

TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DRESDEN

---

# Dynamisch assistierter Schwinger-Effekt für Multi-Skalen-Feldkonfigurationen

Masterarbeit  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Master of Science  
im Master-Studiengang Physik

vorgelegt von

Hans Oppitz  
geboren am 13.06.1990 in Rodewisch

Institut für Theoretische Physik  
Fachrichtung Physik  
Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften  
Technische Universität Dresden  
2017

Eingereicht am 01. 02. 2017

1. Gutachter: Prof. Dr. Burkhard Kämpfer
2. Gutachter: PD Dr. Günter Plunien

Überarbeitete Fassung vom 09. 01. 2017

---

## Zusammenfassung

### Zusammenfassung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung der Elektron-Positron-Paarzeugung in elektrischen Hintergrundfeldern. Ausschaltfunktion zusammen. Unter der Anwendung einer Fourier-Analyse mit zeitabhängigen Koeffizienten im Bereich der Niederdichte-Näherung der quantenkinetischen Theorie kann eine Näherung für die Residualteilchendichte erzeugter Paare für langsame Ein- und Ausschaltvorgänge abgeleitet werden. Diese Näherung wird für symmetrische Ein- und Ausschaltfunktionen ausgewertet. Die Resultate werden vor dem Hintergrund verschiedener Paarerezeugungsregime untersucht. Es wird gezeigt, dass der Verstärkungsfaktor im Kontext der dynamisch assistierten Schwinger-Paarzeugung unabhängig von der konkreten Form der Einhüllenden ist, wenn Ein- und Ausschaltvorgang streng monoton verlaufen. In einer zweiten Untersuchung wird der Frage nachgegangen, ob die Überlagerung von drei Feldern einen zusätzlichen Verstärkungseffekt im Vergleich zum bifrequenten Fall liefert. Die numerischen Resultate werden für eine konkrete Auswahl an Feldparametern diskutiert. Dabei weisen diese nicht auf einen zusätzlichen Verstärkungsfaktor über mehrere Größenordnungen hin, wie es bei der Überlagerung zweier Felder vorkommen kann.

### Abstract

This thesis investigates the electron-positron pair production in multiple time scale electric background fields characterized by an oscillating part and an arbitrary envelope. By applying harmonic analysis with time-dependent coefficients to the low density approximation of quantum kinetic theory one can develop an approximation for the residual particle density in the case of slow ramping and deramping. This approximation is analyzed for symmetric envelope functions. The results are discussed for different pair creation regimes. It is shown that the amplification factor in the context of dynamically assisted Schwinger pair production is independent of the special shape of a symmetric envelope if the ramping and deramping is strictly monotonically.

In the second part it is investigated whether there is an additional amplification effect by superimposing three instead of just two background fields. The numerical results for a special set of field parameters are discussed. They show that there seems to be no additional enhancement of the residual particle density over orders of magnitudes like in the bifrequent case.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Vorbetrachtungen</b>	<b>6</b>
1.1	Die Erzeugung von Elektron-Positron-Paaren aus dem Vakuum . . . . .	6
1.2	Parameterlandschaft der Paarproduktion in zeitlich oszillierenden Feldern . . . .	9
1.3	Dynamisch assistierter Schwinger-Effekt . . . . .	12
1.4	Zur Gliederung dieser Arbeit . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Die quantenkinetische Gleichung</b>	<b>16</b>
2.1	Die quasiklassische Kopplung des Feldes an die quantisierte Dirac-Gleichung . .	16
2.2	Bogoliubov-Transformation . . . . .	21
2.3	Vom Konzept der Quasiteilchendichte zur quantenkinetischen Gleichung . . . .	23
<b>3</b>	<b>Betrachtete Feldkonfigurationen</b>	<b>27</b>
3.1	Allgemeine Festlegungen . . . . .	27
3.2	Abrupter Ein- und Ausschaltvorgang . . . . .	29
3.3	Gauß- und Super-Gauß-Profil . . . . .	30
3.4	Flat-Top-Profil . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Näherung der Residualteilchendichte für langsame Ein- und Ausschaltvorgänge</b>	<b>37</b>
4.1	Verallgemeinerung der Fourier-Reihenentwicklung in der Niederdichte-Näherung	37
4.2	Auswertung für symmetrische Ein- und Ausschaltfunktionen . . . . .	42
4.2.1	Reduktion des Problems auf den Einschaltvorgang . . . . .	42
4.2.2	Explizite Anwendung der Methode der stationären Phase . . . . .	44
4.2.3	Verhalten der Residualdichte im Gauß- und Super-Gauß-Profil . . . . .	50
4.2.4	Verhalten der Residualdichte im Flat-Top-Profil . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Der Einfluss der Ein- und Ausschaltfunktion auf die Residualdichte</b>	<b>66</b>
5.1	Die Struktur der Residualdichte im Multi-Photonen- und Tunnel-Regime . . . .	66
5.2	Der Einfluss der Einhüllenden auf den dynamisch assistierten Schwinger-Effekt	73
<b>6</b>	<b>Numerische Resultate zum doppelt assistierten Schwinger-Effekt</b>	<b>78</b>
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>87</b>

---

<b>A</b>	<b>Rechnungen zur Entwicklung der Näherungslösung</b>	<b>89</b>
A.1	Explizite Rechnung zur Verallgemeinerung der Fourier-Reihenentwicklung . . .	89
A.2	Abschätzung der Grundbedingung für die Stationäre-Phasen-Näherung . . . .	93
A.3	Umformungen zur Reduktion des Problems auf den Einschaltvorgang . . . . .	95
A.4	Herleitung verwendeter Integrale . . . . .	96
A.5	Anleitung zur Anwendung der entwickelten Näherung . . . . .	97
<b>B</b>	<b>Näherungen zur Nullmode der Quasiteilchenenergie</b>	<b>99</b>
<b>C</b>	<b>Verhalten der Quasiteilchendichte im Flat-Top-Intervall</b>	<b>101</b>
	<b>Literatur</b>	<b>105</b>

# 1 Einleitung und Vorbetrachtungen

## 1.1 Die Erzeugung von Elektron-Positron-Paaren aus dem Vakuum

Die Möglichkeit der Erzeugung von Elektron-Positron-Paaren durch ein räumlich konstantes elektrisches Hintergrundfeld wurde erstmals 1931 von Fritz Sauter [1] erforscht. Ausgangspunkt war die von Dirac ausgearbeitete Theorie des Elektrons, die dieser drei Jahre zuvor veröffentlicht hatte [2]. Die ihr zugrunde liegende Wellengleichung, die Dirac-Gleichung, enthält in ihrer freien Form als Lösungen ebene Wellen mit negativer sowie positiver Energie. Wie von Dirac in [3] ausführlich diskutiert, bewegt sich ein Elektron mit negativer Energie in einem externen Feld genauso, als würde es an Stelle der negativen Ladung  $-e$  die Ladung  $+e$  tragen. Davon ausgehend entwickelte er eine Theorie der Positronen als Antiteilchen der Elektronen noch bevor diese durch Carl David Anderson 1932 in hochenergetischer kosmischer Strahlung nachgewiesen werden konnten [4].

Theoretische Untersuchungen von Oskar Klein [5] zur Streuung von Elektronen an einem Potentialsprung  $\phi(x) = \theta(x)V_0/e$  hatten für Potentialenergien  $V_0$  größer als die doppelte Ruhemasse  $m_e$  des Elektrons für einlaufende Teilchen im Energieintervall  $V_0 - m_e \geq \epsilon(\mathbf{p})$  das verblüffende Resultat ergeben, dass die Zahl der reflektierten die der einlaufenden übersteigt. Dem entspricht ein negativer Transmissionsstrom auf der anderen Seite der Barriere. Nach der Interpretation Diracs kommt dies der permanenten Erzeugung von Elektron-Positron-Paaren am Potentialsprung gleich. Darauf aufbauend bearbeitete Sauter in seiner Arbeit [1] die Streuung an einem zwischen zwei Punkten räumlich anwachsenden Potential der Form  $\phi(x) = E_0x$ . Daraus ergibt sich gemäß  $\mathbf{E}(x) = -\phi'(x)\vec{e}_x$  ein konstantes elektrisches Feld der Stärke  $E_0$  in  $x$ -Richtung. Ein wesentliches Resultat folgt unter der Bedingung  $E_0 \ll E_c$  für den Koeffizienten  $D$  transmittierter Teilchen als dem Verhältnis von aus- zu einlaufendem Strom:

$$D = \exp\left(-\pi \frac{E_c}{E_0}\right) + \mathcal{O}\left(\left[\frac{E_c}{E_0}\right]\right)^2 \quad (1.1)$$

mit der kritischen Feldstärke  $E_c = m_e^2/e$ . Das heißt der Transmissionsstrom ist für  $E_0 < E_c$  exponentiell unterdrückt und liefert erst in der Größenordnung  $E_0 \gtrsim E_c$  nennenswerte Beiträge.

Diracs-Theorie des Elektrons wurde in den vierziger Jahren durch Tomonaga, Feynman und

Schwinger zur Quantenelektrodynamik, dem Prototyp der Quantenfeldtheorien, weiterentwickelt. Dadurch konnte zum Beispiel eine adäquate Beschreibung der Lamb-Verschiebung erreicht werden.<sup>1</sup> Das exponentielle Verhalten in Gl. (1.1) findet sich auch in der quantenfeldtheoretischen Arbeit Schwingers [7] zum quantenelektrodynamischen Vakuum aus dem Jahr 1951. Mit Hilfe des „Proper-Time“-Formalismus konnte Schwinger die Vorhersage ableiten, dass durch das Anlegen eines räumlich homogenen und zeitlich konstanten elektrischen Feldes der Stärke  $E_0$  das quantenelektrodynamische Vakuum ab der kritischen Feldstärke  $E_c$  effektiv zerfällt. Für die Elektron-Positron-Paarerzeugungswahrscheinlichkeit  $P_{e^-e^+}$  pro Ortsraumvolumen  $V_{\text{Ort}}$  und Zeitintervall  $\Delta t$  ergibt sich in erster Näherung

$$P_{e^-e^+} = \frac{\alpha}{\pi^2} E_0^2 \exp\left(-\pi \frac{E_c}{E_0}\right). \quad (1.2)$$

Dabei ist  $\alpha = e^2/(4\pi) \approx 1/137$  die Feinstrukturkonstante. Dieses als Schwinger-Effekt in die Literatur eingegangene Phänomen ist in Analogie zur Arbeit von Sauter ebenfalls für Feldstärken  $E_0 < E_c$  exponentiell unterdrückt. Im Bild des Dirac-Sees lässt sich der Schwinger-Effekt veranschaulichen. Wie bereits erwähnt, sind die Lösungen der Dirac-Gleichung ohne elektrisches Hintergrundfeld ebene Wellen der Energie  $\epsilon(\mathbf{p}) = \pm\omega(\mathbf{p})$  mit der Relation  $\omega^2(\mathbf{p}) = m_e^2 + \mathbf{p}^2$ .<sup>2</sup> Der physikalische Vakuum-Zustand ist nach Dirac dadurch charakterisiert, dass alle Niveaus im negativen Energiekontinuum  $\epsilon(\mathbf{p}) \leq -m$  besetzt und alle erlaubten Zustände im positiven Energiekontinuum  $\epsilon(\mathbf{p}) > m$  unbesetzt sind. Ein erzeugter Zustand im Bereich  $\epsilon(\mathbf{p}) > 0$  wird dann als Elektron mit Energie  $\omega(\mathbf{p})$  interpretiert. Auch die Vernichtung eines Zustandes im negativen Kontinuum mit  $\epsilon(\mathbf{p}) < 0$  erhöht die Gesamtenergie um  $\omega(\mathbf{p})$  und wird als Erzeugung eines Positrons definiert. Der Vakuumzustand ist dann der Zustand, der keine realen Teilchen enthält. Er ist schematisch in Abb. 1.1a dargestellt.<sup>3</sup> Die Anregung eines Zustandes aus dem negativen Kontinuum ins positive kostet mindestens die doppelte Ruhemasse  $2m_e$  und entspricht der Erzeugung eines Elektron-Positron-Paares. Das Anlegen eines konstanten Hintergrundfeldes  $\mathbf{E}(x) = -E_0\vec{e}_x$  liefert den zusätzlichen Energiebeitrag  $+eE_0x$ . Positives und negatives Kontinuum „verkippen“ und es entstehen auf beiden Seiten energetisch gleichwertige Zustände wie in Abb.1.1b dargestellt. Dies ermöglicht ohne weiteren Energieaufwand den Teilchenaustausch als quantenmechanischen Tunnelprozess zwischen den beiden Kontinua in  $x$ -Richtung. Es können also permanent Elektron-Positron-Paare erzeugt und nach entstandenen Löchern auch wieder vernichtet werden. Die auftretende Häufigkeit

<sup>1</sup>Siehe Einleitung in [6].

<sup>2</sup>Zur Löcher-Theorie von Dirac vgl. [3] und [8], S. 310-313. Siehe auch Abschnitt 2.1.

<sup>3</sup>Aus der auch in der Quantenfeldtheorie resultierenden divergenten Nullpunktsenergie muss durch entsprechende Regularisierungsverfahren zum Beispiel durch die Hinzunahme externer Randbedingungen ein endlicher Anteil gewonnen werden.

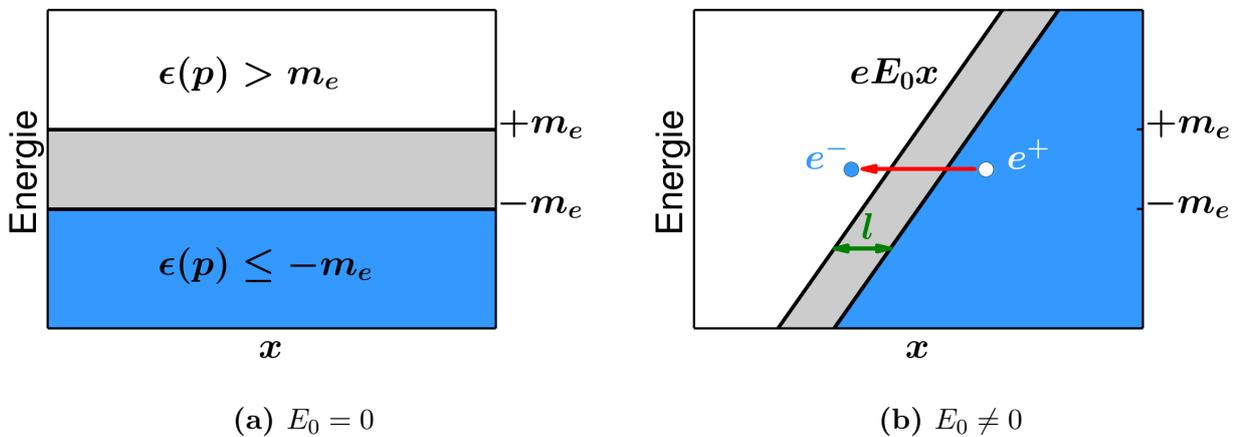
hängt von der minimalen Tunneldistanz

$$l = \frac{2m_e}{eE_0} = \frac{\lambda_c E_c}{\pi E_0} \quad (1.3)$$

ab. Dabei ist  $\lambda_c = 2\pi/m \approx 2.4\text{nm}$  die Compton-Wellenlänge des Elektrons. Durch Einsetzen in Gl. (1.2) ergibt sich

$$P_{e^-e^+} \propto \exp\left(-\pi^2 \frac{l}{\lambda_c}\right) \quad (1.4)$$

und damit eine für quantenmechanische Tunnelprozesse typische exponentielle Abhängigkeit der Tunnelwahrscheinlichkeit von der Tunneldistanz. Wie zu erwarten ist erst ab einer Entfernung  $l$  im Bereich der Compton-Wellenlänge  $\lambda_c$  die Paarerzeugung effektiv möglich.



**Abbildung 1.1:** Der Schwinger-Effekt als Resultat eines räumlich homogenen, zeitlich konstanten Hintergrundfeldes der Feldstärke  $E_0$  im Bild des Dirac-Sees.

In Anlehnung an die hier aufgeführten Arbeiten [1] und [7] wird die kritische Feldstärke auch als Sauter-Schwinger-Feldstärke bezeichnet. Sie hat in etwa einen Wert von  $E_c \approx 10^{18}\text{V/m}$ . Derartige Feldstärken konnten bis heute nicht auf den notwendigen Zeit- und Raumskalen realisiert werden. Der Schwinger-Effekt als eine fundamentale, nicht perturbative Vorhersage der Quantenfeldtheorie entzieht sich daher bis heute seiner experimentellen Überprüfbarkeit. Die Entwicklung und Planung neuer Laser-Technologien sowie im Bereich der optischen [9] als auch der Freien-Elektronen-Laser (FEL) [10] mit subkritischen Feldstärken von bis zu  $E_0 \approx 0.1E_c$  haben in den letzten Jahren dazu beigetragen, neue experimentelle Möglichkeiten auszuloten.<sup>4</sup> Theoretische Arbeiten in diesem Bereich zielen daher vor allem auf der Erschließung und Untersuchung potentieller Verstärkungseffekte, die die Paarerzeugung bereits im subkritischen Bereich messbar machen könnten. Dabei entzieht sich der Schwinger-Effekt einer perturbativen Betrachtung. Es zeigt sich, dass starke nichtlineare Effekte auftreten können, wodurch die

<sup>4</sup>Siehe auch [11].

Zahl erzeugter Elektron-Positron-Paare exponentiell verstärkt wird.<sup>5</sup> Ausgangspunkt ist dabei die Erweiterung des klassischen Schwinger-Effektes auf räumlich homogene, jedoch zeitlich alternierende Felder  $\mathbf{E}(t)$ , wie sie lokal im Schwingungsbauch zweier sich überlagernder elektrischer Felder erzeugt werden können. Der Darstellung des resultierenden zweidimensionalen Parameterraumes dient der folgende Abschnitt 1.2.

## 1.2 Parameterlandschaft der Paarproduktion in zeitlich oszillierenden Feldern

Ausgangspunkt ist die folgende experimentelle Überlegung. Durch die Überlagerung zweier Laser, die charakterisiert sind durch die Feldstärke  $E_0$  und die Frequenz  $\nu$ , kann eine stehende Welle der Form  $E(x, t) = E_0 \sin(\nu t) \cos(kx)$  erzeugt werden. Sie sei im Bereich der  $n$ -fachen Comptonwellenlänge des Elektrons, d.h. für  $|x| \leq n\lambda_c$  räumlich nahezu konstant. Dann folgt aus der Bedingung  $kn\lambda_c \ll 1$  mit der Relation  $k = \nu$  für die Frequenz des Feldes

$$\frac{\nu}{m_e} \ll \frac{n}{2\pi} \quad (1.5)$$

und man erhält lokal das rein zeitabhängige mit der Periode  $T = 2\pi/\nu$  oszillierende Feld

$$E(t) = E_0 \sin(\nu t). \quad (1.6)$$

Édouard Brézin und Claude Itzykson zeigten 1970 in [12] mit Hilfe eines quasiklassischen WKB-Ansatzes, dass auch für rein zeitlich oszillierende Felder ein Zerfall des quantenelektromagnetischen Vakuums möglich ist. Aus ihrer Näherung für kleine Parameter  $E_0/E_c \ll 1$  ergibt sich die Paarerzeugungswahrscheinlichkeit als

$$P_{e^-e^+} = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{g(\gamma) + \frac{1}{2}\gamma g'(\gamma)} \exp\left(-\pi \frac{E_c}{E_0} g(\gamma)\right). \quad (1.7)$$

Sie ist in Abbildung 1.2 als Konturplot in Abhängigkeit von den Feldparametern  $E_0/E_c$  und  $\nu/m_e$  dargestellt.<sup>6</sup> Daraus lassen sich die charakteristischen Regime der Elektron-Positron-Paarerzeugung in zeitabhängigen Hintergrundfeldern erkennen. Der schon bei Sauter in Gl. (1.1) und Schwinger in Gl. (1.2) auftretende exponentielle Faktor wird modifiziert durch die Funktion  $g(\gamma)$ . Sie ist gegeben durch das Integral

$$g(\gamma) = \frac{4}{\pi} \int_0^1 du \left( \frac{1-u^2}{1+\gamma^2 u^2} \right) \quad (1.8)$$

<sup>5</sup>Siehe Abschnitt (1.3).

<sup>6</sup>In [10] sind Verallgemeinerungen von Gl. (1.7) aufgeführt, die in der Folgezeit entwickelt worden sind.

und ergibt in den relevanten Grenzfällen

$$\begin{aligned} \gamma \ll 1: \quad g(\gamma) &= 1 - \frac{1}{8}\gamma^2 + \mathcal{O}(\gamma^4), \\ \gamma \gg 1: \quad g(\gamma) &= \frac{4}{\pi\gamma} \ln(2\gamma) + \mathcal{O}(1/\gamma). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Dabei bezeichnet

$$\gamma = \frac{m_e \nu}{e E_0} = \frac{E_c}{E_0} \frac{\nu}{m_e} \tag{1.10}$$

den Keldysh-Parameter.<sup>7</sup> Er ist der entscheidende Feldparameter für die Charakterisierung der Akkumulationsregime, die in Abb. 1.2 festgehalten sind und im Folgenden systematisch erläutert werden.

Das Tunnelregime (TR) entspricht dem Grenzfall  $\gamma \leq 1$ . Es dominiert der Effekt der klassischen Schwinger-Paarzeugung aus Gl. (1.2) als quantenmechanischer Tunnelprozess, wie in Abb. 1.1 veranschaulicht. Dies entspricht insbesondere dem Bereich optischer Laser wie ELI [9] mit Frequenzen  $\nu \ll m_e$ , aber auch dem geplanten XFEL im keV-Bereich aus [10] mit  $\nu = 0.02m_e$  und subkritischer Feldstärke  $E_0 = 0.01E_c$ . Unterhalb der Sauter-Schwinger-Feldstärke  $E_c$  ist die Paarzeugungswahrscheinlichkeit  $P_{e^-e^+}$  exponentiell unterdrückt. Sie steigt ab Feldstärken  $E_0 = 0.2E_c$  im sog. Starkfeld-Regime (SR) schlagartig an.

Das Multi-Photonen- (MR) und das Mono-Absorptions-Regime (MAR) entsprechen Parametern  $\gamma \gg 1$ . In diesen Bereichen dominiert der vom klassischen Schwinger-Effekt zu unterscheidende dynamische Paarzeugungsprozess, der im Zuge des SLAC-Experiments E-144 bereits experimentell überprüft werden konnte [14]. Die hohe Frequenz des Feldes unterdrückt den Tunnelprozess, da die für Tunnelereignisse zur Verfügung stehende Zeit stark begrenzt ist. Es dominiert der Effekt der Absorption von  $\ell$  virtuellen Feldphotonen mit einer Gesamtenergie von  $\epsilon_\gamma = \ell\nu$ , die mindestens doppelt so groß wie die Ruhemasse  $m_e$  des Elektrons ist. Paare werden mit einem jeweiligen Impuls von

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_\gamma}{2}\right)^2 - m_e^2} \tag{1.11}$$

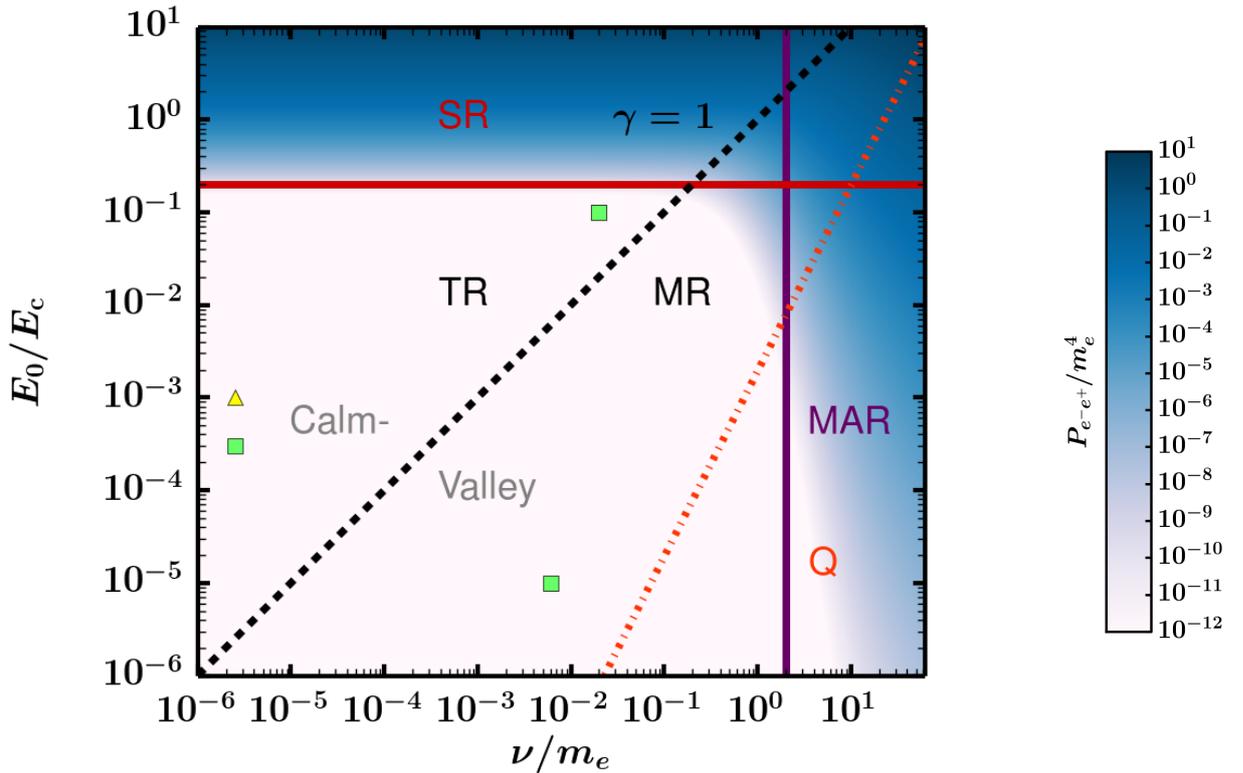
erzeugt. In diesem Bereich liegt zum Beispiel der keV-Laser aus [10] mit Feldstärken von  $E_0 \approx 10^{-5}E_c$ . Im Mono-Absorptions-Regime gilt für die Frequenz  $\nu \geq 2m$  und es reicht bereits die Absorption eines einzigen Feldphotons zur Erzeugung eines Paares aus, was die Paarzeugungswahrscheinlichkeit rapide erhöht. Sie ist nach den Gln. (1.7) und (1.9) näherungsweise

<sup>7</sup>Der Keldysh-Parameter stammt aus dem Kontext der Berechnung von Ionisationswahrscheinlichkeiten in Atomen [13]. Auch im Modell des „Dirac-Sees“ kann die Paarzeugung als eine Art effektiver Ionisationsprozess mit dem Ionisationspotential der Größe  $2m_e$  aufgefasst werden.

durch

$$P_{e^-e^+} \approx \frac{\alpha E_0^2}{8} \left( \frac{1}{2\gamma} \right)^{4m_e/\nu} \quad (1.12)$$

gegeben und besitzt damit eine nahezu quadratische Abhängigkeit von der Feldstärke  $E_0$ . Entsprechend ist sie für kleine Feldstärken  $E_0 \ll E_c$  und Bereiche  $\nu \leq 2m_e$  ebenfalls stark unterdrückt. Insbesondere sinkt die Wahrscheinlichkeit der Absorption mehrerer virtueller Feldphotonen mit zunehmender Anzahl  $\ell$ . Bei der dynamischen Paarerzeugung handelt es sich um



**Abbildung 1.2:** Die zweidimensionale Parameterlandschaft der Paarerzeugung in zeitlich alternierenden Hintergrundfeldern. Als Konturplot ist die Paarerzeugungswahrscheinlichkeit  $P_{e^-e^+}$  pro Volumen und Zeit nach Gl.(1.7) in Einheiten von  $m_e^4$  dargestellt. Die schwarze Linie entspricht dem Keldysh-Parameter  $\gamma = 1$  und trennt das Tunnel-Regime (TR,  $\gamma \leq 1$ ) vom Multiphotonen-Regime (MR,  $\gamma \gg 1$ ). Für Feldstärken  $E_0 \geq 0.2E_c$  beginnt das Starkfeld-Regime (SR). Der Bereich mit Frequenzen  $\nu \geq 2m_e$  wird als Mono-Absorptionsregime (MAR) bezeichnet. Im Quanten-Regime (Q), gekennzeichnet durch Gl. (1.13), spielen Quanteneffekte eine Rolle. Das Gebiet  $E_0 \leq 0.2E_c$  und  $\nu \leq 2m_e$  wird nach [15] als „Calm-Valley“ bezeichnet, da hier die Paarerzeugung stark unterdrückt ist. Das gelbe Dreieck kennzeichnet ELI [9]. Die grünen Quadrate kennzeichnen die XFEL-Parameter aus [10].

einen genuin quantenmechanischen Prozess, der für Feldstärken  $E_0 \ll E_c$  auch perturbativ zugänglich ist zum Beispiel als Breit-Wheeler-Prozess [16]. Als solchen bezeichnet man die Entstehung eines Elektron-Positron-Paares durch die Kollision zweier reeller Photonen. Nach

[15] ist die quasiklassische Kopplung des elektrischen Hintergrundfeldes unter Vernachlässigung von Quantenfluktuationen nur für eine entsprechend große Anzahl an Photonen innerhalb des Volumens  $\lambda^3 = (2\pi/\nu)^3$  zulässig. Für Feldstärken

$$E_0 \leq \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{\nu}{m_e} \right)^2 E_c \quad (1.13)$$

spielen Quanteneffekte des Feldes eine Rolle, die innerhalb eines quasiklassischen Ansatzes nicht berücksichtigt werden können. Dies entspricht dem Quanten-Regime (Q).

In Abb. (1.2) ist zu erkennen, dass alle aktuellen Laser-Anlagen, inklusive derer die in absehbarer Zeit realisierbar erscheinen, innerhalb des Bereiches stark unterdrückter Paarerzeugung liegen. Das sog. „Calm-Valley“ ist gekennzeichnet durch Feldstärken  $E_0 \leq 0.2E_c$  und Frequenzen  $\nu \ll 2m$ . Die Anstrengungen der theoretischen Untersuchung der Starkfeld-QED gehen deshalb dahin, für subkritische Feldstärken  $E_0 \lesssim E_c$  mögliche nichtlineare Verstärkungseffekte in Abhängigkeit diverser Feldparameter und Feldkonfigurationen ausfindig zu machen. In diesem Kontext steht der dynamisch assistierte Schwinger-Effekt, auf dem im nächsten Abschnitt (1.3) eingegangen werden soll.

## 1.3 Dynamisch assistierter Schwinger-Effekt

Der dynamisch assistierte Schwinger-Effekt lässt sich wieder im Bild des „Dirac-Sees“ sehr gut veranschaulichen. Durch die Überlagerung eines Feldes mit der Feldstärke  $E_{0,1} \lesssim E_c$  und Frequenz  $\nu_1 \ll m$  aus dem Tunnel-Regime, das damit näherungsweise als konstant angenommen werden kann, mit einem schwächeren ( $E_{0,2} \leq E_c$ ) jedoch höherfrequenten ( $\nu_2 \approx m_e$ ) aus dem Multi-Photonen-Regime wird die Tunneldistanz  $l$  zwischen positivem und negativem Kontinuum durch die Möglichkeit der Absorption  $n$  virtueller Photonen des hochfrequenten Feldes effektiv reduziert. Dies ist schematisch in Abb. (1.3) dargestellt.<sup>8</sup> Die effektive Tunneldistanz lässt sich aus einfachen geometrischen Überlegungen abschätzen als

$$l_{\text{eff}} = l - \frac{n\nu_2}{(eE_0)} = l - \frac{n\gamma_k}{(2\pi)} \lambda_c. \quad (1.14)$$

Dabei wird

$$\gamma_k = \frac{m_e \nu_2}{eE_{0,1}} = \frac{E_c}{E_{0,1}} \frac{\nu_2}{m_e} \quad (1.15)$$

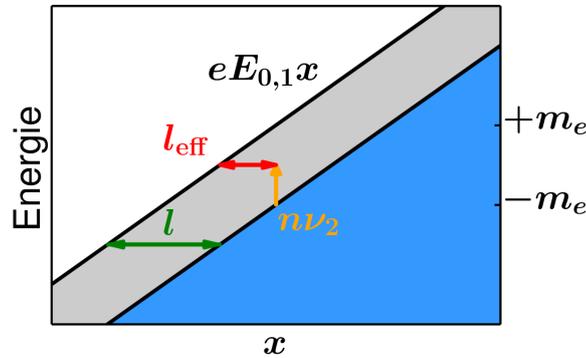
auch als kombinierter Keldysh-Parameter bezeichnet. Nach Gl. (1.4) führt eine effektive Verkürzung von  $l$  zu einer exponentiellen Verstärkung der Paarerzeugungsrate. Für  $n = 1$  lässt sich damit

<sup>8</sup>Die Darstellung folgt [17]. Dort wird zusätzlich zur Überlagerung der beiden Felder die Kollision dieser mit einem relativistischen Nukleus betrachtet.

unter Verwendung von (1.3) die Abschätzung

$$P_{e^-e^+} \propto \exp\left(-\pi \frac{E_c}{E_{0,1}} \left[1 - \frac{\nu_2}{2m_e}\right]\right) = \exp\left(-\pi \frac{E_c}{E_{0,1}}\right) \exp\left(\frac{\pi}{2} \gamma_k\right) \quad (1.16)$$

treffen.<sup>9</sup> Wählt man beide Feldkomponenten aus dem Bereich unterdrückter Paarerzeugung, dem „Calm-Valley“ aus Abb. (1.2), kann für die Überlagerung ein massiver Verstärkungseffekt in Bezug auf die Anzahl erzeugter Paare auftreten [19]. Die Größenordnung des Effektes wird dabei durch den kombinierten Keldysh-Parameter  $\gamma_k$  bestimmt. Offenbar ist der Effekt durch Gl. (1.16) nur innerhalb des Intervalls  $0 \leq \nu_2/2m_e \leq 1$  beschreibbar. Für  $\nu_2 \geq 2m_e$ , im Mono-Absorptions-Regime, dominiert u.a. die dynamische Paarerzeugung des zweiten Feldes. Dann spielt der in Gl. (1.16) vernachlässigte Vorfaktor eine maßgebliche Rolle. Für  $\nu_2 \rightarrow 0$  folgt der klassische Schwinger-Effekt aus Gl. (1.2). Der dynamisch assistierte Schwinger-Effekt



**Abbildung 1.3:** Durch die Überlagerungen eines quasi-statischen Hintergrundfeldes aus dem Tunnel-Regime der Feldstärke  $E_{0,1}$  mit einem schwächeren hochfrequenten Feld der Frequenz  $\nu_2$  wird die minimale Tunneldistanz  $l$ , die zur Paarerzeugung überbrückt werden muss, effektiv auf die Länge  $l_{\text{eff}}$  reduziert.

ist bereits Gegenstand zahlreicher Veröffentlichungen und Abschlussarbeiten geworden unter der Berücksichtigung verschiedener Feldkonfigurationen und Parameter. Dabei wurden insbesondere Sauter-, Gauß-Pulse, oszillierende Felder und verschiedene Kombinationen dieser betrachtet. Beispielhaft seien die Arbeiten von [20–30] erwähnt. Dabei stehen im Allgemeinen verschiedene nicht perturbative Zugänge zur Verfügung, wie der semiklassische WKB-Ansatz und die „Worldline-Instanton“-Methode [18], der Zugang über die quantenkinetische Theorie [31] und der Dirac-Heisenberg-Wigner-Formalismus (DHW) [32]. Eine sehr gute Übersicht über entsprechende Veröffentlichungen findet sich in der Einleitung von [6]. Betrachtet man rein zeitabhängige Felder, bietet sich die quantenkinetische Gleichung (2.60) an. Sie wird u.a. in [20], [24] und [25] auch als Quanten-Vlasov-Gleichung bezeichnet. In [26–28] wurde diese Gleichung systematisch und ausführlich für periodische Hintergrundfelder mit einem abrupt-

<sup>9</sup>Diese einfachen Überlegungen liefern bis auf einen Faktor 1/2 das gleiche Ergebnis wie in [18] für das (1+1)-dimensionale „Toy-Model“ im Bereich  $0 \leq \nu_2/m_e \leq 1$ , das mit Hilfe eines WKB-Ansatzes erhalten wird. Dies kommt daher, dass die klassischen Umkehrpunkte von beiden Seiten der Barriere näher zusammenrücken.

ten Ein- und Ausschaltvorgang ausgewertet. Wie in diesen Veröffentlichungen behauptet und wie in dieser Arbeit gezeigt werden soll, entspricht dies physikalisch einer Einhüllenden mit einem ausgeprägten (effektiven) Flat-Top-Intervall, in der das Feld konstant mit der Frequenz  $\nu$  oszilliert und das wesentlich größer ist als die Ein- und Ausschaltzeit. Für diesen Fall lässt sich die Herabsenkung der Schwelle exponentiell unterdrückter Paarerzeugung im subkritischen Tunnel-Regime durch die Überlagerung mit einem schwächeren hochfrequenten Feld der Frequenz  $\nu_2 \gtrsim m_e$  nach [28] beschreiben.<sup>10</sup> Dabei zeigt sich, dass die Feldstärke des zweiten Feldes nur von untergeordneter Bedeutung ist, während die Erhöhung von  $\nu_2$  zu massiven Verstärkungen in Bezug auf die erzeugte Teilchendichte führt. Dieser Befund spiegelt damit wesentlich die Abschätzung aus Gl. (1.16) wider.

## 1.4 Zur Gliederung dieser Arbeit

Ausgehend von den abschließenden Darstellungen im vorherigen Abschnitt 1.3 soll, wie u.a. in [30] und [33] angeregt wird, der Frage nachgegangen werden, ob und inwiefern sich die Ergebnisse aus [27] und [28] für den abrupten Ein- und Ausschaltvorgang auf beliebige Ein- und Ausschaltfunktionen übertragen lassen. Dabei zeigen die numerischen Resultate in [30] mit einer Gauß-Funktion als Einhüllender durchaus ein anderes Verhalten in Bezug auf die Struktur der erzeugten Teilchendichte im Impulsraum als in [27] und [28]. Die erzeugte Teilchendichte ist sehr sensitiv auf die temporale Struktur der betrachteten Hintergrundfelder [34].

Wie bereits erwähnt, wird dabei der Zugang über die quantenkinetische Theorie gewählt. Dies entspricht der quasiklassischen Kopplung des Hintergrundfeldes an die quantisierte Dirac-Gleichung. Quantenfluktuationen des elektromagnetischen Feldes werden vernachlässigt. Um in die Theorie einzuführen, wird im folgenden Kapitel 2 systematisch die quantenkinetische Gleichung (2.60) hergeleitet. Sie ist der fundamentale Ausgangspunkt der in dieser Arbeit entwickelten Näherung und der numerisch erhaltenen Resultate.

