

## Gravitationswellen

- Eine Einführung aus Anlaß des 100. Jubiläums der Allgemeinen Relativitätstheorie –

Karl-Heinz Lotze, Jena

Teil I

Elektrostatik und Gravitostatik

Wie schwer ist es, einen Körper zu beschleunigen (**alle** Kräfte)?

$$m_I a = F, \quad m_I: \text{träge Masse}$$

## Elektrostatik

Wie stark koppelt ein elektrisch geladener Körper an ein elektrisches Feld (Feldstärke  $E$ )?

$$F_E = qE, \quad q: \text{elektrische Ladung}$$

$$a = \frac{q}{m_I} E, \quad \frac{q}{m_I}: \text{spezifische elektrische Ladung}$$

Erfahrung:

$$\frac{q}{m_I} \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 0$$

# Elektrostatik und Gravitostatik – ein Vergleich

Wie schwer ist es, einen Körper zu beschleunigen (**alle** Kräfte)?

$$m_I a = F, \quad m_I: \text{träge Masse}$$

## Gravitostatik

Wie stark koppelt ein gravitativ geladener Körper an ein Schwerefeld (Feldstärke  $g$ )? Kurz: Wie schwer ist der Körper?

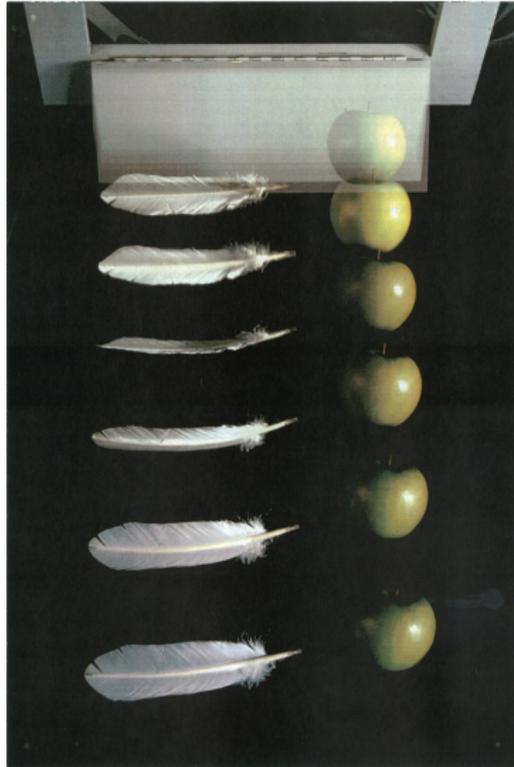
$$F_G = m_G g, \quad m_G: \text{(passive) Gravitationsladung, schwere Masse}$$

$$a = \frac{m_G}{m_I} g, \quad \frac{m_G}{m_I}: \text{spezifische Gravitationsladung}$$

Erfahrung: „Universalität der Gravitation“

$$\frac{m_{G(1)}}{m_{I(1)}} = \frac{m_{G(2)}}{m_{I(2)}} = \dots = \text{const}, \quad (\text{const} = 1)$$

# Universalität der Gravitation



Quelle: National Geographic

# Universalität der Gravitation



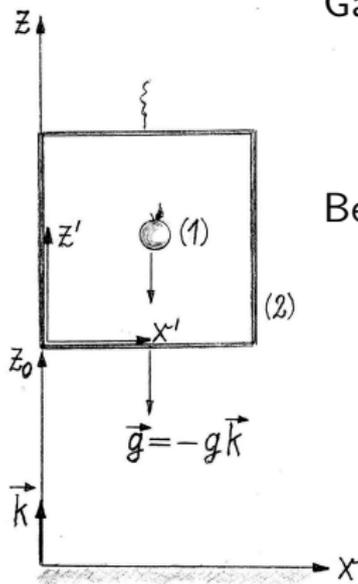
Wir empfehlen für Vereinsveranstaltungen die Aufführung des

## Einstein-Films.

Die Grundlagen der Relativitätstheorie mit erläuterndem  
Vortrag von Hans Walter Kornblum,  
Herstellerin: Colonna-Film-Gesellschaft, Berlin.

# Gedankenexperiment: Einsteins Fahrstuhl

**Lokales** Gedankenexperiment: Innerhalb der Fahrstuhlkabine ist die **Änderung** des Schwerfeldes unbeobachtbar klein ( $\vec{g} = -g\vec{k}$ ,  $g = \text{const}$ ).



$$z'(t) = z(t) - z_0(t)$$

Galileisches Fallgesetz für den Apfel:

$$F = -m_{G(1)}g$$

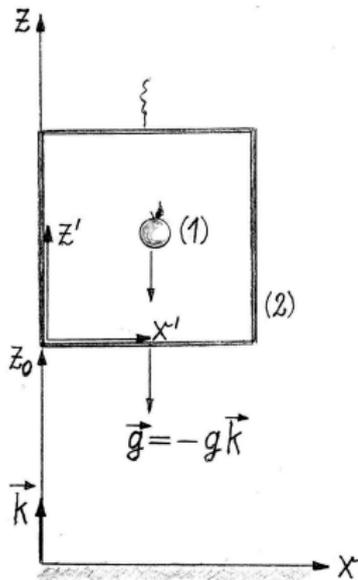
Beschleunigung der Kabine:  $\ddot{z}_0 = -\frac{m_{G(2)}}{m_{I(2)}}g$

$$m_{I(1)}\ddot{z}' = F - m_{I(1)}\ddot{z}_0$$

$$\ddot{z}' = \left( -\frac{m_{G(1)}}{m_{I(1)}} + \frac{m_{G(2)}}{m_{I(2)}} \right) g$$

$$\ddot{z}' = 0 \quad \text{für } m_G = m_I$$

# Schwerelosigkeit – Die Relativität des freien Falls



$$\ddot{z}' = 0 \quad \text{für } m_G = m_I$$

Keine Relativbeschleunigung zwischen  
Apfel und Kabine, Schwerelosigkeit

Bewegung des Apfels relativ zur Kabine  
(je nach Anfangsbedingungen):

