

$$\begin{aligned}
 \Psi_{rp}^{(+)}(x) &= \left(1 + \frac{e\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}(k\cdot x)}{2p\cdot k}\right) u_r(p) e^{-ip\cdot x} \\
 &\quad \times \exp\left[-i\int_0^{k\cdot x}\left(\frac{ep\cdot A(\varphi)}{p\cdot k} - \frac{(e\cdot A(\varphi))^2}{2p\cdot k}\right)d\varphi\right], \\
 \Psi_{rp}^{(-)}(x) &= \left(1 - \frac{e\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}(k\cdot x)}{2p\cdot k}\right) v_r(p) e^{ip\cdot x} \\
 &\quad \times \exp\left[-i\int_0^{k\cdot x}\left(\frac{ep\cdot A(\varphi)}{p\cdot k} + \frac{(e\cdot A(\varphi))^2}{2p\cdot k}\right)d\varphi\right].
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Neben dem Spin-Index r ist hier noch die Impulsabhängigkeit durch den Index p hervorgehoben. Diese Wellenfunktionen sind sowohl orthogonal, als auch vollständig.

Probleme der Volkov-Zustände für Paarerzeugung

Obwohl es nach den Worten Karl Schwarzschilds „immer angenehm [ist], über strenge Lösungen einfacher Form zu verfügen“, ist die Volkov-Lösung doch ungeeignet, um damit Teilchenproduktion zu beschreiben, weil eine ebene Welle keine Paare erzeugen kann. Dafür lassen sich zwei miteinander verwandte Gründe angeben.

Zum einen kann man die beiden Lorentz-Invarianten des elektromagnetischen Feldes

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} &= -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2, \\
 \mathcal{G} &= \frac{1}{2}\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

betrachten. Dabei ist \mathcal{F} eine Skalar und \mathcal{G} ein Pseudoskalar, d.h. unter einer Paritätstransformation ändert \mathcal{G} sein Vorzeichen, und \mathcal{F} nicht. Sie sind sowohl Lorentz- als auch eichinvariant. Paarerzeugung ist ein elektrisches Phänomen und daher nur für $\mathcal{F} > 0$ möglich¹ [Fra91]. Für (4.8) ist aber, wie sich leicht nachrechnen lässt, $\mathcal{F} = 0$.

Zum anderen kann man sich etwas anschaulicher verdeutlichen, dass es bei einer ebenen Welle keine Lorentz-invariante Energieskala gibt. Oder praktisch ausgedrückt: In einem Bezugssystemen, dass sich von uns aus gesehen in Richtung der Welle bewegt hat sie eine niedrigere Energie. Ist die Relativgeschwindigkeit zwischen unserem und dem bewegten System genügend groß, ist in letzterem die Energie der Welle $< 2m$, also nicht ausreichend, um ein e^+e^- -Paar zu erzeugen.

Somit benötigt man, um Teilchenproduktion zu untersuchen, Verallgemeinerungen der Volkov-Lösung in einem elektromagnetischen Feld, dessen skalare Invariante größer als Null

¹Diese Bedingung unterscheidet auf relativistisch invariante Weise rein elektrische von rein magnetischen Feldern.

ist. Die einfachste Möglichkeit dafür ist die Überlagerung mehrerer ebener Wellen.

4.3 Verallgemeinerung auf mehrere ebene Wellen

Es ist nun das Ziel zu versuchen, obige Herleitung der Volkov-Lösungen analog auf den Fall mehrerer sich überlagernder ebener Wellen zu übertragen, d.h. der Ansatz (4.8) wird erweitert auf

$$A(x) = \sum_{i=1}^n A_i(k_i \cdot x), \quad k_i^2 = 0, \quad A_i = (0, \mathbf{A}_i), \quad k_i \cdot A_i = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{A}_i = 0. \quad (4.17)$$

Das Gesamt-Vierer-Potential A erfüllt also wieder die Lorenz-Eichung, aber auch jedes A_i für sich, was zumindest für den Fall $n > 3$ eine stärkere Forderung darstellt. Das ist eine sinnvolle Forderung, da dieses Potential nicht so allgemein wie möglich gewählt werden soll, sondern als Superposition mehrerer Felder der Form (4.8). Die Feldinvarianten sind

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \sum_{i \neq j} ((k_i \cdot A'_j)(k_j \cdot A'_i) - (k_i \cdot k_j)(A'_i \cdot A'_j)), \\ \mathcal{G} &= \sum_{i \neq j} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_i^\mu A_i^\nu k_j^\rho A_j^\sigma, \end{aligned} \quad (4.18)$$

womit man $\mathcal{F} > 0$ durch geeignete Wahl der A_i erreichen kann.

Da man es jetzt mit n Phasen, $\varphi_i := k_i \cdot x$, $i = 1 \dots n$, zu tun hat, ist es naheliegend, in Analogie zu (4.9) folgenden Ansatz für ψ zu wählen:

$$\psi(x) = F(k_1 \cdot x, \dots, k_n \cdot x) u(p) e^{-ip \cdot x}. \quad (4.19)$$

Beim Einsetzen in (4.4) treten mehr Terme auf, insbesondere und entscheidend eine gemischte zweite partielle Ableitung von F :

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{i \neq j} k_i \cdot k_j \frac{\partial^2}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} - 2i \sum_i k_i \cdot \left(p - e \sum_{j(\neq i)} A_j(\varphi_j) \right) \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \right. \\ & \left. + 2e \sum_i p \cdot A_i(\varphi_i) + ie \sum_i k_i A'_i(\varphi_i) - e^2 \sum_{i,j} A_i(\varphi_i) \cdot A_j(\varphi_j) \right] F(\{\varphi_i\}) = 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Um nach einer Lösung oder wenigstens einer Vereinfachung der Gleichung zu suchen, werden zwei Einschränkungen getroffen:

1. Es werden $n = 2$ linear polarisierte ebene Wellen betrachtet.
2. Der Spinterm $ie \sum_i k_i A'_i$ bleibt unberücksichtigt, d.h. anstatt der Dirac-Gleichung wird die Klein-Gordon-Gleichung betrachtet. Das erspart den Umgang mit der Dirac-Algebra,

was insofern nützlich ist, als dass man sich auf die Struktur der Differentialgleichung konzentrieren kann.

Zunächst soll die Kinematik der Ausgangssituation geklärt werden. Es zeigt sich, dass es unter diesen Voraussetzungen ein ausgezeichnetes Bezugssystem gibt, gewissermaßen ein Schwerpunktsystem für zwei Laserstrahlen.

Kinematik für zwei linear polarisierte ebene Wellen

Für den hier betrachteten Spezialfall lautet das A -Feld explizit:

$$A(x) = a_1 f_1(\varphi_1) + a_2 f_2(\varphi_2), \quad a_i = (0, \mathbf{a}_i), \quad k_i \cdot a_i = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{a}_i = k_i^2 = 0. \quad (4.21)$$

Man hat für \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 jeweils drei Freiheitsgrade. Abzüglich der beiden Zwangsbedingungen bleiben also noch zehn. Doch die Intuition lässt vermuten, dass aufgrund der sechs möglichen Freiheiten, eine Lorentz-Transformation durchzuführen, in Wahrheit nur vier Parameter unabhängig sind. Man stellt fest, dass sich k_1 , k_2 , a_1 und a_2 o.B.d.A. folgendermaßen wählen lassen können² (die Details der Herleitung sind in Anhang A.1 aufgeführt):

$$k_1 = \Omega \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_2 = \Omega \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_1 = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \beta \\ \cos \beta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \beta \\ \cos \beta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Die vier unabhängigen und Lorentz-invarianten Parameter sind die Schwerpunktsenergie Ω , die Feldstärken c_1 und c_2 und der Winkel 2β , den die Polarisationsrichtungen einschließen.

4.4 Lösungsansatz

Gleichung (4.20) lautet für diese kinematische Situation

$$\left[\begin{aligned} & 2k_1 \cdot k_2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} - 2ip \cdot k_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - 2ip \cdot k_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \\ & + 2e(p \cdot a_1) f_1(\varphi_1) + 2e(p \cdot a_2) f_2(\varphi_2) \\ & - e^2 a_1^2 f_1(\varphi_1)^2 - e^2 a_2^2 f_2(\varphi_2)^2 - 2e^2 (a_1 \cdot a_2) f_1(\varphi_1) f_2(\varphi_2) \end{aligned} \right] F = 0, \quad (4.23)$$

²Für diese Schlussfolgerung ist entscheidend, dass $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \neq 0$. Das ist aber keine Einschränkung, denn wäre $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = 0$, ließe sich das resultierende Feld als eine ebene Welle darstellen.

oder in kompakter Form

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} + a \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} + b \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} + cF = 0. \quad (4.24)$$