In Kapitel 3 sind die in dieser Arbeit betrachteten Feldkonfigurationen aufgeführt. Dazu wird zunächst ein relativ allgemeiner Ansatz als Ausgangspunkt gewählt. Der Unterabschnitt 3.2 greift noch einmal den abrupten Ein- und Ausschaltvorgang auf, um deutlich zu machen, was darunter in dieser Arbeit zu verstehen ist. In den Unterabschnitten 3.3 und 3.4 sind die Feldkonfigurationen festgehalten, an denen die im Verlauf von Kapitel 4 entwickelte Näherung für monotone und symmetrische Ein- und Ausschaltvorgänge konkret angewendet wird.

Das Kapitel 4 ist damit der Kern dieser Arbeit. Hier werden in der Niederdichte-Näherung von Gl. 2.60 die Resultate der Fourier-Analyse, wie sie in [27] entwickelt wurde, auf beliebige Ein- und Ausschaltvorgänge der Gestalt  $K(t/t_r)$  verallgemeinert. Dabei bezeichnet  $t_r$  den Parameter, der die Zeitskala der Einhüllenden gegenüber dem mit der Frequenz  $\nu$  oszillierenden Anteil

---

<sup>10</sup>Siehe Abschnitt 5.2.

festlegt. Ab Abschnitt 4.2 wird der konkretere Fall symmetrischer und monotoner Ein- bzw. Ausschaltvorgänge betrachtet, um das Ergebnis aus dem vorherigen Abschnitt 4.1 mit Hilfe der Methode der stationären Phase auszuwerten und anhand der beiden Feldkonfigurationen 3.3 und 3.4 zu veranschaulichen.

Das sich daran anschließende Kapitel 5 beschäftigt sich ausgehend von der Näherung aus Kapitel 4 im Abschnitt 5.1 mit der Impulsraumstruktur der erzeugten Teilchendichte in Abhängigkeit von der gewählten Ein- und Ausschaltfunktion. Sie erfolgt im Kontext der beiden unterschiedlichen Paarerzeugungsregime im „Calm-Valley“, dem Tunnel- und dem Multi-Photonen-Regime.<sup>11</sup> In Abschnitt 5.2 ist festgehalten, dass zumindest für symmetrische und monoton verlaufende Ein- und Ausschaltvorgänge, die entsprechend langsam ablaufen, sodass mehrere Periodendurchgänge des oszillierenden Anteils möglich sind, der Verstärkungsfaktor im dynamisch assistierten Schwinger-Effekt unabhängig davon ist, wie das Feld konkret ein- und ausgeschaltet wird.

Im letzten Abschnitt wird anhand der Feldkonfiguration 3.4 durch numerische Integration der zu Gl. (2.60) äquivalenten Gl. (2.42) der Frage nachgegangen, ob ein zu [35] analoger „doppelt assistierter Schwinger-Effekt“ für die quasiklassische Überlagerung von drei Feldern beobachtet werden kann.

---

<sup>11</sup>Vgl. Abschnitt 1.2.

# 2 Die quantenkinetische Gleichung

## 2.1 Die quasiklassische Kopplung des Feldes an die quantisierte Dirac-Gleichung

Praktischer Hintergrund des folgenden Modells, das wesentlich in [31] entwickelt wurde, ist die experimentelle Situation der Kollision mehrerer Photonen aus kohärenten Mehrteilchenzuständen, wie sie beispielsweise durch Überlagerung mehrerer ultrastarker Laser realisiert werden kann.<sup>1</sup> Das entstehende Photonenfeld wird näherungsweise als klassisches Hintergrundfeld  $A^\mu$  behandelt. Zudem wird davon ausgegangen, dass im Bereich der Compton-Wellenlänge  $\lambda_c$  des Elektrons das Feld als räumlich homogen betrachtet werden kann. Nach diesen Überlegungen wählt man als Ausgangspunkt das rein zeitabhängige Viererpotential

$$A^\mu(t) \sim (0, \mathbf{A}(t)), \quad (2.1)$$

wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Polarisationsrichtung

$$\mathbf{A}(t) = A_z(t) \vec{e}_z \quad (2.2)$$

gesetzt wird. In Coulomb-Eichung ergibt sich damit das elektrische Feld als

$$\mathbf{E}(t) = -\dot{A}_z(t) = E_z(t) \vec{e}_z. \quad (2.3)$$

Das klassische Hintergrundfeld  $A^\mu(t)$  wird an die Lagrangedichte des freien Elektron- und Positronfeldes minimal angekoppelt, d.h. man ersetzt  $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieA^\mu$ , sodass sich schließlich als Ausgangspunkt die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(\mathbf{x}, t) (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu(t) - m_e) \Psi(\mathbf{x}, t) \quad (2.4)$$

ergibt. Mit dem kanonisch konjugierten Feldimpuls

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}} = i\Psi^\dagger \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup>Dieses Kapitel folgt im wesentlichen [32] und den Arbeiten [23, 26].

folgt für den Hamiltonoperator des Systems

$$\mathcal{H} = \Pi\dot{\Psi} - \mathcal{L} = \bar{\Psi}(\mathbf{x}, t) (-i\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\nabla} + e\gamma^\mu A^\mu(t) + m_e) \Psi(\mathbf{x}, t). \quad (2.6)$$

Durch Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \right) = 0 \quad (2.7)$$

folgt aus Gl. (2.4) die Bewegungsgleichung für die Dirac-Wellenfunktion:

$$(i\gamma^0 \partial_t + i\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\nabla} - e\gamma^\mu A_\mu(t) - m) \Psi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.8)$$

Da das Viererpotential  $A^\mu(t)$  rein zeitabhängig ist, bietet sich die Modenentwicklung

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \Phi(\mathbf{p}, t) \exp(i\mathbf{p}\mathbf{x}) \quad (2.9)$$

an und man erhält mit dem zeitabhängigen Feldimpuls  $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p} - eA_z(t)\vec{e}_z$

$$(i\gamma^0 \partial_t - \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\pi}(\mathbf{p}, t) - m_e) \Phi(\mathbf{p}, t) = 0 \quad (2.10)$$

für die Dirac-Gleichung in Impulsdarstellung. Um diese zu lösen, wählt man den iterativen Ansatz

$$\Phi(\mathbf{p}, t) = (i\gamma^0 \partial_t - \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\pi}(\mathbf{p}, t) - m_e) \Lambda(\mathbf{p}, t), \quad (2.11)$$

woraus sich eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(\partial_t^2 + \omega^2(\mathbf{p}, t) + ieE_z(t)\gamma^0\gamma^3) \Lambda(\mathbf{p}, t) = 0 \quad (2.12)$$

mit  $\omega(\mathbf{p}, t) = \sqrt{\epsilon_\perp^2 + (p_\parallel - eA_z(t))^2}$  und  $\epsilon_\perp^2 = m_e^2 + p_\perp^2$  ergibt. Dabei bezeichnet  $p_\perp = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \geq 0$  den Impuls senkrecht und  $p_\parallel = p_z$  den Impuls parallel zur Feldrichtung des Hintergrundfeldes  $A_z(t)$ .

Im folgenden ist es aufgrund der Struktur von Gl. (2.12) sinnvoll, das Feld  $\Lambda(\mathbf{p}, t)$  nach den Eigenvektoren der Matrix  $\gamma^0\gamma^3$  zu entwickeln. Letztere ist durch

$$\gamma^0\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

gegeben und hat daher die vier Eigenwerte  $\lambda_{1/2} = 1$  und  $\lambda_{3/4} = -1$  mit den dazugehörigen Eigenvektoren  $W_i$ . Hat man diese bestimmt, lässt sich die Entwicklung

$$\Lambda(\mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^4 g_i(\mathbf{p}, t) W_i \quad (2.14)$$

vornehmen. Da die Eigenvektoren  $W_i$  linear unabhängig sind, ergibt sich nach dem Einsetzen von Gl. (2.14) in Gl. (2.12) für jeden Koeffizienten  $g_i$  eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(\partial_t^2 + \omega^2(\mathbf{p}, t) + ieE_z(t)\lambda_i) g_i(\mathbf{p}, t) = 0, \quad (2.15)$$

weshalb

$$g_i(\mathbf{p}, t) = a_i(\mathbf{p}) (g_i^+(\mathbf{p}, t) + g_i^-(\mathbf{p}, t)) \quad (2.16)$$

in zwei unabhängige Lösungen  $g_i^\pm(\mathbf{p}, t)$  zerfällt. Damit erhält man insgesamt acht unabhängige Lösungen. Da die ursprüngliche Bewegungsgleichung (2.10) jedoch erster Ordnung ist, interessieren von den gefundenen Lösungen nur vier. Die restlichen sind bezüglich Gl. (2.10) redundant. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird daher im Folgenden  $i = 1, 2$  gewählt. Da  $\lambda_1 = \lambda_2$  gilt, erfüllen die Koeffizienten  $g_{1/2}^\pm$  die gleiche Differentialgleichung (2.16). Damit folgt

$$g_1^\pm(\mathbf{p}, t) = g_2^\pm(\mathbf{p}, t) = g^\pm(\mathbf{p}, t), \quad (2.17)$$

weshalb die Dynamik der Felder nicht von der konkreten Spineinstellung  $i$  abhängt. Dies erscheint plausibel, da kein zusätzliches Magnetfeld  $\mathbf{B}$  angekoppelt ist. Einsetzen von Gl. (2.17) in die Gln. (2.16) und (2.14) ergibt

$$\Lambda(\mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^2 a_i(\mathbf{p}) (g^+(\mathbf{p}, t) + g^-(\mathbf{p}, t)) W_i, \quad (2.18)$$

und nach der Identifikation mit den zeitabhängigen Basisspinoren

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{p}, t) &= (i\gamma^0 \partial_t - \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\pi}(\mathbf{p}, t) + m_e) g^+(\mathbf{p}, t) W_i, \\ v_i(-\mathbf{p}, t) &= (i\gamma^0 \partial_t - \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\pi}(\mathbf{p}, t) + m_e) g^-(\mathbf{p}, t) W_i \end{aligned} \quad (2.19)$$

erhält man nach Gl. (2.11) schließlich

$$\Phi(\mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^2 (u_i(\mathbf{p}, t) a_i(\mathbf{p}) + v_i(-\mathbf{p}, t) a_i(\mathbf{p})). \quad (2.20)$$

Bei der Quantisierung des Dirac-Feldes ersetzt man die Modenamplituden  $a_i(\mathbf{p})$  und  $a_i^*(\mathbf{p})$  durch fermionische Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren  $\hat{a}_i(\mathbf{p})$  und  $\hat{a}_i^\dagger(\mathbf{p})$ , die die Antikommutator-Relation

$$\{\hat{a}_i(\mathbf{p}), \hat{a}_j^\dagger(\mathbf{q})\} = (2\pi)^3 \delta_{ij} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (2.21)$$

erfüllen. Alle nicht aufgeführten Antikommutatoren verschwinden. Der Vakuumzustand  $|\bar{0}\rangle$  ist durch

$$\hat{a}_i(\mathbf{p}) |\bar{0}\rangle = 0 \quad (2.22)$$

für alle Impulse  $\mathbf{p}$  und Spineinstellungen  $i$  definiert.<sup>2</sup> Dabei ist  $|\bar{0}\rangle$  ein Zustandsvektor des eindimensionalen Hilbert-Raums  $H_0$ . Für den Fall ohne Hintergrundfeld  $A^\mu = 0$  lässt sich Gl. (2.16) explizit lösen und man erhält:

$$g_{\text{vac}}^\pm(\mathbf{p}, t) = \frac{\exp(\mp i\omega(\mathbf{p}) t)}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p}) (\omega(\mathbf{p}) \mp p_z)}}. \quad (2.23)$$

Der impulsabhängige Nenner dient ausschließlich der Normierung der Basisspinoren (2.19). Die Lösungen sind damit ebene Wellen mit positiver und negativer Energie  $\epsilon(\mathbf{p}) = \pm\omega(\mathbf{p}) = \pm\sqrt{m_e^2 + \mathbf{p}^2}$ . Nach der Diracschen Löchertheorie lässt sich dann der physikalische Vakuumzustand  $|0\rangle$  definieren, indem man alle Zustände mit  $\epsilon(\mathbf{p}) \leq -m$  als besetzt und alle Zustände mit  $\epsilon(\mathbf{p}) > -m$  als unbesetzt annimmt („Dirac-See“):

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{p}) > +m_e : \hat{a}_i(\mathbf{p}) |0\rangle &= 0, \\ \epsilon(\mathbf{p}) \leq -m_e : \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

für alle Impulse  $\mathbf{p}$  und Spineinstellungen  $i$ . Damit ist  $|0\rangle$  ein nicht-trivialer antisymmetrischer Vielteilchenzustand eines Produkt-Hilbert-Raums. Die physikalischen Erzeuger und Vernichter definiert man durch

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{p}) > +m_e : \hat{c}_i(\mathbf{p}) |0\rangle &= 0, \\ \epsilon(\mathbf{p}) \leq -m_e : \hat{d}_i^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

für alle Impulse  $\mathbf{p}$  und Spineinstellungen  $i$ . Für  $\epsilon(\mathbf{p}) > m_e$  ist  $\hat{a}_i(\mathbf{p}) = \hat{c}_i(\mathbf{p})$  und für  $\epsilon(\mathbf{p}) \leq m_e$  ist  $\hat{a}_{i=1,2}^\dagger(\mathbf{p}) = \hat{d}_{i=2,1}^\dagger(-\mathbf{p})$ . Damit erzeugt der Operator  $\hat{c}_i^\dagger(\mathbf{p})$  Teilchen der Energie  $\omega(\mathbf{p}) > 0$ , interpretiert als Elektronen  $e^-$ , und der Operator  $\hat{d}_i^\dagger(\mathbf{p})$  Antiteilchen (Löcher im „Dirac-See“ mit entgegengesetztem Impuls  $-\mathbf{p}$  und entgegengesetztem Spin) der Energie  $\omega(\mathbf{p}) > 0$ , interpretiert als Positronen  $e^+$ . Man prüft leicht, dass die so definierten Erzeuger und Vernichter

<sup>2</sup>Vgl. Abschnitt 1.1 und [3], [8].

die Antikommutator-Relationen

$$\begin{aligned} \left\{ \hat{c}_i(\mathbf{p}), \hat{c}_j^\dagger(\mathbf{q}) \right\} &= (2\pi)^3 \delta_{ij} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \\ \left\{ \hat{d}_i(\mathbf{p}), \hat{d}_j^\dagger(\mathbf{q}) \right\} &= (2\pi)^3 \delta_{ij} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

erfüllen. Alle nicht aufgeführten Antikommutatoren verschwinden. Damit ist der Feldoperator für den Fall ohne Hintergrundfeld, d.h. für  $A^\mu = 0$ , gegeben durch

$$\hat{\Phi}(\mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^2 \left( u_{\text{vac},i}(\mathbf{p}) e^{-i\omega(\mathbf{p})t} \hat{c}_i(\mathbf{p}) + v_{\text{vac},i}(-\mathbf{p}) e^{i\omega(\mathbf{p})t} \hat{d}_i^\dagger(-\mathbf{p}) \right). \quad (2.27)$$

Für den Fall, dass das Hintergrundfeld  $A^\mu(t) \sim (0, \mathbf{A}(t)) \neq 0$  ist, sind die gemäß Gl. (2.16) zu bestimmenden Koeffizienten  $g_i^\pm(\mathbf{p}, t)$  nicht trivial. Insbesondere enthalten sie im Allgemeinen keine ebenen Wellen positiver bzw. negativer Energie.<sup>3</sup> Dann ist eine einfache Teilchen-Anteilchen-Interpretation nicht mehr möglich und die Bedeutung der Operatoren  $\hat{c}_i(\mathbf{p})$  bzw.  $\hat{d}_i(\mathbf{p})$  nicht geklärt. Der Feldoperator

$$\hat{\Phi}(\mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^2 \left( u_i(\mathbf{p}, t) c_i(\mathbf{p}) + v_i(-\mathbf{p}, t) d_i^\dagger(-\mathbf{p}) \right) \quad (2.28)$$

hat dann keine unmittelbare physikalische Bedeutung. Von Interesse sind daher Hintergrundfelder  $A_z(t)$ , bei denen für Zeiten  $t \leq t_i$  bzw.  $t \geq t_f$  die Koeffizienten  $g^\pm(\mathbf{p}, t)$  bezüglich ihrer Zeitabhängigkeit ausschließlich ebene Wellen enthalten. Dies kann zum Beispiel durch das Einführen einer Ein- und Ausschaltfunktion  $K(t/t_r)$  des Hintergrundfeldes realisiert werden mit

$$A_z(t) = \frac{E_0}{\nu} K(t/t_r) h(\nu t) \quad (2.29)$$

und der Ein- und Ausschaltfunktion

$$K(t/t_r) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq t_i, \\ 0 \leq C(t) \leq 1 & \text{für } t_i \leq t \leq t_f, \\ 0 & \text{für } t \geq t_f. \end{cases} \quad (2.30)$$

Die Funktionen  $K(t/t_r)$  und  $h(\nu t)$  werden in Kapitel 3 spezifiziert. Dabei ist ebenfalls die Asymptotik  $t_i \rightarrow -\infty$  und  $t_f \rightarrow \infty$  möglich. Für die Zeiten  $t \leq t_i$  bzw.  $t \geq t_f$  besitzt der Feldoperator  $\hat{\Phi}$  damit eine unmittelbare physikalische Bedeutung.

<sup>3</sup>In [32] werden Lösungen für das konstante elektrische Feld mit  $A_z(t) = -E_0 t$  und für den Fall  $A_z(t) = -E_0 t_r \tanh(t/t_r)$  ermittelt.

## 2.2 Bogoliubov-Transformation

Setzt man den Feldoperator aus Gl. (2.28) in Gl. (2.9) und diese wiederum in Gl. (2.6) ein, so erhält man den Hamiltonoperator  $\mathcal{H}$  des Systems in Impulsdarstellung. Es zeigt sich, dass dieser im Allgemeinen Nichtdiagonalelemente besitzt. Diese sind in [36] aufgeführt und werden im Folgenden durch eine unitäre Bogoliubov-Transformation beseitigt. Ein Teil der Zeitabhängigkeit wird auf neue fermionische Operatoren  $\hat{C}_i(\mathbf{p}, t)$  und  $\hat{D}_i(\mathbf{p}, t)$  übertragen. Dadurch lässt sich nach gelungener Diagonalisierung ein Quasiteilchenkonzept einführen. Die Bogoliubov-Transformation ist von der Form

$$\begin{aligned}\hat{C}_i(\mathbf{p}, t) &= \alpha(\mathbf{p}, t) \hat{c}_i(\mathbf{p}, t) - \beta^*(\mathbf{p}) \hat{d}_i^\dagger(-\mathbf{p}), \\ \hat{D}_i(-\mathbf{p}, t) &= \beta(\mathbf{p}, t) \hat{c}_i(\mathbf{p}) + \alpha^*(\mathbf{p}) \hat{d}_i^\dagger(-\mathbf{p}).\end{aligned}\tag{2.31}$$

Aufgrund der geforderten Unitarität gilt für die Bogoliubov-Koeffizienten

$$|\alpha(\mathbf{p}, t)|^2 + |\beta(\mathbf{p}, t)|^2 = 1.\tag{2.32}$$

Dadurch sind die Antikommutatoren

$$\begin{aligned}\left\{ \hat{C}_i(\mathbf{p}, t), \hat{C}_j^\dagger(\mathbf{q}, t) \right\} &= (2\pi)^3 \delta_{i,j} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \\ \left\{ \hat{D}_i(\mathbf{p}, t), \hat{D}_j^\dagger(\mathbf{q}, t) \right\} &= (2\pi)^3 \delta_{i,j} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q})\end{aligned}\tag{2.33}$$

erfüllt. Alle nicht aufgeführten Antikommutatoren verschwinden. Für Zeiten  $t \leq t_i$  gelte außerdem

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{p}, t \leq t_i) &= 1, \\ \beta(\mathbf{p}, t \leq t_i) &= 0.\end{aligned}\tag{2.34}$$

Dann ist vor dem Einschalten des Hintergrundfeldes, d.h. für  $A_z(t \leq t_i) = 0$ ,

$$\begin{aligned}\hat{C}_i(\mathbf{p}, t \leq t_i) &= \hat{c}_i(\mathbf{p}), \\ \hat{D}_i(\mathbf{p}, t \leq t_i) &= \hat{d}_i(\mathbf{p})\end{aligned}\tag{2.35}$$

und eine Interpretation der neu eingeführten Operatoren  $\hat{C}_i(\mathbf{p}, t \leq t_i)$  und  $\hat{D}_i(\mathbf{p}, t \leq t_i)$  als Erzeuger und Vernichter von Elektronen bzw. Positronen möglich. Führt man zudem neue Basisspinoren  $U_i(\mathbf{p}, t)$  und  $V_i(-\mathbf{p}, t)$  mit

$$\begin{aligned}u_i(\mathbf{p}, t) &= \alpha(\mathbf{p}, t) U_i(\mathbf{p}, t) + \beta(\mathbf{p}, t) V_i(-\mathbf{p}, t), \\ v_i(-\mathbf{p}, t) &= \alpha(\mathbf{p}, t) V_i(\mathbf{p}, t) - \beta^*(\mathbf{p}, t) U_i(-\mathbf{p}, t)\end{aligned}\tag{2.36}$$

ein, so erhält man nach Einsetzen dieser in Gl. (2.28) unter Verwendung von Gl. (2.31) für den Feldoperator

$$\hat{\Phi} = \sum_{i=1}^2 \left( U_i(\mathbf{p}, t) C_i(\mathbf{p}, t) + V_i(-\mathbf{p}, t) D_i^\dagger(-\mathbf{p}, t) \right). \quad (2.37)$$

Für den Fall ohne äußeres Feld, d.h. für  $A_z(t) = 0$ , müssen die neuen Basisspinoren mit den alten aus Gl. (2.19) übereinstimmen. Dies ist für die Wahl

$$\begin{aligned} U_i(\mathbf{p}, t) &= (\gamma^0 \omega(\mathbf{p}, t) - \gamma \boldsymbol{\pi}(\mathbf{p}, t) + m_e) G^+(\mathbf{p}, t) W_i, \\ V_i(-\mathbf{p}) &= (-\gamma^0 \omega(\mathbf{p}, t) - \gamma \boldsymbol{\pi}(\mathbf{p}, t) + m_e) G^-(\mathbf{p}, t) W_i \end{aligned} \quad (2.38)$$

mit

$$G^\pm(\mathbf{p}, t) = \frac{e^{\mp \Theta(\mathbf{p}, t)}}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p}, t) (\omega(\mathbf{p}, t) \mp \pi_z(p_{\parallel}, t))}} \quad (2.39)$$

und der dynamischen Phase

$$\Theta(\mathbf{p}, t) = \int_{t_0}^t dt' \omega(\mathbf{p}, t') \quad (2.40)$$

offensichtlich erfüllt. Die Bogoliubov-Koeffizienten sind damit gemäß Gl. (2.36) eindeutig festgelegt:

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{p}, t) &= i\epsilon_{\perp} G^-(\mathbf{p}, t) (\partial_t - i\omega(\mathbf{p}, t)) g^+(\mathbf{p}, t), \\ \beta(\mathbf{p}, t) &= -i\epsilon_{\perp} G^+(\mathbf{p}, t) (\partial_t + i\omega(\mathbf{p}, t)) g^+(\mathbf{p}, t). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Durch Ableiten nach der Zeit  $t$  ergibt sich daraus das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}(\mathbf{p}, t) \\ \dot{\beta}(\mathbf{p}, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & Q(\mathbf{p}, t) \exp(2i\Theta(\mathbf{p}, t)) \\ -Q(\mathbf{p}, t) \exp(-2i\Theta(\mathbf{p}, t)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(\mathbf{p}, t) \\ \beta(\mathbf{p}, t) \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

mit

$$Q(\mathbf{p}, t) = \frac{\epsilon_{\perp} e E_z(t)}{\omega^2(\mathbf{p}, t)}. \quad (2.43)$$

Unter Verwendung des Feldoperators  $\hat{\Phi}(\mathbf{p}, t)$  aus Gl. (2.37) erhält man in der neuen Basis den diagonalen Hamiltonoperator

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}(t) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \hat{\Phi}(\mathbf{p}, t) (\gamma\boldsymbol{\pi}(\mathbf{p}, t) + m_e) \hat{\Phi}(\mathbf{p}, t) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{i=1}^2 \omega(\mathbf{p}, t) \left( \hat{C}_i^\dagger(\mathbf{p}, t) \hat{C}_i(\mathbf{p}, t) + \hat{D}_i^\dagger(-\mathbf{p}, t) \hat{D}_i(-\mathbf{p}, t) \right).\end{aligned}\tag{2.44}$$

Die durchgeführte Diagonalisierung ermöglicht schließlich die Definition einer Quasiteilchendichte  $f(\mathbf{p}, t)$  mit Bezug auf das Phasenraumvolumen  $V_{\text{Ph}}$ , die für Zeiten  $t \leq t_i$  und  $t \geq t_f$  als Dichte erzeugter Elektronen bzw. Positronen physikalisch interpretiert werden kann. Sie lässt sich direkt aus dem Bogoliubov-Koeffizienten  $\beta(\mathbf{p}, t)$  bestimmen. Dies wird im folgenden Abschnitt 2.60 gezeigt.

## 2.3 Vom Konzept der Quasiteilchendichte zur quantenkinetischen Gleichung

Nach der Quantisierung und Diagonalisierung des Dirac-Hamiltonoperators  $\hat{H}(t)$  mit minimaler Kopplung an ein klassisches Hintergrundfeld  $A^\mu(t)$ , siehe Gl. (2.6), wird im Folgenden ausgehend von Gl. (2.44) die Quasiteilchendichte  $f(\mathbf{p}, t)$  definiert. Sie lässt sich für endliche Hintergrundfelder (2.29) sowohl vor dem Einschalten  $t \leq t_i$  als auch nach dem Ausschalten  $t \geq t_f$  als die physikalisch relevante Größe der Dichte erzeugter Elektronen bzw. Positronen interpretieren.

Aufgrund der Diagonalität des Systems (2.44) in den Operatoren  $\hat{C}_i(\mathbf{p}, t)$  und  $\hat{D}_i^\dagger(\mathbf{p}, t)$  ist der jeweilige Grundzustand  $|\Omega_0(t)\rangle$  zur Zeit  $t$  gegeben durch

$$\hat{C}_i(\mathbf{p}, t) |\Omega_0(t)\rangle = \hat{D}_i(\mathbf{p}, t) |\Omega_0(t)\rangle = 0\tag{2.45}$$

mit dem Erwartungswert der Grundzustandsenergie

$$\langle \Omega_0(t) | \hat{H}(t) | \Omega_0(t) \rangle = 0.\tag{2.46}$$

Für Zeiten  $t \leq t_i$ , also bevor das äußere Hintergrundfeld  $A^\mu(t)$  eingeschaltet wird, sei der Grundzustand des Systems (2.44) identisch mit dem physikalischen Vakuumzustand

$$|\Omega_0(t \leq t_i)\rangle = |0\rangle.\tag{2.47}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\hat{C}_i(\mathbf{p}, t \leq t_i) |0\rangle &= \hat{c}_i(\mathbf{p}) |0\rangle = 0, \\ \hat{D}_i(-\mathbf{p}, t \leq t_i) |0\rangle &= \hat{d}_i(-\mathbf{p}) |0\rangle = 0,\end{aligned}\tag{2.48}$$

d.h. für die Bogoliubov-Koeffizienten aus Gl. (2.31) gilt

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{p}, t \leq t_i) &= 1, \\ \beta(\mathbf{p}, t \leq t_i) &= 0.\end{aligned}\tag{2.49}$$

Der Feldoperator  $\hat{\Phi}(\mathbf{p}, t \leq t_i)$  ist dann durch Gl. (2.27) gegeben. Von physikalischem Interesse ist der sich einstellende Grundzustand  $|\Omega_0(t_\infty)\rangle$  des Systems für  $t_\infty \geq t_i$ , wenn das Hintergrundfeld  $A_z(t)$  dauerhaft verschwindet. Dann enthält der Feldoperator aus Gl. (2.28) erneut ebene Wellen mit positiver bzw. negativer Energie  $\pm\omega(\mathbf{p}) = \pm\sqrt{m_e^2 + \mathbf{p}^2}$ , wodurch die physikalische Interpretation der fermionischen Operatoren  $\hat{c}_i(\mathbf{p})$ ,  $\hat{c}_i^\dagger(\mathbf{p})$  und  $\hat{d}_i(\mathbf{p})$ ,  $\hat{d}_i^\dagger(\mathbf{p})$  als Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren für Elektronen bzw. Positronen wieder möglich wird. Von physikalischem Interesse ist die Zahl erzeugter Elektron-Positron-Paare für  $A_z(t \geq t_f) = 0$ , wenn das Hintergrundfeld ausgeschaltet ist. Dies führt auf die Frage, wie viele Elektronen bzw. Positronen der Grundzustand  $|\Omega_0(t_\infty)\rangle$  enthält. Im Allgemeinen kann er sich vom physikalischen Ausgangszustand  $|0\rangle$ , der keine Elektronen bzw. Positronen enthält, unterscheiden. Die Teilchenzahl einer Sorte mit Impuls  $\mathbf{p}$  und Spineinstellung  $i$  erhält man dann aus dem Erwartungswert des entsprechenden Teilchenzahloperators  $\hat{n}_i^{(c)}(\mathbf{p}) = \hat{c}_i^\dagger(\mathbf{p}) \hat{c}_i(\mathbf{p})$  für Elektronen bzw.  $\hat{n}_i^{(d)}(\mathbf{p}) = \hat{d}_i^\dagger(\mathbf{p}) \hat{d}_i(\mathbf{p})$  für Positronen. Für beliebige Zeiten  $t$  ergibt sich mit der inversen Bogoliubov-Transformation (2.31) und unter Verwendung der Antikommutatorrelationen (2.33)

$$\begin{aligned}n_i^{(c)}(\mathbf{p}, t) &= \langle \Omega_0(t) | \hat{n}_i^{(c)}(\mathbf{p}) | \Omega_0(t) \rangle \\ &= \langle \Omega_0(t) | |\alpha|^2 \hat{C}_i^\dagger \hat{C}_i + |\beta|^2 \hat{D}_i \hat{D}_i^\dagger + \alpha\beta^* \hat{C}_i^\dagger \hat{D}_i^\dagger + \alpha^* \beta \hat{D}_i \hat{C}_i | \Omega_0(t) \rangle \\ &= |\beta(\mathbf{p}, t)|^2 (2\pi)^3 \delta(0), \\ n_i^{(d)}(\mathbf{p}, t) &= \langle \Omega_0(t) | \hat{n}_i^{(d)}(\mathbf{p}) | \Omega_0(t) \rangle \\ &= \langle \Omega_0(t) | |\alpha|^2 \hat{D}_i^\dagger \hat{D}_i + |\beta|^2 \hat{C}_i \hat{C}_i^\dagger - \alpha\beta^* \hat{D}_i^\dagger \hat{C}_i^\dagger - \alpha^* \beta \hat{C}_i \hat{D}_i | \Omega_0(t) \rangle \\ &= |\beta(\mathbf{p}, t)|^2 (2\pi)^3 \delta(0).\end{aligned}\tag{2.50}$$

Für Zeiten  $t = t_\infty \geq t_f$  erhält man damit die gesuchte Anzahl erzeugter Elektronen bzw. Positronen. Da der Erwartungswert beider Teilchenzahloperatoren identisch ist, genügt es, die Anzahl erzeugter Elektron-Positron-Paare durch einen der beiden Erwartungswerte zu ermitteln. Um den aus dem Antikommutator stammenden divergenten Faktor  $(2\pi)^3 \delta(0)$  zu

eliminieren, definiert man die Quasiteilchendichte als

$$f(\mathbf{p}, t) \equiv \lim_{V_{\text{Ort}} \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^2 \frac{n_i^{(c)}(\mathbf{p}, t)}{V_{\text{Ort}}} = 2 |\beta(\mathbf{p}, t)|^2, \quad (2.51)$$

wobei man das betrachtete Ortsraumvolumen  $V_{\text{Ort}}$  gegen unendlich gehen lässt. Nur in Abwesenheit des Feldes  $A^\mu(t)$  besitzt die so definierte Quasiteilchendichte eine physikalische Interpretation als Dichte erzeugter Elektronen bzw. Positronen. Vor dem Einschalten des Hintergrundfeldes, d.h. für  $A_z(t \leq t_i)$ , ergibt sich mit  $\beta(\mathbf{p}, t \leq t_i) = 0$  nach der obigen Definition  $f(\mathbf{p}, t \leq t_i) = 0$ . Die physikalisch interessante Größe ist die nach dem Ausschalten des Feldes, d.h. für  $A_z(t_\infty) = 0$ , verbleibende Residualdichte

$$f(\mathbf{p}, t_\infty) = 2 |\beta(\mathbf{p}, t_\infty)|^2. \quad (2.52)$$

Da  $Q(\mathbf{p}, t_\infty \geq t_f) = 0$  gilt, folgt aus Gl. (2.42)

$$\dot{\beta}(\mathbf{p}, t_\infty) = 0, \quad (2.53)$$

d.h. der Koeffizient  $\beta$  ändert nach Abschalten des Feldes seinen Wert nicht mehr.<sup>4</sup> Die Anzahl erzeugter Paare bleibt konstant. Damit lässt sich die Residualteilchendichte als

$$f(\mathbf{p}, t_\infty) = f(\mathbf{p}, t_f) = 2 |\beta(\mathbf{p}, t_f)|^2 \quad (2.54)$$

bestimmen. Die Paarerzeugungswahrscheinlichkeit pro Volumen  $V_{\text{Ort}}$  und Zeit  $t$ , die bereits in Kapitel 1 für verschiedene Hintergrundfelder diskutiert wurde, ist dann durch

$$P_{e^-e^+} = \dot{n}_{e^-e^+} = \int d^3p \dot{f}(\mathbf{p}, t_\infty) \quad (2.55)$$

gegeben. Die über den Impulsraum abintegrierte Anzahldichte

$$n_{e^-e^+} = \int d^3p f(\mathbf{p}, t_\infty) = 2\pi \int dp_{\parallel} \int dp_{\perp} p_{\perp} f(p_{\perp}, p_{\parallel}, t_\infty) \quad (2.56)$$

enthält die Information über die Anzahl der durch das Hintergrundfeld  $A_z(t)$  erzeugten Elektron-Positron-Paare pro Ortsraumvolumen  $V_{\text{Ort}}$ .<sup>5</sup> In den Kapiteln 5 und 6 wird zur Quantifizierung des Verstärkungseffektes im Kontext der dynamisch assistierten Schwinger-Paarerzeugung auch die lediglich über den Impuls  $p_{\perp}$  senkrecht zur Feldrichtung abintegrierte Teilchendichte

$$a_{e^-e^+}(p_{\parallel}) = 2\pi \int dp_{\perp} p_{\perp} f(p_{\perp}, p_{\parallel}, t_\infty) \quad (2.57)$$

<sup>4</sup>Für eine mögliche Bedeutung der Quasiteilchendichte zu intermediären Zeiten  $t_i \leq t \leq t_f$  siehe [37].

<sup>5</sup>Die gewählte Definition folgt den Arbeiten [26, 27]. Mitunter findet sich in der Literatur noch ein Vorfaktor von  $(2\pi)^{-3}$  wie in [32].

betrachtet. Sie besitzt damit die Einheit 1/Fläche.

Es ergeben sich mehrere Möglichkeiten, um über den Bogoliubov-Koeffizienten  $\beta(\mathbf{p}, t)$  die Quasiteilchendichte  $f(\mathbf{p}, t)$  für ein gewähltes Hintergrundfeld  $A_z(t)$  zu bestimmen. Man kann versuchen, direkt mit Hilfe der Differentialgleichung (2.16) die Koeffizienten  $g^\pm(\mathbf{p}, t)$  und durch Auswertung der dynamischen Phase  $\Theta(\mathbf{p}, t)$  die Koeffizienten  $G^\pm(\mathbf{p}, t)$  aus Gl. (2.39) zu bestimmen. Dann ist der Koeffizient  $\beta(\mathbf{p}, t)$  durch Gl. (2.41) gegeben.<sup>6</sup> Eine zweite Möglichkeit besteht in der Auswertung des Differentialgleichungssystems (2.42). Dieses lässt sich unter Ausnutzung der Identität  $\dot{f}(\mathbf{p}, t) = 2 \left( \beta(\mathbf{p}, t) \dot{\beta}^*(\mathbf{p}, t) + \dot{\beta}(\mathbf{p}, t) \beta^*(\mathbf{p}, t) \right)$  auch umformen in die Integro-Differentialgleichung

$$\dot{f}(\mathbf{p}, t) = Q(\mathbf{p}, t) \int_{t_i}^t dt' Q(\mathbf{p}, t') (1 - f(\mathbf{p}, t')) \cos(2 [\Theta(\mathbf{p}, t) - \Theta(\mathbf{p}, t')]). \quad (2.58)$$

Damit erhält man eine Variante der quantenkinetischen Gleichung zur direkten Bestimmung der Quasiteilchendichte  $f(\mathbf{p}, t)$ . Unter Einführung der Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{p}, t) &= -2 \operatorname{Re} (\alpha^*(\mathbf{p}, t) \beta(\mathbf{p}, t) \exp(2\Theta(\mathbf{p}, t))), \\ \zeta(\mathbf{p}, t) &= -2 \operatorname{Im} (\alpha^*(\mathbf{p}, t) \beta(\mathbf{p}, t) \exp(2\Theta(\mathbf{p}, t))) \end{aligned} \quad (2.59)$$

lässt sich die quantenkinetische Gleichung (2.58) auch als gewöhnliches Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{f}(\mathbf{p}, t) \\ \dot{\rho}(\mathbf{p}, t) \\ \dot{\zeta}(\mathbf{p}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Q(\mathbf{p}, t) & 0 \\ -Q(\mathbf{p}, t) & 0 & -2\omega(\mathbf{p}, t) \\ 0 & 2\omega(\mathbf{p}, t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\mathbf{p}, t) \\ \rho(\mathbf{p}, t) \\ \zeta(\mathbf{p}, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Q(\mathbf{p}, t) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

erster Ordnung in der Zeit schreiben. Die Anfangsbedingungen sind durch

$$f(\mathbf{p}, t_i) = \rho(\mathbf{p}, t_i) = \zeta(\mathbf{p}, t_i) = 0 \quad (2.61)$$

gegeben.

---

<sup>6</sup>So kann zum Beispiel, wie in [32] gezeigt wird, eine analytische Lösung für den Sauter-Puls gefunden werden.