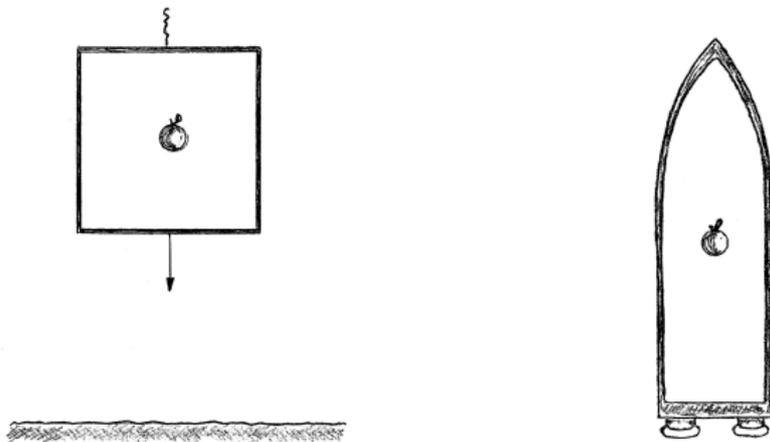
- Ruhe
- geradlinig-gleichförmige Bewegung

Vergleich mit dem Trägheitsgesetz:  
Der Innenraum der Kabine ist ein  
Inertialsystem.

# Das Äquivalenzprinzip

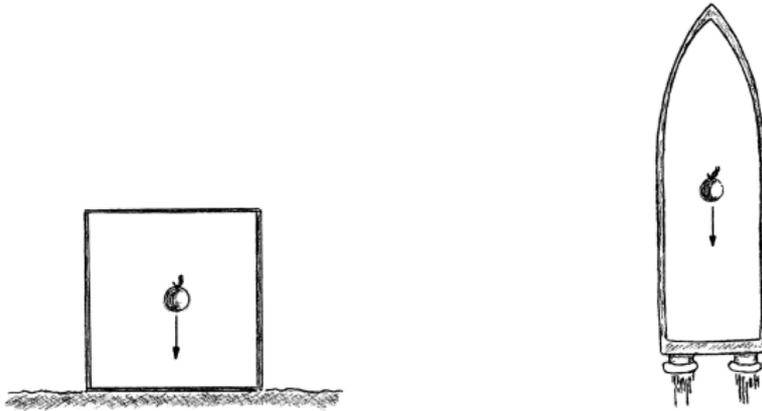
In einem **kleinen** Labor, das in einem Schwerfeld frei fällt, sind **die Gesetze der Physik** dieselben wie jene, die in Abwesenheit eines Schwerfeldes in einem Newtonschen Inertialsystem gelten.

# Das Äquivalenzprinzip – andere Formulierungen



Kein lokales Experiment kann zwischen freiem Fall im Schwerfeld und geradlinig-gleichförmiger Bewegung (Ruhe) in Abwesenheit eines Schwerfeldes unterscheiden.

# Das Äquivalenzprinzip – andere Formulierungen



Ein gleichmäßig gegenüber einem Inertialsystem (Fixsternhimmel) beschleunigtes Bezugssystem ist **lokal** identisch mit einem Bezugssystem, das in einem Schwerfeld ruht.

# Nichtlokale Gedankenexperimente

**Nichtlokales** Gedankenexperiment:

Innerhalb der Fahrstuhlkabine ist die **Änderung** des Schwerfeldes beobachtbar.

Newtonsches Fallgesetz:

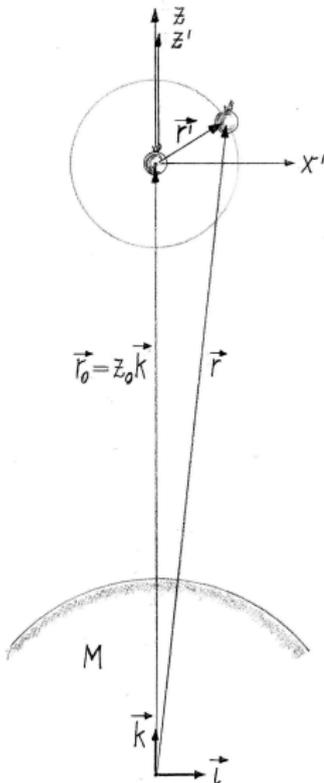
$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Beschleunigung des Kreismittelpunktes:

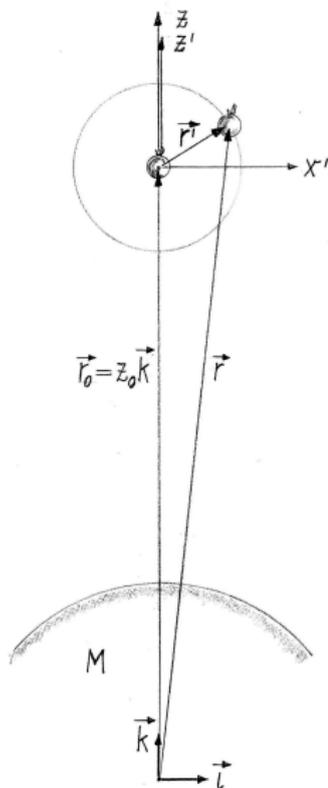
$$\ddot{\vec{r}}_0 = -\frac{GM}{z_0^2} \vec{k}$$

Relativbeschleunigung des Apfels in bezug auf den Kreismittelpunkt:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{r}}_0$$



# Nichtlokale Gedankenexperimente



$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{r}}_0$$

für  $|\vec{r}'| \ll z_0$ :

$$\ddot{\vec{r}}' \approx -\frac{GM}{z_0^3} (x' \vec{i} - 2z' \vec{k})$$

**Fazit:**

Schwerelosigkeit ( $\ddot{\vec{r}}' = 0$ ) existiert **nur in einem Punkt**, dem Kreismittelpunkt bei  $x' = 0 = z'$ .