Mit dem Ansatz $F = e^{-a\varphi_2 - b\varphi_1} G$ geht diese Gleichung über in

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} + (c + ab)G = 0, \quad (4.25)$$

oder

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} = f G. \quad (4.26)$$

Dabei ist die Koeffizientenfunktion f gegeben durch

$$\begin{aligned} f(\varphi_1, \varphi_2) &= \frac{(p \cdot k_1)(p \cdot k_2)}{(k_1 \cdot k_2)^2} - e \frac{p \cdot a_1}{k_1 \cdot k_2} f_1(\varphi_1) - e \frac{p \cdot a_2}{k_1 \cdot k_2} f_2(\varphi_2) \\ &+ \frac{e^2}{2} \frac{a_1^2}{k_1 \cdot k_2} f_1(\varphi_1)^2 + \frac{e^2}{2} \frac{a_2^2}{k_1 \cdot k_2} f_2(\varphi_2)^2 + e^2 \frac{a_1 \cdot a_2}{k_1 \cdot k_2} f_1(\varphi_1) f_2(\varphi_2). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Es lässt sich formal eine einfache Lösung von (4.26) angeben. Durch zweifache Integration überführt man sie in eine Volterrasche Integralgleichung zweiter Art,

$$G(\varphi_1, \varphi_2) = \Phi_1(\varphi_1) + \Phi_2(\varphi_2) + \int_0^{\varphi_1} d\varphi'_1 \int_0^{\varphi_2} d\varphi'_2 f(\varphi'_1, \varphi'_2) G(\varphi'_1, \varphi'_2), \quad (4.28)$$

wobei Φ_1 und Φ_2 die Funktionswerte auf dem Rand vorgeben, also $G(\varphi_1, 0) = \Phi_1(\varphi_1)$ und $G(0, \varphi_2) = \Phi_2(\varphi_2)$. Mit

$$\begin{aligned} G_0(\varphi_1, \varphi_2) &:= \Phi_1(\varphi_1) + \Phi_2(\varphi_2), \\ G_n(\varphi_1, \varphi_2) &:= \int_0^{\varphi_1} d\varphi'_1 \int_0^{\varphi_2} d\varphi'_2 f(\varphi'_1, \varphi'_2) G_{n-1}(\varphi'_1, \varphi'_2), \\ G(\varphi_1, \varphi_2) &:= \sum_{n=0}^{\infty} G_n(\varphi_1, \varphi_2) \end{aligned} \quad (4.29)$$

sieht man leicht, dass das so definierte G die Gl. (4.26) erfüllt. Diese formale Lösung ist aber, von Konvergenzfragen ganz abgesehen, für die hier verfolgten Ziele unbrauchbar, weil die Reihe für weitere Rechnungen zu unhandlich ist.

Gleichung (4.26) ist also nicht für beliebige f_1 und f_2 lösbar³. Für einen einfachen Spezialfall lassen sich aber doch exakte Lösungen angeben. Des Weiteren kann man versuchen, falls

³Mit „lösbar“ ist hier das Zurückführen der Lösung auf eine bekannte Klasse von hinreichend einfachen Funktionen gemeint.

$2k_1 \cdot k_2 = 4\Omega^2$ klein gegen die Elektronenmasse m ist, eine Störungsreihe für F in (4.23) anzusetzen. Beides soll in den folgenden Abschnitten beschrieben werden.

4.5 Lösung für konstante Kreuzfelder

Wir wollen nun, entgegen der üblichen Schlussrichtung, durch „scharfes Hinsehen“ einen Spezialfall finden, für den sich (4.26) lösen lässt, und danach dessen physikalische Situation interpretieren.

Die Koeffizientenfunktion f wird besonders einfach, wenn man \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 parallel oder antiparallel einstellt, d.h. $\beta = 0$ oder $\pi/2$. Dann hat man

$$\begin{aligned} f \Big|_{\beta=0} &= \frac{(p \cdot k_1)(p \cdot k_2)}{(k_1 \cdot k_2)^2} + \frac{ep_y}{k_1 \cdot k_2} (c_1 f_1 + c_2 f_2) - \frac{e^2}{2k_1 \cdot k_2} (c_1 f_1 + c_2 f_2)^2, \\ f \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} &= \frac{(p \cdot k_1)(p \cdot k_2)}{(k_1 \cdot k_2)^2} + \frac{ep_x}{k_1 \cdot k_2} (c_1 f_1 - c_2 f_2) - \frac{e^2}{2k_1 \cdot k_2} (c_1 f_1 - c_2 f_2)^2. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Augenscheinlich bietet sich $\xi = c_1 f_1 \pm c_2 f_2$ als neue Variable für G an, d.h. $G(\varphi_1, \varphi_2) = G(\xi(\varphi_1, \varphi_2))$. Dieser Ansatz funktioniert aber nur, wenn man zusätzlich $f_i(\varphi_i) = \varphi_i$ wählt, denn dadurch wird die zweite gemischte Ableitung

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} G = \pm c_1 c_2 \frac{d^2}{d\xi^2} G. \quad (4.31)$$

Damit vereinfacht sich (4.26) zu der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 G}{d\xi^2} \pm (A(\xi - B)^2 + C)G = 0. \quad (4.32)$$

Dabei gilt „+“ für den antiparallelen und „-“ für den parallelen Fall. $A > 0$, B und C sind Konstanten, deren genaue Form für die weitere Diskussion unerheblich ist.

Für den ersten Fall ist diese Gleichung gerade die eines verschobenen harmonischen Oszillators, dessen Lösungen die bekannten Hermite-Polynome sind. Insbesondere sind sie abzählbar und damit ist der Impuls einer Quantisierungsbedingung unterworfen. Für den zweiten Fall hingegen existieren keine gebundenen Lösungen und der Impuls ist kontinuierlich.

Die Physik hinter diesem so aus der mathematischen Notwendigkeit, eine kompakte Lösung zu finden, gewählten Spezialfall ist die folgende: Werden die Polarisationsrichtungen antiparallel gewählt, so erhält man ein konstantes, homogenes Magnetfeld. Die Quantisierung des Impulses, die aus der Lösung der Oszillorgleichung folgt, reproduziert gerade die bekannten Landau-Niveaus. Man hat nur eine bereits bekannte Lösung neu hergeleitet. Ebenso für parallele Richtungen: Das Feld ist homogen und rein elektrisch, es existieren, wie zu erwarten war, nur Streuzustände und man hat ebenfalls keine neuen Lösungen gefunden.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass bei dem Versuch, eine möglichst einfache

Lösung aus (4.26) abzulesen, man nur die bekannten Fälle für ein konstantes, homogenes elektrisches bzw. magnetisches Feldes gewinnt.

4.6 Störungsreihe

Der entscheidende Term, der eine direkte Lösung von (4.23) und damit (4.26) verhindert, ist die gemischte zweite Ableitung. Es liegt daher nahe, eine Störungsentwicklung in dem Parameter $k_1 \cdot k_2$ zu untersuchen. Das lässt sich auch ebenso leicht für mehr als zwei ebene Wellen durchführen. Also betrachten wir (4.20), allerdings wieder ohne den Spinterm. Diese Gleichung schreiben wir um als $DF = BF + dF$ mit

$$\begin{aligned} D &= \sum_i 2i(p \cdot k_i) \frac{\partial}{\partial \varphi_i}, \\ B(\varphi_1, \dots, \varphi_n) &= \sum_i \left(2e(p \cdot A_i(\varphi_i)) - e^2 \sum_j A_i(\varphi_i) \cdot A_j(\varphi_j) \right), \\ d &= \sum_{i \neq j} \left((k_j \cdot k_j) \frac{\partial^2}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} + 2ie(k_i \cdot A_j(\varphi_j)) \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \right). \end{aligned} \quad (4.33)$$

D und d sind Differentialoperatoren, und B eine Funktion, die von allen φ_i abhängt. Wenn alle $k_i \cdot k_j$ und $ek_i \cdot A_j$ klein gegen die Elektronenmasse m sind, kann man dF als Störung einer „Grundlösung“ F_0 ansehen und auf diese Weise die Lösung entwickeln.

Wir wollen zuerst die Grundlösung bestimmen. Der Ansatz $F_0 = \exp(-i\Gamma)$ führt mit $DF_0 = BF_0$ auf

$$\sum_i 2(p \cdot k_i) \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi_i} = B. \quad (4.34)$$

Dies ist eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung und lässt sich mit Hilfe der Methode der Charakteristiken relativ leicht auflösen:

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi_1, \dots, \varphi_n) &= \frac{1}{n} \sum_i \frac{1}{2(p \cdot k_i)} \int^{\varphi_i} d\varphi B \left(\frac{p \cdot k_1}{p \cdot k_i} (\varphi - \varphi_i) + \varphi_1, \dots, \frac{p \cdot k_n}{p \cdot k_i} (\varphi - \varphi_i) + \varphi_n \right) \\ &\quad + R(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \end{aligned} \quad (4.35)$$

wobei R eine beliebige Funktion ist, für die $DR = 0$ gilt. Sie ist der homogene Anteil der Lösung von Gl. (4.34). Die untere Grenze der Integrale ist beliebig, solange sie für jeden einzelnen Term in der Summe die gleiche ist. Denn dann liefert sie nur einen Term, der sich, wie man durch einige Rechnung bestätigt, in R absorbieren, d.h. durch die homogene Lösung „wegeichen“ lässt. Setzt man B aus Gl. (4.33) in Gl. (4.35) ein, lässt sich ein expliziter

Ausdruck für Γ gewinnen:

$$\begin{aligned}\Gamma(\{\varphi_i\}) &= \sum_i S_i(\varphi_i) + \sum_i \sum_{j \neq k} T_{ijk}(\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k) + R(\{\varphi_i\}), \\ S_i(\varphi_i) &= \frac{1}{2(p \cdot k_i)} \int^{\varphi_i} dt \left(2e(p \cdot A_i(t)) - e^2 A_i^2(t) \right), \\ T_{ijk}(\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k) &= \frac{e^2}{n} \frac{1}{2(p \cdot k_i)} \int^{\varphi_i} d\varphi A_j \left(\frac{p \cdot k_j}{p \cdot k_i} (\varphi - \varphi_i) + \varphi_j \right) \\ &\quad \cdot A_k \left(\frac{p \cdot k_k}{p \cdot k_i} (\varphi - \varphi_i) + \varphi_k \right).\end{aligned}\tag{4.36}$$