# 3 Betrachtete Feldkonfigurationen

## 3.1 Allgemeine Festlegungen

Gegenstand der Untersuchung sind räumlich homogene, rein zeitabhängige Hintergrundfelder  $A^\mu(t) \sim (0, A_z(t)\vec{e}_z)$  mit ausgezeichneter  $z$ -Richtung. Zudem zielen die folgenden Betrachtungen auf  $T = 2\pi/\nu$ -periodische Felder der Frequenz  $\nu$ , die zusätzlich durch eine zunächst beliebig gewählte Ein- und Ausschaltfunktion  $K(t/t_r) \in C^\infty$  modifiziert sind. Ihre relevante Zeitskala ist durch den Parameter  $t_r$  charakterisiert.<sup>1</sup> Das Vektorpotential ist damit gegeben durch

$$A_z(t) = \frac{E_0}{\nu} K(t/t_r) h(\nu t). \quad (3.1)$$

Daraus ergibt sich in Coulomb-Eichung das elektrische Hintergrundfeld als

$$E_z(t) = -\frac{dA_z(t)}{dt} = -\frac{E_0}{\nu t_r} \frac{dK(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=t/t_r} h(\nu t) - E_0 K(t/t_r) \frac{dh(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=\nu t}. \quad (3.2)$$

Unter Einführung der zeitabhängigen Feldamplitude

$$E(t/t_r) \equiv E_0 K(t/t_r) \quad (3.3)$$

sind die maßgeblichen Funktionen der quantenkinetischen Gleichung (2.58) bzw. (2.60) durch

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{p}, \nu t, E(t/t_r)) &= \sqrt{\epsilon_\perp^2 + \left(p_\parallel - \frac{e}{\nu} E(t/t_r) h(\nu t)\right)^2}, \\ Q(\mathbf{p}, \nu t, E(t/t_r)) &= -\frac{\epsilon_\perp \left(\frac{e}{\nu t_r} E'(t/t_r) h(\nu t) + e E(t/t_r) h'(\nu t)\right)}{\omega(\mathbf{p}, t, E(t/t_r))^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

darstellbar. Dabei bezeichnen

$$\begin{aligned} E'(t/t_r) &= \frac{dE(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=t/t_r}, \\ h'(\nu t) &= \frac{dh(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=\nu t} \end{aligned} \quad (3.5)$$

---

<sup>1</sup>Zur exemplarischen Bedeutung des Parameters  $t_r$  siehe die folgenden Unterabschnitte 3.3 bis 3.4.

jeweils die Ableitung nach dem vollständigen Argument. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}\omega(\mathbf{p}, \nu t + \nu T, E(t_0/t_r)) &= \omega(\mathbf{p}, \nu t, E(t_0/t_r)), \\ Q(\mathbf{p}, \nu t + \nu T, E(t_0/t_r)) &= Q(\mathbf{p}, \nu t, E(t_0/t_r)).\end{aligned}\tag{3.6}$$

Die Funktion  $h(\nu t)$  wird weiter spezifiziert. Gegenstand dieser Arbeit sind elektrische Hintergrundfelder, die sich aus der Superposition von bis zu drei Einzelfeldern ergeben mit unterschiedlichen Amplituden  $E_{0,i}$  und Frequenzen  $\nu_i$ . Es wird zudem

$$\begin{aligned}E_{0,1} &\geq E_{0,2} \geq E_{0,3}, \\ \nu_1 &\leq \nu_2 \leq \nu_3\end{aligned}\tag{3.7}$$

gewählt. Als Referenz für die anderen Felder dient das stärkste Feld mit der niedrigsten Frequenz

$$E_0 = E_{0,1}, \quad \nu = \nu_1.\tag{3.8}$$

Dann lässt sich für den periodischen Anteil des Feldes

$$h(\nu t) = h_1(\nu t) + \alpha_2 h_2(N_2 \nu t) + \alpha_3 h_3(N_3 \nu t)\tag{3.9}$$

schreiben mit

$$\alpha_2 = \frac{E_{0,2}\nu}{E_0\nu_2} = \frac{\gamma}{\gamma_2}, \quad \alpha_3 = \frac{E_{0,3}\nu}{E_0\nu_3} = \frac{\gamma}{\gamma_3}\tag{3.10}$$

und

$$N_2 = \frac{\nu_2}{\nu}, \quad N_3 = \frac{\nu_3}{\nu}.\tag{3.11}$$

Da  $h(\nu t + \nu T) = h(\nu t)$  gelten soll, folgt unmittelbar  $N_2, N_3 \in \mathbb{N}$ . Nach Gl. (3.7) gilt außerdem

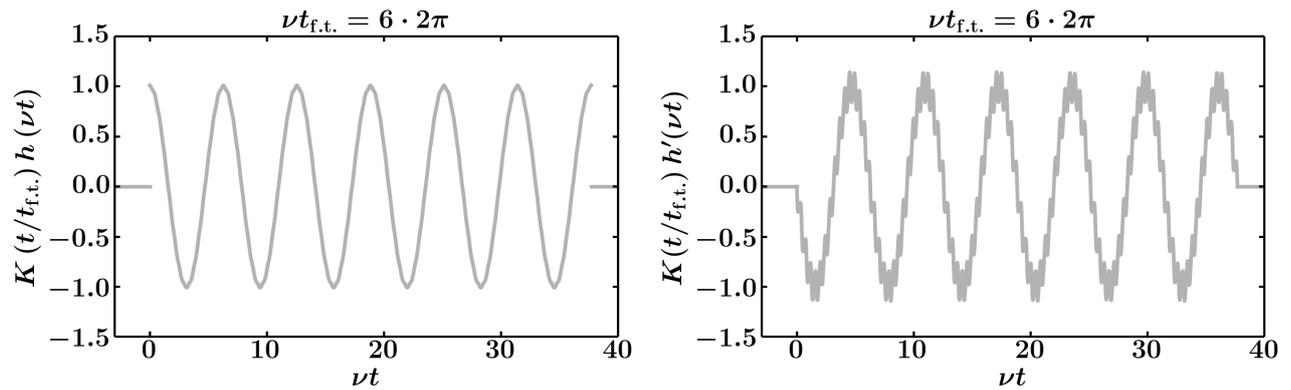
$$\begin{aligned}1 &\leq N_2 \leq N_3, \\ 1 &\geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq 0.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Um später die Näherung in Gl. (4.44) durchführen zu können, muss außerdem  $h(\nu t) = h(-\nu t)$  gelten, d.h. der periodische Anteil des Vektorpotentials ist symmetrisch. Zudem wird die Startzeit des Feldes mit  $t_i = 2\pi Z$  und  $Z \in \mathbb{Z}$  gewählt. Dies bedeutet keine besondere Einschränkung, da insbesondere auch der Fall  $Z \rightarrow -\infty$  betrachtet werden kann.

Man könnte argumentieren, dass die Wahl des Vektorpotentials (3.1) „unphysikalisch“ ist. Eigentlich müsste man wie in [30] zu erst das observable elektrische Feld mit einer entsprechenden

Ein- und Ausschaltfunktion vorgeben. Für entsprechend langsame Ein- und Ausschaltvorgänge mit  $\nu t_r \gg 1$  spielt der „unphysikalische“ Term aus der Ableitung der Einhüllende jedoch keine Rolle, da er mit  $(\nu t_r)^{-1}$  unterdrückt ist.

## 3.2 Abrupter Ein- und Ausschaltvorgang



**Abbildung 3.1:** Darstellung des abrupten Ein- und Ausschaltvorgangs (3.13) bzw. (3.14) für feste Flat-Top-Zeit  $t_{f.t.}$ . Für den periodischen Anteil  $h(\nu t)$  gilt  $\alpha_2 = 0.01$ ,  $\alpha_3 = 0.1$ ,  $N_2 = 15$  und  $N_3 = 30$ .

Für den abrupten Ein- und Ausschaltvorgang wird der Skalenparameter  $t_r = t_{f.t.}$  als Flat-Top-Parameter bezeichnet und gibt Auskunft über die Anzahl der Periodendurchgänge des oszillierenden Anteils bei konstanter Einhüllfunktion  $K = 1$ . Die Formfunktionen sind konkret gegeben durch

$$h(\nu t) = \cos(\nu t) + \alpha_2 \cos(N_2 \nu t) + \alpha_3 \cos(N_3 \nu t),$$

$$K(t/t_{f.t.}) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ 1 & \text{für } 0 \leq t \leq t_{f.t.}, \\ 0 & \text{für } t > t_{f.t.}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Für die Ableitungen nach dem jeweils vollständigen Argument gilt<sup>2</sup>

$$h'(\nu t) = -(\sin(\nu t) + \alpha_2 N_2 \sin(N_2 \nu t) + \alpha_3 N_3 \sin(N_3 \nu t)),$$

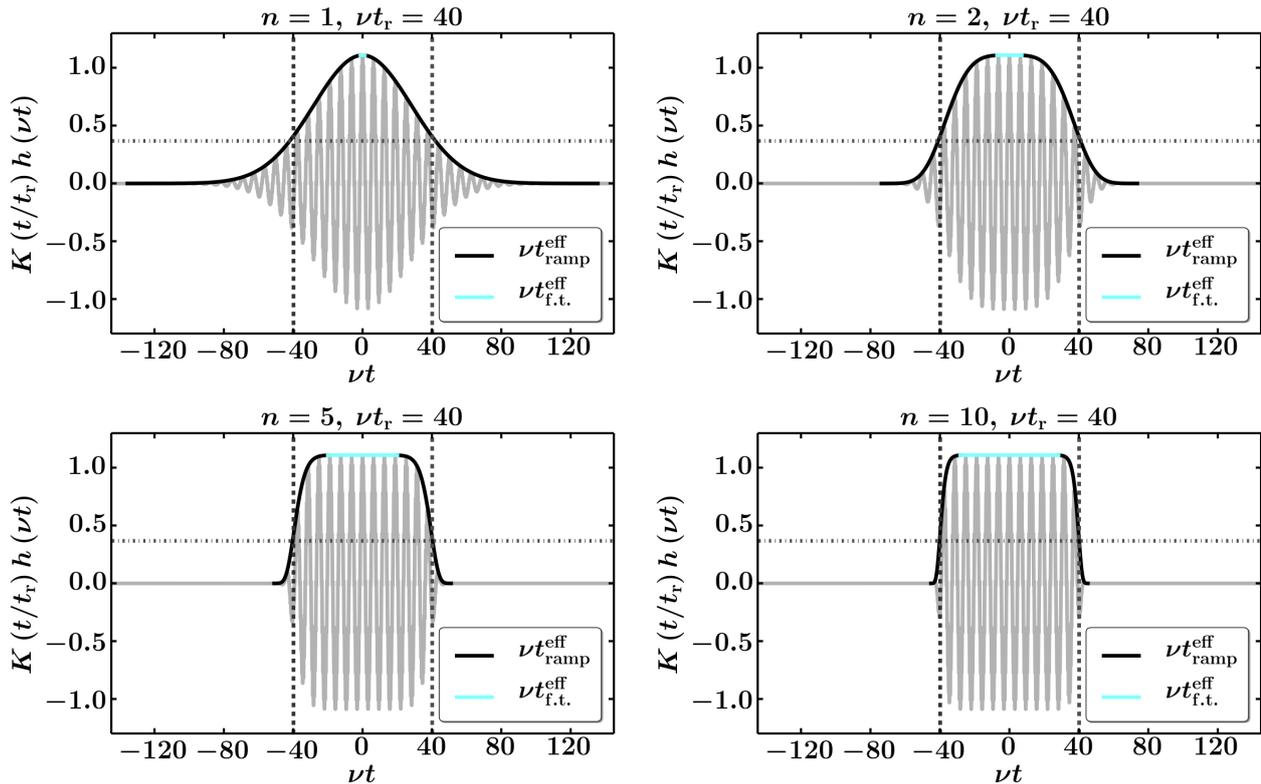
$$K'(t/t_{f.t.}) = 0, \quad (3.14)$$

d.h. die formal auftretenden divergenten Beiträge in  $K'(t/t_{f.t.})$  bei  $t_i = 0$  und  $t_f = t_{f.t.}$  werden nicht berücksichtigt. Der so gewählte Ein- und Ausschaltvorgang hat zunächst nur mathematischen Modell-Charakter und erleichtert die Fourier-Analyse zur Untersuchung von Gl.

<sup>2</sup>Vgl. Gl. (3.5).

(2.60) für zeitlich oszillierende Hintergrundfelder.<sup>3</sup> In Kapitel 4.1 wird gezeigt, dass er eine physikalische Bedeutung als Grenzfalle von Ein- und Ausschaltfunktionen  $K(t/t_r)$  besitzt, die ein ausgeprägtes (effektives) Flat-Top-Intervall  $t_{f.t.}^{\text{eff}}$  besitzen, wo die Einhüllende konstant ist. Dieses muss weit größer sein als die (effektive) Ein- bzw. Ausschalzeit  $t_{\text{ramp}}^{\text{eff}}$ .<sup>4</sup>

### 3.3 Gauß- und Super-Gauß-Profil



**Abbildung 3.2:** Darstellung des (Super-)Gauß-Profiles (3.15) für festen Zeitskalenparameter  $\nu t_r = 40$  mit  $\eta_{f.t.} = 10^{-3}$  und  $\eta_{\text{ramp}} = 10^{-5}$ . Für den periodischen Anteil  $h(\nu t)$  wurde  $\alpha_2 = 0.1$ ,  $\alpha_3 = 0.01$ ,  $N_2 = 15$  und  $N_3 = 30$  gewählt. Der Exponent  $n$  wird variiert und ändert gemäß Gl. (3.25) das Verhältnis zwischen der effektiven Ein- und Ausschaltdauer  $t_{\text{ramp}}^{\text{eff}}$  und dem effektiven Flat-Top-Intervall  $t_{f.t.}^{\text{eff}}$ .

Das Gauß- ( $n = 1$ ) bzw. Supergauß-Profil ( $n > 1$ ) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} h(\nu t) &= \cos(\nu t) + \alpha_2 \cos(N_2 \nu t) + \alpha_3 \cos(N_3 \nu t), \\ K(t/t_r) &= e^{-(t/t_r)^{2n}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

mit  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ . Entsprechend folgt für die Ableitungen nach dem jeweils vollständigen Argument<sup>5</sup>

<sup>3</sup>Vgl. insbesondere [27] und [28].

<sup>4</sup>Vgl. auch die folgenden Abschnitte 3.3 und 3.4.

<sup>5</sup>Vgl. Gl. (3.5).

$$\begin{aligned} h'(\nu t) &= -(\sin(\nu t) + \alpha_2 N_2 \sin(N_2 \nu t) + \alpha_3 N_3 \sin(N_3 \nu t)), \\ K'(t/t_r) &= -2n (t/t_r)^{2n-1} e^{-(t/t_r)^{2n}}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Neben dem Skalenparameter  $t_r$  bestimmt der Exponent  $n$  das Verhalten der Einhüllenden  $K(t/t_r)$ . Um dies zu illustrieren und später den Anschluss an [27] herstellen zu können, werden im folgenden ein effektives Flat-Top-Intervall  $t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}}$ , in dem die Einhüllende  $K(t/t_r)$  näherungsweise als konstant angenommen werden kann, und eine effektive Ein- und Ausschaltzeit  $t_{\text{ramp}}^{\text{eff}}$  bzw. eine effektive Pulsdauer  $t_{\text{pulse}}^{\text{eff}}$  definiert. Die effektive Flat-Top-Zeit  $t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}}$  ergibt sich aus der Forderung

$$e^{-(t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}}/2t_r)^{2n}} \stackrel{!}{=} 1 - \eta_{\text{f.t.}} \quad (3.17)$$

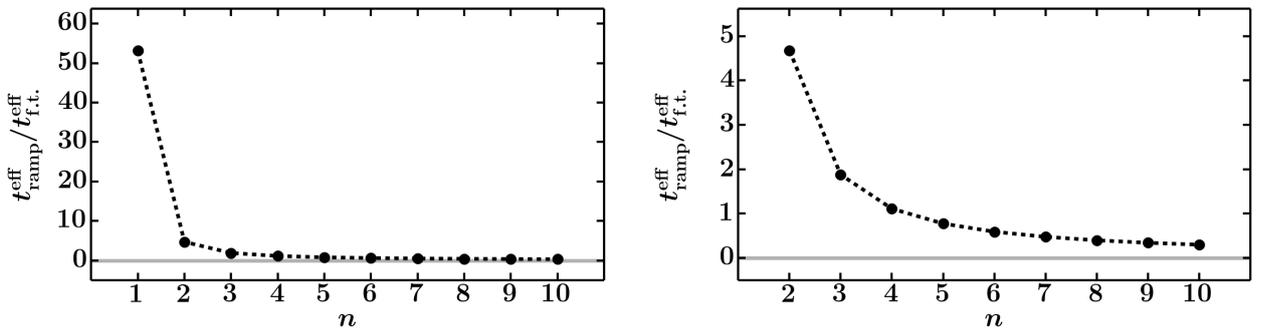
als

$$t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}} \equiv 2t_r \ln\left(\frac{1}{1 - \eta_{\text{f.t.}}}\right)^{1/2n} \stackrel{\eta_{\text{f.t.}} \rightarrow 0}{\approx} 2t_r \eta_{\text{f.t.}}^{1/2n}. \quad (3.18)$$

Dabei ist  $\eta_{\text{f.t.}} \ll 1$  und fixiert für das Intervall  $-t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}}/2 \leq t \leq t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}}/2$  die maximale Abweichung der Einhüllenden  $K(t/t_r)$  vom Maximalwert 1. Für große Exponenten  $n \gg 1$  lässt sich die effektive Flat-Top-Zeit entwickeln als

$$t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}} = 2t_r \left(1 + \frac{\ln(\eta_{\text{f.t.}})}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \stackrel{n \gg 1}{\approx} 2t_r \left(1 + \frac{\ln(\eta_{\text{f.t.}})}{2n}\right) \quad (3.19)$$

und strebt asymptotisch gegen den doppelten Skalenparameter  $2t_r$  unabhängig von der konkreten Wahl des Parameters  $\eta_{\text{f.t.}}$ . Die effektive Pulslänge  $t_{\text{pulse}}^{\text{eff}}$  wird definiert durch die Forderung



**Abbildung 3.3:** Für die (Super-)Gaußkonfiguration (3.15) ist das Verhältnis zwischen der effektiven Ein- und Ausschaltzeit  $t_{\text{ramp}}^{\text{eff}}$  und dem effektiven Flat-Top-Intervall  $t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}}$  in Abhängigkeit vom Exponenten  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  gemäß Gl. (3.25) dargestellt. Dabei wurde  $\eta_{\text{f.t.}} = 10^{-3}$  und  $\eta_{\text{ramp}} = 10^{-5}$  gewählt.

$$e^{-(t_{\text{pulse}}^{\text{eff}}/2t_r)^{2n}} \stackrel{!}{=} \eta_{\text{ramp}}, \quad (3.20)$$

und ergibt sich daher zu

$$t_{\text{pulse}}^{\text{eff}} \equiv 2t_r \ln \left( \frac{1}{\eta_{\text{ramp}}} \right)^{1/2n}. \quad (3.21)$$

Dabei ist  $\eta_{\text{ramp}}$  der gewählte effektive Start- bzw. Endwert der Einhüllenden  $K(t/t_r)$ . Daraus folgt mit

$$t_{\text{ramp}}^{\text{eff}} = \frac{1}{2} (t_{\text{pulse}}^{\text{eff}} - t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}}) \quad (3.22)$$

unmittelbar eine Definition für die effektive Ein- und Ausschaltdauer

$$t_{\text{ramp}}^{\text{eff}} \equiv t_r \left\{ \ln \left( \frac{1}{\eta_{\text{ramp}}} \right)^{1/2n} - \ln \left( \frac{1}{1 - \eta_{\text{f.t.}}} \right)^{1/2n} \right\}. \quad (3.23)$$

Sie lässt sich in Analogie zur effektiven Flat-Top-Zeit für große  $n$  entwickeln:

$$t_{\text{ramp}}^{\text{eff}} = 2t_r \left( \frac{1}{2n} (\ln(-\ln[\eta_{\text{ramp}}]) - \ln(\eta_{\text{f.t.}})) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right). \quad (3.24)$$

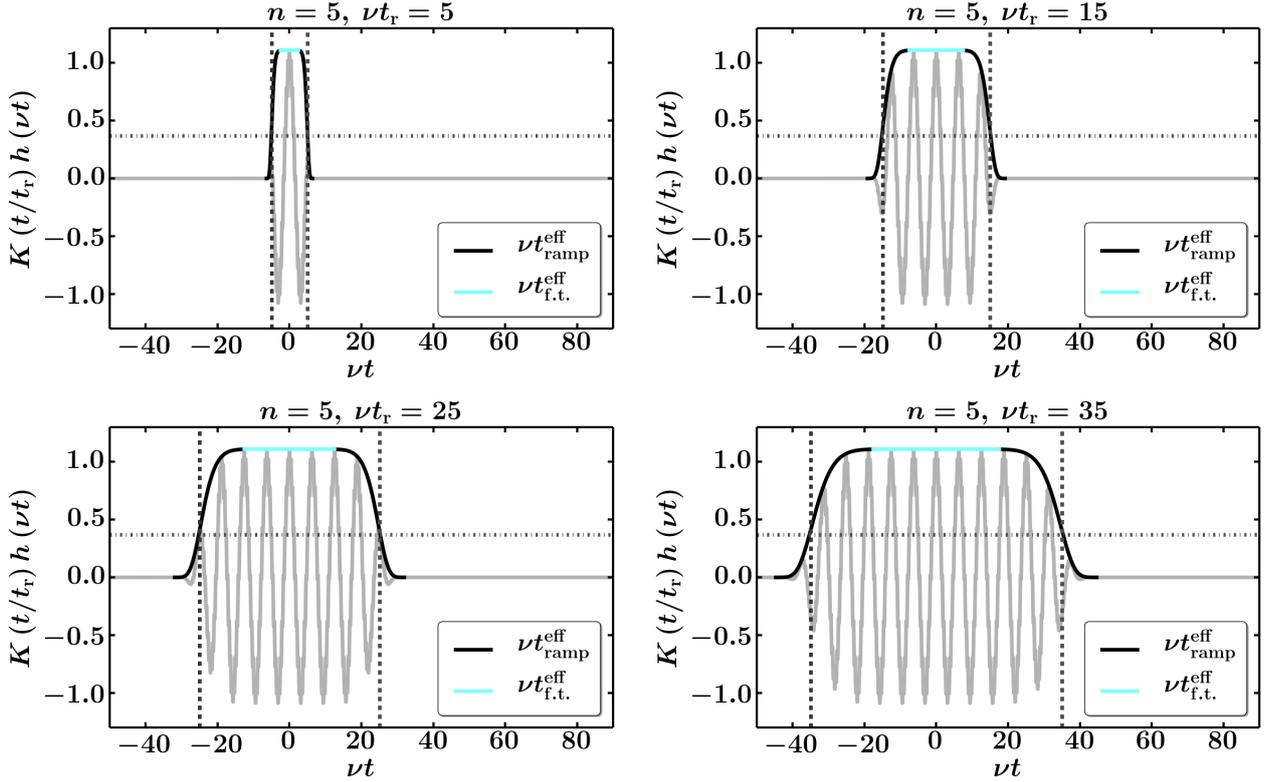
Damit zeigt sich, dass sie asymptotisch für  $n \rightarrow \infty$  verschwindet. Das Verhältnis

$$\frac{t_{\text{ramp}}^{\text{eff}}}{t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}}} = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\ln(\eta_{\text{ramp}})}{\ln(1 - \eta_{\text{f.t.}})} \right)^{1/2n} - 1 \right\} \quad (3.25)$$

ist unabhängig vom Parameter  $t_r$  und für festes  $\eta_{\text{f.t.}}$  und  $\eta_{\text{ramp}}$  allein durch den Exponenten  $n$  festgelegt. Für den Grenzfall  $n \rightarrow \infty$  ergibt sich

$$\frac{t_{\text{ramp}}^{\text{eff}}}{t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.26)$$

Das bedeutet, dass für große Exponenten  $n$  der Ein- und Ausschaltvorgang, charakterisiert durch  $t_{\text{ramp}}^{\text{eff}}$ , vernachlässigt werden kann und die effektive Pulslänge  $t_{\text{pulse}}^{\text{eff}}$  im Wesentlichen durch die Flat-Top-Zeit  $t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}}$  gegeben ist wie für den Fall des abrupten Ein- und Ausschaltens. Dieses Verhalten ist in den Abbn. 3.2 und 3.3 dargestellt. Für gewähltes  $\eta_{\text{f.t.}}$ ,  $\eta_{\text{ramp}}$  und festen Exponenten  $n$  verlaufen sowohl Flat-Top-Zeit  $t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}}$ , Pulslänge  $t_{\text{pulse}}^{\text{eff}}$  als auch Ein- und Ausschaltzeit  $t_{\text{ramp}}^{\text{eff}}$  proportional zum Zeitskalenparameter  $t_r$ , wie in Abb. 3.4 festgehalten. Er legt damit fest, wie viele Oszillationen des periodischen Anteils effektiv zwischen Ein- und Ausschaltzeit möglich sind.



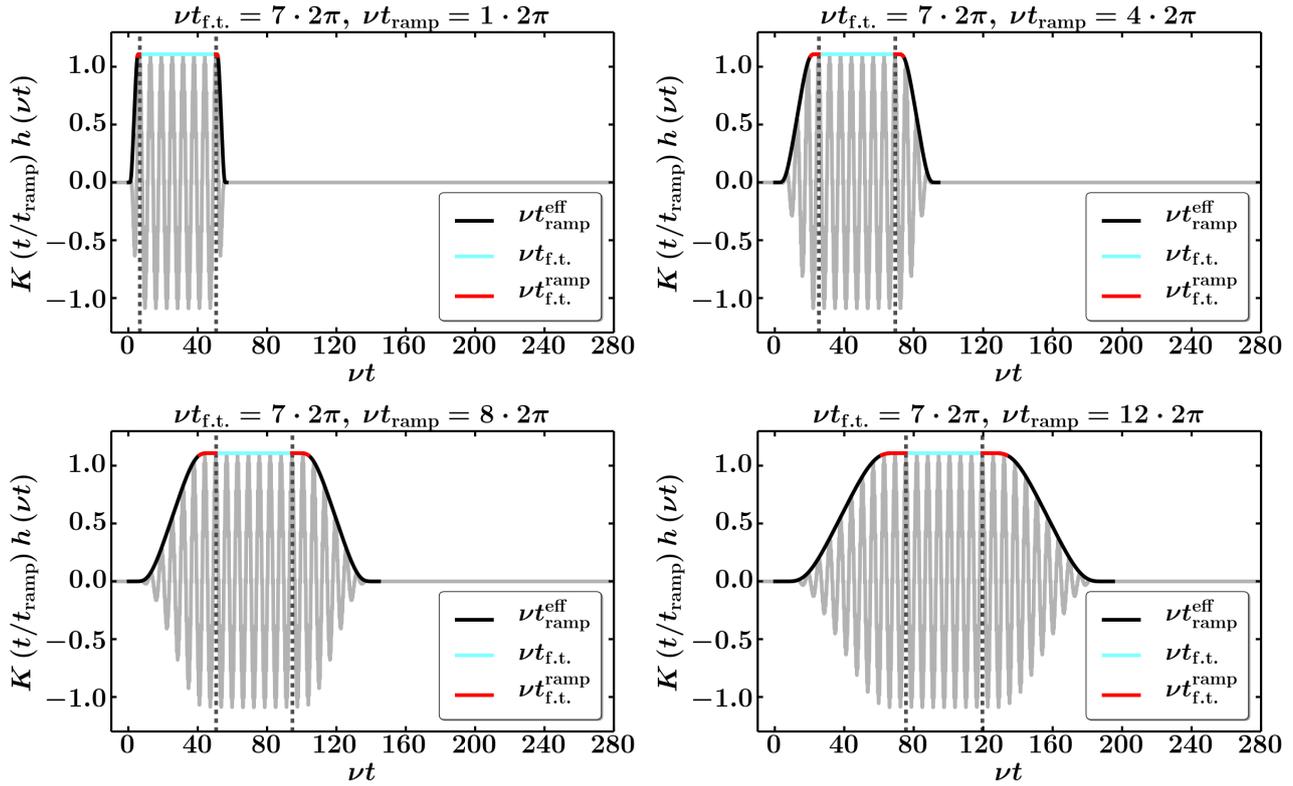
**Abbildung 3.4:** Darstellung des (Super-)Gauß-Profiles (3.15) für festen Exponenten  $n = 5$  mit  $\eta_{f.t.} = 10^{-3}$  und  $\eta_{ramp} = 10^{-5}$ . Parameter des periodischen Anteils  $h(\nu t)$  wie in Abb. (3.2). Der Zeitskalenparameter  $t_r$  wird variiert und ändert die Breite der Einhüllenden  $K(t/t_r)$ .

Für die numerische Implementierung wird wie in Abschnitt 3.1 festgelegt  $t_i = -N \cdot 2\pi$  und  $t_f = N \cdot 2\pi$  gewählt mit  $N \in \mathbb{N}$ . Dabei wurde in dieser Arbeit  $N$  immer mindestens so groß gewählt, dass  $\eta_{ramp} \lesssim 10^{-13}$  gilt.<sup>6</sup>

### 3.4 Flat-Top-Profil

Für das Flat-Top-Profil wird der Skalenparameter  $t_r$  als Ein- und Ausschaltzeit  $t_{ramp}$  identifiziert. Er legt dann die Anzahl der Oszillationen des periodischen Anteils im Ein- und Ausschaltvorgang fest. Der Vorteil ist, dass separat dazu eine Flat-Top-Intervalllänge  $t_{f.t.}$  existiert, für die die Einhüllende  $K(t/t_{ramp})$  zwischen Ein- und Ausschaltvorgang konstant ist. Im Gegensatz zum Gauß- bzw. Supergauß-Profil aus dem vorherigen Unterabschnitt 3.3 lassen sich Flat-Top-Zeit  $t_{f.t.}$  und Ein- bzw. Ausschaltdauer  $t_{ramp}$  getrennt variieren und ihr Verhältnis  $t_{ramp}/t_{f.t.}$  zueinander beliebig festlegen. Die exakte Pulsdauer ergibt sich dann als  $t_{pulse} = 2t_{ramp} + t_{f.t.}$ .

<sup>6</sup>An dieser Stelle sei einmal festgehalten, dass die notwendigen numerischen Integrationen in dieser Arbeit mit Hilfe der Integrationsroutinen Odeint (<https://docs.scipy.org/doc/scipy-0.18.1/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html>) und Ode (<https://docs.scipy.org/doc/scipy-0.18.1/reference/generated/scipy.integrate.ode.html>) unter Verwendung der Programmiersprache „python“ durchgeführt wurden. Siehe: <http://www.python.org/>.



**Abbildung 3.5:** Darstellung der Flat-Top-Konfiguration (3.27) für feste Flat-Top-Zeit  $t_{f.t.}$  in Abhängigkeit vom Ein- bzw. Ausschaltparameter  $t_{ramp}$ . Für den periodischen Anteil  $h(\nu t)$  gilt  $\alpha_2 = 0.1$ ,  $\alpha_3 = 0.01$ ,  $N_2 = 15$  und  $N_3 = 30$ . Für die getroffene Wahl  $\eta_{f.t.} = 1.5 \cdot 10^{-2}$  ergibt sich nach Gl. (3.32) näherungsweise  $\sigma \approx 0.185$ .

Konkret ist die Konfiguration gegeben durch

$$h(\nu t) = \cos(\nu t) + \alpha_2 \cos(N_2 \nu t) + \alpha_3 \cos(N_3 \nu t),$$

$$K(t/t_{ramp}) = H(t/t_{ramp}) H\left(\frac{t_{pulse} - t}{t_{ramp}}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0, \\ H(t/t_{ramp}) & \text{für } 0 < t \leq t_{ramp}, \\ 1 & \text{für } t_{ramp} \leq t_{f.t.} \leq t_{ramp} + t_{f.t.}, \\ H\left(\frac{t_{pulse} - t}{t_{ramp}}\right) & \text{für } t_{ramp} + t_{f.t.} \leq t < t_{pulse}, \\ 0 & \text{für } t \geq t_{pulse}. \end{cases} \quad (3.27)$$

Dabei ist  $H(x) = G(x)/(G(x) + G(1 - x))$  mit

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ \exp(-\frac{1}{x}) & \text{für } x > 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

Entsprechend folgt für die Ableitungen nach dem jeweils vollständigen Argument<sup>7</sup>

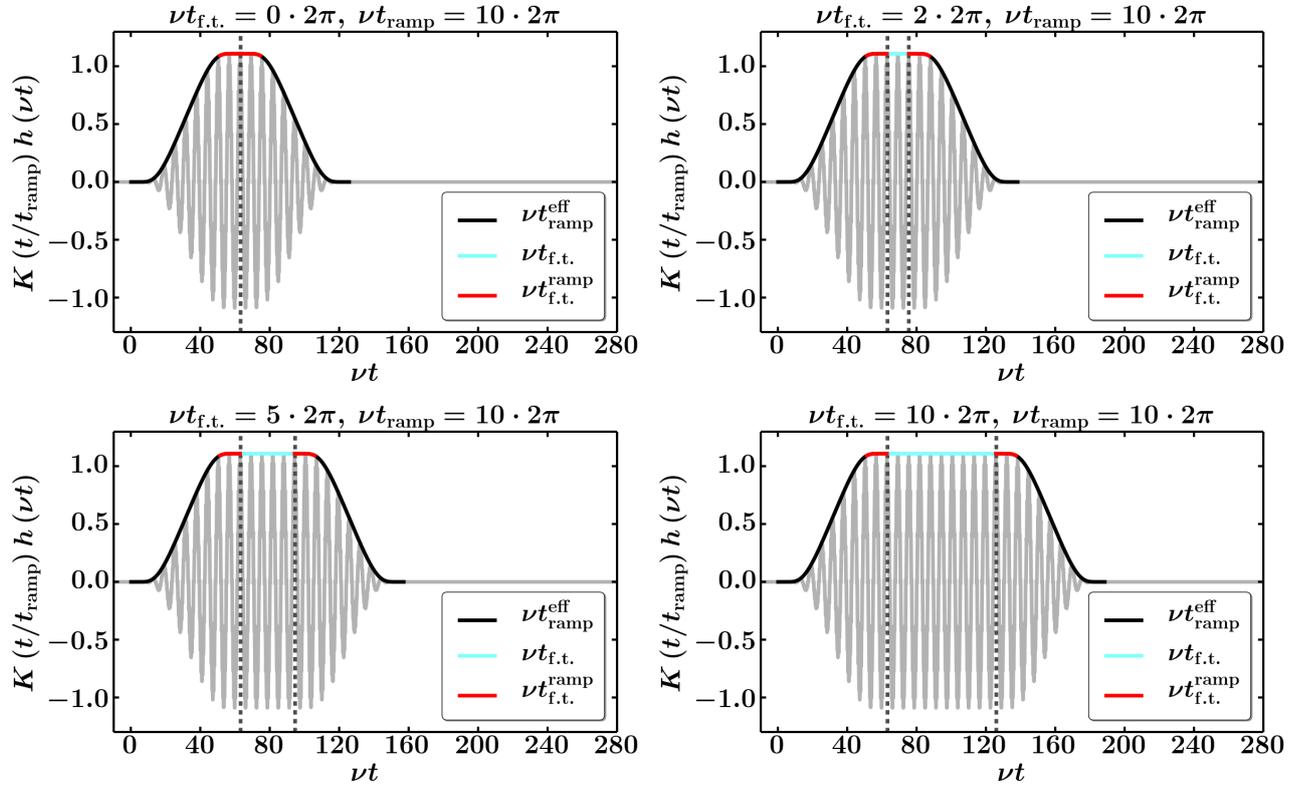
$$h'(\nu t) = -(\sin(\nu t) + \alpha_2 N_2 \sin(N_2 \nu t) + \alpha_3 N_3 \sin(N_3 \nu t)),$$

$$K'(t/t_{\text{ramp}}) = H'(t/t_{\text{ramp}}) H\left(\frac{t_{\text{pulse}} - t}{t_{\text{ramp}}}\right) + H(t/t_{\text{ramp}}) H'\left(\frac{t_{\text{pulse}} - t}{t_{\text{ramp}}}\right) \quad (3.29)$$

mit  $H'(x) = -G'(1-x)H(x)/(G(x) + G(1-x))$  und

$$G'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ \frac{1}{x^2} \exp(-\frac{1}{x}) & \text{für } x > 0. \end{cases} \quad (3.30)$$

Betrachtet man den Fall ohne Flat-Top-Parameter,  $t_{\text{f.t.}} = 0$ , dargestellt in Abb. 3.5 oben links,



**Abbildung 3.6:** Darstellung der Flat-Top-Konfiguration (3.27) für festen Ein- bzw. Ausschaltparameter  $t_{\text{ramp}}$  in Abhängigkeit von der Flat-Top-Zeit  $t_{\text{f.t.}}$ . Parameter des periodischen Anteils  $h(\nu t)$  und  $\sigma$  wie in Abb. (3.5).

so erscheint es sinnvoll, in Analogie zum Gauß- bzw. Supergauß-Profil aus dem vorherigen Unterabschnitt 3.3 zusätzlich eine effektive Flat-Top-Zeit

$$t_{\text{f.t.}}^{\text{ramp}} \equiv 2\sigma t_{\text{ramp}} \quad (3.31)$$

<sup>7</sup>Vgl. Gl. (3.5).

zu definieren. Sie ergibt sich aus der Forderung

$$K \left( 1 - \frac{t_{f.t.}^{\text{ramp}}}{2t_{\text{ramp}}} \right) \stackrel{!}{=} 1 - \eta_{f.t.} \quad (3.32)$$

mit  $\eta_{f.t.} \ll 1$ .<sup>8</sup> Für das Weitere ist es nützlicher, Gl. (3.31) nach  $\sigma$  umzustellen. Für  $\eta_{f.t.} = 1.5 \cdot 10^{-2}$  erhält man näherungsweise  $\sigma \approx 0.185$ . Nimmt man die Flat-Top-Zeit  $t_{f.t.}$  hinzu, vergrößert sich das effektive Flat-Top-Intervall entsprechend zu

$$t_{f.t.}^{\text{eff}} \equiv t_{f.t.}^{\text{ramp}} + t_{f.t.} = 2\sigma t_{\text{ramp}} + t_{f.t.}, \quad (3.33)$$

und man erhält für  $t_{f.t.} \gg 2\sigma t_{\text{ramp}}$  näherungsweise  $t_{f.t.}^{\text{eff}} \approx t_{f.t.}$ . Die Parameterabhängigkeit ist exemplarisch in den Abbn. 3.5 und 3.6 dargestellt.