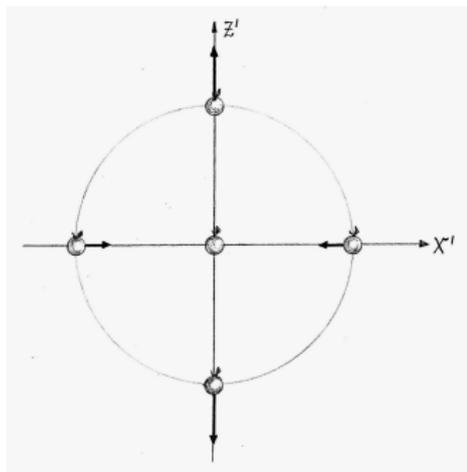
$$\ddot{\vec{r}}' \approx -\frac{GM}{z_0^3} (x' \vec{i} - 2z' \vec{k})$$

- longitudinale (vertikale) Gezeitenwirkung

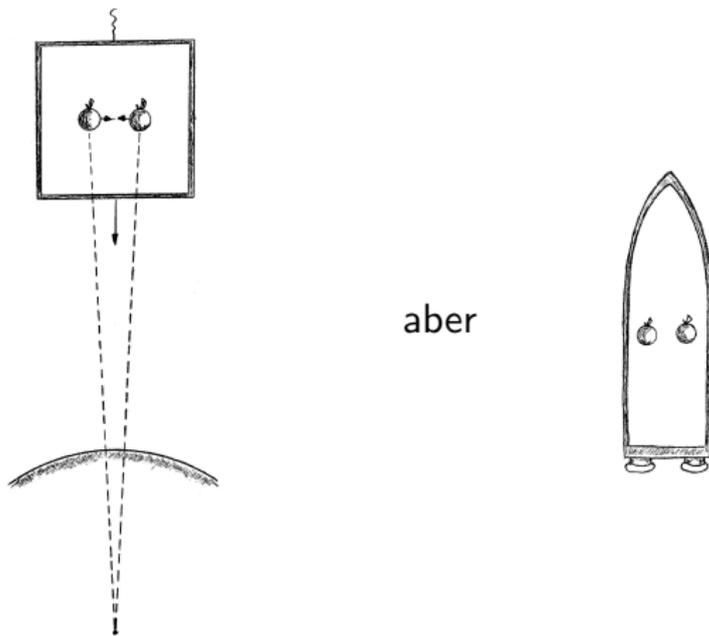
$$\ddot{z}' \approx \frac{GM}{z_0^2} \cdot 2 \frac{z'}{z_0} \left\{ \begin{array}{l} < 0 \text{ für } z' < 0 \\ > 0 \text{ für } z' > 0 \end{array} \right\} \text{zwei (!) Gezeitenberge}$$

- transversale (horizontale) Gezeitenwirkung

$$\ddot{x}' \approx -\frac{GM}{z_0^2} \cdot \frac{x'}{z_0} \left\{ \begin{array}{l} > 0 \text{ für } x' < 0 \\ < 0 \text{ für } x' > 0 \end{array} \right\}$$

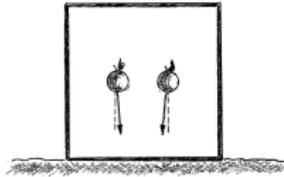


# Nichtlokale Gedankenexperimente

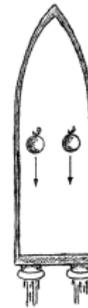


Inhomogenes Schwerfeld im Innern des Labors –  
homogenes Beschleunigungsfeld im Innern des Raumschiffs.

# Nichtlokale Gedankenexperimente



aber



Inhomogenes Schwerfeld im Innern des Labors –  
homogenes Beschleunigungsfeld im Innern des Raumschiffs.

## Fazit:

Die Anwesenheit eines Schwerfeldes ist durch seine **Änderung**  
feststellbar.

Das Äquivalenzprinzip gilt für lokale Experimente.