Demnach ist Γ eine Summe von Volkov-Phasen S_i für jede der ebenen Wellen und eines Mischterms T_{ijk} . Mit dieser Grundlösung setzt man die volle Lösung als $F = F_0(1 + \delta F_1 + \delta F_2 + \dots)$ an. δF_n sei dabei von der Ordnung ϵ^n und d von ϵ . Einsetzen der Reihe in $DF = BF + dF$ und Gleichsetzen von Termen derselben Ordnung liefert

$$D\delta F_{n+1} = F_0^{-1} d(F_0 \delta F_n).\tag{4.37}$$

Dabei muss man beachten, dass zwar D der Produktregel gehorcht, aber d nicht, weil es eine zweite Ableitung enthält. Gleichung (4.37) lautet ausführlicher

$$\begin{aligned}D\delta F_{n+1} &= \sum_{i \neq j} \left(-k_i \cdot k_j \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi_j} + i \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right) + 2e(k_i \cdot A_j) \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi_i} \right) \delta F_n \\ &\quad - i \sum_{i \neq j} k_i \cdot k_j \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \delta F_n}{\partial \varphi_j} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \delta F_n}{\partial \varphi_i} \right) \\ &\quad + \sum_{i \neq j} \left(k_i \cdot k_j \frac{\partial^2 \delta F_n}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} + 2i(k_i \cdot A_j) \frac{\partial \delta F_n}{\partial \varphi_i} \right).\end{aligned}\tag{4.38}$$

Auf diese Weise lassen sich alle Korrekturen sukzessive berechnen, denn auf der rechten Seite der Gleichung stehen ausschließlich bereits bekannte bzw. vorher berechnete Terme und der Differentialoperator D lässt sich ähnlich wie in (4.34) invertieren. Mit welchem Rechenaufwand das aber praktisch verbunden ist, sieht man, wenn man einmal die Grundlösung F_0 bzw. Γ und die erste Korrektur δF_1 für den Fall $n = 2$ berechnet. Dafür machen wir uns wieder die spezielle Kinematik des Abschnitts 4.3 zu Nutzen und wählen als Phasenfunktionen $f_i(\varphi_i) = \sin \varphi_i$. Wir erhalten direkt aus (4.36)

$$\begin{aligned}\Gamma(\varphi_1, \varphi_2) &= \sum_i \left(e \frac{p \cdot a_i}{p \cdot k_i} \sin \varphi_i - \frac{e^2}{8} \frac{a_i^2}{p \cdot k_i} \sin 2\varphi_i - \frac{e^2}{4} \frac{a_i^2}{p \cdot k_i} \varphi_i \right) \\ &\quad - \frac{e^2}{2} a_1 \cdot a_2 \left(\frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{p \cdot (k_1 + k_2)} + \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{p \cdot (k_1 - k_2)} \right).\end{aligned}\tag{4.39}$$

Gl. (4.38) vereinfacht sich ebenfalls,

$$D\delta F_1 = -2k_1 \cdot k_2 \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi_j} + i \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right). \quad (4.40)$$

Das Ergebnis für δF_1 findet sich in Anhang A.3. Obwohl dieses Ergebnis auf den ersten Blick sehr schön erscheint, existieren zwei Probleme. Praktisch sind die Störterme nämlich schon in der ersten Ordnung zu länglich und kompliziert, um damit sinnvoll weiterrechnen zu können. Das ließe sich vielleicht durch geschickten Einsatz von Computeralgebrasystemen umgehen, jedoch tritt auch ein fundamentaleres Problem auf: Schon in der Grundlösung gibt es einen Faktor $\propto 1/p \cdot (k_1 - k_2) = -1/(2p_z \Omega)$, d.h. für $p_z = 0$ divergiert die Lösung. Das zieht die ganze Herangehensweise in Zweifel, denn es ist nicht offensichtlich, ob diese Divergenz beim Aufsummieren der Störungsreihe verschwindet, oder ob sie doch Ausdruck eines grundlegenden Fehlers ist, den man begeht, wenn man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung durch eine erster Ordnung annähert. Ähnliche divergente Terme finden sich z.B. auch in [Ros93], ohne dass darin auf die Problematik eingegangen wird.

Damit ist der letzte naheliegende Ausweg gescheitert, einfache Lösungen für die Dirac- bzw. Klein-Gordon-Gleichung zu finden, sodass man mit ihnen Teilchenerzeugung beschreiben kann. H. Reiss, einer der Pioniere der Starkfeld-QED, hat in Gesprächen bestätigt⁴, dass auch er vergebens nach solchen Lösungen gesucht hat. Andere Versuche blieben offensichtlich ebenfalls erfolglos.

⁴HIBEF kickoff meeting, DESY, Hamburg, 2.-5. Juni 2013

5 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit haben wir uns mit der Erzeugung von Elektronen-Positronen-Paaren in elektromagnetischen Hintergrundfeldern befasst. Dazu haben wir zwei unterschiedliche Zugänge benutzt, eine quantenkinetischen Gleichung und verallgemeinerte Volkov-Lösungen.

In Kapitel 2 wurde diese quantenkinetische Gleichung aus ersten Prinzipien der Starkfeld-QED und mit Hilfe einer Bogoliubov-Transformation hergeleitet. Das Ergebnis ist Gl. (2.26). Sie wurde dann benutzt, um Schwingers Ergebnis für die Paarproduktionsrate in einem konstanten homogenen elektrischen Feld zu bestätigen und so an bereits bekanntes Wissen anzuschließen. Danach gaben wir einen Überblick über die Parameter, die in die Gleichung eingehen, und nach welchen Kriterien man diese Parameterlandschaft untersuchen kann.

Die Hauptresultate dieses Kapitels sind die Aufdeckung der Schalenstruktur im Impulsraum: Die Quasiteilchendichte f oszilliert nur beschränkt im Phasenraum, bis auf Punkte \mathbf{p} nahe der Akkumulationsschalen, die durch die Energie-Impuls-Relation (2.52) festgelegt sind. Auf diesen wächst sie bis zur Akkumulationszeit (2.59) stetig an. Die resultierende Impulsraumverteilung ist schematisch in Abbildung 2.5 dargestellt. Diese Ableitungen wurden unter der Annahme $\kappa \ll 1$ getätigt und möglicher Gegenstand weiterer Untersuchungen ist es dieses Resultat analytisch auf den entgegengesetzten Fall, $\kappa \gg 1$ zu erweitern. Mit Hilfe der Akkumulationszeiten konnten wir zeigen, dass in der Literatur nur ein vereinfachtes Bild der Parameterlandschaft gezeichnet wird. Die Realität ist komplizierter, erlaubt aber Paarproduktion über einen größeren Parameterbereich.

Der dynamisch assistierte Schwinger-Effekt wurde in dieser Arbeit erstmals für zwei Sinus-förmige Felder betrachtet. Wir konnten in Gl. (2.64) zeigen, dass zu einem ähnlichen Verstärkungseffekt kommt, wie ihn schon andere Autoren für zwei Sauterpulse aufzeigen konnten. Dieses Ergebnis bedarf der gründlichen weiteren Untersuchung, insbesondere numerischer Natur.

Kapitel 3 diente der Überprüfung der analytischen Resultate mittels numerischer Rechnungen. Zuerst konnten wir zeigen, dass sich die Simulation durch Anwendung des Floquet-Theorems maßgeblich beschleunigen und potentiell auch numerisch stabiler machen lässt. Daraufhin haben wir die Existenz und die Eigenschaften der Akkumulationsschalen verifiziert und aufgezeigt, dass sich für $\kappa \gtrsim 1$ die Schalen verformen und schließlich nicht mehr vorhanden sind. Die Näherung ist dann nicht mehr gültig.

Bei der Betrachtung der integrierten Dichte n stellte sich eine hervorragende Übereinstim-

mung mit den Vorhersagen der Akkumulationszeiten heraus. So erreicht n nämlich gerade sein erstes Maximum zur Akkumulationszeit der ersten Schale.

Die letzte wichtige Frage zum dynamischen Schwinger-Effekt war das Ausschaltverhalten. Bisher nahmen wir ein Sinus-förmiges Feld an, das zu einer vollen Periode abrupt ein- und wieder ausgeschaltet wird. Als realistischere Formfunktion konstruierten wir uns einen sogenannten C^∞ -Puls, der ein langsames Ein- und Ausschalten realisiert. Als wesentliches Ergebnis kann man festhalten, dass durch das Ausschalten Oszillationen der Dichte, die mit der Frequenz ν des äußeren Feldes ablaufen, zum verschwinden gebracht werden. Hin- gegen bleiben die Dichte auf den Akkumulationsschalen bestehen, d.h. die verbleibende Residualdichte ist im wesentlichen in diesen Phasenraumbereichen messbar.