Das Flat-Top-Profil bietet einen gewaltigen Vorteil bei der numerischen Integration. Wie zum Beispiel in [26] nachgewiesen wird, ist die quantenkinetische Gleichung (2.60) mathematisch äquivalent zu Gl. (2.42) für die Bogoliubov-Koeffizienten. Für das Flat-Top-Profil wird letztere genutzt, um die Residualteilchendichte numerisch zu bestimmen. In Anhang C wird gezeigt, dass für den Flat-Top-Bereich unter Anwendung des Satzes von Floquet, siehe [38], für die Wahl  $t_{f.t.} = n_{f.t.}T$  mit  $n_{f.t.} \in \mathbb{N}$  und  $T = 2\pi/\nu$  nur über eine Periode des Feldes integriert werden muss, um den Wert der Quasiteilchendichte am Ende des Flat-Top-Intervalls zu bestimmen. Dadurch kann das Flat-Top-Intervall quasi beliebig vergrößert werden, ohne dabei die Rechenzeit signifikant zu erhöhen. Daher wird das Flat-Top-Profil auch gewählt, um in Kapitel 6 numerisch nach zusätzlichen Verstärkungseffekten zum „einfachen“ dynamisch assistierten Schwinger-Effekt zu suchen.

---

<sup>8</sup>Vgl. Gl. (3.18).

# 4 Näherung der Residualteilchendichte für langsame Ein- und Ausschaltvorgänge

## 4.1 Verallgemeinerung der Fourier-Reihenentwicklung in der Niederdichte-Näherung

Im Folgenden wird für die in Abschnitt 3 definierten Feldkonfigurationen der Spezialfall kleiner Dichten  $f(\mathbf{p}, t) \ll 1$  betrachtet. Dann folgt aus der quantenkinetischen Gleichung (2.58) näherungsweise

$$f(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} |I(\mathbf{p}, t)|^2 \quad (4.1)$$

mit

$$I(\mathbf{p}, t) = \int_{t_i}^t dt' Q(\mathbf{p}, \nu t', E(t'/t_r)) \exp(2i\Theta(\mathbf{p}, t')). \quad (4.2)$$

Wie in [26] gezeigt wird, liefert dieser Ansatz für das räumlich und zeitlich konstante Feld  $E_z = E_0$  den bekannten ersten Term Schwingers aus [7], festgehalten in Gl. (1.2). Die Niederdichte-Näherung lässt sich somit dadurch motivieren, dass sie das Verhalten der Paarproduktion im Bereich stark unterdrückter Paarerzeugung  $f(\mathbf{p}, t) \ll 1$ , dem „Calm-Valley“, hinreichend gut beschreibt.<sup>1</sup> Davon abgesehen kann die Niederdichte-Näherung immer als adäquate Näherung für das „Kurzzeitverhalten“ der Teilchenproduktion herangezogen werden.

Nach [27] lässt sich für den abrupten Ein- und Ausschaltvorgang aus Gl. (3.13) der Integrand von  $I(\mathbf{p}, t)$  teilweise in Fourierreihen entwickeln, was die Zeitintegration ermöglicht. Es ergibt sich

$$I(\mathbf{p}, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} iF_k(\mathbf{p}, E_0) \frac{\exp(-i[k\nu - 2\Omega(\mathbf{p}, E_0)]t) - 1}{k\nu - 2\Omega(\mathbf{p}, E_0)}, \quad (4.3)$$

---

<sup>1</sup>Siehe Abb. (1.2).

wobei sich die dynamische Phase mit Hilfe der Fourier-Reihenentwicklung schreiben lässt als

$$\Theta(\mathbf{p}, t) = \int_{t_i}^t dt' \omega(\mathbf{p}, \nu t', E_0) = \Omega(\mathbf{p}, E_0) t + P(\mathbf{p}, \nu t, E_0). \quad (4.4)$$

Dabei ist

$$P(\mathbf{p}, \nu t + \nu T, E_0) = P(\mathbf{p}, \nu t, E_0) \quad (4.5)$$

und damit eine  $T = 2\pi/\nu$ -periodische Funktion. Die maßgeblichen Fourier-Koeffizienten sind durch

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{p}, E_0) &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \omega(\mathbf{p}, \nu t, E_0), \\ F_k(\mathbf{p}, E_0) &= \frac{1}{T} \int_0^T dt Q(\mathbf{p}, \nu t, E_0) \exp(2iP(\mathbf{p}, \nu t, E_0) + ik\nu t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

gegeben. Anhand des Nenners in Gl. (4.3) erkennt man, dass für den Fall

$$\ell\nu - 2\Omega(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0) = 0 \quad (4.7)$$

die Residualteilchendichte  $f(\mathbf{p}, t_\infty)$  für  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$  ein resonantes Verhalten zeigt. Dieses hängt vom Wert des entsprechenden Fourier-Koeffizienten  $F_\ell(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0)$  ab. Für  $k = \ell$  folgt aus den Gln. (4.1) und (4.3) unmittelbar

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}_{(\ell)}, t) &= \frac{1}{2} \left| F_\ell(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0) t + \sum_{k \neq \ell} iF_k(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0) \frac{\exp(-i[k\nu - 2\Omega(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0)] t) - 1}{k\nu - 2\Omega(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0)} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left| F_k(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0) t + \sum_{k \neq 0} iF_{k+\ell}(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0) \frac{\exp(-ik\nu t) - 1}{k\nu} \right|^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Der zweite Summand ist wiederum eine  $T$ -periodische Funktion. Im Allgemeinen steigt die Residualdichte  $f(\mathbf{p}_{(\ell)}, t_\infty)$  im Resonanzfall für  $F_k(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0) \neq 0$  quadratisch mit der Pulslänge respektive Flat-Top-Zeit  $t_{\text{f.t.}}$ , modifiziert durch die jeweils zeitlich oszillierenden Funktionen  $Y_\ell(\mathbf{p}, t)$  und  $Z_\ell(\mathbf{p}, t)$  und durch einen zu  $t_{\text{f.t.}}$  linearen Term:

$$f(\mathbf{p}_{(\ell)}, t_\infty) = f(\mathbf{p}_{(\ell)}, t_{\text{f.t.}}) = \frac{1}{2} |F_\ell(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0)|^2 t_{\text{f.t.}}^2 + Y_\ell(\mathbf{p}_{(\ell)}, t_{\text{f.t.}}) t_{\text{f.t.}} + Z_\ell(\mathbf{p}_{(\ell)}, t_{\text{f.t.}}). \quad (4.9)$$

Insbesondere folgt für eine Pulsdauer von  $t_{\text{f.t.}} = n_{\text{f.t.}} T$  mit  $n_{\text{f.t.}} \in \mathbb{N}$

$$f(\mathbf{p}_{(\ell)}, t_\infty) = \frac{1}{2} |F_k(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0)|^2 (n_{\text{f.t.}} T)^2. \quad (4.10)$$

Anschaulich ergeben sich daraus in der Umgebung der Resonanz bei  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$  diskrete „Akku-  
mulationsschalen“ der Residualdichte  $f(\mathbf{p}, t_\infty)$  im Impulsraum  $(p_{\parallel}, p_{\perp})$ .<sup>2</sup>

Dieses aus [27] übernommene Resultat für den Fall des abrupten Ein- und Ausschaltens (3.13)  
zeitlich periodischer Hintergrundfelder wird im Folgenden auf beliebige Ein- und Ausschalt-  
funktionen verallgemeinert.<sup>3</sup> Aufgrund der Struktur der gewählten Feldkonfigurationen sind  
zwei Zeitskalen von Relevanz. Auf der einen Seite ist dies der Parameter  $t_r$  mit Bezug auf  
die Ein- und Ausschaltfunktion  $K(t/t_r)$  und auf der anderen die Periodendauer  $T$  des peri-  
odischen Feldanteils  $h(\nu t)$ . Ist für ein Zeitintervall die Einhüllende konstant, muss für diesen  
Abschnitt der Anschluss an Gl. (4.9) hergestellt werden können. Die Grundidee besteht dar-  
in, die Einhüllende  $K(t/t_r)$  mit der relevanten Zeitskala  $t_r$  innerhalb eines Zeitintervalls  $\Delta t$   
im Gegensatz zum mit der Periode  $T$  oszillierenden Anteil  $h(\nu t)$  als konstant anzunehmen.<sup>4</sup>  
Am Ende der Rechnung wird schließlich der Grenzfall  $\Delta t \rightarrow 0$  betrachtet. Das in Gl. (4.2)  
auftretende Integral  $\int_{t_i}^t dt'$  wird nach folgender Umformung in  $M$  Teilintervalle aufgeteilt

$$\int_{t_i}^t dt' = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ M \rightarrow \infty}} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{t_i+m\Delta t}^{t_i+(m+1)\Delta t} dt' \quad (4.11)$$

mit  $t = t_i + M\Delta t$  und  $M \in \mathbb{N}$ . Dabei wird die Feldstärke  $E(t/t_r)$  für das jeweilige Teilintervall  
von  $t_i + m\Delta t$  bis  $t_i + (m+1)\Delta t$  als konstant angenommen. Dadurch kann lokal im Punkt  
 $t_m = t_i + m\Delta t$  für die im Intervall  $\Delta t$  festgehaltene Feldstärke  $E(t_m/t_r)$  in Analogie zu [27]  
vorgegangen werden. Eine ausführliche Darstellung der hier nur angedeuteten Vorgehensweise  
findet sich im Anhang A.1. Der Limes  $M \rightarrow \infty$  und  $\Delta t \rightarrow 0$  liefert schließlich<sup>5</sup>

$$I(\mathbf{p}, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k(\mathbf{p}, t) \quad (4.12)$$

mit dem Integral

$$I_k(\mathbf{p}, t) = \int_{t_i}^t dt' F_k(\mathbf{p}, E(t'/t_r)) \exp \left( i \left[ 2S(\mathbf{p}, t', E(t'/t_r)) + 2 \int_{t_i}^{t'} dt'' \Omega(\mathbf{p}, E(t''/t_r)) - k\nu t' \right] \right) \quad (4.13)$$

und der Funktion

$$S(\mathbf{p}, t', E(t'/t_r)) = \int_{t_i}^{t'} dt'' R(\mathbf{p}, \nu t'', E(t''/t_r)) - P(\mathbf{p}, \nu t', E(t'/t_r)). \quad (4.14)$$

<sup>2</sup>Siehe Kapitel (5).

<sup>3</sup>Zur genauen Struktur der betrachteten Hintergrundfelder und zur Notation siehe Kapitel 3.

<sup>4</sup>Die Idee der Separation der Zeitskalen zwischen Einhüllender und oszillierendem Anteil wurde u.a. aus [39]  
entnommen, ursprünglich mit der Idee eine Näherungslösung für die vollständige Gl. (2.60) herzuleiten.

<sup>5</sup>Vgl. Gln. (4.3)-(4.6).

Dabei sind die Funktionen  $R(\mathbf{p}, \nu t, E(t_0/t_r))$  und  $P(\mathbf{p}, \nu t, E(t_0/t_r))$  für festen Zeitparameter  $t_0$  periodische Funktionen mit der Periodendauer  $T$ . Ihr Zusammenhang ist gegeben durch

$$P(\mathbf{p}, \nu t, E(t_0/t_r)) = \int_{t_i}^t dt' R(\mathbf{p}, \nu t', E(t_0/t_r)) \quad (4.15)$$

Das Integral über alle Zeitabhängigkeiten von  $R$  ist der in Vergleich zu Gl. (4.4) für beliebige Ein- und Ausschaltfunktionen verallgemeinerte oszillierende Anteil der dynamischen Phase

$$\Theta(\mathbf{p}, t) = \int_{t_i}^t dt' \omega(\mathbf{p}, \nu t', E(t'/t_r)) = \int_{t_i}^t dt' \{ \Omega(\mathbf{p}, E(t'/t_r)) + R(\mathbf{p}, \nu t', E(t'/t_r)) \}. \quad (4.16)$$

Die restlichen beiden Größen in Gl. (4.14) sind die im Vergleich zu [27] nun implizit über die Feldstärke  $E(t/t_r)$  zeitabhängigen Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{p}, E(t'/t_r)) &= \frac{1}{T} \int_0^T dt'' \omega(\mathbf{p}, \nu t'', E(t'/t_r)), \\ F_k(\mathbf{p}, E(t'/t_r)) &= \frac{1}{T} \int_0^T dt'' Q(\mathbf{p}, \nu t'', E(t'/t_r)) \exp(2iP(\mathbf{p}, \nu t'', E(t'/t_r)) + ik\nu t''). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Man sieht sofort, dass für den Grenzfall des abrupten Ein- und Ausschaltens (3.13) wieder Gl. (4.3) folgt. In diesem Fall gilt für  $t_i = 0 \leq t' \leq t_f = t_{ft}$ .

$$\begin{aligned} F_k(\mathbf{p}, E_0) &= \text{const.}, \\ \Omega(\mathbf{p}, E_0) &= \text{const.}, \\ S(\mathbf{p}, t', E_0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

und das Integral aus Gl. (4.12) ist trivial:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{p}, t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^t dt' F_k(\mathbf{p}, E_0) \exp(i [2\Omega(\mathbf{p}, E_0) - k\nu] t') \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} iF_k(\mathbf{p}, E_0) \frac{\exp(-i [k\nu - 2\Omega(\mathbf{p}, E_0)] t) - 1}{k\nu - 2\Omega(\mathbf{p}, E_0)}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Der Beitrag der Funktion  $S(\mathbf{p}, t', E(t'/t_r))$  ist aufgrund von Gl. (4.15) vor allem von Bedeutung, wenn sich die Amplitude  $E(t/t_r)$  in einem Zeitintervall stark ändert. In Anhang A.2 wird gezeigt, dass die Abschätzung

$$|S(\mathbf{p}, t, E(t/t_r))| \leq \frac{2}{\nu^2 t_r} |E'(t/t_r)| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} |C'_k(\mathbf{p}, E(t/t_r))| + \mathcal{O}(t_r^{-2}) \quad (4.20)$$

durchgeführt werden kann. Dabei bezeichnet

$$C'_k(\mathbf{p}, E(\tau)) = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{\left(\frac{e}{\nu} E(\tau) h(\nu t) - p_{\parallel}\right) \frac{e}{\nu} h(\nu t) e^{ik\nu t}}{\omega(\mathbf{p}, \nu t, E(\tau))} \quad (4.21)$$

die Ableitung des Fourier-Koeffizienten  $C_k(\mathbf{p}, E(\tau))$  der Quasiteilchenenergie  $\omega(\mathbf{p}, t, E(\tau))$  nach der Feldamplitude  $E$ .<sup>6</sup> Eine mögliche Abschätzung der unendlichen Reihe in Gl. (4.20) wird in Anhang A.2 vorgeschlagen. Ist  $\tau_{\max} = t_{\max}/t_r$  die Zeit, in welcher der erste Summand auf der rechten Seite in der Ungleichung (4.20) maximal wird und definiert man  $\tilde{C}'_k = C'_k/m_e$ , so ergibt sich unter der Vernachlässigung der quadratischen Ordnung in  $1/t_r$  eine formale Bedingung, ab wann die Funktion  $S(\mathbf{p}, t, E(t/t_r))$  vernachlässigt werden kann. Für

$$\nu t_r \gg \nu t_{r,0} = \frac{2m_e}{\nu} |E'(\tau_{\max})| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left| \tilde{C}'_k(\mathbf{p}, E(\tau_{\max})) \right| \quad (4.22)$$

gilt  $\exp(2iS) \rightarrow 1$  und aus Gl. (4.13) ergibt sich näherungsweise

$$I_k(\mathbf{p}, t_f) \approx \int_{t_i}^{t_f} dt' F_k(\mathbf{p}, E(t'/t_r)) \exp\left(2i \int_{t_i}^{t'} dt'' \Omega(\mathbf{p}, E(t''/t_r)) - ik\nu t'\right). \quad (4.23)$$

Dieser Ausdruck stellt eine plausible Verallgemeinerung von Gl. (4.3) dar. Die Bedingung (4.22) hängt offenkundig vom Verhältnis  $m_e/\nu$  ab. Für die Paarerzeugung im Tunnelregime mit  $\nu \ll m_e$  sind mehr Periodendurchgänge des oszillierenden Anteils  $h(\nu t)$  notwendig als im Multi-Photonen-Regime mit  $\nu \gtrsim m_e$ , um Gl. (4.22) zu erfüllen. Außerdem hängt Bedingung (4.22) davon ab, wie stark sich die Einhüllende zur Zeit  $\tau_{\max}$  ändert. Umso höher die Ableitungen  $E'(\tau)$  ausfallen, d.h. je abrupter sich die Einhüllende ändert, umso mehr Oszillationen des periodischen Anteils  $h(\nu t)$  sind notwendig, damit Gl. (4.23) eine adäquate Näherung darstellt. Für  $E'(\tau_{\max}) \rightarrow \infty$  wäre sie ausgeschlossen. Diese Problematik wird in Unterabschnitt 4.2.3 anhand der Diskussion des Super-Gauß-Profiles deutlich.

Um ausgehend von der Näherung (4.23) das Verhalten der Residualteilchendichte  $f(\mathbf{p}, t_{\infty})$  in Abhängigkeit vom Zeitskalenparameter  $t_r$  der Ein- und Ausschaltfunktion  $K(t/t_r)$  zu untersuchen, wird in Gl. (4.23) die Substitutionen  $t' = t_r \tau$  und  $t'' = t_r \tau'$  vorgenommen. Damit folgt

$$I_k(\mathbf{p}, \tau_f) = t_r \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau F_k(\mathbf{p}, E(\tau)) \exp\left(2im_e t_r \int_{\tau_i}^{\tau} d\tau' \tilde{\Omega}(\mathbf{p}, E(\tau')) - ik\nu t_r \tau\right) = J_k(\mathbf{p}, t_r) t_r \quad (4.24)$$

mit den dimensionslosen Größen  $\tau_i = t_i/t_r$ ,  $\tau_f = t_f/t_r$  und  $\tilde{\Omega}(\mathbf{p}, E(\tau')) = \Omega(\mathbf{p}, E(\tau'))/m_e$ .

Nach den Gln. (4.1) und (4.12) folgt damit für Zeitskalenparameter  $t_r \gg t_{r,0}$  für die Residual-

---

<sup>6</sup>Siehe Gl. (A.7).

teilchendichte

$$f(\mathbf{p}, t_\infty) \approx \frac{1}{2} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\mathbf{p}, t_r) \right|^2 t_r^2. \quad (4.25)$$

Unter der Berücksichtigung beliebiger Ein- und Ausschaltfunktionen  $K(t/t_r)$  wird das Verhalten der Residualdichte  $f(\mathbf{p}, t_\infty)$  erzeugter Elektron-Positron-Paare in Abhängigkeit vom Parameter  $t_r$  zusätzlich durch das Betragsquadrat der Summe über alle Integrale

$$J_k(\mathbf{p}, t_r) = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau F_k(\mathbf{p}, E(\tau)) \exp\left(im_e t_r \tilde{\phi}_k(\mathbf{p}, \tau)\right) \quad (4.26)$$

modifiziert mit der dimensionslosen Phase

$$\tilde{\phi}_k(\mathbf{p}, \tau) = 2 \int_{\tau_i}^{\tau} d\tau' \tilde{\Omega}(\mathbf{p}, E(\tau')) - \frac{k\nu}{m_e} \tau. \quad (4.27)$$

Der Zeitskalenparameter  $t_r$  kommt im Integranden nur noch linear im Exponenten der Exponentialfunktion vor als dimensionslose Größe  $m_e t_r$ . Für  $m_e t_r \rightarrow \infty$  oszilliert der Integrand so stark, dass, je nach Feldkonfiguration, ab einem bestimmten Parameter  $t_{r,1}$  und für  $t_r \gg t_{r,1}$  nur Integrale  $I_k(\mathbf{p}, t_r)$  beitragen, für die die zeitliche Ableitung der Phase  $\tilde{\phi}'_k(\mathbf{p}, \tau_0)$  an einem Punkt  $\tau_i \leq \tau_{0,k} \leq \tau_f$  verschwindet. Jenseits des stationären Phasenpunktes heben sich die Beiträge gegenseitig auf, siehe [40]. Dann ist der Wert des Integrals unter Anwendung der Methode der stationären Phase in erster Ordnung durch den Wert des Fourier-Koeffizienten  $F_k(\mathbf{p}, E(\tau_0))$  am stationären Phasenpunkt  $\tau_{0,k}$  bestimmt. Unter dieser Vorgehensweise lassen sich je nach gewählter Ein- und Ausschaltfunktion  $K(t/t_r)$  Modifikationen zum Zeitverhalten der Residualteilchendichte  $f(\mathbf{p}, t_\infty)$  im Vergleich zu Gl. (4.10) ableiten. Das hier nur skizzierte Vorgehen wird im Folgenden anhand der in Kapitel 3 eingeführten symmetrischen Feldkonfigurationen systematisch ausgeführt.

## 4.2 Auswertung für symmetrische Ein- und Ausschaltfunktionen

### 4.2.1 Reduktion des Problems auf den Einschaltvorgang

Für den Fall symmetrischer Ein- und Ausschaltfunktionen, d.h. für

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\tau_i + \tau_f}{2} + \tau\right) &= E\left(\frac{\tau_i + \tau_f}{2} - \tau\right), \\ E'\left(\frac{\tau_i + \tau_f}{2} + \tau\right) &= -E'\left(\frac{\tau_i + \tau_f}{2} - \tau\right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

lässt sich das Integral  $J_k(\mathbf{p}, t_r)$  aus Gl. (4.26) weiter vereinfachen. Zunächst ergibt sich aus der Definition von (4.17) und der Funktion  $Q(\mathbf{p}, t, E(t/t_r))$ , die durch Gl. (3.4) gegeben ist,

$$F_k(\mathbf{p}, E(\tau)) = \frac{e}{\nu t_r} E'(\tau) B_k(\mathbf{p}, E(\tau)) + ieE(\tau) A_k(\mathbf{p}, E(\tau)) \quad (4.29)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} A_k(\mathbf{p}, E(\tau)) &= \frac{i\epsilon_{\perp}}{T} \int_0^T dt' \frac{h'(\nu t')}{\omega(\mathbf{p}, t', E(\tau))^2} \exp(2iP(\mathbf{p}, \nu t', E(\tau)) + ik\nu t'), \\ B_k(\mathbf{p}, E(\tau)) &= -\frac{\epsilon_{\perp}}{T} \int_0^T dt' \frac{h(\nu t')}{\omega(\mathbf{p}, t', E(\tau))^2} \exp(2iP(\mathbf{p}, \nu t', E(\tau)) + ik\nu t'). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Das Einsetzen von Gl. (4.29) in Gl. (4.26) liefert nach einigen Substitutionen und Umformungen unter Verwendung der Relationen (4.28)

$$J_k(\mathbf{p}, t_r) = 2i \left( J_k^A(\mathbf{p}, t_r) + J_k^B(\mathbf{p}, t_r) \right) \exp\left( im_e t_r \tilde{\phi}_k\left(\mathbf{p}, \frac{\tau_i + \tau_f}{2}\right) \right) \quad (4.31)$$

mit den Integralen

$$\begin{aligned} J_k^A(\mathbf{p}, t_r) &= e \int_{\tau_i}^{\frac{\tau_i + \tau_f}{2}} d\tau E(\tau) A_k(\mathbf{p}, E(\tau)) \cos(\tilde{\kappa}_k(\tau) m_e t_r), \\ J_k^B(\mathbf{p}, t_r) &= \frac{e}{\nu t_r} \int_{\tau_i}^{\frac{\tau_i + \tau_f}{2}} d\tau E'(\tau) B_k(\mathbf{p}, E(\tau)) \sin(\tilde{\kappa}_k(\tau) m_e t_r). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Die modenabhängige Frequenz ist dabei in dimensionsloser Darstellung gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_k(\tau) &\equiv \left( \tilde{\phi}_k(\mathbf{p}, \tau) - \tilde{\phi}_k\left(\mathbf{p}, \frac{\tau_i + \tau_f}{2}\right) \right) \\ &= -2 \int_{\tau}^{\frac{\tau_i + \tau_f}{2}} d\tau' \tilde{\Omega}(\mathbf{p}, E(\tau')) + \frac{k\nu}{m_e} \left( \frac{\tau_i + \tau_f}{2} - \tau \right) = \frac{\kappa_k(\tau)}{m_e}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Die explizite Herleitung von Gl. (4.31) ist in Anhang A.2 ausführlicher dargestellt. Für den Fall des abrupten Ein- und Ausschaltens (3.13) mit  $t_r = t_{f,t.}$  ergibt sich für die Phase

$$m_e \tilde{\phi}_k(\mathbf{p}, \tau) = (2\Omega(\mathbf{p}, E_0) - k\nu) \tau. \quad (4.34)$$

Da die Ableitung der Feldamplitude  $E'(\tau)$  für alle Zeiten verschwindet, folgt für den Beitrag  $J_k^B(\mathbf{p}, t_{f.t.}) = 0$  und es verbleibt mit  $(\tau_i + \tau_f)/2 = 1/2$  das Integral

$$\begin{aligned} J_k(\mathbf{p}, t_{f.t.}) &= 2i \exp\left(i[2\Omega(\mathbf{p}, E_0) - k\nu] \frac{t_{f.t.}}{2}\right) eE_0 A_k(\mathbf{p}, E_0) \\ &\quad \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} d\tau \cos\left(t_{f.t.} [2\Omega(\mathbf{p}, E_0) - k\nu] \left[\tau - \frac{1}{2}\right]\right) \\ &= -eE_0 A_k(\mathbf{p}, E_0) \frac{\exp(-i[k\nu - 2\Omega(\mathbf{p}, E_0)] t_{f.t.}) - 1}{t_{f.t.} (k\nu - 2\Omega(\mathbf{p}, E_0))}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Das Einsetzen von Gl. (4.35) in Gl. (4.25) mit  $iF_k(\mathbf{p}, E_0) = -eE_0 A_k(\mathbf{p}, E_0)$  ergibt wieder das Ergebnis aus [27], festgehalten in Gl. (4.3).

Die Integrale aus Gl. (4.32) durchlaufen nur noch Zeiten  $\tau_i \leq \tau \leq (\tau_i + \tau_f)/2$ . Wie für symmetrische Ein- und Ausschaltvorgänge nicht anders zu erwarten, reicht es daher aus, den Einschaltvorgang isoliert bis zum Maximum  $E((\tau_i + \tau_f)/2) = E_0$  zu betrachten. Da das Integral  $J_k^B(\mathbf{p}, t_r)$ , wie in Gl. (4.32) festgehalten, gegenüber  $J_k^A(\mathbf{p}, t_r)$  um den Faktor  $(\nu t_r)^{-1}$  unterdrückt ist und im Folgenden der Fall  $\nu t_r \gg 1$  betrachtet werden soll, wird im Weiteren von ihm abgesehen. Es handelt sich dabei um den „unphysikalischen“ Beitrag des elektrischen Feldes, das durch Gl. (3.2) gegeben ist. Er entsteht durch die spezifische Vorgabe des Vektorpotentials nach Gl. (3.1), die notwendig ist, um die Fourier-Reihenentwicklungen durchführen zu können. Prinzipiell kann der Beitrag durch das Integral  $J_k^B(\mathbf{p}, t_r)$  auch mitgenommen werden, indem analog zur Auswertung des Integrals  $J_k^A(\mathbf{p}, t_r)$  vorgegangen wird. Diese ist Gegenstand des folgenden Abschnitts 4.2.2.

### 4.2.2 Explizite Anwendung der Methode der stationären Phase

Wie in Abschnitt (4.1) angekündigt, kann in der Niederdichte-Näherung das Verhalten der Residualteilchendichte  $f(\mathbf{p}, t_\infty)$  in Abhängigkeit vom Zeitskalenparameter  $t_r$  der Ein- und Ausschaltfunktion  $K(t/t_r)$  für den Fall  $m_e t_r \rightarrow \infty$  unter Anwendung der Methode der stationären Phase bestimmt werden. Sie ist ein Spezialfall des Verfahrens des steilsten Anstieges („Method of Steepest Descents“) zur asymptotischen Auswertung exponentieller Integrale und wird zum Beispiel in [40] beschrieben. Ausgangspunkt ist das für  $\nu t_r \gg 1$  dominante Integral  $J_k^A(\mathbf{p}, t_r)$  aus Gl. (4.32). Der Integrand besteht aus einem oszillierenden Anteil und einer Einhüllenden abhängig von der Feldstärke  $E(\tau)$ . Für genügend große Werte des Kontrollparameters  $m_e t_r$  tragen aufgrund des stark oszillierenden Anteils nur die Koeffizienten  $A_k(\mathbf{p}, E(\tau_{0,k}))$  am stationären Phasenpunkt  $\tau_{0,k}$  wesentlich zum Wert des Integrals bei. Als Erstes werden für das Integrationsintervall  $\tau_i \leq \tau \leq (\tau_i + \tau_f)/2$  die stationären Punkte  $\tau_{0,k}$  der dimensionslosen Phase

$\tilde{\phi}_k(\mathbf{p}, \tau)$ , festgehalten in Gl. (4.27), bestimmt. Dies führt auf die Bedingung<sup>7</sup>

$$\left. \frac{d\tilde{\phi}_k(\mathbf{p}, \tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_{0,k}} = 2\tilde{\Omega}(\mathbf{p}, E(\tau_{0,k})) - \frac{k\nu}{m_e} \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.36)$$

Während die Lage der stationären Phasenpunkte  $\tau_{0,k}$  auf der Zeitachse abhängig ist vom gewählten Ein- und Ausschaltvorgang, sind die resultierenden Feldstärken  $E_{\tau_{0,k}} = E(\tau_{0,k})$  davon unabhängig. Die Bedingung (4.36) lässt sich auch umformulieren als Bestimmungsgleichung für die Feldstärke  $E_{\tau_{0,k}}$ :

$$2\tilde{\Omega}(\mathbf{p}, E_{\tau_{0,k}}) - \frac{k}{\chi} = 0, \quad (4.37)$$

und ist damit unabhängig von der konkreten Wahl der Funktion  $K(\tau)$ . Sind die Feldstärken  $E_{\tau_{0,k}}$  einmal bestimmt, erhält man über die Umkehrfunktion  $\tau_{0,k} = E^{-1}(E_{\tau_{0,k}})$  oder implizit über die Bedingung  $E_{\tau_{0,k}} = E(\tau_{0,k})$  die stationären Phasenpunkte für beliebige Ein- und Ausschaltvorgänge. Für bezüglich der Feldamplitude  $E$  monoton steigenden Koeffizienten  $\tilde{\Omega}(\mathbf{p}, E)$  folgt aus  $0 \leq E \leq E_0$  unmittelbar

$$k_{\min} = \lceil 2\chi\tilde{\epsilon}(\mathbf{p}) \rceil \leq k \leq k_{\max} = \lfloor 2\chi\tilde{\Omega}(\mathbf{p}, E_0) \rfloor, \quad (4.38)$$

wobei  $k \in \mathbb{N}$  ist.<sup>8</sup> Dabei bezeichnet  $\lceil x \rceil$  die Aufrundungs- und  $\lfloor x \rfloor$  die Abrundungsfunktion. Das heißt, nur für  $k_{\min} \leq k \leq k_{\max}$  kann Bedingung (4.37) erfüllt werden und es folgt im Zuge der Stationäre-Phasen-Näherung für den (im Folgenden noch zu präzisierenden) Grenzfall  $m_e t_r \rightarrow \infty$

$$I(\mathbf{p}, \tau_f) \approx t_r \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} J_k(\mathbf{p}, t_r) \quad (4.39)$$

als endliche Summe. Die Beiträge, in denen die Phase  $\tilde{\phi}_k(\mathbf{p}, \tau)$  nicht stationär wird, tragen für Bereiche, in denen die Amplitude  $E(\tau)$  ungefähr konstant bleibt nach Gl. (4.35) höchstens mit der Ordnung  $\mathcal{O}(t_r^{-1})$  bei und können deshalb vernachlässigt werden. Im Allgemeinen ist es natürlich möglich, dass für eine Mode  $k$  mehrere Zeiten  $\tau_{0,k}^{(i)}$  existieren, in denen  $\tilde{\phi}_k(\mathbf{p}, \tau_{0,k}^{(i)})$  stationär ist. In diesem Fall muss für jede Mode  $k$  zusätzlich über alle stationären Phasenpunkte  $\tau_{0,k}^{(i)}$  summiert werden. Im Folgenden werden jedoch gemäß der Abschnitte 3.3 bis 3.4 nur monoton steigende Einschaltvorgänge,  $E(\tau_1) \leq E(\tau_2)$  für  $\tau_1 \leq \tau_2 \leq (\tau_1 + \tau_f)/2$ , betrachtet. Dann existiert aufgrund der Monotonie von  $\tilde{\Omega}(\mathbf{p}, E)$  für jedes  $k$  nur ein einziger stationärer Phasenpunkt  $\tau_{0,k}$ .

Davon ausgehend wird unter Anwendung der Methode der stationären Phase das Integral

<sup>7</sup>Vgl. insbesondere mit der Resonanzbedingung (4.7) für den Fall des abrupten Ein- und Ausschaltens.

<sup>8</sup>Das dies eine sinnvolle Annahme darstellt, wird in Abschnitt 5.1 gezeigt.

$J_k^A(\mathbf{p}, t_r)$  aus Gl. (4.32) ausgewertet. Für gegebenes  $k_{\min} \leq k \leq k_{\max}$  wird zuerst die Phase  $\tilde{\phi}_k(\mathbf{p}, \tau)$  am stationären Phasenpunkt  $\tau_{0,k}$  bis zur ersten nicht verschwindenden Ordnung  $\tilde{\phi}_k^{[n_k]}(\mathbf{p}, \tau_{0,k}) \neq 0$  mit  $n_k \geq 2$  in eine Taylorreihe entwickelt:

$$\tilde{\phi}_k(\mathbf{p}, \tau) \approx \tilde{\phi}_k(\mathbf{p}, \tau_{0,k}) + \frac{s_k}{n_k!} \left| \tilde{\phi}_k^{[n_k]}(\mathbf{p}, \tau_{0,k}) \right| (\tau - \tau_{0,k})^{n_k}. \quad (4.40)$$

Dabei kennzeichnet  $s_k = \text{sgn} \left( \tilde{\phi}_k^{[n_k]}(\mathbf{p}, \tau_{0,k}) \right)$  das Vorzeichen der entsprechenden Ableitung. Diese folgt aus Gl. (4.27) unmittelbar als

$$\tilde{\phi}_k^{[n_k]}(\mathbf{p}, \tau_{0,k}) = 2E^{[n_k-1]}(\tau_{0,k}) \tilde{\Omega}'(\mathbf{p}, E_{\tau_{0,k}}). \quad (4.41)$$

Dabei ist

$$\Omega'(\mathbf{p}, E(\tau)) = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{\left( \frac{e}{\nu} E(\tau) h(\nu t) - p_{\parallel} \right) \frac{e}{\nu} h(\nu t)}{\omega(\mathbf{p}, \nu t, E(\tau))} \quad (4.42)$$

die Ableitung des Fourier-Koeffizienten  $\Omega(\mathbf{p}, E(\tau))$  aus Gl. (4.17) nach der Feldamplitude  $E$ . Damit hat  $\tilde{\Omega}'(\mathbf{p}, E(\tau)) = \Omega'(\mathbf{p}, E(\tau)) / m_e$  die Dimension  $1/\text{Energie}^2$ . Den Ausdruck (4.40) setzt man in Gl. (4.32) ein und erhält näherungsweise

$$J_k^A(\mathbf{p}, t_r) \approx e \int_{\tau_1}^{\frac{\tau_1 + \tau_f}{2}} d\tau E(\tau) A_k(\mathbf{p}, E(\tau)) \cos \left( m_e t_r \left[ \tilde{\kappa}_k(\tau_{0,k}) + \frac{s_k}{n_k!} \left| \tilde{\phi}_k^{[n_k]}(\mathbf{p}, \tau_{0,k}) \right| (\tau - \tau_{0,k})^{n_k} \right] \right). \quad (4.43)$$

Die Methode der stationären Phase besagt in nullter Ordnung, dass für

$$\left| \tilde{\phi}_k^{[n_k]}(\mathbf{p}, \tau_{0,k}) \right| \frac{m_e t_r}{n_k} \rightarrow \infty \quad (4.44)$$

der wesentliche Beitrag des stark oszillierenden Integrals  $J_k^A(\mathbf{p}, t_r)$  durch die am stationären Phasenpunkt  $\tau_{0,k}$  ausgewertete Amplitude  $E(\tau_{0,k}) A_k(\mathbf{p}, E(\tau_{0,k}))$  gegeben ist. Daraus folgt nach der Substitution  $y = \left( \left| \tilde{\phi}_k^{[n_k]}(\mathbf{p}, \tau_{0,k}) \right| m_e t_r / n_k! \right)^{1/n_k} (\tau - \tau_{0,k})$  die Näherung

$$J_k^A(\mathbf{p}, \tau_f) \approx e E(\tau_{0,k}) A_k(\mathbf{p}, E(\tau_{0,k})) (n_k!)^{1/n_k} \left( \left| \tilde{\phi}_k^{[n_k]}(\mathbf{p}, \tau_{0,k}) \right| m_e t_r \right)^{-1/n_k} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dy \cos(m_e t_r [\tilde{\kappa}_k(\tau_{0,k}) + s_k y^{n_k}]) \quad (4.45)$$

Das verbleibende Integral lässt sich unter Verwendung der Relationen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dy \cos(y^{n_k}) &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{2n_k}\right) \Gamma\left(\frac{n_k+1}{n_k}\right), \\ \int_{-\infty}^{\infty} dy \sin(y^{n_k}) &= (1 + (-1)^{n_k}) \sin\left(\frac{\pi}{2n_k}\right) \Gamma\left(\frac{n_k+1}{n_k}\right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

auswerten. Die Herleitung dieser erfolgt in Anhang A.4. Man beachte, dass für den Fall  $\tau_{0,\ell} = (\tau_i + \tau_f)/2$  und damit am Rand des Integrationsintervalls nur die halbe Umgebung um den stationären Phasenpunkt  $\tau_{0,\ell}$  zum Wert des Integrals beiträgt:

$$J_\ell^A(\mathbf{p}_{(\ell)}, t_r) \rightarrow \frac{1}{2} J_\ell^A(\mathbf{p}_{(\ell)}, t_r). \quad (4.47)$$

Um das Endergebnis kompakt darstellen zu können, ist es sinnvoll den Koeffizienten

$$\begin{aligned} \Delta_k^A(\mathbf{p}, t_r) &\equiv \exp\left(-\frac{ik\nu}{2} [t_i + t_f]\right) e E_0 A_k(\mathbf{p}, E_{\tau_{0,k}}) \left(2E_0 \tilde{\Omega}'(\mathbf{p}, E_{\tau_{0,k}})\right)^{-1/n_k} \\ &\cdot \Gamma\left(\frac{n_k+1}{n_k}\right) \left\{ 2 \cos\left(\frac{\pi}{2n_k}\right) \cos(\kappa_k(\tau_{0,k}) t_r) \right. \\ &\quad \left. - s_k \{1 + (-1)^{n_k}\} \sin\left(\frac{\pi}{2n_k}\right) \sin(\kappa_k(\tau_{0,k}) t_r) \right\} \end{aligned} \quad (4.48)$$

mit der Dimension einer Energie zu definieren. Für  $T_k = 2\pi/\kappa_k(\tau_{0,k})$  gilt

$$|\Delta_k^A(\mathbf{p}, t_r + T_k)| = |\Delta_k^A(\mathbf{p}, t_r)|, \quad (4.49)$$

und der Koeffizient  $\Delta_k^A(\mathbf{p}, t_r, E(\tau_{0,k}))$  ist bezüglich des Parameters  $t_r$  nach oben und unten beschränkt. Damit lässt sich der für  $\nu t_r \gg 1$  maßgebliche Anteil aus Gl. (4.45) nach Anwendung der Methode der stationären Phase zusammenfassen als

$$J_k^A(\mathbf{p}, t_r) \approx \exp\left(\frac{ik\nu}{2} [t_i + t_f]\right) \left(\frac{n_k!}{|K^{[n_k-1]}(\tau_{0,k})| m_e}\right)^{1/n_k} K(\tau_{0,k}) \Delta_k^A(\mathbf{p}, t_r) t_r^{-1/n_k}. \quad (4.50)$$

Durch Einsetzen von Gl. (4.50) in die Gln. (4.32) und (4.25) ergibt sich für die Residualteilchendichte unter Berücksichtigung der Bedingungen (4.22) und (4.44) näherungsweise

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}, t_\infty) &\approx \frac{1}{2} \left| 2i \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} \left(\frac{n_k!}{|K^{[n_k-1]}(\tau_{0,k})| m_e}\right)^{1/n_k} K(\tau_{0,k}) \Delta_k^A(\mathbf{p}, t_r) t_r^{-1/n_k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t_r}\right) \right|^2 t_r^2 \\ &\approx 2 \left| \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} \left(\frac{n_k!}{|K^{[n_k-1]}(\tau_{0,k})| m_e}\right)^{1/n_k} K(\tau_{0,k}) \Delta_k^A(\mathbf{p}, t_r) t_r^{(1-1/n_k)} \right|^2. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Für den abrupten Ein- und Ausschaltvorgang mit konstanter Feldamplitude  $E_0$  gibt es nur die Resonanzbedingung aus Gl. (4.7), die erfüllt werden kann. Für einen nicht abrupten Ein- und Ausschaltvorgang treten mehrere Feldstärken  $E(\tau)$  auf. Dadurch werden gemäß Gl. (4.36) zusätzliche Modenbeiträge  $k_{\min} \leq k \leq k_{\max}$  generiert. Betrachtet man in Gl. (4.51) den Exponenten des Zeitskalenparameters  $t_r$ , so lässt sich die Aussage treffen, dass der Beitrag einer angeregten Mode  $k$  zur Residualteilchendichte mit dem Wert der ersten nicht verschwindenden Ableitung  $n_k - 1$  der Einhüllenden am stationären Phasenpunkt steigt. Das bedeutet anschaulich, je länger das Feld mit einer Amplitude in unmittelbarer Umgebung der Feldstärke  $E(\tau_{0,k})$  oszilliert, umso größer ist der Beitrag der entsprechenden Mode zur Paarproduktion.