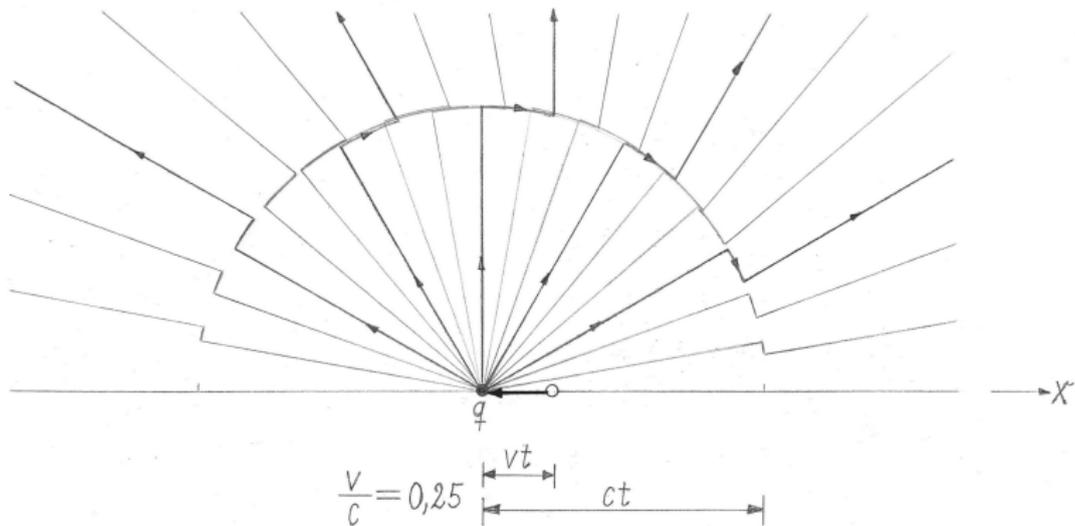
## Teil II

# Elektromagnetische Strahlung und Gravitationsstrahlung

- 1864: J.C. Maxwell sagt elektromagnetische Wellen voraus.
- 1888: H. Hertz weist elektromagnetische Wellen im Labor nach.
- 1916: A. Einstein sagt Gravitationswellen voraus.
- 1974: R. Hulse & J. Taylor entdecken den Doppelpulsar PSR 1913+16.
- 1979: R. Hulse & J. Taylor interpretieren die Periodenänderung des Doppelpulsars als **indirekten** Nachweis von Gravitationswellen.
- 2015: 100. Jubiläum der Allgemeinen Relativitätstheorie.  
Direkter Nachweis von Gravitationswellen am 15.9.2015,  
bekanntgegeben am 11.2.2016.

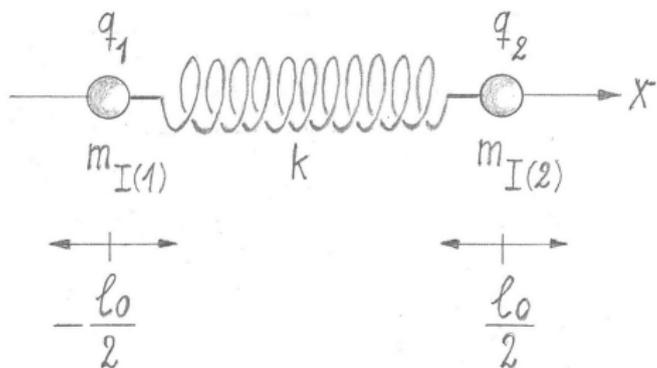
- Warum sind Gravitationswellen so schwach?
- In welcher Beziehung steht diese Schwäche zu dem grundlegenden Unterschied zwischen Elektromagnetismus und Gravitation?
- Warum Gravitationswellen-Astronomie?

# Elektromagnetische Wellen – Der Feldlinien-Knick



# Elektrische *Dipole* erzeugen elektromagnetische Wellen

Beschleunigte Bewegung infolge der **elastischen** Kraft  
(elektrische oder gravitative Anziehung wird vernachlässigt).



$$x_1 = -\frac{\ell_0}{2} - \frac{m_2}{m_1} A \sin \omega t$$

$$x_2 = \frac{\ell_0}{2} + A \sin \omega t$$

Eigenfrequenz:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$k$ : Federkonstante

$\ell_0$ : Länge der entspannten Feder

$\mu$ : reduzierte (träge) Masse

$$\text{mit } \mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

# Elektrische *Dipole* erzeugen elektromagnetische Wellen

Reduzierte Masse:

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Spezialfälle:

$$m_1 = m_2 \equiv m : \quad \mu = \frac{m}{2}, \quad \omega = \sqrt{2 \frac{k}{m}}$$

$$m_1 \gg m_2 : \quad \mu \approx m_2, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$$

Anfangsbedingungen:

$$\left. \begin{array}{l} x_1(0) = -\frac{l_0}{2}, \quad \dot{x}_1(0) = 0 \\ x_2(0) = \frac{l_0}{2}, \quad \dot{x}_2(0) = v_0 \end{array} \right\} \text{Amplitude: } A = \frac{\mu}{m_2} \frac{v_0}{\omega}$$

$$\begin{aligned}d &= q_1 x_1 + q_2 x_2 \\ &= \frac{\ell_0}{2} (q_2 - q_1) + \left( \frac{q_2}{m_{I(2)}} - \frac{q_1}{m_{I(1)}} \right) m_{I(2)} A \sin \omega t\end{aligned}$$

**Der erste Term  $d_1$ :**

- zeitunabhängig
- invariant, falls  $q_1 + q_2 = 0$   
(z.B. für  $q_2 = q$ ,  $q_1 = -q$ :  $d_1 = \ell_0 q$ )

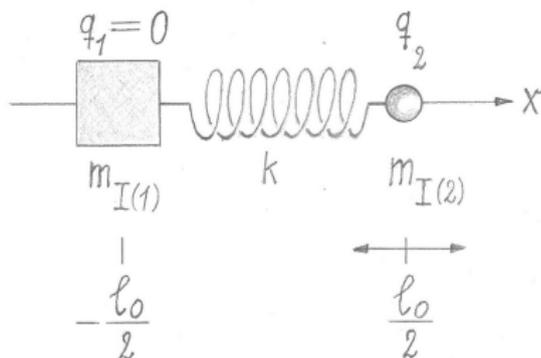
**Der zweite Term  $d_2$ :**

- zeitabhängig
- verschwindet, falls **spezifische** elektrische Ladungen gleich sind

# Das elektrische Dipolmoment

Der zweite Term  $d_2$  – Spezialfälle:

- für  $q_2 = q$ ,  $q_1 = -q$  ist  $d_2 = q \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$



$$q_1 = 0, m_1 \gg m_2$$

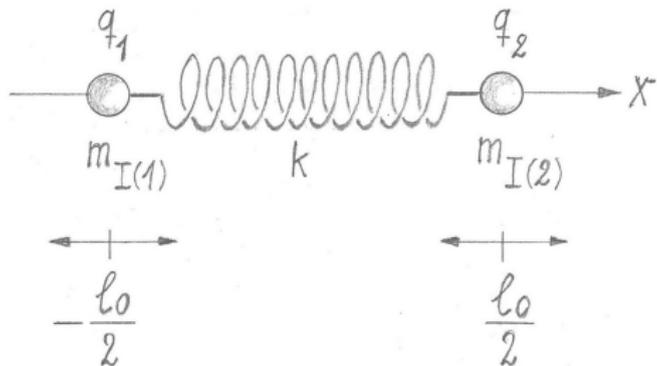
$$d_2 = q_2 \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

Eine einzelne elektrische Ladung in harmonischer Bewegung hat ein Dipolmoment.