In Kapitel 4 begaben wir uns auf die Suche nach Verallgemeinerungen der Volkov-Lösungen. Dieser Zugang ist etwas allgemeiner, aber auch dementsprechend schwieriger, als die kinetische Gleichung. Zuerst haben wir die Theorie der Volkov-Lösungen dargestellt, um dann plausible und möglichst einfache Erweiterungen aufzustellen. Für den Fall zweier sich überlagernder ebener Wellen konnten wir zeigen, dass es stets ein ausgezeichnetes Bezugssystem gibt, in dem diese Wellen die gleiche Frequenz haben und aufeinander zu laufen.

Wir leiteten dann eine allgemeine Differentialgleichung für diese kinematische Situation ab und gaben eine Lösung in Form einer unendlichen Reihe an, die aber für unsere Zwecke leider unbrauchbar war. Für zwei Spezialfälle konnten wir Lösungen angeben, die aber nur bereits bekannte Ergebnisse reproduzierten. Mittels eines Störungsansatzes ließ sich allgemein eine Grundlösung und deren erste Korrektur angeben. Aber auch dieser Ansatz war nicht voll zufrieden stellend.

Da die Untersuchung der kinetischen Gleichung fruchtbringender war, als die Suche nach verallgemeinerten Volkov-Lösungen, ziehen wir sie für weitergehender Überlegungen vor. Besonders vielversprechend scheint die Betrachtung des dynamisch assistierten Schwinger-Effekts unter dem Gesichtspunkt der Akkumulationsschalen.

A Zu verallgemeinerten Volkov-Lösungen

A.1 Explizite Transformationsabfolge für Schwerpunktsystem

Von Gl. (4.21) ausgehend wollen wir ein spezielles Bezugssystem möglichst hoher Symmetrie finden, indem es nur noch vier explizit freie Parameter gibt. Dazu muss man eine Reihe von Lorentz- und Eichtransformationen durchführen. Um Notationen wie k'_1 für transformierte Größen nicht zu überfrachten, soll „ \rightarrow “ zur Bezeichnung einer Transformation benutzt werden. Zuerst wird das System so gedreht, dass \mathbf{k}_1 und \mathbf{k}_2 in der x - z -Ebene liegen und mit der x -Achse jeweils den Winkel α einschließen. Da die \mathbf{a}_i jeweils senkrecht auf den k_i stehen müssen, ist also

$$\begin{aligned}
 k_1 \rightarrow \omega_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, & \quad k_2 \rightarrow \omega_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \alpha \\ 0 \\ -\sin \alpha \end{pmatrix}, \\
 a_1 \rightarrow c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \alpha \cos \beta_1 \\ \sin \beta_1 \\ -\cos \alpha \cos \beta_1 \end{pmatrix}, & \quad a_2 \rightarrow c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \alpha \cos \beta_2 \\ \sin \beta_2 \\ \cos \alpha \cos \beta_2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Da es jetzt keine Freiheit bezüglich einer Rotation mehr gibt, sollten noch $10 - 3 = 7$ Parameter verbleiben; diese sind $\omega_1, \omega_2, \alpha, c_1, c_2, \beta_1$ und β_2 .

Jetzt möchte man so transformieren, dass \mathbf{k}_1 und \mathbf{k}_2 nur entlang der z -Achse liegen. Man setzt einen Boost in x -Richtung an als

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Lk_1 = \omega \begin{pmatrix} \gamma - \gamma v \cos \alpha \\ \gamma \cos \alpha - \gamma v \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}. \tag{A.2}$$

Somit muss $\gamma \cos \alpha - \gamma v = 0$ bzw. $v = \cos \alpha$ sein¹. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
 k_1 &\rightarrow \omega_1 \sin \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & k_2 &\rightarrow \omega_2 \sin \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
 a_1 &\rightarrow c_1 \begin{pmatrix} -\cos \alpha \cos \beta_1 \\ \cos \beta_1 \\ \sin \beta_1 \\ -\cos \alpha \cos \beta_1 \end{pmatrix}, & a_2 &\rightarrow c_2 \begin{pmatrix} -\cos \alpha \cos \beta_2 \\ \cos \beta_2 \\ \sin \beta_2 \\ \cos \alpha \cos \beta_2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Ein weiterer Boost entlang der neuen z -Achse ermöglicht, die Frequenzen anzugleichen: (o.B.d.A. $\omega_1 \geq \omega_2$)

$$L = \frac{1}{2\sqrt{\omega_1\omega_2}} \begin{pmatrix} \omega_1 + \omega_2 & 0 & 0 & \omega_2 - \omega_1 \\ 0 & 2\sqrt{\omega_1\omega_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{\omega_1\omega_2} & 0 \\ \omega_2 - \omega_1 & 0 & 0 & \omega_1 + \omega_2 \end{pmatrix}, \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
 k_1 &\rightarrow \sqrt{\omega_1\omega_2} \sin \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & k_2 &\rightarrow \sqrt{\omega_1\omega_2} \sin \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
 a_1 &\rightarrow c_1 \begin{pmatrix} -\frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_1\omega_2}} \cos \alpha \cos \beta_1 \\ \cos \beta_1 \\ \sin \beta_1 \\ -\frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_1\omega_2}} \cos \alpha \cos \beta_1 \end{pmatrix}, & a_2 &\rightarrow c_2 \begin{pmatrix} -\frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1\omega_2}} \cos \alpha \cos \beta_2 \\ \cos \beta_2 \\ \sin \beta_2 \\ \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1\omega_2}} \cos \alpha \cos \beta_2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Die Idee hinter diesen Boosts erschließt sich besser aus Abb. A.1. Weiter eicht man A durch $A \rightarrow A + \partial\lambda$ um, wobei

$$\lambda(x) = \frac{c_1 \cos \beta_1}{\omega_1 \tan \alpha} \int_0^{k_1 \cdot x} d\varphi f_1(\varphi) + \frac{c_2 \cos \beta_2}{\omega_2 \tan \alpha} \int_0^{k_2 \cdot x} d\varphi f_2(\varphi), \tag{A.6}$$

¹Da $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \neq 0$ ist, gilt $v < 1$.

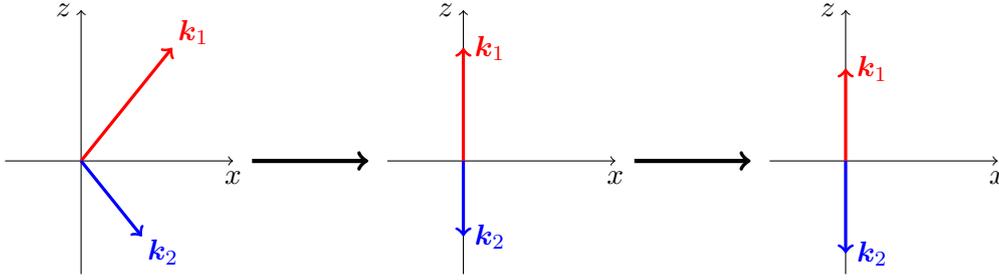


Abbildung A.1: Abfolge der Transformationen, um die ebenen Wellen in das Head-on-System zu transformieren.

was im Endeffekt nur die t - und z -Komponente der a_i verschwinden lässt:

$$a_1 \rightarrow c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \beta_1 \\ \sin \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 \rightarrow c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \beta_2 \\ \sin \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Jetzt gibt es wieder eine Rotationssymmetrie um die z -Achse, durch die wir \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 so wählen können, dass sie mit der y -Achse denselben Winkel einschließen. Somit erhält man

$$k_1 \rightarrow \Omega \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_2 \rightarrow \Omega \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_1 \rightarrow c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \beta \\ \cos \beta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 \rightarrow c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \beta \\ \cos \beta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Dabei gilt weiterhin (4.21). Tatsächlich hat man jetzt 4 freie Parameter: die Schwerpunktsenergie $\Omega = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \sin \alpha$, die beiden Feldstärken c_1 und c_2 , sowie den Winkel 2β , den \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 einschließen. Die wirkliche Vereinfachung besteht darin, dass zusätzlich $k_1 \cdot a_2 = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = k_2 \cdot a_1 = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{a}_1 = 0$ gilt, was einige Terme in der iterierten Dirac-Gleichung zu Null macht.

Die Feldinvarianten vereinfachen sich zu

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= 4\Omega^2 c_1 c_2 \cos 2\beta f_1'(\varphi_1) f_2'(\varphi_2), \\ \mathcal{G} &= -4\Omega^2 c_1 c_2 \sin 2\beta f_1'(\varphi_1) f_2'(\varphi_2). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

A.2 Spinorkonventionen

Die Gamma-Matrizen sind komplexe 4×4 Matrizen, für die wir die Weyl- oder auch chirale Darstellung benutzen:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^\mu = (1, \sigma^i), \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i). \quad (\text{A.10})$$

Das bedeutet ausgeschrieben

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Dabei sind σ^i die Pauli-Matrizen, $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ und $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Die fundamentale Identität der gesamten Dirac-Algebra ist die Antikommutativitätsrelation

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.12})$$

Die Basisspinoren $u_r(p)$ und $v_r(p)$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} u_1(p) &= \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2(E+m)}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & u_2(p) &= \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2(E+m)}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ v_1(p) &= \frac{\not{p} - m}{\sqrt{2(E+m)}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, & v_2(p) &= \frac{\not{p} - m}{\sqrt{2(E+m)}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Sie erfüllen die Dirac-Gleichung

$$(\not{p} - m)u_r(p) = (\not{p} + m)v_r(p) = 0, \quad (\text{A.14})$$

sind orthogonal

$$\bar{u}_r(p)u_s(p) = 2m\delta_{rs}, \quad \bar{v}_r(p)v_s(p) = -2m\delta_{rs}, \quad \bar{u}_r(p)v_s(p) = \bar{v}_r(p)u_s(p) = 0, \quad (\text{A.15})$$

und vollständig

$$\sum_r u_r(p)\bar{u}_r(p) = \not{p} + m, \quad \sum_r v_r(p)\bar{v}_r(p) = \not{p} - m. \quad (\text{A.16})$$

Darüber hinaus kann man zeigen, dass $\bar{u}_r(p)\gamma_\mu u_s(p) = \bar{v}_r(p)\gamma_\mu v_s(p) = 2p_\mu\delta_{rs}$ gilt.