Der Ausdruck (4.51) vereinfacht sich für den Fall, dass die Einhüllende  $K(\tau)$  im Zeitintervall  $\tau_i < \tau < (\tau_i + \tau_f)/2$  streng monoton steigend ist. Dann gilt für die erste Ableitung  $E'(\tau) > 0$  und die erste nicht verschwindende Ordnung in Gl. (4.40) ist nach Gl. (4.41)  $n_k = 2$  mit dem Vorzeichen  $s_k = 1$ . Liegt der stationäre Phasenpunkt  $\tau_{0,\ell} = (\tau_i + \tau_f)/2$  genau auf dem Maximum der Einhüllenden, ist  $E(\tau_{0,\ell}) = E_0$ ,  $\ell = k_{\max} = 2\chi\tilde{\Omega}(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0)$  und damit der in [27] festgehaltene Resonanzfall  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$  aus Gl. (4.7) erfüllt. Die erste nicht verschwindende Ordnung  $n_\ell$  ist dann abhängig von der gewählten Feldkonfiguration, aufgrund der Symmetrie jedoch ungerade. Daher ist  $s_\ell = -1$ . Außerdem verschwindet die Frequenz  $\kappa_k(\tau_{0,\ell})$ . Der entsprechende Koeffizient ist unter Berücksichtigung der Bedingung (4.47) gegeben durch

$$\begin{aligned} \Delta_\ell^A(\mathbf{p}_{(\ell)}, t_r) &= -iF_\ell(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0) \left(2E_0\tilde{\Omega}'(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0)\right)^{-1/n_\ell} \Gamma\left(\frac{n_\ell + 1}{n_\ell}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2n_\ell}\right) \\ &\quad \cdot \exp\left(-\frac{ik\nu}{2} [t_i + t_f]\right) \end{aligned} \quad (4.52)$$

und sein Betragsquadrat ist unabhängig vom Zeitskalenparameter  $t_r$ :

$$\begin{aligned} |\Delta_\ell^A(\mathbf{p}_{(\ell)}, t_r)|^2 &= |\Delta_\ell^A(\mathbf{p}_{(\ell)})|^2 = |F_\ell(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0)|^2 \left(2E_0\tilde{\Omega}'(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0)\right)^{-2/n_\ell} \Gamma\left(\frac{n_\ell + 1}{n_\ell}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2n_\ell}\right)^2 \\ &= |F_\ell(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0)|^2 \left(1 - \frac{2}{n_\ell} \left(\ln [2E_0\tilde{\Omega}'(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0)] + \gamma_{\text{Euler}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n_\ell^2}\right)\right). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Dabei bezeichnet  $\gamma_{\text{Euler}} \approx 0.577$  die Euler-Mascheroni-Konstante. Insbesondere wird seine Größenordnung in Analogie zum abrupten Ein- und Ausschaltvorgang durch den Fourier-Koeffizienten  $F_\ell(\mathbf{p}, E_0)$  aus Gl. (4.6) bestimmt.

Zusammenfassend folgt somit für den Nichtresonanzfall  $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_{(\ell)}$  in führender Ordnung eine lineare Abhängigkeit vom Parameter  $t_r$

$$f(\mathbf{p}, t_\infty) \approx \frac{4}{m_e} \left| \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{K(\tau_{0,k})}{\sqrt{K'(\tau_{0,k})}} \Delta_k^A(\mathbf{p}, t_r) \right|^2 t_r. \quad (4.54)$$

Für den Resonanzfall  $\mathbf{p} = \mathbf{p}^{(\ell)}$  ergibt sich je nach Größe der ersten nicht verschwindenden Ableitung der Phase aus Gl. (4.41) mit  $n_\ell = 2N + 1$  und  $N \in \mathbb{N}$  in führender Ordnung eine  $t_r^{4/3}$ - bis  $t_r^2$ -Abhängigkeit der Residualteilchendichte vom Skalenparameter. Allgemein tragen gemäß

$$f(\mathbf{p}^{(\ell)}, t_\infty) \approx 2 \left| \left( \frac{n_\ell!}{|K^{[n_\ell-1]}(\tau_{0,\ell})| m_e} \right)^{1/n_\ell} \Delta_\ell^A(\mathbf{p}^{(\ell)}, t_r) t_r^{(n_\ell-2)/2n_\ell} + \sqrt{\frac{2}{m_e}} \sum_{k=k_{\min}}^{\ell-1} \frac{K(\tau_{0,k})}{\sqrt{K'(\tau_{0,k})}} \Delta_k^A(\mathbf{p}^{(\ell)}, t_r) \right|^2 t_r. \quad (4.55)$$

auch die Nichtresonanzmoden  $k_{\min} \leq k \leq k_{\max}$  zur Residualdichte bei. Für Ableitungen  $K'(\tau_{0,k}) \gg 1$  und Ordnungen  $n_\ell \gg 3$  ist die führende Ordnung

$$f(\mathbf{p}^{(\ell)}, t_\infty) \approx 2 \left( \frac{n_\ell!}{|K^{[n_\ell-1]}(\tau_{0,\ell})| m_e} \right)^{2/n_\ell} |\Delta_\ell^A(\mathbf{p}^{(\ell)})|^2 t_r^{2(1-\frac{1}{n_\ell})} \quad (4.56)$$

dominant. Dies entspricht letztlich Funktionen  $K(\tau)$ , die in unmittelbarer Umgebung des Maximums bei  $\tau_{0,\ell} = (\tau_i + \tau_f)/2$  nur sehr langsam in hoher Ordnung  $\tau^{n_\ell-1}$  abfallen, in größerer Entfernung von  $\tau_{0,\ell}$  dafür umso schneller verschwinden, sodass  $K'(\tau_{0,k})$  für  $\tau_i \leq \tau_{0,k} < (\tau_i + \tau_f)/2$  entsprechend groß wird. Anschaulich ergibt dies einen Ein- und Ausschaltvorgang mit (effektivem) Flat-Top-Intervall  $\tau_{\text{f.t.}}^{\text{eff}}$ , welches wesentlich größer ist als die (effektive) Ein- und Ausschaltzeit  $\tau_{\text{ramp}}^{\text{eff}}$ . Entwickelt man die Einhüllende um die erste nicht verschwindende Ordnung am Maximum bei  $\tau_{0,\ell} = (\tau_i + \tau_f)/2$ , sodass

$$K(\tau) \approx 1 + \frac{K^{[n_\ell-1]}(\tau_{0,\ell})}{(n_\ell - 1)!} (\tau_{0,\ell} - \tau)^{n_\ell-1}, \quad (4.57)$$

und definiert man die effektive Flat-Top-Zeit  $\tau_{\text{f.t.}}^{\text{eff}}$  in Analogie zu Abschnitt 3.3 und 3.4 durch

$$K\left(\tau_{0,\ell} - \frac{\tau_{\text{f.t.}}^{\text{eff}}}{2}\right) \stackrel{!}{=} 1 - \eta_{\text{f.t.}} \quad (4.58)$$

mit  $\eta_{\text{f.t.}} \ll 1$ , so folgt aus den Gln. (4.57) und (4.58) mit  $\tau_{\text{f.t.}}^{\text{eff}} = t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}}/t_r$  die Näherung

$$t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}} \approx 2 \left( \frac{\eta_{\text{f.t.}} (n_\ell - 1)!}{|K^{[n_\ell-1]}(\tau_{0,\ell})|} \right)^{1/(n_\ell-1)} t_r \quad (4.59)$$

Für  $n_\ell \gg 1$  gilt  $1/(n_\ell - 1) \approx 1/n_\ell$  und man kann

$$\left( \frac{n_\ell!}{|K^{[n_\ell-1]}(\tau_{0,\ell})|} \right)^{2/n_\ell} \approx \frac{(t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}})^2}{4t_r^2} \left( \frac{n_\ell}{\eta_{\text{f.t.}}} \right)^{2/n_\ell} = \frac{(t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}})^2}{4t_r^2} \left( 1 - \frac{2}{n_\ell} \ln \left( \frac{\eta_{\text{f.t.}}}{n_\ell} \right) \right) + \mathcal{O}(n_\ell^{-2}) \quad (4.60)$$

entwickeln. Wird außerdem berücksichtigt, dass

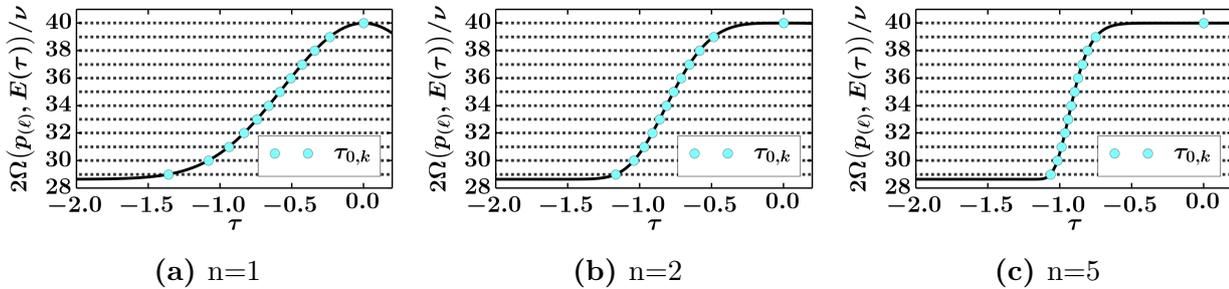
$$(m_e t_r)^{-2/n_\ell} = 1 - \frac{2 \ln(m_e t_r)}{n_\ell} + \mathcal{O}(n_\ell^{-2}) \quad (4.61)$$

gilt, so erhält man nach Einsetzen der Gln. (4.53), (4.60) und (4.61) in Gl. (4.56) für den Resonanzfall  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$  in einer Entwicklung für große  $n_\ell \gg 3$

$$f(\mathbf{p}_{(\ell)}, t_\infty) \approx \frac{1}{2} |F_\ell(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0)|^2 (t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}})^2 \left( 1 - \frac{2}{n_\ell} \left( \ln \left[ 2 \frac{\eta_{\text{f.t.}}}{n_\ell} E_0 \tilde{\gamma}'(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0) m_e t_r \right] + \gamma_{\text{Euler}} \right) + \mathcal{O}(n_\ell^{-2}) \right) \quad (4.62)$$

und damit in nullter Ordnung in  $1/n_\ell$  eine quadratische Zeitabhängigkeit der Residualdichte  $f(\mathbf{p}_{(\ell)}, t_\infty)$  von der effektiven Flat-Top-Zeit  $t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}}$  analog zum Ergebnis für den abrupten Ein- und Ausschaltvorgang in Gl. (4.9). In Anhang A.5 ist schematisch das Vorgehen für die Auswertung der Gln. (4.54) bis (4.56) für eine beliebige streng monotone und symmetrische Ein- und Ausschaltfunktion  $K(t/t_r)$  festgehalten. In den folgenden Abschnitten werden anhand der Feldkonfigurationen aus den Unterabschnitten 3.3 und 3.4 die bis hierhin sehr allgemein gehaltenen Resultate konkret ausgewertet.

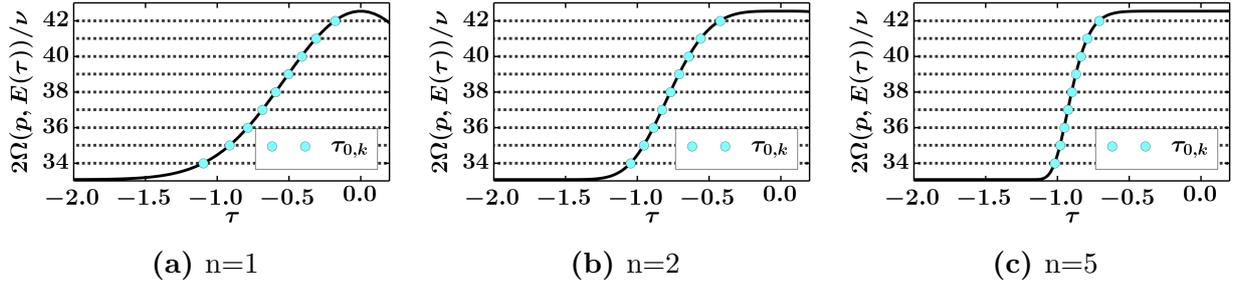
### 4.2.3 Verhalten der Residualdichte im Gauß- und Super-Gauß-Profil



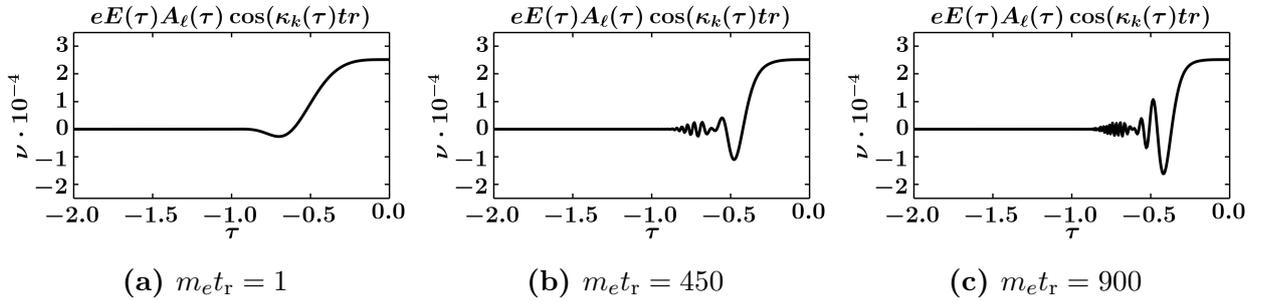
**Abbildung 4.1:** Darstellung der Bedingung (4.36) zur Bestimmung der stationären Phasenpunkte  $\tau_{0,k}$  für das (Super-)Gauß-Profil (3.15) und unterschiedliche Exponenten  $n$  im Resonanzfall  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$ . Feldparameter wie in Gl. (4.75) angegeben. Mit  $p_{\parallel,(\ell)}/m_e = 0$  und  $p_{\perp,(\ell)} \approx 0.07m_e$  ergibt sich  $\ell = k_{\text{max}} = 40$  und  $k_{\text{min}} = 29$ .

In diesem Abschnitt sollen die grundlegenden Resultate der Gln. (4.54) bis (4.62) konkret auf das Gauß- bzw. Supergauß-Profil aus Unterabschnitt 3.3 angewendet werden. Die Einhüllende erreicht ihr Maximum bei  $\tau_{0,\ell} = 0$ . Es ist noch darauf hinzuweisen, dass in Gl. (4.31) die Phase

$$\tilde{\phi}_k(\mathbf{p}, 0) = 2 \int_{-\infty}^0 d\tau' \tilde{\Omega}(\mathbf{p}, E(\tau')) \quad (4.63)$$



**Abbildung 4.2:** Darstellung der Bedingung (4.36) zur Bestimmung der stationären Phasenpunkte  $\tau_{0,k}$  für das (Super-)Gauß-Profil (3.15) und unterschiedliche Exponenten  $n$  im Nichtresonanzfall  $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_{(\ell)}$ . Feldparameter wie in Gl. (4.75) angegeben. Mit  $p_{\parallel} = 0.5m_e$  und  $p_{\perp} = 0.3m_e$  ergibt sich  $k_{\max} = 42$  und  $k_{\min} = 34$ .



**Abbildung 4.3:** Darstellung des Integranden des ersten Integrals aus Gl. (4.32) in Abhängigkeit des Kontrollparameters  $m_e t_r$  für das Super-Gauß-Profil (3.15) mit  $n = 2$  und für den Resonanzfall  $p_{\parallel,(\ell)}/m_e = 0$  und  $p_{\perp,(\ell)} \approx 0.3m_e$  mit  $\ell = 40$ . Feldparameter wie in Gl. (4.75) angegeben.

formal divergiert, da für den Koeffizienten

$$\tilde{\Omega}(\mathbf{p}, E(\tau' \rightarrow -\infty)) \approx \tilde{\epsilon}(\mathbf{p}) \neq 0 \quad (4.64)$$

gilt. Diese ist jedoch unabhängig von der Modenzahl  $k$  und kann entsprechend vor alle Summen über  $k$  gezogen werden. Damit verschwindet der divergente Ausdruck bei der Bildung des Betragsquadrats zur Bestimmung der physikalisch relevanten Residualdichte  $f(\mathbf{p}, t_{\infty})$  und ist nicht von Bedeutung. In Gl. (4.51) wurde dieser Schritt bereits ausgeführt. Für die erste Ableitung an den stationären Phasenpunkten  $\tau_{0,k} < 0$  ergibt sich nach Gl. (3.16) unmittelbar

$$K'(\tau_{0,k}) = -2n \tau_{0,k}^{2n-1} \exp(-\tau_{0,k}^{2n}) > 0. \quad (4.65)$$

Für den Resonanzfall  $\tau_{0,\ell} = 0$  ist die erste nicht verschwindende Ordnung der Phase aus Gl. (4.27)  $n_{\ell} = 2n + 1$  mit

$$K^{[2n]}(0) = -(2n)! < 0. \quad (4.66)$$

Der relevante Koeffizient aus Gl. (4.48) ist für  $k \neq \ell$  gegeben durch

$$\Delta_k^A(\mathbf{p}, t_r) = eE_0 A_k(\mathbf{p}, E_{\tau_{0,k}}) \sqrt{\frac{\pi}{4E_0 \tilde{\Omega}'(\mathbf{p}, E_{\tau_{0,k}})}} (\cos(\kappa_k(\tau_{0,k}) t_r) - \sin(\kappa_k(\tau_{0,k}) t_r)) \quad (4.67)$$

und aus Gl. (4.54) ergibt sich für den Nichtresonanzfall  $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_{(\ell)}$

$$f(\mathbf{p}, t_\infty) \approx \frac{2}{nm_e} \left| \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} \Delta_k^A(\mathbf{p}, t_r) |\tau_{0,k}|^{(1-2n)/2} \exp\left(-\frac{\tau_{0,k}^{2n}}{2}\right) \right|^2 t_r. \quad (4.68)$$

Für die Resonanzmode  $k = \ell$  folgt entsprechend nach Gl. (4.52)

$$\Delta_\ell^A(\mathbf{p}_{(\ell)}) = -iF_\ell(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0) \left(2E_0 \tilde{\Omega}'(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0)\right)^{-1/(2n+1)} \Gamma\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4n+2}\right). \quad (4.69)$$

und der Resonanzfall  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$  ergibt sich aus Gl. (4.55) als

$$f(\mathbf{p}_{(\ell)}, t_\infty) \approx 2 \left| \left(\frac{2n+1}{m_e}\right)^{1/(2n+1)} \Delta_\ell^A(\mathbf{p}_{(\ell)}) t_r^{(2n-1)/(4n+2)} + \sqrt{\frac{1}{nm_e}} \sum_{k=k_{\min}}^{\ell-1} \Delta_k^A(\mathbf{p}, t_r) |\tau_{0,k}|^{(1-2n)/2} \exp\left(-\frac{\tau_{0,k}^{2n}}{2}\right) \right|^2 t_r. \quad (4.70)$$

Für  $n \gg 1$  ist die führende Ordnung

$$f(\mathbf{p}_{(\ell)}, t_\infty) \approx 2 \left(\frac{2n+1}{m_e}\right)^{2/(2n+1)} |\Delta_\ell^A(\mathbf{p}_{(\ell)})|^2 t_r^{2(1-\frac{1}{2n+1})} \quad (4.71)$$

dominant. Entwickelt man

$$2t_r (2n+1)^{1/(2n+1)} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\cong} 2t_r \left(1 + \frac{\ln(2n)}{2n} + \mathcal{O}(n^{-2})\right) \quad (4.72)$$

für große  $n$ , dann ergibt sich nach Definition der effektiven Flat-Top-Zeit in Gl. (3.18) und ihrem asymptotischen Verhalten, siehe Gl. (3.19),

$$4t_r^2 (2n+1)^{2/(2n+1)} = (t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}})^2 \left(1 - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{\eta_{\text{f.t.}}}{2n}\right) + \mathcal{O}(n^{-2})\right). \quad (4.73)$$

Damit erhält man für die Resonanz  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$  die Entwicklung der Residualteilchendichte für  $n \gg 1$ :

$$f(\mathbf{p}_{(\ell)}, t_\infty) \approx \frac{1}{2} |F_\ell(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0)|^2 (t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}})^2 \left(1 - \frac{1}{n} \left(\ln\left[\frac{\eta_{\text{f.t.}}}{n} E_0 \tilde{\Omega}'(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0) m_e t_r\right] + \gamma_{\text{Euler}}\right) + \mathcal{O}(n^{-2})\right), \quad (4.74)$$

und somit eine Bestätigung der allgemeinen Abschätzung aus Gl. (4.62) unter Berücksichtigung, dass  $n_\ell = 2n + 1 \approx 2n$  ist. Die Bedingung  $n \gg 1$  entspricht nach Unterabschnitt 3.3 und Abb. (3.3) gerade dem Fall  $t_{f.t.}^{\text{eff}} \gg t_{\text{ramp}}^{\text{eff}}$ . Die effektive Ein- bzw. Ausschaltzeit  $t_{\text{ramp}}^{\text{eff}}$  ist wesentlich geringer als die effektive Flat-Top-Zeit  $t_{f.t.}^{\text{eff}}$ . Dann erhält man in führender Ordnung das Ergebnis wie für den abrupten Ein- und Ausschaltvorgang aus Gl. (4.9).

Um die Ergebnisse zu veranschaulichen, werden in den Abbn. (4.2) bis (4.6) exemplarisch die Feldparameter

$$\begin{aligned} E_0 &= 0.1E_c, \quad E_{0,2} = 0.05E_c, \quad E_{0,3} = 0.01E_c, \\ \nu &= 0.07m_e, \quad \nu_2 = 0.49m_e, \quad \nu_3 = 0.98m_e \end{aligned} \tag{4.75}$$

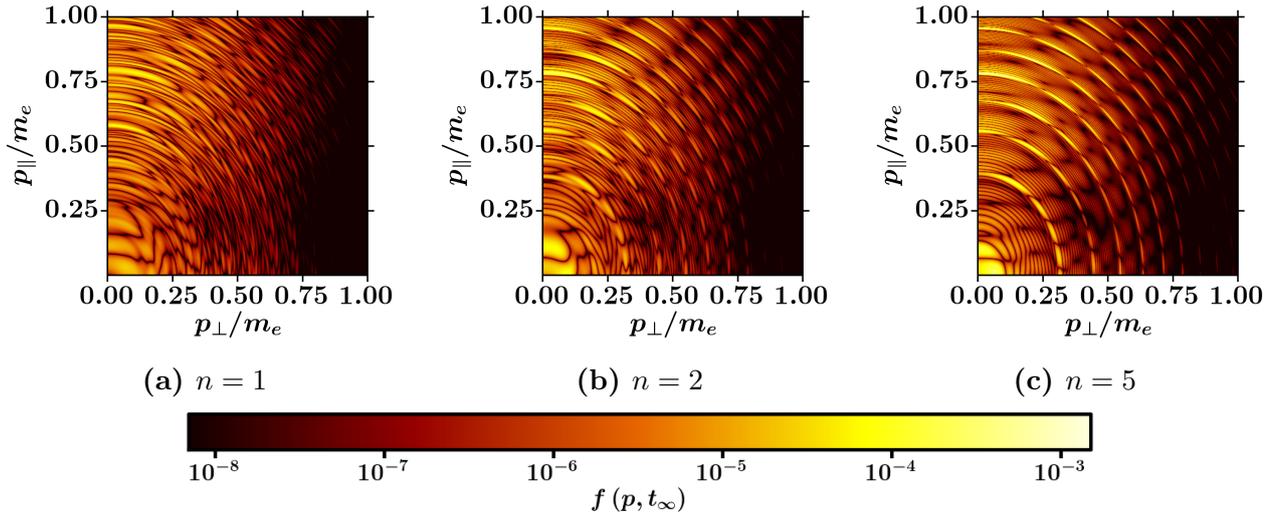
betrachtet.<sup>9</sup> Die Bedingungsgleichung (4.36) zur Ermittlung aller stationären Phasenpunkte  $\tau_{0,k}$  ist in den Abbn. (4.1) und (4.2) für die getroffene Parameterwahl (4.75) und unterschiedliche Exponenten  $n$  der Konfiguration dargestellt. Dabei ist in Abb. 4.1 der Punkt  $\tau_{0,\ell} = \tau_{0,k_{\text{max}}} = 0$  stationärer Phasenpunkt. Der Resonanzfall  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$  aus Gl. (4.7) ist erfüllt. Mit  $k_{\text{min}} = 29$  tragen in Form von Gl. (4.70) insgesamt zwölf Moden zur Residualdichte bei. Für die Wahl des Impulses in Abb. (4.2) ist der Resonanzfall aus (4.7) nicht erfüllt. Alle stationären Phasenpunkte  $\tau_{0,k}$  sind ungleich Null. Die Residualteilchendichte ist dann durch Gl. (4.68) gegeben. Für die gewählten Feldparameter ergibt sich mit  $k_{\text{min}} = 34$  und  $k_{\text{max}} = 42$  eine Anzahl von neun beitragenden Moden. In beiden Abbn. (4.1) und (4.2) ist erkennbar, dass die Nichtresonanzmoden  $\tau_{0,k} \neq 0$  für größer werdende Exponenten  $n$  immer näher beieinander liegen.

In der Abb. 4.3 wird für einen konkreten Resonanzfall  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$  veranschaulicht, dass für entsprechend große Kontrollparameter  $m_e t_r$  tatsächlich nur die Umgebung um den stationären Phasenpunkt  $\tau_{0,\ell}$  zum Wert des Integrals aus Gl. (4.32) beiträgt. Für größer werdende Parameter  $m_e t_r$  treten jenseits des stationären Phasenpunktes immer stärker werdende Oszillationen auf, die destruktiv interferieren.

In Abb.(4.4) ist die für unterschiedliche Exponenten  $n$  erzeugte Residualteilchendichte  $f(\mathbf{p}, t, t_\infty)$  im Impulsraum  $(p_\perp, p_\parallel)$  dargestellt. Sie ist das Ergebnis der numerischen Integration der vollen quantenkinetischen Gleichung aus Gl. (2.60). Dabei zeigt sich, dass die Analyse mit Hilfe der Niederdichte-Näherung aus Gl. (4.1) in Parameterbereichen unterdrückter Paarerzeugung, das Verhalten der vollen Lösung sehr gut beschreibt.<sup>10</sup> Dies ergibt zum Beispiel der Vergleich der Größenordnungen der erzeugten Residualteilchendichten in Abb. 4.4 mit den Ergebnissen aus Abb. (4.5) und Abb. (4.6) für  $\nu t_r = 10 \cdot 2\pi$  bzw.  $m_e t_r \approx 900$ . Dies entspricht jeweils dem letzten Wert der für unterschiedliche Exponenten  $n$  in Abhängigkeit vom Skalenparameter  $t_r$  dargestellten Residualdichten. Die grau und durchgängig unterlegten

<sup>9</sup>Zur Diskussion des Einflusses der Feldparameter in Zusammenhang mit der Ein- und Ausschaltfunktion auf die Paarerzeugung siehe Kapitel 5.

<sup>10</sup>Vgl. Kapitel 5.



**Abbildung 4.4:** Darstellung der Residualdichte  $f(\mathbf{p}_{(\ell)}, t_\infty)$  im Impulsraum  $(p_\perp, p_\parallel)$  für das (Super-)Gauß-Profil (3.15) und unterschiedliche Exponenten  $n$ . Für den Zeitskalenparameter wurde  $\nu t_r = 10 \cdot 2\pi$  und damit  $m_e t_r \approx 900$  gewählt. Die Darstellung folgt der vollständigen Lösung und ergibt sich aus der numerischen Integration von Gl. (2.60). Feldparameter wie in Gl. (4.75) angegeben.

Kurven folgen aus der numerischen Integration von Gl. (4.1) in der Niederdichte-Näherung. Die darüber gelegten rot-gestrichelten Kurven stammen aus den entsprechenden Resultaten der Stationäre-Phasen-Näherung. Es zeigt sich, dass diese mit den numerischen Ergebnisse für entsprechend große Parameter  $m_e t_r$  sehr gut übereinstimmt.

In Abb. (4.5) ist der Resonanzfall  $p_{\parallel,(\ell)}/m_e = 0$  und  $p_{\perp,(\ell)} \approx 0.07m_e$  und in Abb. (4.6) der Nichtresonanzfall  $p_\parallel = 0.5m_e$  und  $p_\perp = 0.3m_e$  dargestellt. Nach Gl. (4.71) ergibt sich für  $n = 1$  und  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$  in führender Ordnung eine  $t_r^{4/3}$ -Abhängigkeit. Damit unterscheidet sich der Resonanzfall unwesentlich vom linearen Verhalten des Nichtresonanzfalles aus Gl. (4.68). Auch die Moden  $k \neq \ell$  tragen maßgeblich zur Residualdichte bei. Entsprechend sind die „Akkumulationsschalen“ im Phasenraum kaum ausgeprägt, was in Abb. 4.4 deutlich erkennbar ist. Durch die nicht zu vernachlässigenden Beiträge der Koeffizienten  $\Delta_k^A(\mathbf{p}, t_r)$  aus Gl. (4.67) ergibt sich sowohl im Resonanzfall als auch im Nichtresonanzfall ein äußerst unregelmäßiges Verhalten der Residualteilchendichte in Abhängigkeit von  $t_r$ . Für  $n = 2$  folgt in führender Ordnung eine Proportionalität zu  $t_r^{8/5}$  und die Resonanzmode  $\ell$  ist wesentlich dominanter gegenüber den anderen. Das Verhalten im Resonanzfall erscheint regelmäßiger als im Nichtresonanzfall. Für  $n = 5$  ergibt sich eine  $t_r^{20/11}$ - und damit fast eine quadratische Abhängigkeit. Die anderen  $k$ -Moden sind im Fall  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$  gegenüber der resonanten  $\ell$ -Mode vernachlässigbar und der wesentliche Beitrag ist durch das effektive Flat-Top-Intervall  $t_{f.t.}^{\text{eff}}$  gemäß Gl. (4.74) gegeben. Die „Akkumulationsschalen“ im Phasenraum sind deutlich ausgeprägt. Zur Anschauung sei erneut auf Abb. (4.4) verwiesen. Der Effekt wird noch dadurch verstärkt, dass die Residualteilchendichte im Nichtresonanzfall nach Gl. (4.68) in führender linearer Ordnung für steigende Exponenten  $n$  zusätzlich mit  $1/n$  unterdrückt ist. Das lässt sich in Abb. 4.6 daran

erkennen, dass das lineare Verhalten der Residualteilchendichte in Abhängigkeit von  $t_r$  unter Vernachlässigung der Oszillationsbeiträge für alle Exponenten  $n$  fast identisch ist.<sup>11</sup>

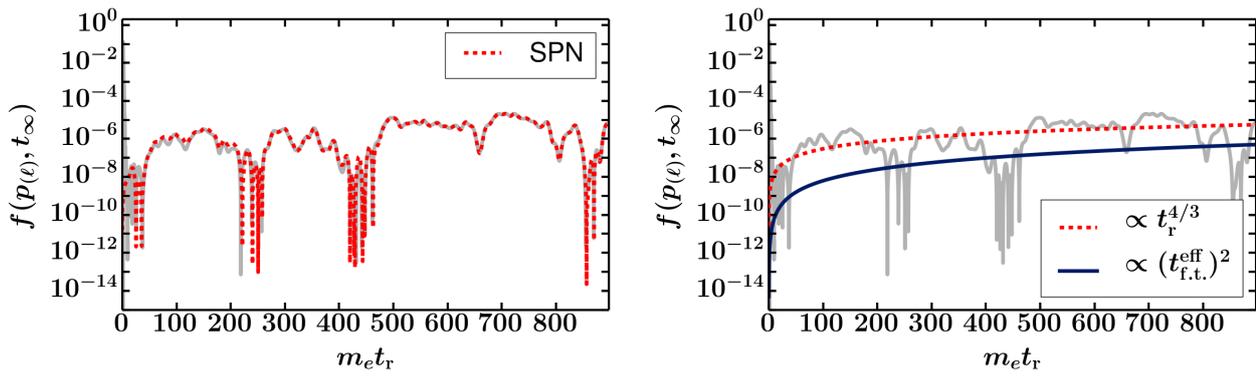
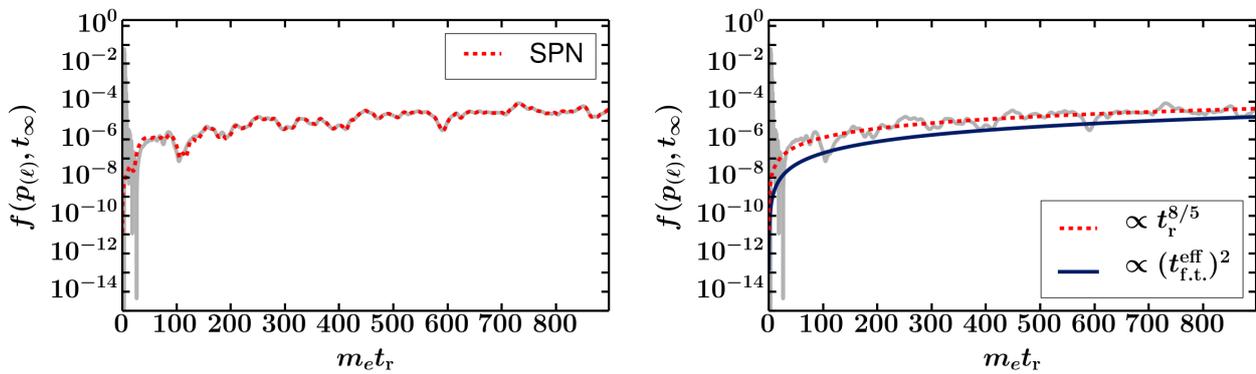
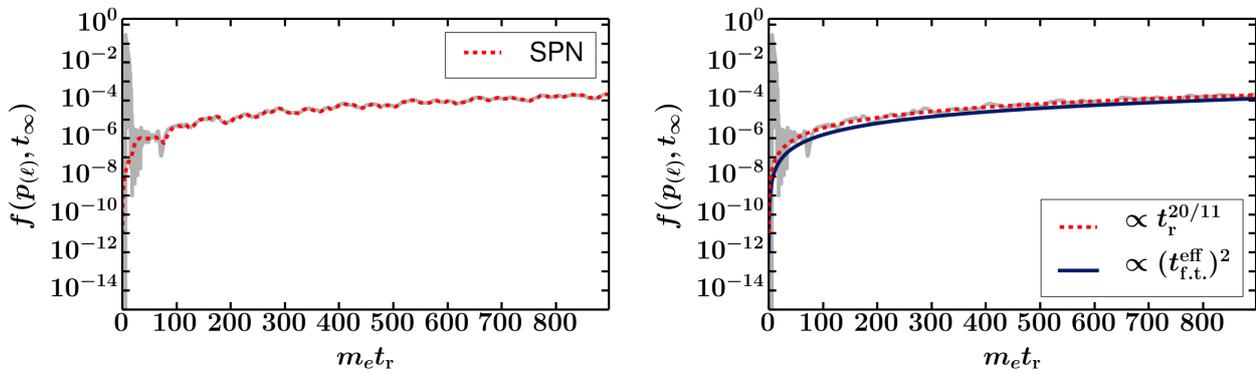
Damit lässt sich festhalten, dass der maßgebliche Unterschied in Bezug auf die erzeugte Teilchendichte durch die Resonanzmoden  $\ell$  für Impulse  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$  hervorgerufen wird. Für größere Exponenten  $n \gg 1$ , was mit dem Fall  $t_{f.t.}^{\text{eff}} \gg t_{\text{ramp}}^{\text{eff}}$  korrespondiert, werden mehr Teilchen erzeugt als für kleine Ordnungen. Super-Gauß-Konfigurationen mit  $n_k \gg 1$  sind effektiver bei der Erzeugung von Elektron-Positron-Paaren als das einfache Gauß-Profil mit  $n = 1$  und zeigen aufgrund der dominanten Resonanzmode  $\ell$  eine wesentlich regelmäßige Abhängigkeit vom Skalenparameter  $t_r$ .