# Dipolstrahlung – Eine Dimensionsanalyse

Wheeler's Prinzip:

„Never start a calculation before you know the answer!“



- Systemparameter:  
 $q, A, \omega$
- Naturkonstanten:  
 $\epsilon_0, c$

$$q_2 = q, q_1 = -q$$

Ohne Herleitung: Die **Dipolformel** für die abgestrahlte Leistung

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{3c^3} \langle \ddot{d}^2 \rangle_t$$

# Dipolstrahlung – Eine Dimensionsanalyse

Dimensionsanalyse für die abgestrahlte Leistung (Leuchtkraft):

Ansatz:

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \propto -(qA)^\alpha \omega^\beta \cdot c^\gamma \epsilon_0^\delta$$

Vergleich der Exponenten:

$$VA = V^{-\delta} A^{\alpha+\delta} m^{\alpha+\gamma-\delta} s^{\alpha-\beta-\gamma+\delta}$$

Lösung:

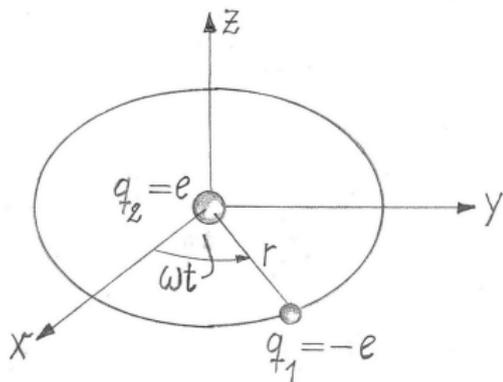
$$\alpha = 2, \beta = 4, \gamma = -3, \delta = -1$$

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \propto -\frac{(qA)^2 \omega^4}{\epsilon_0 c^3}$$

Fehlender Faktor:  $\frac{1}{12\pi}$

# Beispiel: Das Rutherford-Atom

Überlagerung von **zwei** Dipolen, die in zwei orthogonalen Richtungen schwingen.



$$q = e, A \rightarrow r$$

$$x = r \cos \omega t$$

$$y = r \sin \omega t$$

Larmor-Formel:

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = -\frac{(er)^2 \omega^4}{6\pi \epsilon_0 c^3}$$

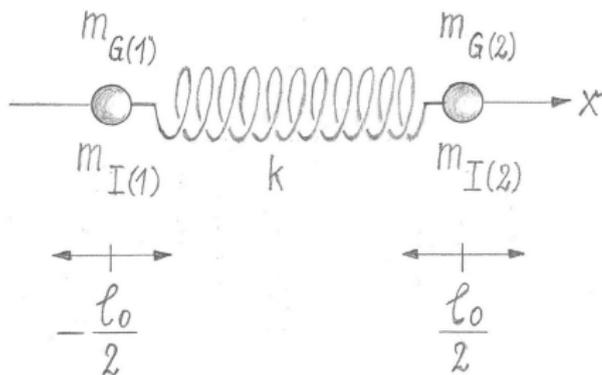
**Rückwirkung:** Lebensdauer des Atoms  $\tau = \frac{E}{\frac{\Delta E}{\Delta t}} \approx 10^{-10} \text{ s}$

→ Bohrsches Atommodell, Quantenmechanik ...

# Massendipole erzeugen *keine* Gravitationswellen

Gravitatives Dipolmoment:

$$d = \frac{\ell_0}{2} (m_{G(2)} - m_{G(1)}) + \left( \frac{m_{G(2)}}{m_{I(2)}} - \frac{m_{G(1)}}{m_{I(1)}} \right) m_{I(2)} A \sin \omega t$$



**Der erste Term  $d_1$ :**

- zeitunabhängig
- $m_{G(1)} + m_{G(2)} > 0$

Es ist immer möglich,  
das Schwerpunktsystem zu wählen.

**Der zweite Term**  $d_2$ :

- Universalität der Gravitation

$$\frac{m_{G(2)}}{m_{I(2)}} - \frac{m_{G(1)}}{m_{I(1)}} = 0$$

- Keine „gravitativ ungeladenen“ Körper; je träger ein Körper ist, desto schwerer ist er.

**Fazit:**

Kein zeitabhängiges Massen-Dipolmoment.

Keine gravitative **Dipol**-Strahlung!

# Die Matrix der Quadrupolmomente

Das Quadrupolmoment einer diskreten Massenverteilung:

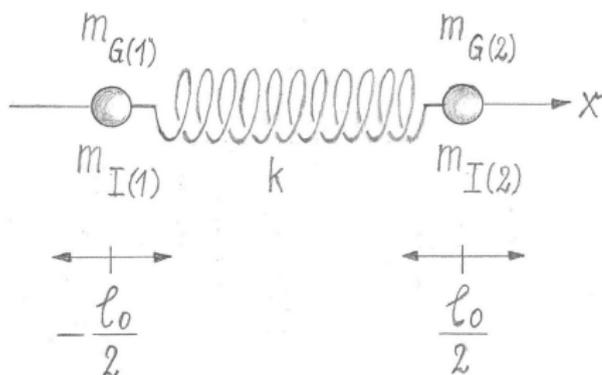
$$Q_{ij} = \sum_{k=1}^N m_{(k)} x_{i(k)} x_{j(k)}$$

Das „reduzierte“ Quadrupolmoment (spurfrei)

$$\bar{Q}_{ij} = Q_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} Q, \quad \text{mit} \quad Q \equiv \text{tr}(Q_{ij})$$