A.3 Erster Korrekturterm in der Störungsreihe

Der Ausdruck für δF_1 wird hier der Übersichtlichkeit halber in seine Summanden zerlegt, $\delta F_1(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_i F_i T_i(\varphi_1, \varphi_2)$.

T_i	F_i
1	$-\frac{e^4}{8}(k_1 \cdot k_2) \left(\frac{a_1^2 a_2^2}{(p \cdot k_1)(p \cdot k_2)} - \frac{2(a_1 \cdot a_2)}{(p \cdot k_1 + p \cdot k_2)^2} + \frac{2(a_1 \cdot a_2)}{(p \cdot k_1 - p \cdot k_2)^2} \right)$
$\cos(\varphi_1)$	$\frac{e^3 k_1 \cdot k_2}{2 p \cdot k_2} \left(\frac{(p \cdot a_1) a_2^2}{(p \cdot k_1)} + \frac{2(p \cdot a_2)(a_1 \cdot a_2)(p \cdot k_1)}{(p \cdot k_1)^2 - (p \cdot k_2)^2} \right)$
$\cos(\varphi_2)$	$(1 \longleftrightarrow 2)$
$\cos(2\varphi_1)$	$-\frac{e^4}{8} \frac{(k_1 \cdot k_2) a_1^2 a_2^2}{(p \cdot k_1)(p \cdot k_2)}$
$\cos(2\varphi_2)$	$(1 \longleftrightarrow 2)$
$\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$	$-e^2 \frac{(k_1 \cdot k_2)(p \cdot a_1)(p \cdot a_2)}{(p \cdot k_1)(p \cdot k_2)}$ $+ \frac{e^4}{8} (k_1 \cdot k_2)(a_1 \cdot a_2) \left(\frac{a_1^2}{p \cdot k_1} + \frac{a_2^2}{p \cdot k_2} \right) \left(\frac{2}{p \cdot k_1 + p \cdot k_2} - \frac{1}{p \cdot k_1 - p \cdot k_2} \right)$
$\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$	$-e^2 \frac{(k_1 \cdot k_2)(p \cdot a_1)(p \cdot a_2)}{(p \cdot k_1)(p \cdot k_2)}$ $+ \frac{e^4}{8} (k_1 \cdot k_2)(a_1 \cdot a_2) \left(\frac{a_1^2}{p \cdot k_1} + \frac{a_2^2}{p \cdot k_2} \right) \left(\frac{1}{p \cdot k_1 + p \cdot k_2} - \frac{2}{p \cdot k_1 - p \cdot k_2} \right)$
$\cos(2\varphi_1 + \varphi_2)$	$\frac{e^3 k_1 \cdot k_2}{4 p \cdot k_1} \left(\frac{(p \cdot a_2) a_1^2}{p \cdot k_2} + \frac{2(p \cdot a_1)(a_1 \cdot a_2)}{p \cdot k_1 + p \cdot k_2} \right)$
$\cos(\varphi_1 + 2\varphi_2)$	$(1 \longleftrightarrow 2)$
$\cos(2\varphi_1 - \varphi_2)$	$\frac{e^3 k_1 \cdot k_2}{4 p \cdot k_1} \left(\frac{(p \cdot a_2) a_1^2}{p \cdot k_2} - \frac{2(p \cdot a_1)(a_1 \cdot a_2)}{p \cdot k_1 + p \cdot k_2} \right)$
$\cos(\varphi_1 - 2\varphi_2)$	$(1 \longleftrightarrow 2)$
$\cos(3\varphi_1 + \varphi_2)$	$-\frac{e^4}{8} \frac{(k_1 \cdot k_2)(a_1 \cdot a_2) a_1^2}{(p \cdot k_1)(p \cdot k_1 + p \cdot k_2)}$
$\cos(\varphi_1 + 3\varphi_2)$	$(1 \longleftrightarrow 2)$
$\cos(3\varphi_1 - \varphi_2)$	$\frac{e^4}{8} \frac{(k_1 \cdot k_2)(a_1 \cdot a_2) a_1^2}{(p \cdot k_1)(p \cdot k_1 - p \cdot k_2)}$
$\cos(\varphi_1 - 3\varphi_2)$	$-(1 \longleftrightarrow 2)$
$\cos(2\varphi_1 + 2\varphi_2)$	$-\frac{e^4}{16} (k_1 \cdot k_2) \left(\frac{a_1^2 a_2^2}{(p \cdot k_1)(p \cdot k_2)} - \frac{4(a_1 \cdot a_2)^2}{(p \cdot k_1 + p \cdot k_2)^2} \right)$
$\cos(2\varphi_1 - 2\varphi_2)$	$-\frac{e^4}{16} (k_1 \cdot k_2) \left(\frac{a_1^2 a_2^2}{(p \cdot k_1)(p \cdot k_2)} + \frac{4(a_1 \cdot a_2)^2}{(p \cdot k_1 - p \cdot k_2)^2} \right)$
$\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$	$-ie^2 \frac{(k_1 \cdot k_2)(a_1 \cdot a_2)}{p \cdot k_1 + p \cdot k_2}$
$\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$	$ie^2 \frac{(k_1 \cdot k_2)(a_1 \cdot a_2)}{p \cdot k_1 - p \cdot k_2}$

B Die mathematische Seite der kinetischen Gleichung

B.1 Äquivalenz der Differentialgleichungen

Die Gln. (2.21) und (2.26) stellen aus algebraischer Sicht dieselbe Differentialgleichung dar, was hier erläutert werden soll.

Wir bringen zuerst Gl. (2.21) auf eine andere Gestalt, indem wir neue Größen $\mu := \alpha e^{-i\Theta}$ und $\nu := \beta e^{i\Theta}$ definieren. Für diese finden wir

$$\begin{pmatrix} \dot{\mu} \\ \dot{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\omega & \frac{Q}{2} \\ -\frac{Q}{2} & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Die Koeffizientenmatrix dieser Gleichung lässt sich als $-i/2(-Q\sigma_2 + 2\omega\sigma_3)$ mit den beiden Pauli-Matrizen σ_2 und σ_3 schreiben. Wenn wir die drei Generatoren $S_1 = i\sigma_1/2$, $S_2 = i\sigma_2/2$ und $S_3 = -i\sigma_3/2$ definieren, so erfüllen sie die Kommutationsrelation $[S_i, S_j] = \varepsilon_{ijk}S_k$, und es gilt

$$\begin{pmatrix} \dot{\mu} \\ \dot{\nu} \end{pmatrix} = (QS_2 + 2\omega S_3) \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mu(t_0) \\ \nu(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Für Gl. (2.26) definiert man zunächst $w = 1 - f$ und findet

$$\begin{pmatrix} \dot{w} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -Q & 0 \\ Q & 0 & -2\omega \\ 0 & 2\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \\ v \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Die Generatoren

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

erfüllen $[J_i, J_j] = \varepsilon_{ijk}J_k$ und bringen Gl. (B.3) auf die Form

$$\begin{pmatrix} \dot{w} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = (QJ_2 + 2\omega J_3) \begin{pmatrix} w \\ u \\ v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w(t_0) \\ u(t_0) \\ v(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Die Ähnlichkeit zwischen den Gln. (B.2) und (B.5) wird offensichtlich, wenn man ihre Fundamentalmatrizen betrachtet. Lineare Differentialgleichungssysteme, zu denen die beiden Gleichungen gehören, besitzen n linear unabhängige Lösungen, wobei bei uns $n = 2$ für Gl. (B.2) und $n = 3$ für Gl. (B.5) gilt. Diese schreibt man kompakter in eine Matrix, die Fundamentalmatrix genannt wird. Für unseren ersten Fall wollen wir diese mit $U(t)$ und für den zweiten mit $O(t)$ bezeichnen. Dann ist Gl. (B.2) äquivalent zu

$$\dot{U}(t) = (Q(t)S_2 + 2\omega(t)S_3)U(t), \quad U(t_0) = \mathbb{1}. \quad (\text{B.6})$$

Man überzeugt sich leicht, dass

$$\begin{pmatrix} \mu(t) \\ \nu(t) \end{pmatrix} := U(t) \begin{pmatrix} \mu(t_0) \\ \nu(t_0) \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Gleichung (B.2) inklusive der Anfangsbedingung erfüllt. Ebenso ist

$$\dot{O}(t) = (Q(t)J_2 + 2\omega(t)J_3)O(t) \quad (\text{B.8})$$

äquivalent zu Gl. (B.5). Die Generatoren S_i gehören zur Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2)$ der schieferhermiteschen Matrizen der Dimension 2, J_i hingegen zu $\mathfrak{so}(3)$, den schiefssymmetrischen Matrizen der Dimension 3. Dadurch muss $U(t)$ unitär für jedes t sein, d.h. $U(t) \in SU(2) \forall t$, und $O(t)$ orthogonal, $O(t) \in SO(3) \forall t$. Zusätzlich sind alle Generatoren spurlos, wodurch die Determinante der Fundamentalmatrizen +1 ist.