Es ergibt sich jedoch für größer werdende  $n$  eine maßgebliche Einschränkung für die Gültigkeit der Näherungen (4.68) bis (4.74). Da die Ableitung der zeitabhängigen Feldamplitude  $E'(\tau)$  nach Gl. (3.16) linear mit  $n$  skaliert, folgt daraus, dass dies für die Bedingung (4.22) der Gültigkeit für die Stationäre-Phase-Näherung ebenfalls der Fall ist:

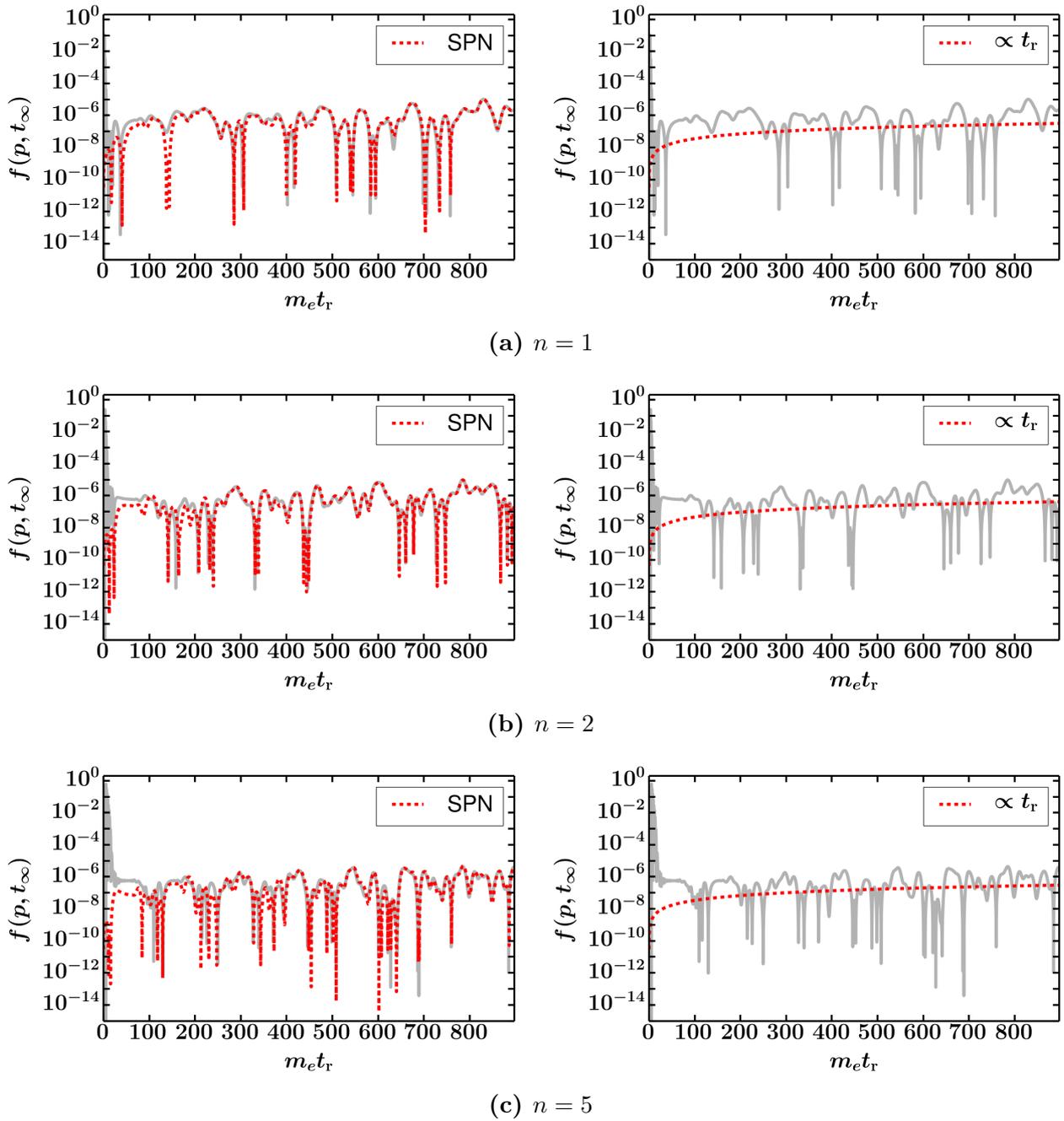
$$\nu t_{r,0} \leq \frac{4nm_e E_0}{\nu} |\tau_{\text{max}}|^{2n-1} \exp(-\tau_{\text{max}}^{2n}) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} \left| \tilde{C}'_l(\mathbf{p}, E(\tau_{\text{max}})) \right|. \quad (4.76)$$

Anschaulich gesprochen bedeutet dies, dass der Ein- und Ausschaltvorgang charakterisiert durch  $t_{\text{ramp}}^{\text{eff}}$  trotz der Bedingung  $t_{f.t.}^{\text{eff}} \gg t_{\text{ramp}}^{\text{eff}}$  nicht beliebig klein gemacht werden kann, ohne die Näherung und damit das reguläre  $(t_{f.t.}^{\text{eff}})^2$ -Verhalten zu zerstören. Für  $t_r \leq t_{r,0}$  tragen nach Gl. (4.12) auch zusätzliche Moden jenseits von  $k_{\text{min}} \leq k \leq k_{\text{max}}$  zur Paarerzeugung bei. Ihr Beitrag wird zunächst umso größer, je kleiner  $t_r$  und damit umso kleiner die Ein- und Ausschaltzeit  $t_{\text{ramp}}^{\text{eff}}$  wird. Dieses Verhalten ist in den Abbn. (4.5) bis (4.6) anhand der für kleine  $m_e t_r \lesssim 50$  stark wachsenden und oszillierenden Residualteilchendichte  $f(\mathbf{p}, t_\infty)$  zu erkennen.

<sup>11</sup>Ganz im Gegensatz zum Resonanzfall in Abb. (4.6).

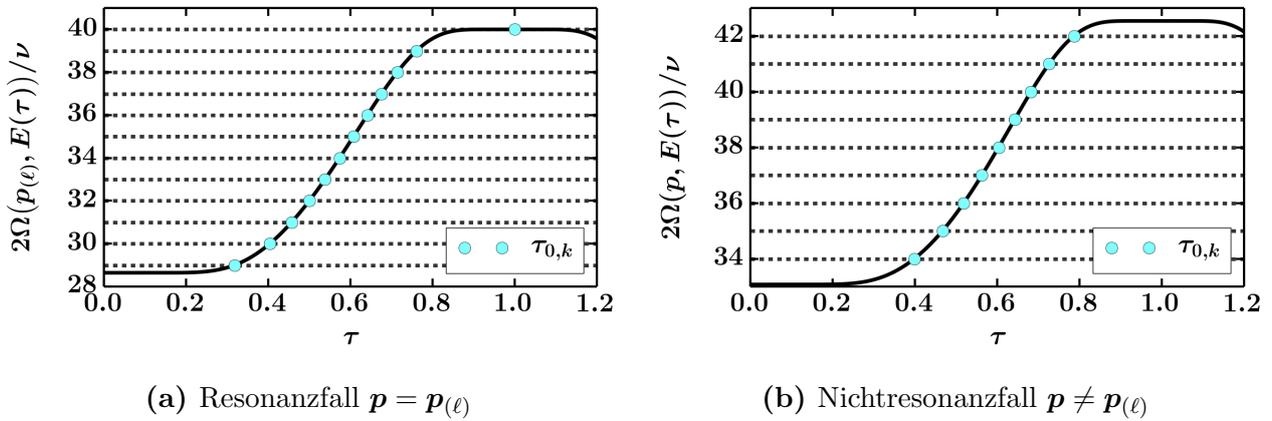
(a)  $n = 1$ (b)  $n = 2$ (c)  $n = 5$ 

**Abbildung 4.5:** Darstellung der Residualdichte  $f(\mathbf{p}_{(\ell)}, t_{\infty})$  in Abhängigkeit vom Zeitskalenparameter  $t_r$  für das (Super-)Gauß-Profil (3.15) und unterschiedliche Exponenten  $n$  im Resonanzfall  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$  mit  $p_{\parallel,(\ell)}/m_e = 0$  und  $p_{\perp,(\ell)} \approx 0.07m_e$ . Die graue und durchgängig unterlegte Kurve ergibt sich aus der numerischen Integration von Gl. (4.2). Die rote gestrichelte Linie kennzeichnet das Resultat der Stationäre-Phasen-Näherung (SPN). Links: komplett, siehe Gl. (4.70). Rechts: in führender Ordnung, siehe Gl. (4.71). Die durchgängig und dunkelblau gezeichneten Kurven ergeben sich in nullter Ordnung in  $n^{-1}$  aus Gl. (4.74). Feldparameter wie in Gl. (4.75) angegeben. Aus Bedingung (4.36) folgt  $\ell = k_{\max} = 40$  und  $k_{\min} = 29$ .



**Abbildung 4.6:** Darstellung der Residualdichte  $f(\mathbf{p}_{(\ell)}, t_\infty)$  in Abhängigkeit vom Zeitskalenparameter  $t_r$  für das (Super-)Gauß-Profil (3.15) und unterschiedliche Exponenten  $n$  im Nichtresonanzfall  $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_{(\ell)}$  mit  $p_{\parallel} = 0.5m_e$  und  $p_{\perp} = 0.3m_e$ . Die graue und durchgängig unterlegte Kurve ergibt sich aus der numerischen Integration von Gl. (4.2). Die rote gestrichelte Linie kennzeichnet das Resultat der Stationäre-Phasen-Näherung (SPN) aus Gl. (4.68). Links: komplett. Rechts: unter Vernachlässigung der Oszillationsbeiträge in Gl. (4.67), d.h. für  $\kappa_k(\tau_{0,k}) = 0$ . Feldparameter wie in Gl. (4.75) angegeben. Aus Bedingung (4.36) folgt  $k_{\max} = 42$  und  $k_{\min} = 34$ .

### 4.2.4 Verhalten der Residualdichte im Flat-Top-Profil



**Abbildung 4.7:** Darstellung der Bedingung (4.36) zur Bestimmung der stationären Phasenpunkte  $\tau_{0,k}$  für das Flat-Top-Profil (3.27) und die Wahl  $\nu t_{\text{f.t.}} = 0$ . Feldparameter wie in Gl. (4.75) angegeben. Für den Resonanzfall mit  $p_{\parallel,(\ell)}/m_e = 0$  und  $p_{\perp,(\ell)} \approx 0.07m_e$  ergibt sich  $\ell = k_{\text{max}} = 40$  und  $k_{\text{min}} = 29$ . Für den Nichtresonanzfall mit  $p_{\parallel} = 0.5m_e$  und  $p_{\perp} = 0.3m_e$  folgt  $k_{\text{max}} = 42$  und  $k_{\text{min}} = 34$ .

Im Folgenden wird die Näherung für die Residualteilchendichte  $f(\mathbf{p}, t_{\infty})$ , zu entnehmen aus den Gln. (4.54) bis (4.62), exemplarisch für das Flat-Top-Profil aus Unterabschnitt 3.4 ausgewertet. Entsprechend gilt für die Einschaltzeit  $\tau_i = 0$  und für die Ausschaltzeit  $\tau_f = \tau_{\text{pulse}}$  mit  $\tau_{\text{pulse}} = 2 + \tau_{\text{f.t.}}$ . Zunächst wird gezeigt, dass sich die Auswertung des allgemeinen Falls mit beliebigem Flat-Top-Intervall  $\tau_{\text{f.t.}}$  wesentlich reduzieren lässt auf den Fall  $\tau_{\text{f.t.}} = 0$ . Da nach Definition für das Intervall  $1 \leq \tau \leq 1 + \tau_{\text{f.t.}}$  die Einhüllende  $K(\tau) = 1$  und damit konstant ist, folgt für diesen Bereich bis auf einen zusätzlichen Phasenfaktor der Beitrag des abrupten Ein- und Ausschaltvorgangs aus Gl. (4.3), der sich dann für beliebige Zeiten  $\tau_{\text{f.t.}}$  einfach dazu addieren lässt. Um dies zu sehen, spaltet man das erste Integral aus Gl. (4.32) in die beiden Intervalle

$$\int_0^{\frac{\tau_{\text{pulse}}}{2}} d\tau = \int_0^1 d\tau + \int_1^{\frac{\tau_{\text{f.t.}}}{2}} d\tau \quad (4.77)$$

auf.<sup>12</sup> Für  $J_k^A(\mathbf{p}, \tau_f)$  ergibt sich das Flat-Top-Integral nach der Substitution  $\tau' = \tau - 1$  als

$$\begin{aligned} eE_0 A_k(\mathbf{p}, E_0) \int_0^{\frac{\tau_{\text{f.t.}}}{2}} d\tau' \cos\left(t_{\text{ramp}} [2\Omega(\mathbf{p}, E_0) - k\nu] \left[\tau' - \frac{\tau_{\text{f.t.}}}{2}\right]\right) \\ = \frac{eE_0 A_k(\mathbf{p}, E_0)}{(2\Omega(\mathbf{p}, E_0) - k\nu) t_{\text{ramp}}} \sin\left([2\Omega(\mathbf{p}, E_0) - k\nu] \frac{t_{\text{f.t.}}}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.78)$$

Das ist das gleiche Ergebnis wie für den abrupten Ein- und Ausschaltvorgang, siehe Gl. (4.35). Da im Nichtresonanzfall  $k \neq \ell$  der Flat-Top-Term (4.78) mit  $t_{\text{ramp}}^{-1}$  skaliert, wird auch er

<sup>12</sup>Im Flat-Top-Bereich liefert das im Vergleich zu  $J_k^A(\mathbf{p}, t_{\text{ramp}})$  um den Faktor  $\nu t_r$  unterdrückte Integral  $J_k^B(\mathbf{p}, t_{\text{ramp}})$  keinen Beitrag, da die Ableitung der Feldamplitude  $E'(\tau)$  für alle Zeiten verschwindet.

gegenüber dem Einschalt-Term analog zu Gl. (4.51) konsequenterweise vernachlässigt.<sup>13</sup> Nur für den Resonanzfall  $k = \ell$  berücksichtigt man den zusätzlichen Beitrag

$$J_\ell^A(\mathbf{p}(\ell), t_{\text{ramp}}) \rightarrow J_\ell^A(\mathbf{p}(\ell), t_{\text{ramp}}) - iF_\ell(\mathbf{p}(\ell), E_0) \frac{t_{\text{f.t.}}}{2t_{\text{ramp}}} \quad (4.79)$$

gegenüber dem Fall  $t_{\text{f.t.}} = 0$ . Das Einschalt-Integral von 0 bis 1 kann dann wie in Unterabschnitt 4.2.2 über die Stationäre-Phasen-Näherung ausgewertet werden. Dabei führt der Flat-Top-Parameter  $\tau_{\text{f.t.}}$  zu weiteren Phasenverschiebungen. Die modenabhängige Frequenz aus Gl. (4.33) ist für die Wahl  $\tau_{\text{f.t.}} = 0$  durch

$$\kappa_k(\tau_{0,k}) = -2 \int_{\tau_{0,k}}^1 d\tau \Omega(\mathbf{p}, E(\tau)) + k\nu(1 - \tau_{0,k}) \quad (4.80)$$

gegeben und wird für den Fall  $\tau_{\text{f.t.}} \neq 0$  verschoben um

$$\kappa_k(\tau_{0,k}) \rightarrow \kappa_k(\tau_{0,k}) + (k\nu - 2\Omega(\mathbf{p}, E_0)) \frac{\tau_{\text{f.t.}}}{2}. \quad (4.81)$$

Zu dem ergibt sich aus Gl. (4.31) für  $\tau_{\text{f.t.}} = 0$

$$m_e \tilde{\phi}_k(\mathbf{p}, 1) = 2 \int_0^1 d\tau \Omega(\mathbf{p}, E(\tau)) - k\nu. \quad (4.82)$$

Für allgemeine Zeiten  $\tau_{\text{f.t.}} \neq 0$  wird daraus

$$m_e \tilde{\phi}_k\left(\mathbf{p}, 1 + \frac{\tau_{\text{f.t.}}}{2}\right) = m_e \tilde{\phi}_k(\mathbf{p}, 1) + (2\Omega(\mathbf{p}, E_0) - k\nu) \frac{\tau_{\text{f.t.}}}{2}. \quad (4.83)$$

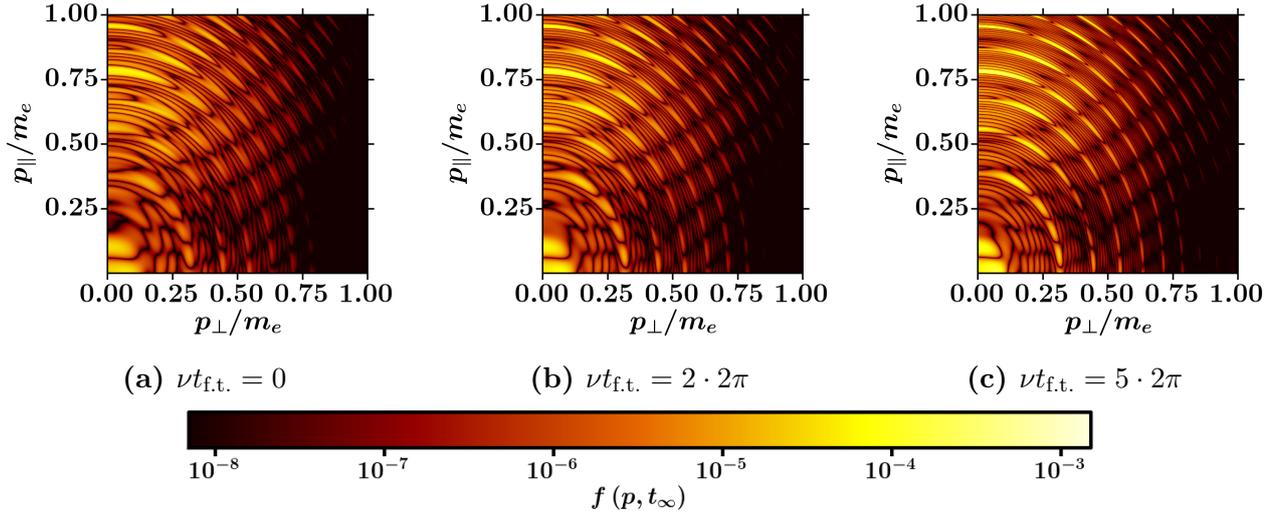
Aus Gl. (4.48) folgt damit für den Nichtresonanzfall  $k \neq \ell$

$$\begin{aligned} \Delta_k^A(\mathbf{p}, t_{\text{ramp}}, t_{\text{f.t.}}) &= eE_0 A_k(\mathbf{p}, E_{\tau_{0,k}}) \sqrt{\frac{\pi}{4E_0 \tilde{\Omega}'(\mathbf{p}, E_{\tau_{0,k}})}} \exp\left(-ik\nu \left[t_{\text{ramp}} + \frac{t_{\text{f.t.}}}{2}\right]\right) \\ &\times \left\{ \cos\left(\kappa_k(\tau_{0,k}) t_{\text{ramp}} + [k\nu - 2\Omega(\mathbf{p}, E_0)] \frac{t_{\text{f.t.}}}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - \sin\left(\kappa_k(\tau_{0,k}) t_{\text{ramp}} + [k\nu - 2\Omega(\mathbf{p}, E_0)] \frac{t_{\text{f.t.}}}{2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Da die stationären Phasenpunkte der Nichtresonanzmoden im Intervall  $0 \leq \tau_{0,k} < 1$  liegen, folgt nach den Gln. (3.27) und (3.29) außerdem

$$\begin{aligned} K(\tau_{0,k}) &= H(\tau_{0,k}), \\ K'(\tau_{0,k}) &= H'(\tau_{0,k}). \end{aligned} \quad (4.85)$$

<sup>13</sup>Dies entspricht der Vernachlässigung der Oszillationsbeiträge  $Y_{(\ell)}$  und  $Z_{(\ell)}$  aus Gl. (4.9), die auch in [27, 28] durchgeführt wird.



**Abbildung 4.8:** Darstellung der Residualdichte  $f(\mathbf{p}(\ell), t_\infty)$  im Impulsraum  $(p_\perp, p_\parallel)$  für das Flat-Top-Profil (3.27) und unterschiedliche Flat-Top-Zeiten  $t_{f.t.}$ . Für die Ein- und Ausschaltzeit wurde  $\nu t_{\text{ramp}} = 10 \cdot 2\pi$  und damit  $m_e t_{\text{ramp}} \approx 900$  gewählt. Die Darstellung folgt der vollständigen Lösung und ergibt sich aus der numerischen Integration von Gl. (2.42). Feldparameter wie in Gl. (4.75) angegeben.

Damit erhält man nach Gl. (4.54) für  $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}(\ell)$  als Näherung für die Residualteilchendichte

$$f(\mathbf{p}, t_\infty) \approx \frac{4}{m_e} \left| \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{H(\tau_{0,k})}{\sqrt{H'(\tau_{0,k})}} \Delta_k^A(\mathbf{p}, t_{\text{ramp}}, t_{f.t.}) \right|^2 t_{\text{ramp}} \quad (4.86)$$

und damit eine lineare Abhängigkeit von der Ein- bzw. Ausschaltzeit  $t_{\text{ramp}}$ . Insbesondere führen steigende Flat-Top-Zeiten  $t_{f.t.}$  in diesem Fall unter Berücksichtigung von Gl. (4.84) zu keinem kontinuierlichen Anstieg der Paarproduktion.

Für den Resonanzfall  $k = \ell$  ist die erste nicht verschwindende Ordnung asymptotisch. Man muss also in Gl. (4.48) den Grenzfall  $n_\ell \rightarrow \infty$  betrachten und erhält nach Gl. (4.29)

$$\Delta_\ell^A(\mathbf{p}(\ell), t_{\text{ramp}}, t_{f.t.}) = -iF_\ell(\mathbf{p}(\ell), E_0) \exp\left(-ik\nu \left[t_{\text{ramp}} + \frac{t_{f.t.}}{2}\right]\right). \quad (4.87)$$

Zur Bestimmung des Beitrages der ersten nicht verschwindende Ableitung  $K^{[\infty]}(\tau_{0,\ell})$  nähert man die Ein- und Ausschaltfunktion für den Fall  $\tau_{f.t.} = 0$  am Punkt  $\tau_{0,\ell} = 1$  mit einem Super-Gauß-Profil der Form

$$K(\tau) \approx \lim_{n_\ell \rightarrow \infty} e^{-\left(\frac{\tau-1}{\sigma}\right)^{(n_\ell-1)}} \quad (4.88)$$

unter Verwendung der Definition für die effektive Flat-Top-Zeit  $t_{f.t.}^{\text{ramp}} = 2\sigma t_{\text{ramp}}$  aus Gl. (3.31).

Dann ist  $K^{[\infty]}(\tau_{0,\ell} = 1) \approx \lim_{n_\ell \rightarrow \infty} (n_\ell - 1)! / \sigma^{(n_\ell - 1)}$  und man erhält näherungsweise

$$\lim_{n_\ell \rightarrow \infty} \left( \frac{n_\ell!}{|K^{[n_\ell - 1]}(\tau_{0,\ell})| m_e} \right)^{1/n_\ell} \approx \sigma. \quad (4.89)$$

Dies kann nur als eine asymptotische Näherung für  $m_e t_{\text{ramp}} \rightarrow \infty$  betrachtet werden, die jenseits des effektiven Flat-Top-Bereichs für  $\tau \leq 1 - \sigma$  keine gute Übereinstimmung mit dem tatsächlichen Verlauf der Einhüllenden  $K(\tau)$  zeigt. Insbesondere kann damit die Bedingung (4.22) nicht adäquat angewendet werden. Für Frequenzen im Multi-Photonen-Bereich mit  $m_e \gtrsim \nu$  bedarf es daher sehr vieler Oszillationen des periodischen Anteils  $h(\nu t)$  bis  $m_e t_r$  entsprechend groß ist und Gl. (4.89) eine gute Näherung darstellt. Insgesamt muss berücksichtigt werden, dass die Wahl von  $\sigma$ , ähnlich wie bei der Bestimmung des effektiven Flat-Top-Intervalls in der Gauß- und Super-Gauß-Konfiguration, durch die willkürliche Setzung von  $\eta_{\text{f.t.}} \ll 1$  eine gewisse Spannbreite zulässt. Diese ist insofern unbedeutend, als dass für dominante Flat-Top-Zeiten  $t_{\text{f.t.}} \gg 2\sigma t_{\text{ramp}}$ , wie im Folgenden zu sehen sein wird, das effektive Flat-Top-Intervall  $t_{\text{f.t.}}^{\text{ramp}}$  ohnehin vernachlässigt werden kann. Außerdem muss an dieser Stelle betont werden, dass die Beiträge der Nichtresonanzmoden unabhängig von der Wahl von  $\sigma$  sind und im Kontext der Stationäre-Phasen-Näherung korrekt ausgewertet werden können.

Damit ergibt sich insgesamt für den Resonanzfall  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$  aus Gl. (4.55) unter Berücksichtigung des zusätzlichen Flat-Top-Beitrages aus Gl. (4.79)

$$f(\mathbf{p}, t_\infty) \approx 2 \left| iF_\ell(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0) \left( \sigma + \frac{t_{\text{f.t.}}}{2t_{\text{ramp}}} \right) \exp \left( -i\ell\nu \left[ t_{\text{ramp}} + \frac{t_{\text{f.t.}}}{2} \right] \right) t_{\text{ramp}}^{1/2} - \sqrt{\frac{2}{m_e}} \sum_{k=k_{\text{min}}}^{\ell-1} \frac{H(\tau_{0,k})}{\sqrt{H'(\tau_{0,k})}} \Delta_k^A(\mathbf{p}, t_{\text{ramp}}, t_{\text{f.t.}}) \right|^2 t_{\text{ramp}}. \quad (4.90)$$

Wie nach Gl. (4.92) für den Grenzfall  $n_\ell \rightarrow \infty$  nicht anders zu erwarten, erhält man schließlich in führender Ordnung

$$f(\mathbf{p}, t_\infty) \approx \frac{1}{2} |F_\ell(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0)|^2 (t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}})^2 = \frac{1}{2} |F_\ell(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0)|^2 (2\sigma t_{\text{ramp}} + t_{\text{f.t.}})^2 \quad (4.91)$$

und damit eine quadratische Abhängigkeit der Residualteilchendichte  $f(\mathbf{p}, t_\infty)$  von der effektiven Flat-Top-Zeit  $t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}} = 2\sigma t_{\text{ramp}} + t_{\text{f.t.}}$ . Für  $t_{\text{f.t.}} \gg 2\sigma t_{\text{ramp}}$  ist der wesentliche Beitrag zur Residualteilchendichte über die Gleichung

$$f(\mathbf{p}, t_\infty) \approx \frac{1}{2} |F_\ell(\mathbf{p}_{(\ell)}, E_0)|^2 t_{\text{f.t.}}^2 \quad (4.92)$$

durch die reine Flat-Top-Zeit  $t_{\text{f.t.}}$  bestimmt. Das bestätigt die Behauptung aus [27]. Die Flat-Top-Zeit kann immer so groß gewählt werden, dass der Ein- und Ausschaltvorgang für die Paarproduktion keine maßgebliche Rolle spielt und das Verhalten der durch das Flat-Top-Profil

erzeugten Residualdichte in sehr guter Näherung durch den an sich physikalisch unrealistischen Fall des abrupten Ein- und Ausschaltens aus Abschnitt 3.2 beschrieben werden kann. Da  $\sigma$  in jedem Fall wesentlich kleiner als Eins ist, kann für die Abschätzung dominanter Flat-Top-Zeiten

$$t_{\text{f.t.}} \stackrel{!}{\geq} 2t_{\text{ramp}} \quad (4.93)$$

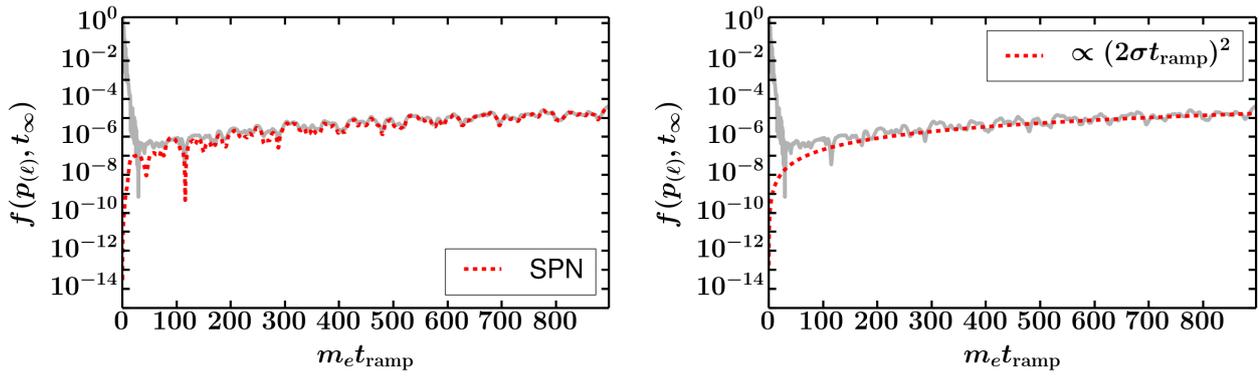
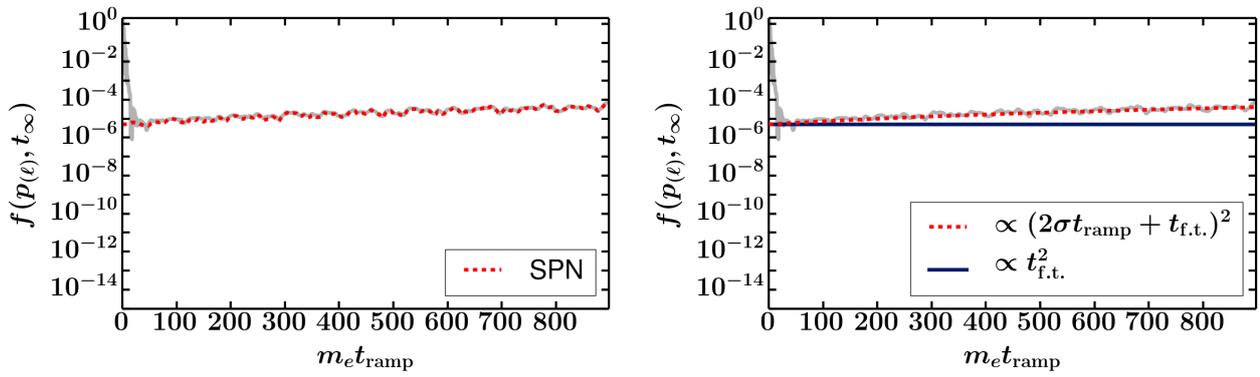
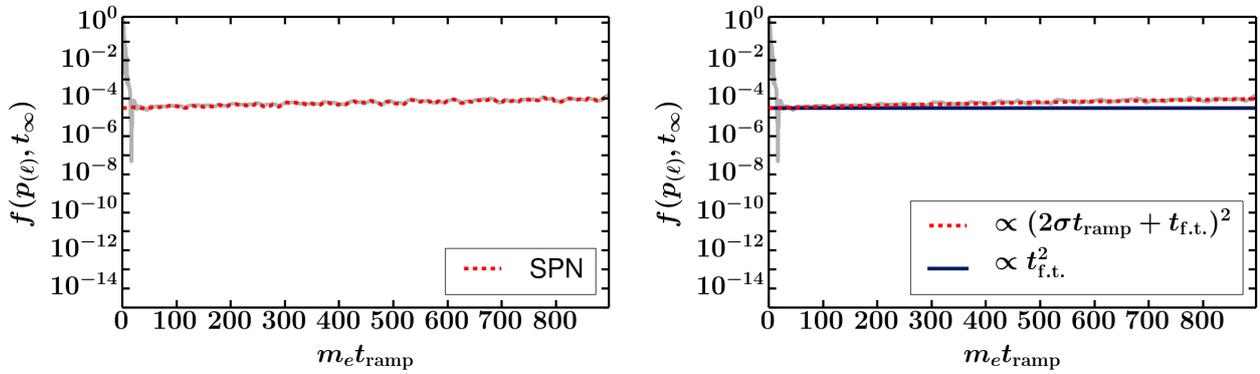
als obere Grenze angesetzt werden.

Zur Illustration der Ergebnisse wurden die Feldparameter in den Abbn. (4.7) bis (4.10) gemäß Gl. (4.75) festgelegt. In Abb. (4.7) ist für den Fall  $t_{\text{f.t.}} = 0$  die Bedingungsgleichung (4.36) zur Bestimmung der stationären Phasenpunkte für den Resonanzfall  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$  und den Nichtresonanzfall  $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_{(\ell)}$  dargestellt. Dabei sind die aktivierten Moden  $k_{\min} \leq k \leq k_{\max}$  identisch zum Gauß- bzw. Super-Gauß-Profil, wie der Vergleich mit den Abbn. (4.1) und (4.2) zeigt. Allerdings unterscheidet sich die Lage der stationären Phasenpunkte  $\tau_{0,k}$  auf der Zeitachse und ihr Beitrag über die entsprechende Ableitung der Ein- und Ausschaltfunktion  $K^{[n_k-1]}(\tau_{0,k})$ . Im Resonanzfall für  $\ell = k_{\max} = 40$  liegt der stationäre Phasenpunkt auf dem Maximum der Einhüllenden bei  $\tau_{0,\ell} = 1$ . Damit ist die Residualdichte näherungsweise durch Gl. (4.90) bestimmt und wächst für  $t_{\text{f.t.}} = 0$  in führender Ordnung gemäß Gl. (4.91) quadratisch mit der Ein- und Ausschaltzeit  $t_{\text{ramp}}$ . Für den Nichtresonanzfall gilt für alle stationären Phasenpunkte  $\tau_{0,k} \neq 1$  und somit nach Gl. (4.86) lediglich eine lineare Abhängigkeit von  $f(\mathbf{p}, t_{\infty})$  in Bezug auf  $t_{\text{ramp}}$ . Dennoch ist für den Fall  $t_{\text{f.t.}} = 0$  die „Akkumulationsschalenstruktur“ im Flat-Top-Profil etwas stärker ausgeprägt als zum Beispiel im Gauß-Profil, wo der Beitrag der resonanten  $\ell$ -Mode gemäß  $t_r^{4/3}$  skaliert und sich damit vom linearen Nichtresonanzverhalten kaum unterscheidet. Dies zeigt der Vergleich von Abb. (4.8), wo die Residualteilchendichte im Impulsraum  $(p_{\perp}, p_{\parallel})$  für  $\nu t_{\text{ramp}} = 10 \cdot 2\pi$  und unterschiedliche Flat-Top-Zeiten  $t_{\text{f.t.}}$  dargestellt ist, mit der analogen Abb. (4.4) für das (Super-)Gauß-Profil. Allerdings heben sich auch im Flat-Top-Profil die nichtresonanten Bereiche  $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_{(\ell)}$  erst für Flat-Top-Zeiten  $t_{\text{f.t.}} \neq 0$  stärker von den nichtresonanten Bereichen ab. Während der Beitrag der Nichtresonanzmoden weiterhin lediglich linear zu  $t_{\text{ramp}}$  anwächst, steigen die Resonanzmoden quadratisch in Bezug auf das (effektive) Flat-Top-Intervall  $t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}} = 2\sigma t_{\text{ramp}} + t_{\text{f.t.}}$ . Mit der Wahl  $\eta_{\text{f.t.}} = 1.5 \cdot 10^{-2}$  folgt  $\sigma \approx 0.185$ . Dann ergibt sich für die Abschätzung der Gültigkeit von Gl. (4.92):  $t_{\text{f.t.}} \gg 0.37t_{\text{ramp}}$ , und für die Wahl  $\nu t_{\text{ramp}} = 10 \cdot 2\pi$  folgt entsprechend  $\nu t_{\text{f.t.}} \gg 3.7 \cdot 2\pi$ . Nach [27] wird in Abschnitt (5.1) gezeigt, dass für dominante Flat-Top-Zeiten die Halbwertsbreite (FWHM) der Schalen mit  $1/t_{\text{f.t.}}$  skaliert. Je größer die Flat-Top-Zeit gewählt wird, umso schmaler werden die Resonanzschalen bei  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$ .

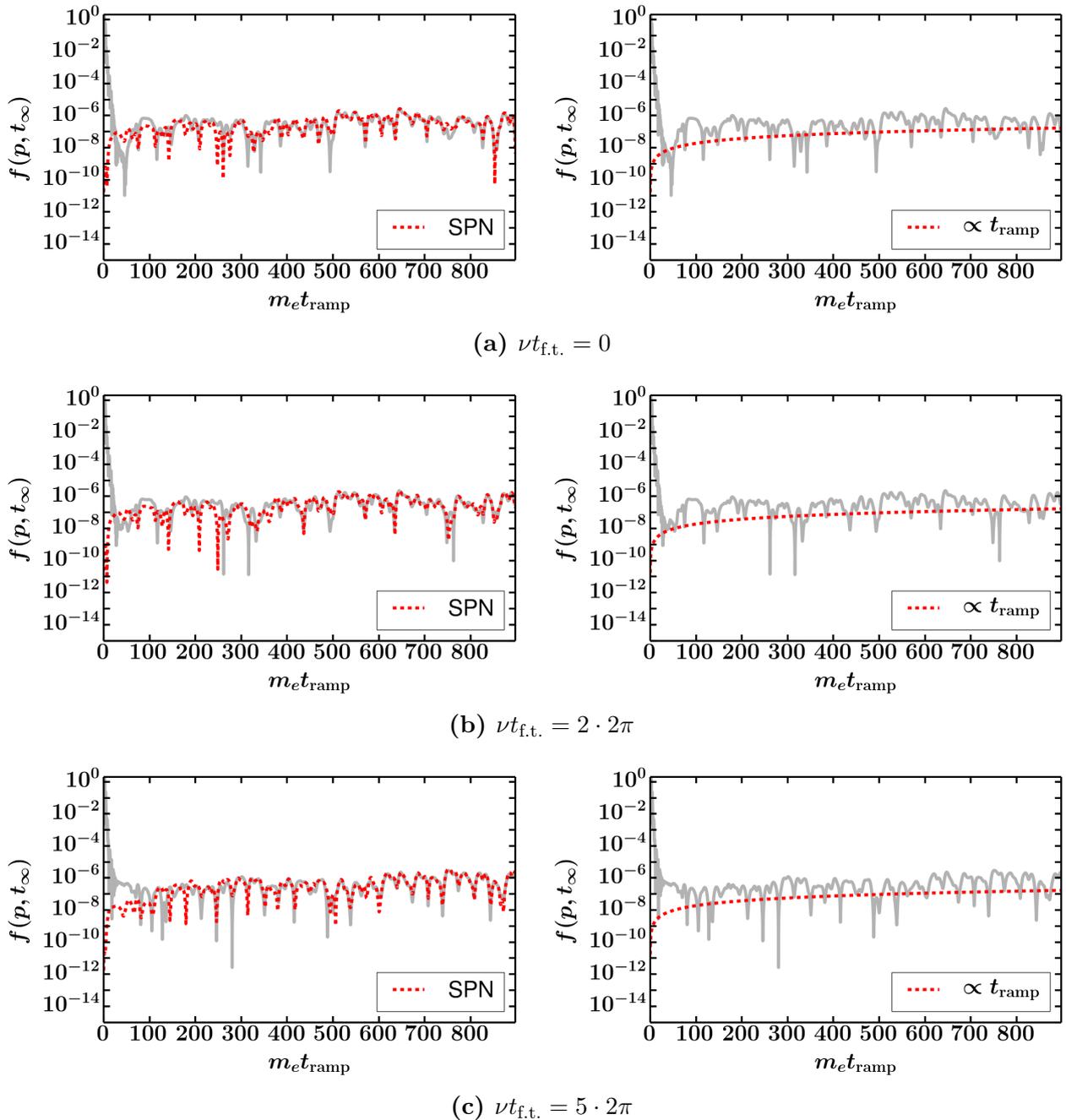
In den Abbn. (4.9) und (4.10) ist die Stationäre-Phasen-Näherung der Gln. (4.86) bis (4.92) für die Parameterwahl aus Gl. (4.75) in Abhängigkeit von der Ein- und Ausschaltzeit  $t_{\text{ramp}}$  und für unterschiedliche Flat-Top-Zeiten  $t_{\text{f.t.}}$  dargestellt. In Analogie zum vorherigen Unterabschnitt 4.2.3 ist in der Abb. (4.9) der Resonanzfall  $p_{\parallel,(\ell)}/m_e = 0.0$  und  $p_{\perp,(\ell)} = 0.07m_e$  und in

Abb. (4.10) der Nichtresonanzfall  $p_{\parallel} = 0.5m_e$  und  $p_{\perp} = 0.03m_e$  festgehalten. Für das gewählte Intervall  $0 \leq t_{\text{ramp}} \leq 10 \cdot 2\pi$  zeigt sich in beiden Abbn., dass die Stationäre-Phasen-Näherung das Verhalten der Residualdichte, das durch numerische Integration von Gl. (4.1) und unter Ausnutzung von Gl. (4.10) erhalten wurde, für genügend große Parameter  $m_e t_r$  sehr gut beschreibt. Dies ist insbesondere für Flat-Top-Zeiten  $t_{\text{f.t.}} \neq 0$  in Abb. (4.9) der Fall und damit für stärker wachsende Teilchendichten.