# Beispiel: Der harmonische Oszillator

$$Q_{11} = m \left( A^2 + \frac{\ell_0^2}{2} \right) + 2m\ell_0 A \sin \omega t - mA^2 \cos 2\omega t, \quad Q = Q_{11}$$



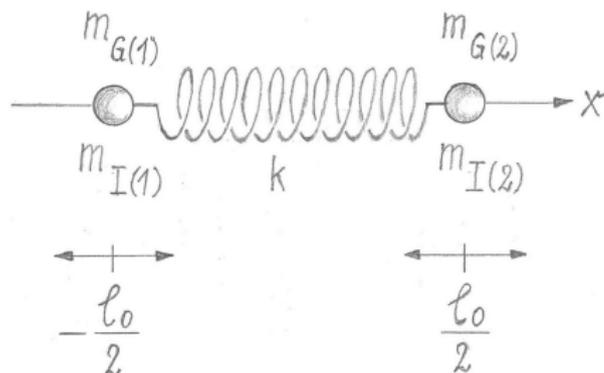
**Der erste Term:**  
zeitunabhängig

**Der zweite Term:**  
dominant für  $A \ll \ell_0$

$$m_1 = m_2 = m, \quad A \ll \ell_0$$

$$(\bar{Q}_{ij}) = \frac{2}{3} m \ell_0 A \sin \omega t \cdot \text{diag}(2, -1, -1)$$

# Quadrupol-Strahlung – Eine Dimensionsanalyse



- Systemparameter:  
 $m, l_0, A, \omega$
- Naturkonstanten:  
 $G, c$

$$m_1 = m_2 = m, \quad A \ll l_0$$

Ohne Herleitung: Die **Quadrupol-Formel** für die abgestrahlte Leistung

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = -\frac{1}{5} \frac{\langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle_t}{\frac{c^5}{G}}, \quad (\text{Summenkonvention})$$

# Quadrupol-Strahlung – Eine Dimensionsanalyse

Dimensionsanalyse für die abgestrahlte Leistung:

- Nur Systemparameter

Ansatz:

$$\left(\frac{\Delta E}{\Delta t}\right)_{\text{sys}} \propto (ml_0 A)^\alpha \omega^\beta$$

Vergleich der Exponenten:

$$\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3} = \text{kg}^\alpha \text{m}^{2\alpha} \text{s}^{-\beta}$$

Lösung:

$$\alpha = 1, \beta = 3$$

$$\left(\frac{\Delta E}{\Delta t}\right)_{\text{sys}} \propto ml_0 A \omega^3$$

# Quadrupol-Strahlung – Eine Dimensionsanalyse

- Nur Naturkonstanten

Ansatz:

$$\left(\frac{\Delta E}{\Delta t}\right)_{\text{ref}} \propto c^\alpha G^\beta$$

Vergleich der Exponenten:

$$\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3} = \text{kg}^{-\beta} \text{m}^{\alpha+3\beta} \text{s}^{-\alpha-2\beta}$$

Lösung:

$$\alpha = 5, \beta = -1$$

$$\left(\frac{\Delta E}{\Delta t}\right)_{\text{ref}} \propto \frac{c^5}{G}, \quad \text{Referenz-Leistung}$$

# Die Einstein-Leuchtkraft

Die Einstein-Leuchtkraft:

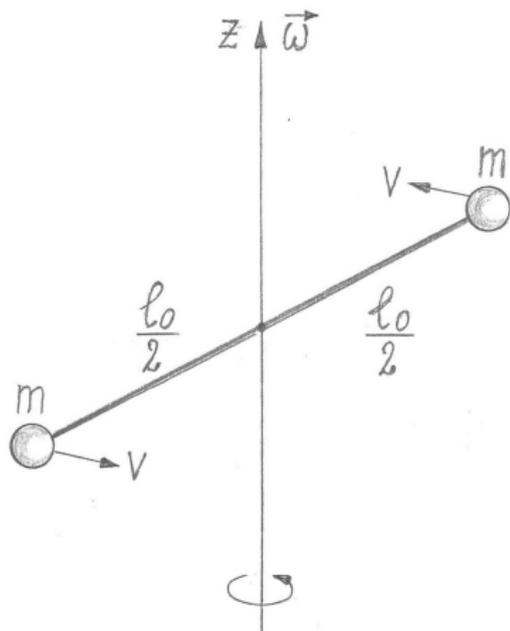
$$\left(\frac{\Delta E}{\Delta t}\right)_{\text{Einstein}} = \frac{c^5}{G} = 3,6 \cdot 10^{52} \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Die einfachste Lösung:

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = - \frac{\left(\frac{\Delta E}{\Delta t}\right)_{\text{sys}}^2}{\left(\frac{\Delta E}{\Delta t}\right)_{\text{Einstein}}} \propto - \frac{(m \ell_0 A)^2 \omega^6}{\frac{c^5}{G}}$$