Die beiden Lie-Algebren sind isomorph, $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$, was gerade bedeutet, dass sie denselben Kommutationsrelationen genügen. Hat man also eine Lösung für U gefunden, die sich dann stets in der Form $U(t) = \exp(\sum_i \vartheta_i(t)S_i)$ schreiben lässt, so ist auch $O(t) = \exp(\sum_i \vartheta_i(t)J_i)$ eine Lösung für O . Entscheidend ist, dass dabei die Funktionen ϑ_i , in denen die gesamte Information der Lösung steckt, in beiden Fällen dieselben sind: eine Lösung für U impliziert eine für O und umgekehrt. Mit diesen Definitionen lässt sich auch einfach die Beschränktheit der Dichte f nachweisen. Da die Fundamentalmatrix O orthogonal ist, gilt mit der Definition $\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} w(t) & u(t) & v(t) \end{pmatrix}^T$ für alle Zeiten

$$\begin{aligned} w(t)^2 + u(t)^2 + v(t)^2 &= \mathbf{W}(t)^T \mathbf{W}(t) = \mathbf{W}(t_0)^T O(t)^T O(t) \mathbf{W}(t_0) \\ &= \mathbf{W}(t_0)^T \mathbf{W}(t_0) = w(t_0)^2 + u(t_0)^2 + v(t_0)^2 = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Daraus folgt $\forall t : -1 \leq w(t) \leq 1$ und damit $\forall t : 0 \leq f(t) \leq 2$.

B.2 Lösungsversuch mit einer Exponentialfunktion

Da die Gln. (B.6) und (B.8), wie gezeigt, äquivalent sind, wollen wir uns nur mit ersterer befassen, und mit dem bereits erwähnten Ansatz

$$U(t) = \exp\left(\sum_i \vartheta_i(t) S_i\right) = e^{X(t)} \quad (\text{B.10})$$

eine Differentialgleichung für die Koeffizientenfunktionen ϑ_i finden. Gälte stets $[X(t), \dot{X}(t)] = 0$, so wäre $\dot{U}(t) = \dot{X}(t)e^{X(t)} = \dot{X}(t)U(t)$ und die Lösung wäre durch einfache Integration zu finden. Da das in unserem Falle aber nicht gilt, muss man nach einer Verallgemeinerung dieser Beziehung suchen.

Wir betrachten dazu die Zeitableitung eines Summanden in der Reihe der Exponentialfunktion und unterdrücken das Argument t :

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} X^2 = \frac{1}{2} (\dot{X}X + X\dot{X}) = \dot{X}X + \frac{1}{2} [X, \dot{X}] = \dot{X}X + \frac{1}{2} K_1. \quad (\text{B.11})$$

Dabei ist $K_n(t) = [X(t), \dot{X}(t)]_n = [X(t), [X(t), \dots [X(t), \dot{X}(t)]]]$ der n -fach geschachtelte Kommutator von X und \dot{X} , d.h. K_1 ist gerade $K_1 = [X, \dot{X}]_1 = [X, \dot{X}]$ und $K_0 = \dot{X}$. Wir berechnen iterativ zwei weitere Terme:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{6} X^3 &= \frac{1}{2} K_0 X^2 + \frac{1}{2} K_1 X + \frac{1}{6} K_2, \\ \frac{d}{dt} \frac{1}{24} X^4 &= \frac{1}{6} K_0 X^3 + \frac{1}{4} K_1 X^2 + \frac{1}{6} K_2 X + \frac{1}{24} K_3. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Addiert man die e-Funktion bis zu dieser Ordnung auf und bildet mit den berechneten Größen die Zeitableitung, so erkennt man das zu Grunde liegende Muster:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(1 + X + \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{6} X^3 + \frac{1}{24} X^4\right) &= \\ K_0 \left(1 + X + \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{6} X^3\right) &+ \frac{1}{2} K_1 \left(1 + X + \frac{1}{2} X^2\right) + \frac{1}{6} K_2 (1 + X) + \frac{1}{24} K_3. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Die Terme in den Klammern nach den jeweiligen K_n sind offenbar immer der Anfang der Reihe für die Exponentialfunktion. Man kann nun durch Induktion für die Zeitableitung von U zeigen:

$$\frac{d}{dt} U(t) = \frac{d}{dt} e^{X(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n(t)}{(n+1)!} e^{X(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[X(t), \dot{X}(t)]_n}{(n+1)!} U(t). \quad (\text{B.14})$$

Diese Formel gilt, von Konvergenzfragen abgesehen, für beliebige Operatoren X . Wir

spezialisieren auf unseren Fall: $X(t) = \sum_i \vartheta_i(t) S_i =: \boldsymbol{\vartheta}(t) \cdot \mathbf{S}$. Dafür findet man

$$\begin{aligned}
 K_0 &= \dot{\boldsymbol{\vartheta}} \cdot \mathbf{S}, \\
 K_1 &= [\boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{S}, \dot{\boldsymbol{\vartheta}} \cdot \mathbf{S}] = \sum_{i,j} \vartheta_i \dot{\vartheta}_j [S_i, S_j] = \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} \vartheta_i \dot{\vartheta}_j S_k = (\boldsymbol{\vartheta} \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}}) \cdot \mathbf{S}, \\
 K_2 &= (\boldsymbol{\vartheta} \times (\boldsymbol{\vartheta} \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}})) \cdot \mathbf{S} = ((\boldsymbol{\vartheta} \cdot \dot{\boldsymbol{\vartheta}}) \boldsymbol{\vartheta} - \vartheta^2 \dot{\boldsymbol{\vartheta}}) \cdot \mathbf{S}, \\
 K_3 &= -\vartheta^2 (\boldsymbol{\vartheta} \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}}) \cdot \mathbf{S} = -\vartheta^2 K_1,
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

mit dem Kreuzprodukt „ \times “ aus der Vektoralgebra und $\vartheta := \sqrt{\boldsymbol{\vartheta} \cdot \boldsymbol{\vartheta}} = \sqrt{\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2}$. Bei K_3 beginnt eine Rekursionsbeziehung, die es erlaubt, die Reihe aufzusummieren:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n}{(n+1)!} &= \left(\dot{\boldsymbol{\vartheta}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \vartheta^{2k}}{(2k+2)!} (\boldsymbol{\vartheta} \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}}) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \vartheta^{2k}}{(2k+3)!} ((\boldsymbol{\vartheta} \cdot \dot{\boldsymbol{\vartheta}}) \boldsymbol{\vartheta} - \vartheta^2 \dot{\boldsymbol{\vartheta}}) \right) \cdot \mathbf{S} \\
 &= \left(\dot{\boldsymbol{\vartheta}} + \frac{1 - \cos \vartheta}{\vartheta^2} \boldsymbol{\vartheta} \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}} + \frac{\vartheta - \sin \vartheta}{\vartheta^3} ((\boldsymbol{\vartheta} \cdot \dot{\boldsymbol{\vartheta}}) \boldsymbol{\vartheta} - \vartheta^2 \dot{\boldsymbol{\vartheta}}) \right) \cdot \mathbf{S} \\
 &= \left(\frac{(\boldsymbol{\vartheta} \cdot \dot{\boldsymbol{\vartheta}}) \boldsymbol{\vartheta}}{\vartheta^2} + \frac{\boldsymbol{\vartheta} \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}}}{\vartheta^2} (1 - \cos \vartheta) + \left(\frac{\dot{\boldsymbol{\vartheta}}}{\vartheta} - \frac{(\boldsymbol{\vartheta} \cdot \dot{\boldsymbol{\vartheta}}) \boldsymbol{\vartheta}}{\vartheta^3} \right) \sin \vartheta \right) \cdot \mathbf{S} \\
 &= \left(\frac{\dot{\boldsymbol{\vartheta}}}{\vartheta} \boldsymbol{\vartheta} + \frac{\boldsymbol{\vartheta} \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}}}{\vartheta^2} (1 - \cos \vartheta) + \left(\frac{\dot{\boldsymbol{\vartheta}}}{\vartheta} - \frac{\dot{\boldsymbol{\vartheta}} \boldsymbol{\vartheta}}{\vartheta^2} \right) \sin \vartheta \right) \cdot \mathbf{S}.
 \end{aligned} \tag{B.16}$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt aus $\dot{\boldsymbol{\vartheta}} = (\boldsymbol{\vartheta} \cdot \dot{\boldsymbol{\vartheta}}) \boldsymbol{\vartheta} / \vartheta$. Definieren wir zudem $\mathbf{n} = \boldsymbol{\vartheta} / \vartheta$, lässt sich die Gleichung für die Zeitableitung auf folgende Form bringen:

$$\frac{d}{dt} e^{\vartheta \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}} = \left(\dot{\boldsymbol{\vartheta}} \mathbf{n} + \sin \vartheta \dot{\mathbf{n}} + (1 - \cos \vartheta) \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}} \right) \cdot \mathbf{S} e^{\vartheta \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}}. \tag{B.17}$$

Ein Koeffizientenvergleich mit Gl. (B.6) ergibt

$$\dot{\boldsymbol{\vartheta}} \mathbf{n} + \sin \vartheta \dot{\mathbf{n}} + (1 - \cos \vartheta) \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ Q \\ 2\omega \end{pmatrix}. \tag{B.18}$$

Die Lösung dieser Gleichung lässt sich nicht in eine geschlossene Form bringen. Daher soll im nächsten Abschnitt ein anderer Weg beschritten werden.