Man erkennt, dass die Abhängigkeit von  $t_{\text{ramp}}$  im Resonanzfall für alle Zeiten  $t_{\text{f.t.}}$  aufgrund der Resonanzmode  $\ell$  wesentlich regelmäßiger verläuft als im Nichtresonanzfall. Das liegt an den Oszillationsbeiträgen der Koeffizienten  $\Delta_k^A(\mathbf{p}, t_{\text{ramp}}, t_{\text{f.t.}})$  aus Gl. (4.84), welche die lineare Abhängigkeit von  $t_{\text{ramp}}$  für  $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_{(\ell)}$  maßgeblich modifizieren. Eine Vergrößerung des Flat-Top-Bereiches führt dabei nur zu Phasenverschiebungen innerhalb der Koeffizienten und zu keinem kontinuierlichen Anstieg der Residualteilchendichte. Daher kann, wie bereits erwähnt, für die Flat-Top-Konfiguration das Flat-Top-Intervall stets so groß gewählt werden, dass der Ein- und Ausschaltvorgang vernachlässigt werden kann. Die Ein- und Ausschaltzeit  $t_{\text{ramp}}$  muss nur so groß sein, dass die Bedingungen (4.22) und (4.44) der Stationäre-Phasen-Näherung erfüllt sind. Sonst kann nicht ausgeschlossen werden, dass zusätzliche Modenbeiträge aus Gl. (4.26) das reguläre  $t_{\text{f.t.}}^2$ -Verhalten überdecken. Dies ist in den Abbn. (4.9) und (4.10) für  $m_e t_{\text{ramp}} \lesssim 50$  anhand der extrem steigenden und oszillierenden Residualteilchendichte zu erkennen.

(a)  $\nu t_{f.t.} = 0$ (b)  $\nu t_{f.t.} = 2 \cdot 2\pi$ (c)  $\nu t_{f.t.} = 2 \cdot 5\pi$ 

**Abbildung 4.9:** Darstellung der Residualdichte  $f(\mathbf{p}_{(\ell)}, t_\infty)$  in Abhängigkeit von der Ein- bzw. Ausschaltdauer  $t_{\text{ramp}}$  für das Flat-Top-Profil (3.27) und unterschiedliche Flat-Top-Zeiten  $t_{f.t.}$  im Resonanzfall  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$  mit  $p_{\parallel,(\ell)}/m_e = 0$  und  $p_{\perp,(\ell)} \approx 0.07m_e$ . Die graue und durchgängig unterlegte Kurve ergibt sich aus der numerischen Integration von Gl. (4.2). Die rote gestrichelte Linie kennzeichnet das Resultat der Stationäre-Phasen-Näherung (SPN). Links: komplett, siehe Gl. (4.90). Rechts: in führender Ordnung, siehe Gl. (4.91). Die durchgängig und dunkelblau gezeichneten Kurven ergeben sich in nullter Ordnung in  $n^{-1}$  aus Gl. (4.92). Feldparameter wie in Gl. (4.75) angegeben. Aus Bedingung (4.36) folgt  $\ell = k_{\text{max}} = 40$  und  $k_{\text{min}} = 29$ .



**Abbildung 4.10:** Darstellung der Residualdichte  $f(\mathbf{p}_{(\ell)}, t_\infty)$  in Abhängigkeit von der Ein- bzw. Ausschaltdauer  $t_{\text{ramp}}$  für das Flat-Top-Profil (3.27) und unterschiedliche Flat-Top-Zeiten  $t_{f.t.}$  im Nichtresonanzfall  $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_{(\ell)}$  mit  $p_{\parallel} = 0.5m_e$  und  $p_{\perp} = 0.3m_e$ . Die graue und durchgängig unterlegte Kurve ergibt sich aus der numerischen Integration von Gl. (4.2). Die rote gestrichelte Linie kennzeichnet das Resultat der Stationäre-Phasen-Näherung (SPN) aus Gl. (4.86). Links: komplett. Rechts: unter Vernachlässigung der Oszillationsbeiträge in Gl. (4.84), d.h. für  $\kappa_k(\tau_{0,k}) = 0$  und  $\exp(-ik\nu[t_{\text{ramp}} + t_{f.t.}/2]) = 1$ . Feldparameter wie in Gl. (4.75) angegeben. Aus Bedingung (4.36) folgt  $k_{\text{max}} = 42$  und  $k_{\text{min}} = 34$ .

# 5 Der Einfluss der Ein- und Ausschaltfunktion auf die Residualdichte

## 5.1 Die Struktur der Residualdichte im Multi-Photonen- und Tunnel-Regime

Aus dem vorherigen Kapitel 4 ergibt sich, dass die Struktur der Residualteilchendichte  $f(\mathbf{p}, t_\infty)$  im Impulsraum in der Niederdichte-Näherung (4.1) maßgeblich durch die Resonanzbedingung (4.36) gegeben ist, die als Verallgemeinerung von Gl. (4.7) für nicht abrupte Ein- und Ausschaltvorgänge angesehen werden kann. Unter der Grundannahme  $f(\mathbf{p}, t_\infty) \ll 1$  gibt sie die Abhängigkeit der vollständigen Lösung aus Gl. (2.60) von den Feldparametern vermittelt über die Näherungslösungen (4.54) bis Gl. (4.62) sehr gut wieder. In der Parameterlandschaft rein zeitabhängiger elektrischer Felder, die in Abb. (1.2) dargestellt ist, entspricht dies dem „Calm-Valley“, in dem die Paarerzeugung stark unterdrückt ist. Die Gültigkeit der Niederdichte-Näherung zeigt der Vergleich mit den Resultaten, die sich aus der vollständigen quantenkinetischen Gleichung (2.60) bzw. für die Flat-Top-Konfiguration aus der äquivalenten Gleichung für die Bogoliubov-Koeffizienten 2.42 durch numerische Integration ergeben. Dies wird die folgende Diskussion untermauern. Die Ergebnisse der Stationäre-Phasen-Näherung können herangezogen werden, um die Abhängigkeit der Paarerzeugung im Multi-Photonen- und im Tunnel-Regime von den Parametern der Ein- und Ausschaltfunktion adäquat zu beschreiben. Als Erstes wird das Multi-Photonen-Regime, d.h. der Grenzfall  $\gamma \gg 1$  betrachtet.<sup>1</sup> In Anhang B wird gezeigt, dass in diesem Fall

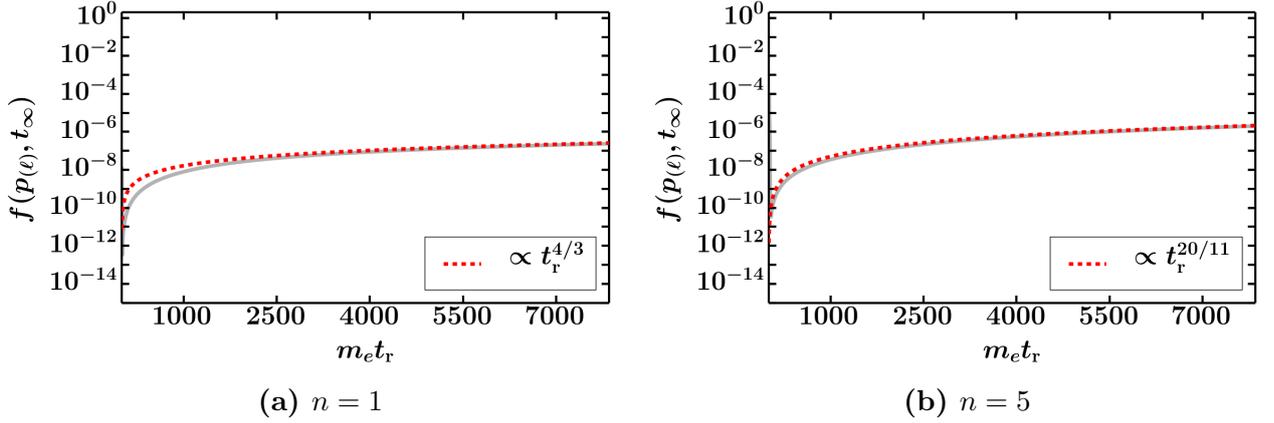
$$\Omega(\mathbf{p}, E(\tau)) \approx \Omega(\mathbf{p}, E(0)) = \epsilon(\mathbf{p}) \quad (5.1)$$

folgt. Aus Gl. (4.38) lässt sich schlussfolgern, dass die Bedingung (4.36) somit nur für

$$k_{\min} = k_{\max} = \ell = \frac{2}{\nu} \epsilon(\mathbf{p}(\ell)) \quad (5.2)$$

---

<sup>1</sup>Zur Definition des Keldysh-Parameters siehe Gl. (1.10).



**Abbildung 5.1:** Darstellung der Residualdichte  $f(\mathbf{p}_{(\ell)}, t_{\infty})$  in Abhängigkeit vom Zeitskalenparameter  $t_r$  für das (Super-)Gauß-Profil (3.15) und unterschiedliche Exponenten  $n = 1, 5$  im Resonanzfall  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$  mit  $p_{\parallel,(\ell)}/m_e = 0$  und  $p_{\perp,(\ell)} \approx 0.75m_e$ . Die graue und durchgängig unterlegte Kurve ergibt sich aus der numerischen Integration von Gl. (4.2). Die rote gestrichelte Linie kennzeichnet das Resultat der Stationäre-Phasen-Näherung (SPN) aus Gl. (4.70). Die gewählten Feldparameter sind  $E_0 = 0.05E_c$  und  $\nu = 0.5m_e$  mit  $E_{0,2}/E_c = E_{0,3}/E_c = 0$ . Aus Bedingung (4.36) bzw. näherungsweise aus Gl. (5.2) folgt  $\ell = k_{\max} = k_{\min} = 5$ .

erfüllt werden kann. Insbesondere ergibt sich für den Nichtresonanzfall  $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_{(\ell)}$  gemäß Gl. (4.54) kein Beitrag linear zum Zeitskalenparameter  $t_r$ . Die Moden  $k \neq \ell$  sind stark unterdrückt und Beiträge zur Residualteilchendichte  $f(\mathbf{p}, t_{\infty})$  maßgeblich durch die Resonanzmoden  $\ell \geq \lceil \frac{2m_e}{\nu} \rceil$  gemäß Gl. (4.56) gegeben. Dieses Verhalten ist exemplarisch für die Gauß- bzw. Super-Gauß-Konfiguration in Abb. (5.1) für den Resonanzfall  $p_{\parallel,(\ell)}/m_e = 0$  und  $p_{\perp,(\ell)} = 0.75m_e$  mit  $\gamma = 10$  dargestellt. Für das Gauß-Profil mit  $n = 1$  ergibt sich für die Residualdichte die charakteristische  $t_r^{4/3}$ -Abhängigkeit, während für  $n = 5$  eine Proportionalität zu  $t_r^{20/11}$  folgt. Die Bedingung (5.2) lässt sich nach  $\mathbf{p}_{(\ell)}$  umstellen, wodurch man

$$p_{(\ell)} = \sqrt{\left(\frac{\ell\nu}{2}\right)^2 - m_e^2} \quad (5.3)$$

erhält. Die Paarerzeugung wird, wie in Abschnitt 1.2 diskutiert, durch die Absorption von  $\ell$  virtuellen Feldphotonen der Energie  $\nu$  dominiert.<sup>2</sup> Im Impulsraum resultieren daraus ausgeprägte „Akkumulationsschalen“. <sup>3</sup> Wie in Abb. (5.2) für  $\gamma = 10$  und in Abb. (5.3) für  $\gamma = 7$  jeweils für den Schnitt  $p_{\parallel}/m_e = 0$  dargestellt, treten diese unabhängig von der konkreten Feldkonfiguration, insbesondere auch für das Gauß-Profil auf. Einzig die Höhe der Resonanzschalen wird durch die Ein- und Ausschaltfunktion modifiziert. Die Parameter der Einschaltvorgänge wurden so aufeinander abgestimmt, dass sich für das Super-Gauss-Profil im Grenzfall  $n \rightarrow \infty$  als effektives Flat-Top-Intervall mit  $t_{\text{t.}}^{\text{eff}} = 2t_r$  der gleiche Wert ergibt wie für den Flat-Top-

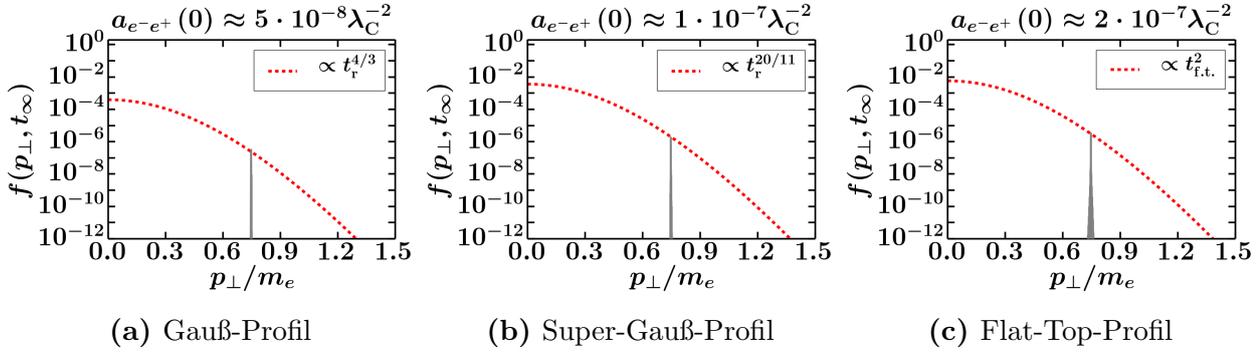
<sup>2</sup>Siehe insbesondere Gl. (1.11).

<sup>3</sup>Vgl. u.a. [26] und [15].

Parameter  $t_{f.t.}$  der Flat-Top-Konfiguration. Vergleicht man anhand dieser Wahl die über den Impuls  $p_{\perp}$  senkrecht zur Feldrichtung abintegrierte Teilchendichte  $a_{e^{-}e^{+}}(0)$  aus Gl. (2.57), so steigt die Anzahl erzeugter Paare pro Fläche mit zunehmendem (effektiven) Flat-Top-Intervall. Sie ist über den jeweiligen Darstellungen in den Abbn. (5.2) und (5.3) festgehalten. In Abb. (5.2) ist sie für das Flat-Top-Profil in etwa um den Faktor vier und in Abb. (5.3) in etwa um den Faktor fünf größer als für das Gauß-Profil.

Wesentlich komplexer ist die Impulsraumstruktur der Residualteilchendichte im Tunnel-Regime, d.h. für  $\gamma \leq 1$ . In Anhang B wird der Koeffizient  $\Omega(\tau, E(p))$  in Anlehnung an [27] für die Fälle  $\alpha_3 \leq \alpha_2 = 0$  und  $\alpha_3 \leq \alpha_2 \ll 1$  betrachtet. Dies schließt den Effekt der dynamisch assistierten Schwinger-Paarzeugung mit ein, der ausführlich in Abschnitt 1.3 dargestellt wird. Außerdem wird für die folgende Betrachtung für den periodischen Anteil  $h_1(\nu t) = \cos(\nu t)$  gewählt.

Davon ausgehend ergibt sich für die Grenzfälle  $p_{\parallel}/m_e \gg K(\tau)/\gamma$  oder  $p_{\parallel}/m_e \ll K(\tau)/\gamma$



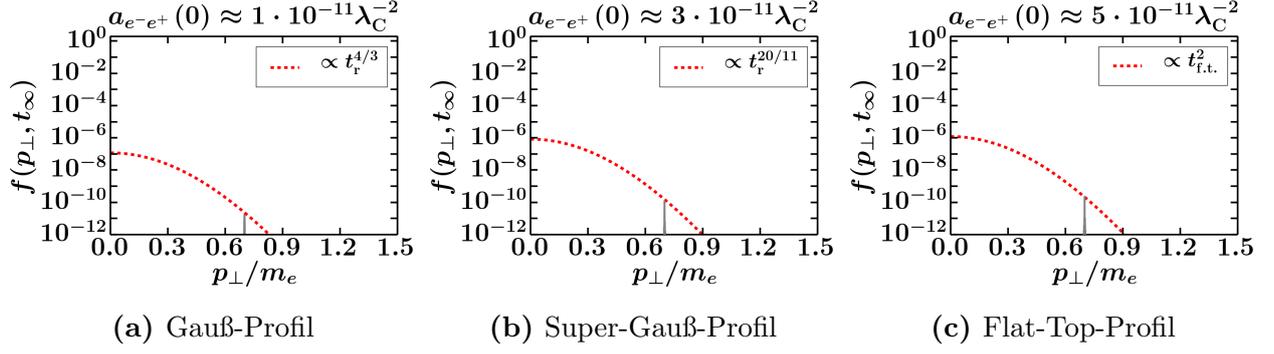
**Abbildung 5.2:** Darstellung der Residualteilchendichte  $f(p_{\perp}, t_{\infty})$  für den Schnitt  $p_{\parallel}/m_e = 0$  für unterschiedliche Feldkonfigurationen. Für das Gauß- ( $n = 1$ ) und Super-Gauß-Profil ( $n = 5$ ) wurde  $\nu t_r = 625 \cdot 2\pi$  gewählt. Für das Flat-Top-Profil gilt  $\nu t_{f.t.} = 1250 \cdot 2\pi$  mit  $\nu t_{\text{ramp}} = 125 \cdot 2\pi$ . Die Feldparameter sind  $E_0 = 0.05E_c$  und  $\nu = 0.5m_e$  mit  $E_{0,2}/E_c = E_{0,3}/E_c = 0$ . Dies entspricht der Paarerzeugung im Multi-Photonen-Regime. Die das Impulsspektrum einhüllende Funktion (rote gestrichelte Linie) folgt aus Gl. (5.16).

näherungsweise<sup>4</sup>

$$\Omega(\mathbf{p}, E(\tau)) = \Omega(\mathbf{p}, K(\tau)) \approx \frac{2m_e}{\pi} \sqrt{\tilde{\epsilon}(\mathbf{p})^2 + \left(\frac{K(\tau)}{\gamma}\right)^2} E_2\left(\frac{K(\tau)}{[\gamma\tilde{\epsilon}(\mathbf{p})]^2 + K(\tau)}\right) \quad (5.4)$$

mit der dimensionslosen Energie  $\tilde{\epsilon}(\mathbf{p}) = \epsilon(\mathbf{p})/m_e$ . Dabei bezeichnet  $E_2(x)$  das vollständige elliptische Integral der zweiten Art mit  $E_2(0) = \frac{\pi}{2} \leq E_2(x) \leq E_2(1) = 1$ . Daraus folgt unmit-

<sup>4</sup>Da die Paarerzeugung im Allgemeinen nur für kleine Impulse  $p_{\parallel}/m_e \lesssim 1$  effektiv stattfindet und hier der Grenzfall  $\gamma^{-1} \gg 1$  interessiert, ist die zweite Bedingung auf jeden Fall erfüllt. Für  $\gamma^{-1} \ll 1$  folgt außerdem das Ergebnis für das Multi-Photonen-Regime aus Gl. (5.3).



**Abbildung 5.3:** Darstellung der Residualteilchendichte  $f(p_{\perp}, t_{\infty})$  für den Schnitt  $p_{\parallel}/m_e = 0$  für unterschiedliche Feldkonfigurationen. Für das Gauß- ( $n = 1$ ) und Super-Gauß-Profil ( $n = 5$ ) wurde  $\nu t_r = 125 \cdot 2\pi$  gewählt. Für das Flat-Top-Profil gilt  $\nu t_{f.t.} = 250 \cdot 2\pi$  mit  $\nu t_{ramp} = 25 \cdot 2\pi$ . Die Feldparameter sind  $E_0 = 0.05E_c$  und  $\nu = 0.35m_e$  mit  $E_{0,2}/E_c = E_{0,3}/E_c = 0$ . Dies entspricht der Paarerzeugung im Multi-Photonen-Regime. Die das Impulsspektrum einhüllende Funktion (rote gestrichelte Linie) folgt aus Gl. (5.16).

telbar

$$\begin{aligned}
 k_{\min} &= \left\lceil \frac{2m_e}{\nu} \tilde{\epsilon}(\mathbf{p}) \right\rceil, \\
 k_{\max} &\approx \left\lfloor \frac{4m_e}{\pi\nu} \left( \sqrt{\tilde{\epsilon}(\mathbf{p})^2 + \gamma^{-2}} \right) E_2 \left( \frac{1}{[\gamma\tilde{\epsilon}(\mathbf{p})]^2 + 1} \right) \right\rfloor.
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Beispielsweise folgt für die Wahl in Abb. (5.4) und Abb. (5.5) mit  $\gamma = 0.1$  für  $p_{\parallel,(\ell)} = 0.0m_e$  und  $p_{\perp,(\ell)} \approx 0.3m_e$  mit  $k_{\min} = 105$  und  $\ell = k_{\max} = [650.99] \approx 651$  dasselbe Ergebnis, das man durch die numerische Integration des Koeffizienten  $\Omega(\mathbf{p}, E(\tau))$  erhält. Das Einsetzen von Gl. (5.4) in Gl. (4.36) liefert schließlich eine transzendente Gleichung zur Bestimmung der stationären Phasenraumpunkte  $\tau_{0,k}$  bzw. der entsprechenden Feldstärken  $E_{\tau_{0,k}}$ .

Um die Feldparameterabhängigkeit der Anzahl der durch den Ein- und Ausschaltvorgang angeregten Moden  $k_{\min} \leq k \leq k_{\max}$  zu ermitteln, bietet es sich an die Differenz

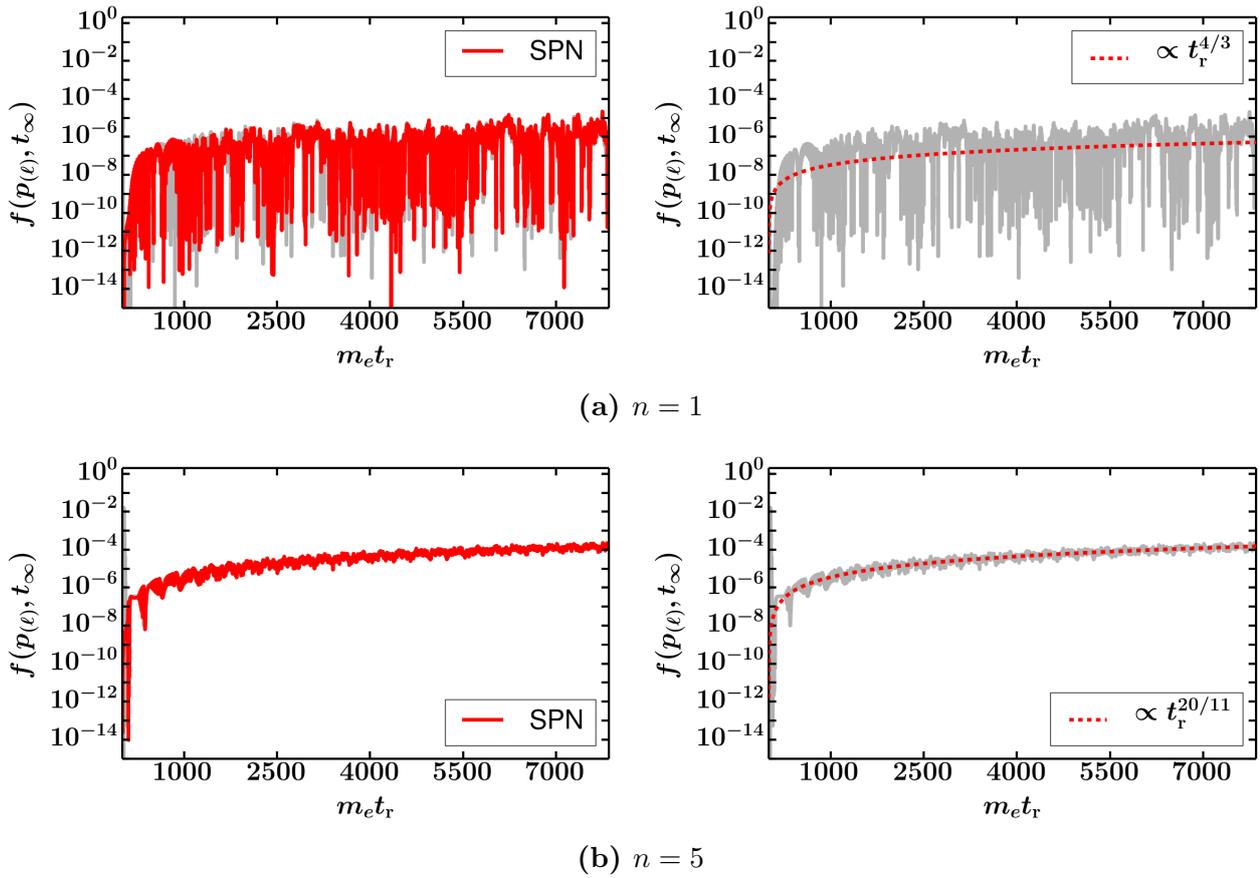
$$k_{\max} - k_{\min} \approx k_{\min} \left( \frac{2}{\pi} \left( \sqrt{1 + (\tilde{\epsilon}(\mathbf{p}) \gamma)^{-2}} \right) E_2 \left( \frac{1}{[\gamma\tilde{\epsilon}(\mathbf{p})]^2 + 1} \right) - 1 \right) \tag{5.6}$$

unter Vernachlässigung der Auf- bzw. Abrundungsfunktion zu betrachten. Da  $k_{\min} \propto m_e/\nu$  und  $\gamma^{-1} \propto (E_0 m_e)/\nu$  gilt, erhöht sich die Anzahl der beitragenden Moden mit abnehmender Frequenz  $\nu$  und/oder zunehmender Feldstärke  $E_0$ .<sup>5</sup> Für  $\gamma \rightarrow 0$  ergibt sich näherungsweise

$$k_{\max} - k_{\min} \approx \frac{4}{\pi} \frac{m_e}{\nu} \frac{1}{\gamma}. \tag{5.7}$$

Im Allgemeinen tragen daher im Tunnelregime für kleiner werdende Keldysh-Parameter  $\gamma$  immer mehr Nichtresonanzmoden  $k \neq \ell$  zur Residualteilchendichte  $f(\mathbf{p}, t_{\infty})$  bei. Ihr Beitrag ist

<sup>5</sup>Für  $\gamma \rightarrow \infty$  ergibt sich wieder der Grenzfall der Multi-Photonen-Absorption aus (5.2).

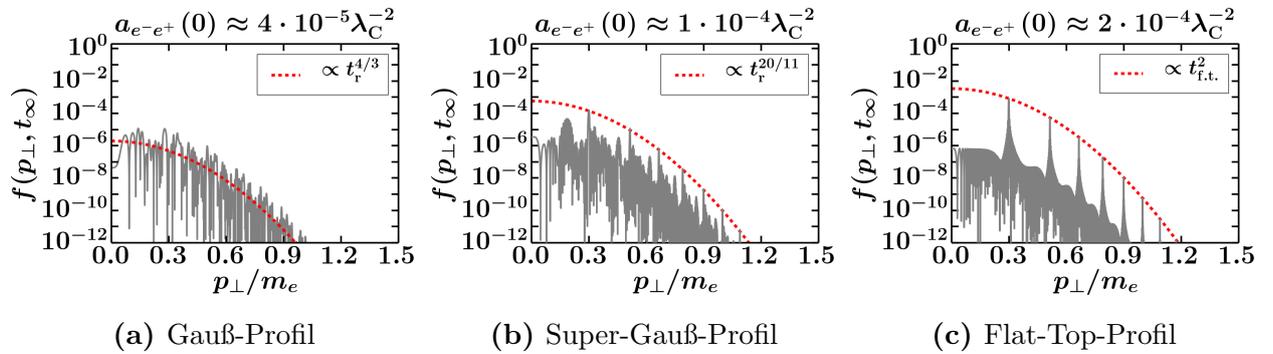


**Abbildung 5.4:** Darstellung der Residualdichte  $f(\mathbf{p}_{(\ell)}, t_{\infty})$  in Abhängigkeit vom Zeitskalenparameter  $t_r$  für das (Super-)Gauß-Profil (3.15) und unterschiedliche Exponenten  $n = 1, 5$  im Resonanzfall  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$  mit  $p_{\parallel,(\ell)}/m_e = 0$  und  $p_{\perp,(\ell)} \approx 0.3m_e$ . Die graue und durchgängig unterlegte Kurve ergibt sich aus der numerischen Integration von Gl. (4.2). Die rote und rechts gestrichelte Linie kennzeichnet das Resultat der Stationäre-Phasen-Näherung (SPN). Links: komplett, siehe Gl. (4.70). Rechts: in führender Ordnung, siehe Gl. (4.71). Die gewählten Feldparameter sind  $E_0 = 0.2E_c$  und  $\nu = 0.07m_e$  mit  $E_{0,2}/E_c = E_{0,3}/E_c = 0$ . Aus Bedingung (4.36) folgt  $\ell = k_{\max} = 651$  und  $k_{\min} = 105$ .

gegeben durch Gl. (4.54) für  $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_{(\ell)}$  und durch Gl. (4.56) für den Resonanzfall  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$  und verläuft in führender Ordnung unter Vernachlässigung der Oszillationsterme proportional zum Zeitskalenparameter  $t_r$ . Für Felder ohne ausgeprägtes Flat-Top-Intervall ergibt sich daraus ein zunehmend komplexes Verhalten der Residualdichte  $f(\mathbf{p}, t_{\infty})$  in Abhängigkeit von  $t_r$ . Das lässt sich anhand von Abb. (5.4) für den Fall des Gauß-Profiles ( $n = 1$ ) gut erkennen. Dort ist die Abhängigkeit der Residualteilchendichte von  $t_r$  für  $\gamma = 0.1$  für einen Resonanzfall  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$  dargestellt. Da sich im Gauß-Profil der Beitrag der Resonanzmode  $k = \ell$  nur unwesentlich von den anderen angeregten Nichtresonanzmoden unterscheidet, tragen die Oszillationsbeiträge der Koeffizienten  $\Delta_k^A(\mathbf{p}, t_r)$  aus Gl. (4.67) maßgeblich zur Teilchendichte bei. Für die in Abb. (5.4) getroffene Parameterwahl ergibt sich mit  $k_{\min} = 105 \leq k \leq \ell = k_{\max} = 651$  die Überlagerung von insgesamt 546 Oszillationstermen. Entsprechend kompliziert fällt die Abhängigkeit vom Skalenparameter  $t_r$  aus.

Für die Wahl  $n = 5$  erkennt man in Abb. 5.4 einen kontinuierlichen Anstieg der Residualteilchendichte proportional zu  $t_r^{20/11}$ . Für Felder mit ausgeprägtem (effektivem) Flat-Top-Intervall spielen die Nichtresonanzbeiträge für genügend große Zeiten  $t_{f.t.}^{\text{eff}} \gg t_{\text{ramp}}^{\text{eff}}$  eine vernachlässigbare Rolle. Die Resonanzmoden  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$  dominieren gemäß Gl. (4.62) das Verhalten der Residualteilchendichte im Phasenraum. Während die Nichtresonanzbeiträge bei  $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_{(\ell)}$  weiterhin in führender Ordnung linear zu  $t_r$  anwachsen, steigen die „Akkumulationsschalen“ bei  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$  für  $n_\ell \rightarrow \infty$  quadratisch in Bezug auf das Flat-Top-Intervall  $t_{f.t.}^{\text{eff}}$ .

Im Gegensatz zum Multi-Photonen-Regime treten damit für Einschaltvorgänge ohne ausgeprägten Flat-Top-Bereich mit  $n_\ell \approx 3$  keine scharfen Resonanzschalen bei  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$  auf.<sup>6</sup> Die Resonanzbeiträge heben sich kaum von den Nichtresonanzbeiträgen ab. Dieses Verhalten ist in Abb. (5.5) mit  $\gamma = 0.1$  und in Abb. (5.6) mit  $\gamma \approx 0.467$  für das Gauß-Profil und den Schnitt  $p_{\parallel}/m_e = 0$  dargestellt.



**Abbildung 5.5:** Darstellung der Residualteilchendichte  $f(p_{\perp}, t_{\infty})$  für den Schnitt  $p_{\parallel}/m_e = 0$  für unterschiedliche Feldkonfigurationen. Für das Gauß- ( $n = 1$ ) und Super-Gauß-Profil ( $n = 5$ ) wurde  $\nu t_r = 25 \cdot 2\pi$  gewählt. Für das Flat-Top-Profil gilt  $\nu t_{f.t.} = 50 \cdot 2\pi$  mit  $\nu t_{\text{ramp}} = 5 \cdot 2\pi$ . Die Feldparameter sind  $E_0 = 0.2E_c$  und  $\nu = 0.02m_e$  mit  $E_{0,2}/E_c = E_{0,3}/E_c = 0$ . Dies entspricht der Paarerzeugung im Tunnel-Regime. Die das Impulsspektrum einhüllende Funktion (rote gestrichelte Linie) folgt aus Gl. (5.16).

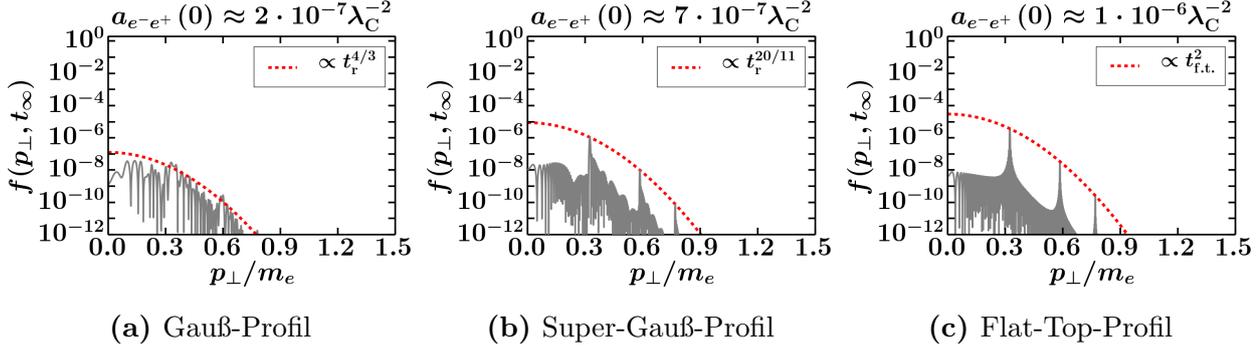
Für ein ausgeprägtes (effektives) Flat-Top-Intervall mit  $t_{f.t.}^{\text{eff}} \gg 2t_{\text{ramp}}^{\text{eff}}$  kann die Struktur der Teilchendichte damit in Analogie zu [27] und [28] näherungsweise durch

$$f(p, \varphi, t_{\infty}) \approx \frac{1}{2} \sum_{\ell \geq \ell_{\min}}^{\infty} F_{\ell}(p_{(\ell)}(\varphi), \varphi, E_0) (t_{f.t.}^{\text{eff}})^2 \mathcal{S} \left( \left[ p - p_{(\ell)}(\varphi) \right] \frac{d\Omega(p, E_0)}{dp} \Big|_{p=p_{(\ell)}(\varphi)} t_{f.t.}^{\text{eff}} \right) \quad (5.8)$$

charakterisiert werden.<sup>7</sup> Dabei bezeichnet  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$  den Winkel in der Impulsebene  $p^2 = p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2$  mit  $p_{\parallel} = p \sin(\varphi)$  und  $p_{\perp} = p \cos(\varphi) > 0$ . Das Impulsspektrum wird dominiert durch die „Akkumulationsschalen“ bei  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$ . Dies ist in den Abbn. (5.2), (5.3), (5.5), (5.6), (5.7) und (5.8) für das Flat-Top-Profil mit  $t_{f.t.} = 10 \cdot t_{\text{ramp}}$  festgehalten. Mit der unteren Grenze

<sup>6</sup>Dies ist vergleichbar mit den Bemerkungen und Abbildungen in [30]

<sup>7</sup>Die Abschätzung der Gültigkeitsbedingung folgt dabei den Überlegungen im Kontext von Gl. (4.93) aus dem Unterabschnitt 4.2.4.