Fehlender Faktor:  $\frac{4}{15}$

# Beispiel: Die rotierende Hantel



$m_1 = m_2 = m$ , masselose Stange

**Beispiel:**  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $l_0 = 1 \text{ m}$ ,  $T = 1 \text{ s}$

Überlagerung von zwei  
harmonischen Schwingungen

$$x_1 = -x_2 = \frac{l_0}{2} \cos \omega t$$

$$y_1 = -y_2 = \frac{l_0}{2} \sin \omega t$$

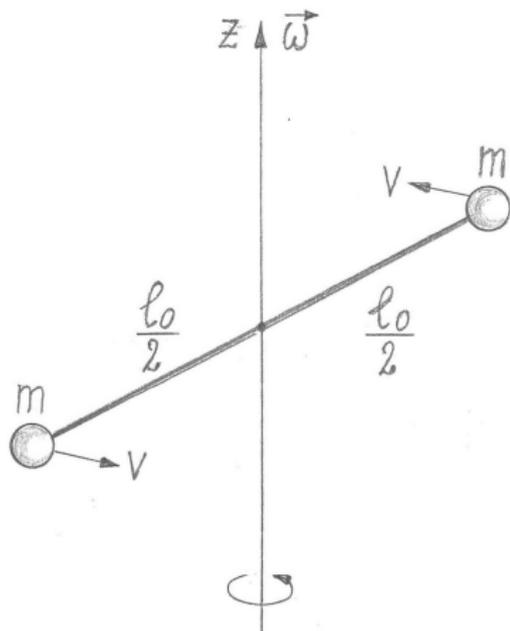
$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \propto -\frac{(ml_0^2)^2 \omega^6}{c^5 \frac{G}{G}}$$

Fehlender Faktor:  $\frac{8}{5}$

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = -2,7 \cdot 10^{-48} \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

# Von der rotierenden Hantel zu den Doppelsternen

Wir stellen die abgestrahlte Leistung als Bruchteil der Einstein-Leuchtkraft dar.



Wir führen ein:

- die Bahngeschwindigkeit

$$v = \frac{l_0}{2} \omega$$

- den Schwarzschild-Radius

$$R_S = 2 \frac{Gm}{c^2}$$

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = -\frac{128}{5} \left( \frac{R_S}{l_0} \right)^2 \left( \frac{v}{c} \right)^6 \cdot \frac{c^5}{G}$$

→ Halte Ausschau nach kompakten Objekten & relativistischen Geschwindigkeiten!

# Die Kompaktheit

Wie kann man die Masse  $m$  eines Körpers in Längeneinheiten ausdrücken?

**Schwarzschild-Radius:**

$$R_S = 2 \frac{Gm}{c^2}$$

Beispiele:

- Erde:  $R_{\text{Erde}} = 0,89 \text{ cm}$
- Sonne:  $R_{\text{Sonne}} = 2,96 \text{ km}$

**Kompaktheit:**

$$C \equiv \frac{R_S}{R}$$

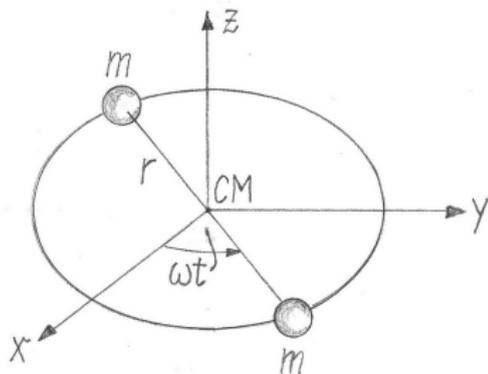
mit  $R$  als typischer Größe des Systems

Beispiele:

Erde	Sonne	Weißer Zwerge	Neutr.-St.	Schw. Löcher
$1,4 \cdot 10^{-9}$	$4,3 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-4}$	0,3	1

# Doppelsterne

Anstelle der masselosen Stange der Hantel: Newtonsche Gravitation und das 3. Keplersche Gesetz



$$m_1 = m_2 = m$$

CM: Schwerpunkt

Kreisbahn, Umlaufzeit  $T$

$$\frac{T^2}{(2r)^3} = \frac{4\pi^2}{(2m)G}$$

Abgestrahlte Leistung:

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = -\frac{2}{5} \left( \frac{R_S}{2r} \right)^5 \cdot \frac{c^5}{G}$$

→ Halte Ausschau nach engen Binärsystemen aus Neutronensternen und/oder Schwarzen Löchern.

# Doppelsterne – Beispiele

- ① Der Doppel-Pulsar PSR 1913+16 (Hulse, Taylor)

$$m_1 \approx m_2 \approx 1,4 M_{\text{Sun}}, T = 7,75 \text{ h}$$

$$r \approx 1,3 \cdot R_{\text{Sun}} = 9 \cdot 10^5 \text{ km (aber stark exzentrische Bahn)}$$

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \approx -3 \cdot 10^{25} \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

- ② Ohne Herleitung: für  $m_1 \neq m_2$  gilt

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{32 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2) G^4}{5 r^5 c^5}$$

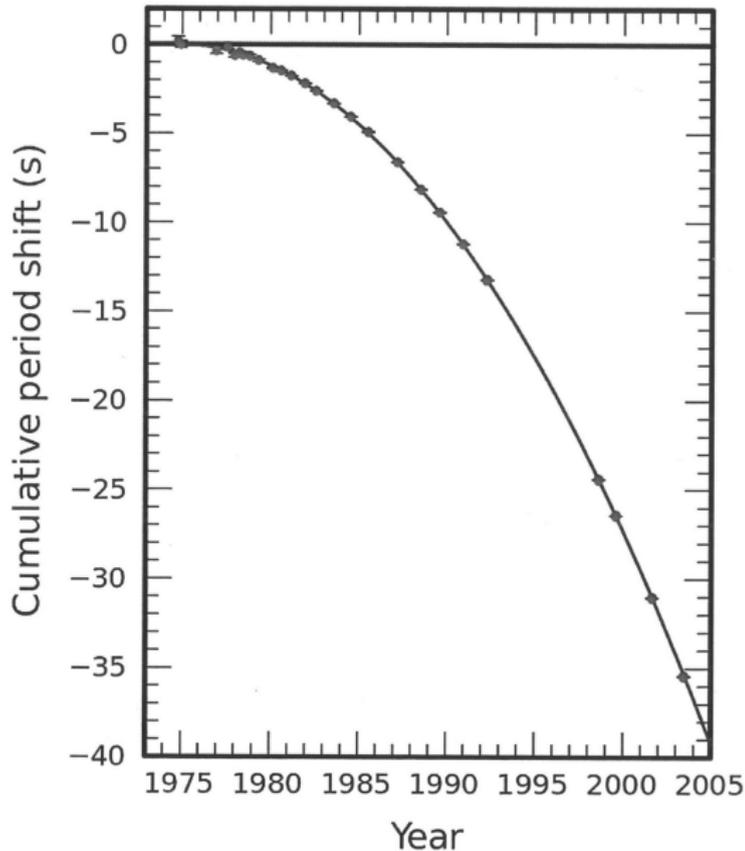
- Sirius A, B

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \approx -10^8 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