B.3 Lösungsversuch mit einem Produktansatz

Ein weiterer Ansatz, der sich die algebraischen Eigenschaften des Problems zu Nutze macht und in gewisser Weise das Gegenstück zum gerade beschriebenen bildet, ist der Produktansatz,

wie er in [Wei63] dargestellt wird.

Im Gegensatz zu Gl. (B.10) setzt man die Fundamentalmatrix jetzt als ein Produkt

$$U(t) = \prod_i \exp(\varphi_i(t)S_i) = e^{\varphi_1(t)S_1} e^{\varphi_2(t)S_2} e^{\varphi_3(t)S_3} =: U_1(t)U_2(t)U_3(t) \quad (\text{B.19})$$

an. Die unbekanntenen Funktionen werden hier mit φ_i bezeichnet, um Verwechslungen mit den ϑ_i des vorigen Abschnittes vorzubeugen. Dieser Ansatz mag zunächst seltsam anmuten, da er die Symmetrie unter den Generatoren zerstört, weil die jeweiligen $e^{\varphi_i S_i}$ untereinander nicht kommutieren, und so die Reihenfolge der Faktoren relevant ist. Er hat aber den Vorteil, dass die Zeitableitung jedes einzelnen Faktors U_i einfach ist, da offensichtlich $[\varphi_i(t)S_i, \dot{\varphi}_i(t)S_i] = 0$ (keine Summe über i) für alle t gilt. Somit kann man die Zeitableitung von U einfach berechnen:

$$\frac{d}{dt}U = \dot{\varphi}_1 S_1 U_1 U_2 U_3 + U_1 \dot{\varphi}_2 S_2 U_2 U_3 + U_1 U_2 \dot{\varphi}_3 S_3 U_3. \quad (\text{B.20})$$

Wir multiplizieren diese Gleichung von rechts mit $U^{-1} = U_3^{-1}U_2^{-1}U_1^{-1}$:

$$\dot{U}U^{-1} = \dot{\varphi}_1 S_1 + \dot{\varphi}_2 U_1 S_2 U_1^{-1} + \dot{\varphi}_3 U_1 U_2 S_3 U_2^{-1} U_1^{-1}. \quad (\text{B.21})$$

Der Trick besteht nun darin, wie man $U_1 S_2 U_1^{-1}$ und $U_1 U_2 S_3 U_2^{-1} U_1^{-1}$ berechnet. Das lässt sich mit Hilfe der Baker–Campbell–Hausdorff-Formel¹ bewerkstelligen. Sie lautet für zwei Operatoren A und B

$$e^A B e^{-A} = e^{\text{ad}_A} B := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[A, B]_n}{n!} \quad (\text{B.22})$$

mit dem oben eingeführten n -fachen Kommutator² $[A, B]_n$. Mit dieser Relation finden wir

$$\begin{aligned} U_1 S_2 U_1^{-1} &= e^{\varphi_1 S_1} S_2 e^{-\varphi_1 S_1} = S_2 + \varphi_1 S_3 - \frac{1}{2} \varphi_1^2 S_2 - \frac{1}{6} \varphi_1^3 S_3 + \frac{1}{24} \varphi_1^4 S_2 + \dots \\ &= \cos \varphi_1 S_2 + \sin \varphi_1 S_3. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Ebenso berechnet sich $U_1 U_2 S_3 U_2^{-1} U_1^{-1}$, nur dass man hier die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel zweimal anwenden muss:

$$U_1 U_2 S_3 U_2^{-1} U_1^{-1} = \sin \varphi_2 S_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 S_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 S_3. \quad (\text{B.24})$$

¹Vielmehr einer ihrer Varianten.

²Die Notation ad_A schließt an den Artikel [Wei63] an. Es gilt $\text{ad}_A B := [A, B]$ und $(\text{ad}_A)^n B = [A, B]_n$.

Diese Ergebnisse lassen sich zusammenfassen zu

$$\begin{aligned} \dot{U}U^{-1} &= (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_3 \sin \varphi_2)S_1 + (\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_1 - \dot{\varphi}_3 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)S_2 \\ &\quad + (\dot{\varphi}_2 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_3 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2)S_3 . \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die Differentialgleichung für die φ_i :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_3 \sin \varphi_2 &= 0 , \\ \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_1 - \dot{\varphi}_3 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 &= Q , \\ \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_3 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 &= 2\omega . \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Auch hier findet man keine geschlossenen Lösungen.

B.4 Analogie zu klassischer Mechanik

Man kann die Gleichung (B.3) mittels des Kreuzproduktes der Vektoralgebra umschreiben als

$$\begin{pmatrix} \dot{w} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\omega \\ 0 \\ Q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w \\ u \\ v \end{pmatrix} , \quad (\text{B.27})$$

bzw. mit den Definitionen $\boldsymbol{\Omega} = (2\omega \ 0 \ Q)^T$ und $\mathbf{W} = (w \ u \ v)^T$:

$$\dot{\mathbf{W}}(t) = \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{W}(t) . \quad (\text{B.28})$$

Eine Analogie dazu ist folgendes mechanisches System: Ein Bezugssystem rotiere relativ zu einem Inertialsystem mit der zeitabhängigen Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}(t)$. In diesem Bezugssystem ruhe ein Massepunkt, dessen Ortsvektor im Inertialsystem $\mathbf{r}(t)$ sei. Dann wird dessen Bewegung durch die Gleichung

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}(t) \quad (\text{B.29})$$

beschrieben, was natürlich genau dieselbe Gleichung mit anderen Variablennamen geschrieben ist.

Literaturverzeichnis

- [Akh65] A. I. AKHIEZER, V. B. BERESTETSKII: *Quantum Electrodynamics*, Interscience Publishers, 1965.
- [Bag90] V. BAGROV, D. GITMAN: *Exact Solutions of Relativistic Wave Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1990.
- [Bas92] M. BASLER, B. KÄMPFER: *Particle Production During Inflationary Reheating*, Int. J. Mod. Phys. A **7**, 2033 (1992).
- [Bel08] A. R. BELL, J. G. KIRK: *Possibility of Prolific Pair Production with High-Power Lasers*, Phys. Rev. Lett. **101**, 200403 (2008).
- [Bir82] N. D. BIRRELL, P. C. W. DAVIES: *Quantum fields in curved spacetime*, Cambridge University Press, 1982.
- [Bla13a] D. B. BLASCHKE, B. KÄMPFER, A. D. PANFEROV, A. V. PROZORKEVICH, S. A. SMOLYANSKY: *Influence of Laser Pulse Parameters on the Properties of e^-e^+ Plasmas Created from Vacuum*, Contrib. Plasma Phys. **53**, 165 (2013), arXiv:1205.3154.
- [Bla13b] D. B. BLASCHKE, B. KÄMPFER, S. M. SCHMIDT, A. D. PANFEROV, A. V. PROZORKEVICH, S. A. SMOLYANSKY: *Properties of the electron-positron plasma created from vacuum in a strong Laser Field I. Quasiparticle excitations*, arXiv:1301.1640 (2013).
- [Bre34] G. BREIT, J. A. WHEELER: *Collision of Two Light Quanta*, Phys. Rev. **46**, 1087 (1934).
- [DP06] A. DI PIAZZA, K. Z. HATSAGORTSYAN, C. H. KEITEL: *Light Diffraction by a Strong Standing Electromagnetic Wave*, Phys. Rev. Lett. **97**, 083603 (2006).
- [Dum10] C. K. DUMLU: *Schwinger vacuum pair production in chirped laser pulses*, Phys. Rev. D **82**, 045007 (2010).
- [Dun09] G. V. DUNNE, H. GIES, R. SCHÜTZHOLD: *Catalysis of Schwinger Vacuum Pair Production*, Phys. Rev. D **80**, 111301 (2009), arXiv:0908.0948.

- [ELI] *Proposal for a European Extreme Light Infrastructure (ELI)*, siehe: <http://www.extreme-light-infrastructure.eu/pictures/ELI-scientific-case-id17.pdf>.
- [Eul35] H. EULER, B. KOCKEL: *Über die Streuung von Licht an Licht*, Naturwiss. **23**, 246 (1935).
- [Fey65] R. FEYNMAN: *The Development of the Space-Time View of Quantum Electrodynamics* (1965), Nobelvortrag.
- [Fey12] C. FEY, R. SCHÜTZHOLD: *Momentum dependence in the dynamically assisted Sauter-Schwinger effect*, Phys. Rev. D **85**, 025004 (2012), arXiv:1110.5499.
- [Fra91] E. FRADKIN, D. GITMAN, S. SHVARTSMAN: *Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [Gie08] H. GIES: *Strong laser fields as a probe for fundamental physics*, Technischer Bericht (2008), arXiv:0812.0668.
- [Gre98] W. GREINER, J. REINHARDT: *Supercritical fields in heavy ion physics – A status report*, in *Proceedings of the 15th Advanced ICFA Beam Dynamics Workshop on Quantum Aspects of Beam Physics*, S. 438–463, 1998.
- [Hal33] O. HALPERN: *Scattering Processes Produced by Electrons in Negative Energy States*, Phys. Rev. **44**, 855 (1933).
- [Haw74] S. W. HAWKING: *Black hole explosions?*, Nature **248**, 30 (1974).
- [Heb09] F. HEBENSTREIT, R. ALKOFER, G. V. DUNNE, H. GIES: *Momentum signatures for Schwinger pair production in short laser pulses with a sub-cycle structure*, Phys. Rev. Lett. **102**, 150404 (2009), arXiv:0901.2631.
- [Heb11] F. HEBENSTREIT: *Schwinger effect in inhomogeneous electric fields*, Dissertation, Karl-Franzens-Universität Graz (2011).
- [Hei36] W. HEISENBERG, H. EULER: *Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons*, Zeitschrift für Physik **98**, 714 (1936).
- [Hei06] T. HEINZL, B. LIESFELD, K.-U. AMTHOR, H. SCHWOERER, R. SAUERBREY, A. WIPF: *On the Observation of Vacuum Birefringence*, Opt. Commun. **267**, 318 (2006), hep-ph/0601076.
- [Hei11] T. HEINZL: *Strong-Field QED and High Power Lasers*, arXiv:1111.5192 (2011).
- [Kin13a] B. KING, A. DI PIAZZA, C. H. KEITEL: *Double-slit vacuum polarisation effects in ultra-intense laser fields*, arXiv:1301.7008 (2013).

- [Kin13b] B. KING, A. DI PIAZZA, C. H. KEITEL: *A matterless double slit*, arXiv:1301.7038 (2013).
- [Kle64] J. J. KLEIN, B. P. NIGAM: *Birefringence of the Vacuum*, Phys. Rev. **135**, B1279 (1964).
- [Koh12a] C. KOHLFÜRST: *Electron-Positron Pair Production in Structured Pulses of Electric Fields*, Diplomarbeit, Karl-Franzens-Universität Graz (2012).
- [Koh12b] C. KOHLFÜRST, M. MITTER, G. VON WINCKEL, F. HEBENSTREIT, R. ALKOFER: *Optimizing the pulse shape for Schwinger pair production*, arXiv:1212.1385 (2012).
- [Lan80] L. LANDAU, E. LIFSCHITZ: *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Band IV: Relativistische Quantentheorie, Akademie-Verlag, Berlin, 1980.
- [Lun06] E. LUNDSTRÖM, G. BRODIN, J. LUNDIN, M. MARKLUND, R. BINGHAM, J. COLLIER, J. T. MENDONÇA, P. NORREYS: *Using High-Power Lasers for Detection of Elastic Photon-Photon Scattering*, Phys. Rev. Lett. **96**, 083602 (2006).
- [Mar09] M. MARKLUND, J. LUNDIN: *Quantum vacuum experiments using high intensity lasers*, The European Physical Journal D **55**, 319 (2009).
- [Mic13] F. MICHLER, H. VAN HEES, D. D. DIETRICH, S. LEUPOLD, C. GREINER: *Off-equilibrium photon production during the chiral phase transition*, Annals of Physics **336**, 331 (2013), arXiv:1208.6565v2.
- [Mos94] V. M. MOSTEPANENKO, A. A. GRIB, S. G. MAMAYEV: *Vacuum Quantum Effects in Strong Fields*, Friedmann Laboratory Publishing Ltd., St.Petersburg, 1994.
- [Mü76] B. MÜLLER: *Positron Creation in Superheavy Quasi-Molecules*, Annual Review of Nuclear Science **26**, 351 (1976).
- [Ort11] M. ORTHABER, F. HEBENSTREIT, R. ALKOFER: *Momentum spectra for dynamically assisted Schwinger pair production*, Physics Letters B **698**, 80 (2011), arXiv:1102.2182.
- [Raf78] J. RAFELSKI, B. MÜLLER, W. GREINER: *Spontaneous vacuum decay of supercritical nuclear composites*, Zeitschrift für Physik A Atoms and Nuclei **285**, 49 (1978).
- [Rei62] H. R. REISS: *Absorption of Light by Light*, J. Math. Phys. **3**, 59 (1962).
- [Rei77] J. REINHARDT, W. GREINER: *Quantum electrodynamics of strong fields*, Reports on Progress in Physics **40**, 219 (1977).

- [Ros93] L. ROSENBERG, F. ZHOU: *Generalized Volkov wave functions: Applications to laser-assisted scattering*, Phys. Rev. A **47**, 2146 (1993).
- [Ruf10] R. RUFFINI, G. VERESHCHAGIN, S.-S. XUE: *Electron–positron pairs in physics and astrophysics: From heavy nuclei to black holes*, Physics Reports **487**, 1 (2010).
- [Sau31] F. SAUTER: *Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs*, Zeitschrift für Physik **69**, 742 (1931).
- [Sch51] J. SCHWINGER: *On Gauge Invariance and Vacuum Polarization*, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [Sch61] S. SCHWEBER: *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*, Row, Peterson and Company, 1961.
- [Sch98] S. SCHMIDT, D. BLASCHKE, G. ROPKE, S. SMOLYANSKY, A. PROZORKEVICH ET AL.: *A Quantum kinetic equation for particle production in the Schwinger mechanism*, Int. J. Mod. Phys. E **7**, 709 (1998), hep-ph/9809227.
- [Sch08] R. SCHÜTZHOLD, H. GIES, G. DUNNE: *Dynamically assisted Schwinger mechanism*, Phys. Rev. Lett. **101**, 130404 (2008), arXiv:0807.0754.
- [Sch09] R. SCHÜTZHOLD, C. MAIA: *Quantum radiation by electrons in lasers and the Unruh effect*, The European Physical Journal D **55**, 375 (2009), arXiv:1004.2399.
- [Sei12] D. SEIPT: *Strong-Field QED Processes in Short Laser Pulses*, Dissertation, Technische Universität Dresden (2012).
- [Smo12] S. A. SMOLYANSKY, D. B. BLASCHKE, V. V. DMITRIEV, B. KÄMPFER, A. V. PROZORKEVICH, A. V. TARAKANOV: *Photon cluster excitation mechanism in an e^-e^+ plasma created from vacuum by a strong electromagnetic field*, arXiv:1211.5373 (2012).
- [Tes12] G. TESCHL: *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 2012.
- [Vol37] D. VOLKOV: *Electron in the field of plane nonpolarized electromagnetic waves as viewed upon in light of the Dirac equation*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **7**, 1286 (1937).
- [Wei63] J. WEI, E. NORMAN: *Lie Algebraic Solution of Linear Differential Equations*, J. Math. Phys. **4**, 575 (1963).
- [XFE] *The Technical Design Report (TDR) of the European XFEL*, siehe: http://xfel.desy.de/technical_information/tdr/tdr/.

Danksagung

Als erstes möchte ich meinem Betreuer, Herrn Professor Burkhard Kämpfer dafür danken, mir die Gelegenheit gegeben zu haben, in seiner Arbeitsgruppe tätig zu sein und auf dem Bereich der Starkfeld-QED zu forschen. Seine wissenschaftliche Anleitung war von unschätzbarem Wert für das zu Stande kommen dieser Arbeit, ebenso zahllose Diskussionen, Hinweise, Verbesserungsvorschläge sowie das Aufzeigen neuer Blickwinkel und Richtungen für weitere Untersuchungen.

Für die hervorragenden Arbeitsbedingungen am Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf möchte ich seinem Vorstand, Herrn Professor Roland Sauerbrey und Herrn Professor Peter Joehnk, danken. Des Weiteren bedanke ich mich bei den Direktoren des Instituts für Strahlenphysik, Herrn Professor Thomas Cowan und Herrn Professor Ulrich Schramm, besonders für meine bereits während der Diplomarbeit erfolgte Teilnahme an mehreren Konferenzen.

Herrn Professor Rüdiger Schmidts unserer Arbeitsgruppe entgegengebrachte Gastfreundschaft am Institut für theoretische Physik der TU Dresden ermöglichte eine fruchtbare Zusammenarbeit mit Physikern anderer Theoriegruppen.

Herr Dr. Günter Plunien war so freundlich, sich trotz einiger Unzulänglichkeiten meinerseits bereit zu erklären, das Zweitgutachten für diese Arbeit zu verfassen.

Ein besonderer Dank gilt den Mitgliedern der Hadronenphysik- und Starkfeld-QED-Arbeitsgruppe des Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorfs: Uwe Hernandez Acosta, Thomas Buchheim, Thomas Hilger, Tobias Nusch, Marco Viebach, Falk Wunderlich, Roman Yaresko und besonders Daniel Seipt für Diskussionen physikalischer wie nichtphysikalischer Natur, Korrekturlesen, geduldiges Anhören geduldesunwürdiger Ideen, Aufklärung meiner Unkenntnis und Missverständnisse, \LaTeX -Hilfe, gehaltvoll gestaltete gemeinsame Mittagessen und tausenderlei anderer Sachen.

Ohne die stetige Unterstützung meiner Eltern und meiner Schwestern wäre dies alles nicht möglich gewesen. Euch dafür einen herzlichen Dank!

Selbstständigkeitserklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Ich reiche sie erstmals als Prüfungsleistung ein. Mir ist bekannt, dass ein Betrugsversuch mit der Note „nicht ausreichend“ (5,0) geahndet wird und im Wiederholungsfall zum Ausschluss von der Erbringung weiterer Prüfungsleistungen führen kann.

Name: Otto

Vorname: Andreas

Matrikelnummer: 3386293

Dresden, den 1.8.2013

Andreas Otto