- Sonne – Merkur

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \approx -75 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

# PSR 1913+16: Die Periodenänderung



Lebensdauer des  
Doppelsterns:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{E}{\frac{\Delta E}{\Delta t}} \\ &= \frac{5}{32\pi} \frac{T}{\left(\frac{R_S}{2r}\right)^{5/2}}\end{aligned}$$

**Beispiel:** Der Doppel-  
pulsar PSR 1913+16

$$\tau = 1,4 \cdot 10^9 \text{ yr}$$

# LIGO Hanford (Washington)



**L**aser **I**nterferometer **G**ravitational Wave **O**bservatory  
Hanford (Washington)

# LIGO Livingston (Louisiana)



**L**aser **I**nterferometer **G**ravitational Wave **O**bservatory  
Livingston (Louisiana)

PRL 116, 061102 (2016)

Selected for a Viewpoint in *Physics*  
PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending  
12 FEBRUARY 2016



## Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger

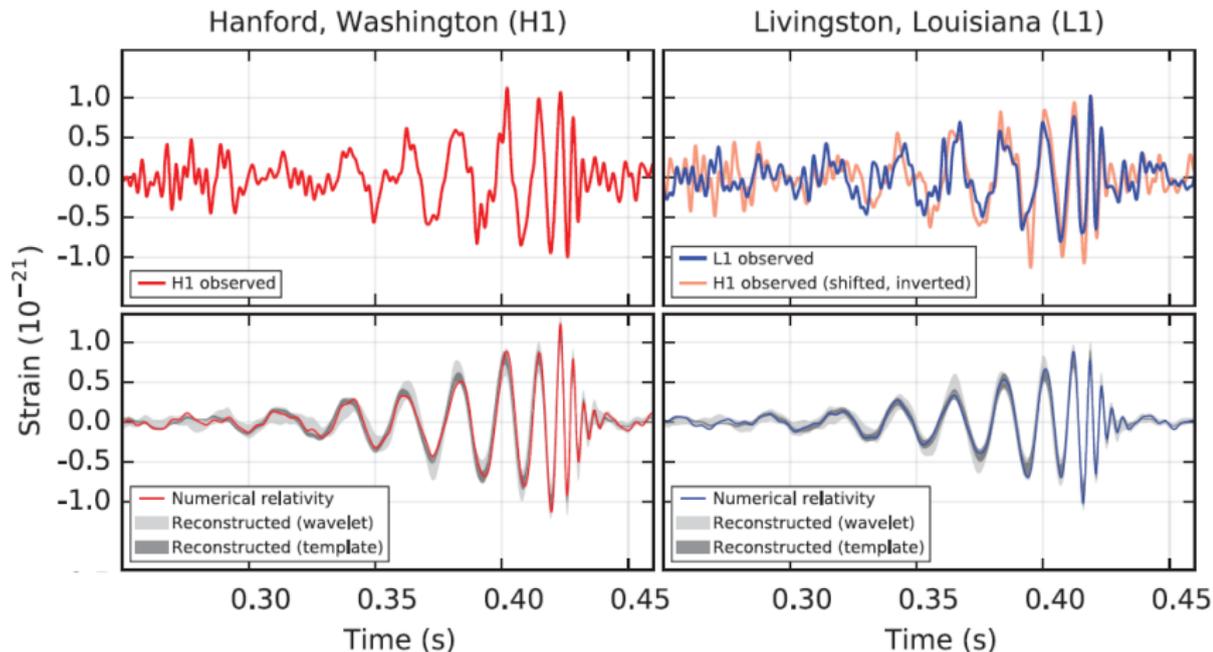
B. P. Abbott *et al.*\*

(LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration)

(Received 21 January 2016; published 11 February 2016)

- Datum: 14.9.2015
- Uhrzeit: 9 h 50 m 45 s (Coordinated Universal Time)
- Frequenzanstieg von 35 Hz auf 250 Hz
- Relative Amplitude:  $h = 10^{-21}$
- Länge der Interferometerarme:  $L = 4$  km  
differentielle Änderung:  $\Delta L = h \cdot L = 4 \cdot 10^{-18}$  m

# Das Gravitationswellen-Ereignis GW150914



**Oben:** Amplitudenverlauf. Den Livingston- Daten sind von Hanford mit einer Zeitverschiebung von 6,9 ms überlagert.

**Unten:** Überlagerung der Messungen mit den Vorhersagen der Allgemeinen Relativitätstheorie.

# Verschmelzung Schwarzer Löcher – die neue Astronomie

- Die Massen des Binärsystems:  $M_1 = 29M_\odot$ ,  $M_2 = 36M_\odot$
- Rotverschiebung:  $z = 0,09$   
entsprechend Leuchtkraft-Entfernung:  $D_L = 410 \text{ Mpc}$
- Die Masse des bei der Verschmelzung entstandenen Schwarzen Loches:  $M = 62M_\odot$
- Abstrahlung durch Gravitationswellen:  
 $(M_1 + M_2) - M = 3M_\odot$
- Maximale Gravitationswellen-Leuchtkraft:  $L_{GW} = 3,6 \cdot 10^{49} \text{ W}$ ,  
entsprechend der Ruhenergie von  $200M_\odot$  pro Sekunde.