**Abbildung 5.6:** Darstellung der Residualteilchendichte  $f(p_{\perp}, t_{\infty})$  für den Schnitt  $p_{\parallel}/m_e = 0$  für unterschiedliche Feldkonfigurationen. Für das Gauß- ( $n = 1$ ) und Super-Gauß-Profil ( $n = 5$ ) wurde  $\nu t_r = 25 \cdot 2\pi$  gewählt. Für das Flat-Top-Profil gilt  $\nu t_{f.t.} = 50 \cdot 2\pi$  mit  $\nu t_{\text{ramp}} = 5 \cdot 2\pi$ . Die Feldparameter sind  $E_0 = 0.15E_c$  und  $\nu = 0.07m_e$  mit  $E_{0,2}/E_c = E_{0,3}/E_c = 0$ . Dies entspricht der Paarerzeugung im Tunnel-Regime. Die das Impulsspektrum einhüllende Funktion (rote gestrichelte Linie) folgt aus Gl. (5.16).

$\ell_{\min} = [\Omega(0, E_0)]$  ergibt sich unter der Näherung aus Gl. (5.5)

$$\ell = \frac{4m}{\pi\nu} \left( \sqrt{\tilde{\epsilon}(\mathbf{p}(\ell))^2 + \gamma^{-2}} \right) E_2 \left( \frac{1}{[\gamma\tilde{\epsilon}(\mathbf{p}(\ell))]^2 + 1} \right) \geq \left[ \frac{4m}{\pi\nu} \left( \sqrt{1 + \gamma^{-2}} \right) E_2 \left( \frac{1}{\gamma^2 + 1} \right) \right]. \quad (5.9)$$

Mit der Funktion  $S(x) = \sin(x)^2/x^2$  folgt für die Halbwertsbreite (FWHM) um die Schale  $p = p(\ell)(\varphi)$  ein Verhalten

$$\text{FWHM} \propto \left( \frac{d\Omega(p, E_0)}{dp} \Big|_{\mathbf{p}=p_{\perp,(\ell)}(\varphi)} t_{f.t.}^{\text{eff}} \right)^{-1}. \quad (5.10)$$

Das heißt mit zunehmender (effektiver) Flat-Top-Dauer werden die Schalen immer schmaler. Für die Impulsraumstruktur der durch das Super-Gauß-Profil mit  $n = 5$  erzeugten Residualteilchendichte, festgehalten in den Abbn. (5.5) und (5.7), ergibt sich eine Art „Zwischenstruktur“ im Vergleich zur Gauß- und Flat-Top-Konfiguration. Wie in Abschnitt 3.3 und insbesondere in Abb. (3.3) zu erkennen, entspricht die effektive Ein- und Ausschaltzeit  $t_{\text{ramp}}^{\text{eff}}$  ungefähr der effektiven Flat-Top-Zeit  $t_{f.t.}^{\text{eff}}$ . Die Impulsraumstruktur weicht vom Verhalten in (5.8) ab. Die Resonanzschalen bei  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\ell)$  sind weniger stark ausgeprägt und steigen gemäß Gl. (4.71) nur mit  $t_r^{20/11}$ .

Vergleicht man in den Abbn. (5.5) und (5.6) die Anzahl der erzeugten Paare  $a_{e^-e^+}(0)$  pro Fläche, so ist diese für das Flat-Top-Profil in beiden Abbildungen um den Faktor fünf größer als für das Gauss-Profil. Auch im Tunnel-Regime zeigt sich, dass die Paarproduktion mit zunehmendem Flat-Top-Intervall größer wird.

## 5.2 Der Einfluss der Einhüllenden auf den dynamisch assistierten Schwinger-Effekt

Die bisherigen Ergebnisse aus diesem und dem vorherigen Abschnitt 4.1 konnten die Resultate aus [27] und [28] für Einschaltfunktionen mit (effektivem) Flat-Top-Intervall  $t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}}$  bestätigen. Die entscheidenden Größen, die Auskunft über die Größenordnung erzeugter Elektron-Positron-Paare geben, sind die Resonanzmoden  $F_\ell(\mathbf{p}, t, E_0)$  aus Gl. (4.6). Sie bestimmen für streng monotone Ein- und Ausschaltfunktionen  $K(t/t_r)$  auch noch die führende Ordnung bezüglich des Zeitskalenparameters  $t_r$ , wenn gar kein oder zumindest kein ausgeprägtes Flat-Top-Intervall vorhanden ist und die Residualteilchendichte von der quadratischen Abhängigkeit bezüglich  $t_r$  abweicht und der lineare Beitrag der Nichtresonanzmoden berücksichtigt werden muss. Dies soll im Folgenden für den bifrequenten Fall, d.h. für  $E_{0,3}/E_c = 0$  verdeutlicht werden. Dies führt zu einer sehr allgemeinen Aussage bezüglich der Abhängigkeit bzw. vielmehr Unabhängigkeit des nicht linearen Verstärkungseffektes im Zuge der dynamisch assistierten Schwinger-Paarzeugung in oszillierenden und bifrequenten Hintergrundfeldern. Im Anhang von [28] wird gezeigt, dass die resonanten Fourier-Koeffizienten näherungsweise durch

$$F_\ell(\mathbf{p}, E_0) \approx \frac{2i}{3}\nu \sum_l \text{Im} \left( \exp \left[ 2i \int_0^{t_l} dt' \omega(\mathbf{p}, \nu t', E_0) \right] \right) \quad (5.11)$$

gegeben sind. Dabei bezeichnen die Zeiten  $t_l$  die komplexen Nullstellen der Funktion  $\omega(\mathbf{p}, \nu t, E_0)$  aus Gl. 3.4 im Intervall  $0 \leq \text{Re}(t_l) \leq T/2$  und für  $\text{Im}(t_l) \geq 0$ . Für den Fall  $p_{\parallel}/m_e = 0$  und für  $N_2 = 4N + 1$  mit  $N \in \mathbb{N}$  erhält man den maßgeblichen Beitrag durch die Nullstelle  $t_0 = \pm T/4 + ix_0/\nu$ . Dabei folgt  $x_0$  aus der Bestimmungsgleichung

$$\sinh(x_0) + \alpha_2 \sinh(N_2 x_0) = \gamma \left( 1 + \frac{p_{\perp}^2}{m_e^2} \right)^{1/2}. \quad (5.12)$$

Das Einsetzen der dominanten Nullstelle  $t_0$  in Gl. (5.11) liefert schließlich die Näherung

$$|F_\ell(p_{\parallel} = 0, p_{\perp}, E_0)|^2 \approx \frac{2}{9}\nu^2 (1 - (-1)^\ell) \mathcal{E}(p_{\perp}). \quad (5.13)$$

mit der von der Resonanzmode  $\ell$  unabhängigen Funktion

$$\mathcal{E}(p_{\perp}) = \exp\left(-4 \frac{m_e}{\nu} G(p_{\perp})\right). \quad (5.14)$$

Man erkennt, dass dann für gerade  $\ell$  der Fourier-Koeffizient  $F_\ell(p_\parallel = 0, p_\perp, E_0)$  verschwindet und keinen Beitrag zur Paarerzeugung liefert. Die Funktion  $\mathcal{E}(p_\perp)$  hängt im Exponenten

$$G(p_\perp) = \int_0^{x_0} dx \sqrt{1 + \frac{p_\perp^2}{m_e^2} - \frac{1}{\gamma^2} (\sinh(x) + \alpha_2 \sinh(N_2 x))^2}, \quad (5.15)$$

von den entsprechenden Feldparametern  $\nu, \gamma, \alpha_2$  und  $N_2$  ab. Davon ausgehend lässt sich die in [28] eingeführte spektrale Einhüllfunktion verallgemeinern. Unter ausschließlicher Berücksichtigung der führenden Ordnung in  $t_r$ , d.h. unter Verwendung von Gl. (4.56), ergibt sich mit

$$\mathcal{W}(p_\perp, t_r, n_\ell) = \frac{4}{9} \nu^2 \mathcal{E}(p_\perp) m_e^{-2/n_\ell} \mathcal{K}(p_\perp, n_\ell) t_r^{2(1-\frac{1}{n_\ell})} \quad (5.16)$$

die das Impulsspektrum einhüllende Funktion für einen beliebigen bis zum Zeitpunkt  $\tau_{0,\ell} = (\tau_i + \tau_f)/2$  streng monoton steigenden Einschalt- und für  $\tau > \tau_{0,\ell}$  streng monoton fallenden Ausschaltvorgang. Sie besteht aus einem Faktor, der unabhängig ist von der konkreten Wahl der Einhüllenden  $K(\tau)$ :

$$\frac{4}{9} \nu^2 \mathcal{E}(p_\perp), \quad (5.17)$$

und einem geometrieabhängigen Term, der das konkrete Skalenverhalten in Abhängigkeit vom Zeitskalenparameter  $t_r$  bestimmt:

$$m_e^{-2/n_\ell} \mathcal{K}(p_\perp, n_\ell) t_r^{2(1-\frac{1}{n_\ell})} \quad (5.18)$$

mit

$$\mathcal{K}(p_\perp, n_\ell) = 2 \left( \frac{n_\ell!}{2 |K^{[n_\ell-1]}(\tau_{0,\ell})| E_0 \tilde{\Omega}'(p_\perp, E_0)} \right)^{2/n_\ell} \Gamma\left(\frac{n_\ell+1}{n_\ell}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{2n_\ell}\right)^2. \quad (5.19)$$

Dabei ist  $K^{[n_\ell-1]}(\tau_0)$  mit ungeradem  $n_\ell \in \mathbb{N}$  die erste nicht verschwindende Ableitung der Ein- und Ausschaltfunktion am Maximum zur Zeit  $\tau_{0,\ell}$ . Unter Berücksichtigung von Gl. (4.59) ergibt sich für den Grenzfall  $n_\ell \rightarrow \infty$

$$\mathcal{W}(p_\perp, t_r, n_\ell \rightarrow \infty) = \frac{2}{9} \nu^2 \mathcal{E}(p_\perp) (t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}})^2 \quad (5.20)$$

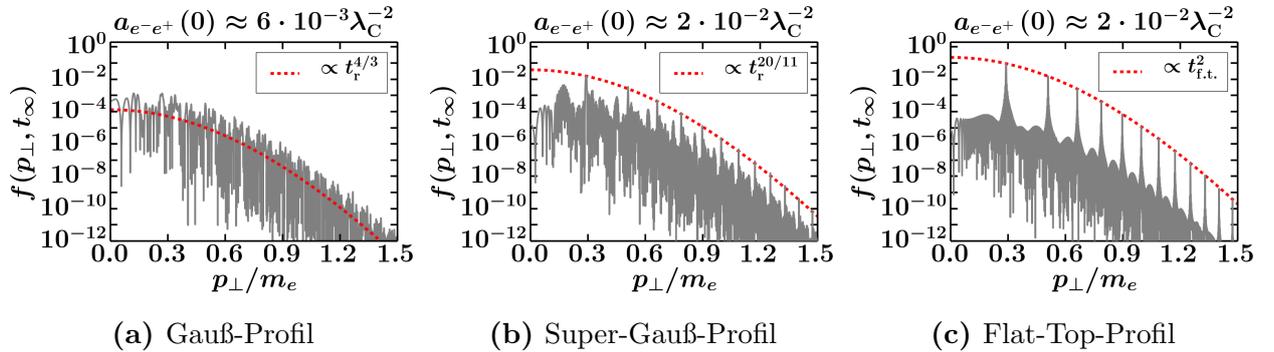
und damit das Ergebnis wie in [28]. Für das Gauß- bzw. Super-Gauß-Profil mit  $n_\ell = 2n + 1$  erhält man entsprechend

$$\mathcal{K}(p_\perp, n) = 2 \left( \frac{[2n+1]}{2E_0 \tilde{\Omega}'(p_\perp, E_0)} \right)^{2/(2n+1)} \Gamma\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{4n+2}\right)^2. \quad (5.21)$$

Für das einfache Gauß-Profil, d.h. für  $n = 1$  ergibt sich damit exemplarisch

$$\mathcal{W}_G(p_\perp, t_r, n = 1) = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \nu^2 \mathcal{E}(p_\perp) \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{2m_e E_0 \tilde{\Omega}'(p_\perp, E_0)}\right)^{2/3} t_r^{4/3}. \quad (5.22)$$

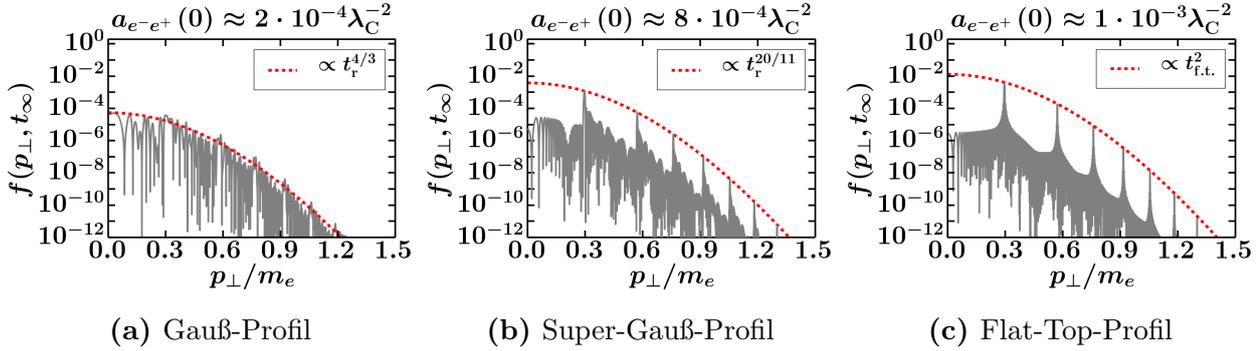
Dass Gl. (5.16) offenbar eine gute Näherung für die Einhüllende des Impulsspektrum der vollen Lösung aus Gl. (2.60) im entsprechenden Gültigkeitsbereich der Niederdichte-Näherung darstellt, lässt sich anhand der bereits diskutierten Abbn. (5.2) und (5.3) für das Multi-Photonen-Regime bzw. anhand der Abbn. (5.5) und (5.6) für das Tunnel-Regime erkennen. In diesen ist die das Impulsspektrum einhüllende Funktion aus Gl. (5.16) in Form der rot gestrichelten Kurve abgebildet. Die grau unterlegte Residualdichte folgt dabei aus der numerischen Integration von Gl. (2.60) für das Gauß- und Super-Gauß-Profil und von Gl. (2.42) für das Flat-Top-Profil. Man erkennt, dass die das Spektrum einhüllende Funktion mit steigender Ordnung  $n_\ell$  und damit mit größer werdendem (effektivem) Flat-Top-Intervall  $t_{\text{f.t.}}^{\text{eff}}$  gemäß Gl. (5.19) anwächst. Sie ist für das Gauß-Profil bei festgehaltener Parameterwahl immer am kleinsten und für das Flat-Top-Profil am größten. Da im Tunnelregime in Bezug auf das Gauß-Profil die Resonanzmoden nicht dominieren, ist für  $\gamma \leq 1$  durch Gl. (5.22) eine gute Näherung für das exakte Impulsspektrum bei  $p_\parallel/m_e = 0$  gegeben.



**Abbildung 5.7:** Darstellung der Residualteilchendichte  $f(p_\perp, t_\infty)$  für den Schnitt  $p_\parallel/m_e = 0$  für unterschiedliche Feldkonfigurationen. Für das Gauß- ( $n = 1$ ) und Super-Gauß-Profil ( $n = 5$ ) wurde  $\nu t_r = 25 \cdot 2\pi$  gewählt. Für die Flat-Top-Konfiguration  $\nu t_{\text{f.t.}} = 50 \cdot 2\pi$  mit  $\nu t_{\text{ramp}} = 5 \cdot 2\pi$ . Die Parameter für das bifrequente Feld, d.h. für  $E_{0,3}/E_c = 0$ , sind  $E_0 = 0.2E_c$  und  $\nu = 0.02m_e$  für das starke,  $E_{0,2} = 0.05E_c$  und  $\nu_2 = 0.5m_e$  für das schwache Feld. Dies entspricht der Überlagerung eines Feldes aus dem Tunnel-Regime (Abb. (5.5)) mit einem Feld aus dem Multi-Photonen-Regime (Abb. (5.2)). Die das Impulsspektrum einhüllende Funktion (rote gestrichelte Linie) folgt aus Gl. (5.16).

Davon ausgehend soll der Einfluss der Ein- und Ausschaltfunktion auf den dynamisch assistierten Schwinger-Effekt betrachtet werden. In den Abbn. (5.7) bis (5.8) ist jeweils die Überlagerung eines Feldes aus dem Tunnelregime mit einem Feld aus dem Multi-Photonen-Regime dargestellt. Dabei entspricht die Parameterwahl in Abb. (5.7) der Kombination der Felder aus den Abbn. (5.2) und (5.5), während Abb. (5.8) die Superposition der Felder aus

den Abbn. (5.2) und (5.5) umfasst. Betrachtet man die Anzahl erzeugter Paare  $a_{e^-e^+}(0)$  pro



**Abbildung 5.8:** Darstellung der Residualteilchendichte  $f(p_{\perp}, t_{\infty})$  für den Schnitt  $p_{\parallel}/m_e = 0$  für unterschiedliche Feldkonfigurationen. Für das Gauß- ( $n = 1$ ) und Super-Gauß-Profil ( $n = 5$ ) wurde  $\nu t_r = 25 \cdot 2\pi$  gewählt. Für die Flat-Top-Konfiguration  $\nu t_{t.t.} = 50 \cdot 2\pi$  mit  $\nu t_{\text{ramp}} = 5 \cdot 2\pi$ . Die Parameter für das bifrequente Feld, d.h. für  $E_{0,3}/E_c = 0$ , sind  $E_0 = 0.15E_c$  und  $\nu = 0.07m_e$  für das starke,  $E_{0,2} = 0.05E_c$  und  $\nu_2 = 0.35m_e$  für das schwache Feld. Dies entspricht der Überlagerung eines Feldes aus dem Tunnel-Regime (Abb. (5.6)) mit einem Feld aus dem Multi-Photonen-Regime (Abb. (5.3)). Die das Impulsspektrum einhüllende Funktion (rote gestrichelte Linie) folgt aus Gl. (5.16).

Fläche, so zeigt sich in beiden Fällen ein nichtlinearer Verstärkungseffekt, der die einfache Addition der Anzahldichten der einzelnen Felder um zwei bzw. drei Größenordnungen übersteigt. Dies ist in Abb. (5.9) zusammenfassend dargestellt. Dabei liegt der Verstärkungsfaktor für alle

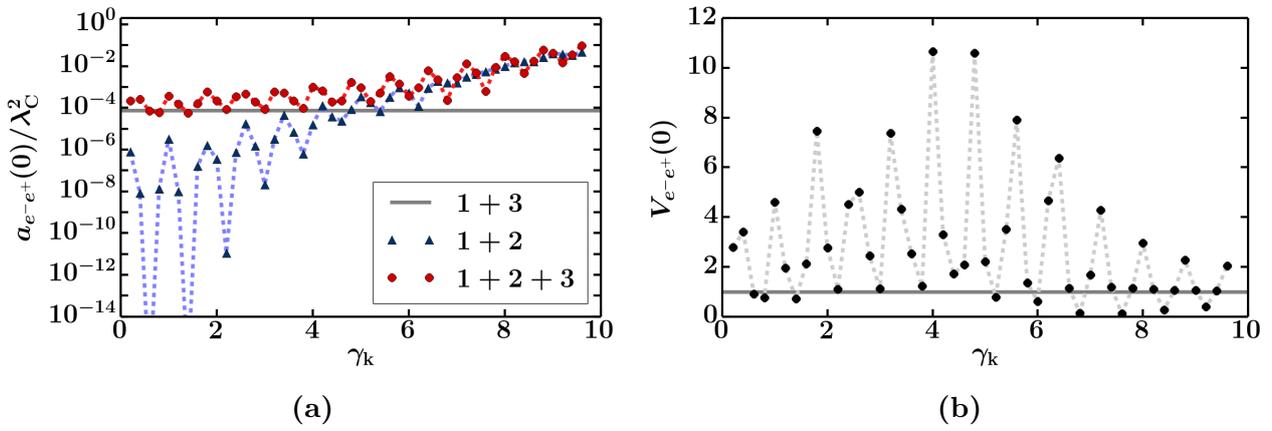
	$a_{e^-e^+}(0) / \lambda_c^2$			$a_{e^-e^+}(0) / \lambda_c^2$		
	Gauß	Super-Gauß	Flat-Top	Gauß	Super-Gauß	Flat-Top
1:	$4 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-6}$
2:	$5 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-11}$	$3 \cdot 10^{-11}$	$5 \cdot 10^{-11}$
1 + 2:	$6 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$

**Abbildung 5.9:** Auflistung der über den Impuls  $p_{\perp}$  abintegrierten Teilchendichte  $a_{e^-e^+}(0)$  aus Gl. (2.57) in Abhängigkeit verschiedener Feldparameter und Feldkonfigurationen. Für das Gauß- ( $n = 1$ ) und Super-Gauß-Profil ( $n = 5$ ) wurde jeweils  $\nu t_r = 125 \cdot 2\pi$  gewählt. Für das Flat-Top-Profil gilt jeweils  $\nu t_{t.t.} = 250 \cdot 2\pi$  mit  $\nu t_{\text{ramp}} = 25 \cdot 2\pi$ . Links: Feld 1 mit  $E_0 = 0.2E_c$ ,  $\nu = 0.02m_e$  und Feld 2 mit  $E_{0,2} = 0.05E_c$ ,  $\nu_2 = 0.5m_e$ . Rechts: Feld 1 mit  $E_0 = 0.15E_c$ ,  $\nu = 0.07m_e$  und Feld 2 mit  $E_{0,2} = 0.05E_c$ ,  $\nu_2 = 0.35m_e$ .

Konfigurationen in der gleichen Größenordnung. Nach den bisherigen Ergebnissen und den Resultaten aus [27] und [28] resultiert der dynamisch assistierte Schwinger-Effekt aus einer exponentiellen Verstärkung des Fourierkoeffizienten  $F_{\ell}(\mathbf{p}, E_0)$  und damit für  $N_2 = 4N + 1$  der Funktion  $\mathcal{E}(p_{\perp})$  gemäß Gl. (5.15). In Bezug auf die spektrale Einhüllfunktion aus Gl. (5.16) ist die Verstärkung damit maßgeblich durch den Faktor (5.17) bestimmt, der unabhängig ist von der konkreten Ein- und Ausschaltfunktion  $K(\tau)$ . Für die Untersuchung des dynamisch assistierten Schwinger-Effekts kann daher mit Fokus auf die Fourier-Koeffizienten  $F_{\ell}(\mathbf{p}, E_0)$

vom konkreten Ein- und Ausschaltvorgang abgesehen werden. Deren Beitrag wird nach [28] maßgeblich durch die imaginären Nullstellen der Quasiteilchenenergie  $\omega(\mathbf{p}, \nu t, E_0)$  bestimmt.

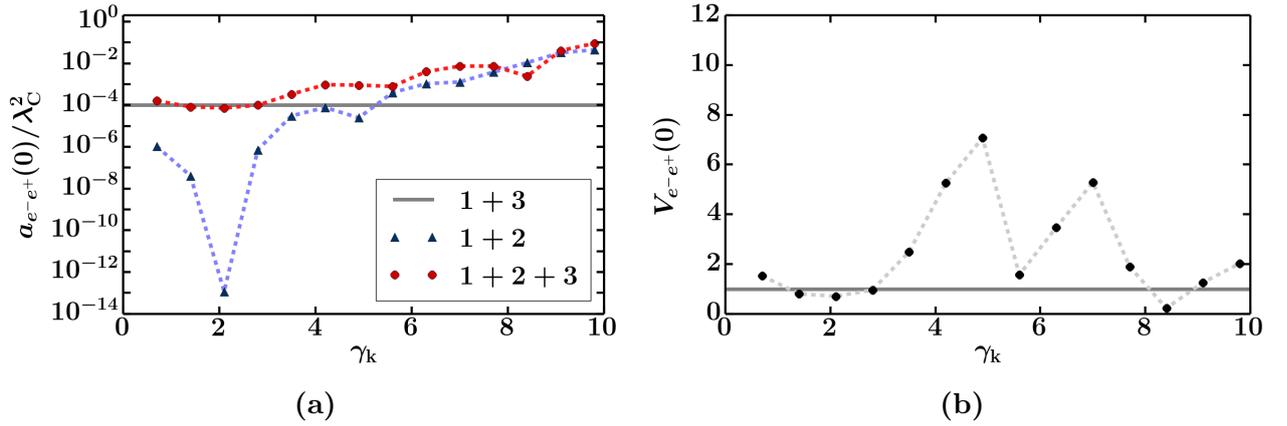
## 6 Numerische Resultate zum doppelt assistierten Schwinger-Effekt



**Abbildung 6.1:** Links: Darstellung der über den Impuls  $p_{\perp}$  abintegrierten Teilchendichte  $a_{e-e+}(0)$  in Abhängigkeit des kombinierten Keldysh-Parameters  $\gamma_k = \gamma N_2$  für unterschiedliche Kombinationen der Felder 1 bis 3 mit Feldstärken wie in Gl. (6.1) festgehalten. Die Frequenz des ersten Feldes,  $\nu = 0.07m_e$ , und die des dritten Feldes,  $\nu_3 = 0.98m_e$ , sind fest. Variiert wird die Frequenz des zweiten Feldes mit  $\nu_2 = N_2\nu$  und  $1 \leq N_2 \leq 14$ . Rechts: Darstellung des aus Gl. (6.2) resultierenden Verstärkungsfaktors.

In diesem letzten Abschnitt soll der Frage nachgegangen werden, inwiefern der durch die Überlagerung zweier Felder auftretende dynamisch assistierte Schwinger-Effekt durch die Hinzunahme eines dritten Feldes zusätzlich verstärkt werden kann. In [35] wird gezeigt, dass durch die Hinzunahme eines einzelnen hochenergetischen Photons mit einer Energie im MeV-Bereich, als Beispiel wird  $\epsilon_{\gamma} = m_e$  angegeben, zusätzliche Verstärkungseffekte in Bezug auf die Paarerzeugungswahrscheinlichkeit  $P_{e-e+}$  auftreten. Dies ist wesentlich abhängig von der Feldstärke des (näherungsweise) als zeitlich konstant angenommenen starken Feldes  $E_0$  und der Wahl der Frequenz des Feldes aus dem Multi-Photonen-Regime mit der Feldstärke  $E_{0,2} < E_0$  und der Frequenz  $\nu_2 < m_e$  im keV-Bereich. Die variierte Größe ist der kombinierte Keldysh-Parameter aus Gl. (1.15). Nach [35] wird die Paarerzeugungswahrscheinlichkeit  $P_{e-e+}$  ungefähr ab einem Wert von  $\gamma_k \gtrsim |\ln(E_{0,2}/E_0)|$  im Vergleich zu den Konfigurationen, wo mindestens einer der aufgeführten Bestandteile fehlt, exponentiell verstärkt. In [35] wird daher der Ausdruck „doppelt assistierter Schwinger-Effekt“ eingeführt.

Davon ausgehend soll in diesem Abschnitt für die Flat-Top-Konfiguration durch numerische



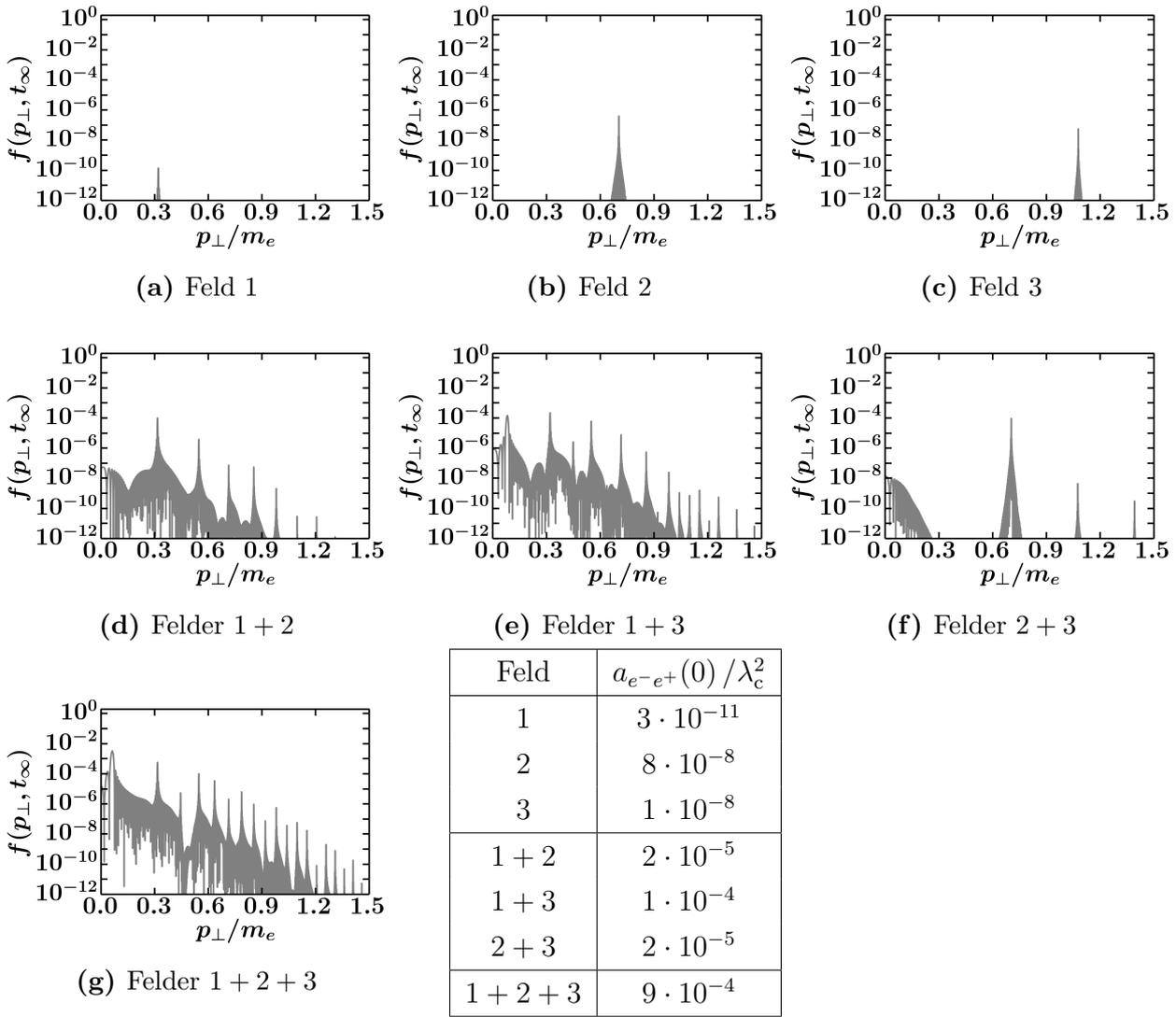
**Abbildung 6.2:** Darstellung wie in Abb. (6.1) jedoch mit  $\nu_3 = 0.98m_e$  und  $1 \leq N_2 \leq 48$ .

Integration von Gl. (2.42) der Frage nachgegangen werden, ob ein zu [35] vergleichbarer Verstärkungseffekt auch auftritt, wenn man statt eines hochenergetischen Photons ein drittes Feld der Stärke  $E_{0,3} < E_{0,2}$  und der Frequenz  $\nu \approx m_e$  hinzufügt und damit einen dritten kohärenten Vielteilchenzustand. Zusätzlich wird das starke Feld mit  $E_0 \lesssim E_c$  und  $\nu \ll m_e$  zeitabhängig gewählt. Der kombinierte Keldysh-Parameter wird wie in [35] aus der Feldstärke  $E_0$  des stärksten Feldes und der Frequenz  $\nu_2$  des mittleren Feldes gebildet und ergibt sich damit als  $\gamma_k = \gamma N_2$ . Ein zusätzlicher Verstärkungseffekt in Analogie zu [35] ist dabei aufgrund des quasiklassischen Zugangs nicht unbedingt zu erwarten.<sup>1</sup>

Die Ergebnisse der Untersuchung sind exemplarisch in den folgenden Abbn. (6.1) bis (6.9) dargestellt. Dabei wurden keine Verstärkungseffekte gefunden, die den „einfach“ assistierten Schwinger-Effekt noch mal um mehrere Größenordnungen verstärken. Ähnlich wie in [23], wo die Überlagerung eines niederfrequenten Sauter-Pulses mit einem hochfrequenten oszillierenden Hintergrundfeld untersucht wird, treten nur relativ kleine Verstärkungseffekte auf. Dies ist insbesondere der Fall, wenn die durch die bifrequenten Felder erzeugte Teilchenzahl nicht für eine der möglichen Kombinationen wesentlich größer ist als für die beiden anderen. Dafür ist es insbesondere notwendig, dass sich die hochfrequenten Frequenzen  $\nu_2$  und  $\nu_3$  hinreichend unterscheiden. Ansonsten dominiert aufgrund der Relation  $E_{0,2} \geq E_{0,3}$  zusehends das zweite Feld die Paarerzeugung. Das ist exemplarisch in den Abbn. (6.1) und (6.2) für den Vergleich zwischen der Superposition des ersten und zweiten und des ersten und dritten Feldes zu erkennen.<sup>2</sup> Es ist die für  $p_{\parallel}/m_e = 0$  über den Impuls  $p_{\perp}$  abintegrierte Teilchendichte  $a_{e^-e^+}(0)$  für unterschiedliche Frequenzen  $\nu_2$  des zweiten Feldes dargestellt. Dabei wird die Frequenz im Intervall  $\nu \leq \nu_2 \leq \nu_3$  variiert und mit ihr der kombinierte Keldysh-Parameter  $\gamma_k$ . In beiden

<sup>1</sup>Vgl. dazu auch Abschnitt (1.2).

<sup>2</sup>Die Darstellung der Kombination zwischen zweitem und dritten Feld wurde dabei zunächst außen vor gelassen, da aufgrund der Forderung  $N_2, N_3 \in \mathbb{N}$  die Zahl der erlaubten kombinierten Keldysh-Parameter stark eingeschränkt wäre. Siehe Kapitel 3. In den Abbn. (6.4) und (6.8) ist jedoch zu erkennen, dass in den relevanten Verstärkungsfällen die Kombination „2+3“ im Vergleich zu „1+2“ und „1+3“ bezüglich der erzeugten Teilchendichte vernachlässigbar ist.

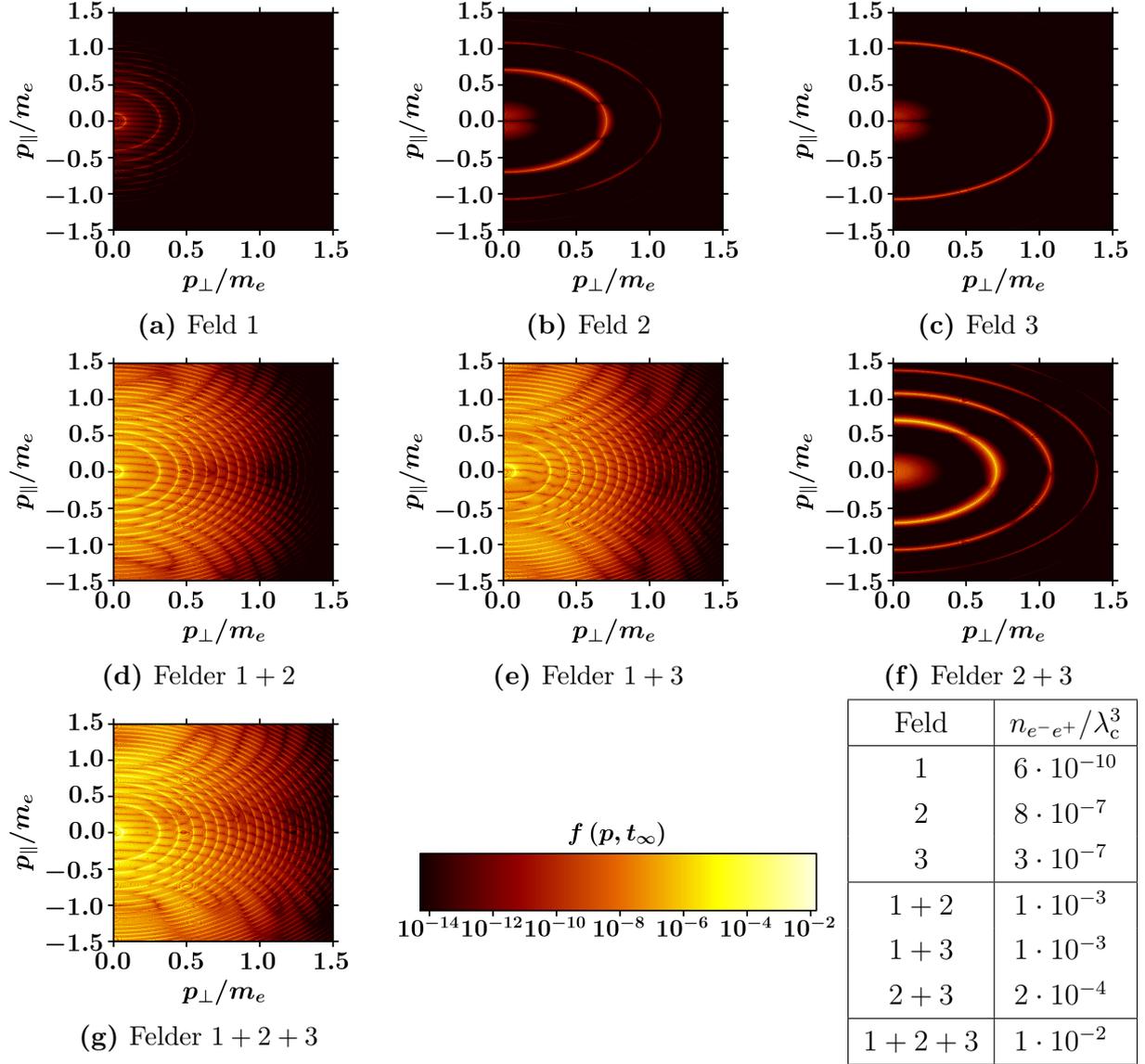


**Abbildung 6.3:** Darstellung der Residualdichte  $f(\mathbf{p}, t_\infty)$  im Impulsraum für  $p_{\parallel}/m_e = 0$  und die möglichen Kombinationen dreier Felder. Die jeweiligen Feldstärken sind in Gl. (6.1) festgehalten, die Frequenzen in Gl. (6.3). In der Tabelle ist die jeweils über den Impuls  $p_{\perp}$  abintegrierte Teilchendichte  $a_{e^-e^+}(0)$  verzeichnet. Es wurden immer diesselben Zeiten  $\nu t_{\text{ramp}} = 5 \cdot 2\pi$  und  $\nu t_{\text{f.t.}} = 50 \cdot 2\pi$  mit Bezug auf das erste Feld gewählt.

Abbn. (6.1) und (6.2) gilt für die Feldstärken

$$\begin{aligned}
 \text{Feld 1: } E_0 &= 0.1E_c, \\
 \text{Feld 2: } E_{0,2} &= 0.05E_c, \\
 \text{Feld 3: } E_{0,3} &= 0.01E_c.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Für die Frequenz des ersten Feldes gilt jeweils  $\nu < m_e/10$  und für das dritte Feld  $\nu_3 \approx m_e$ .

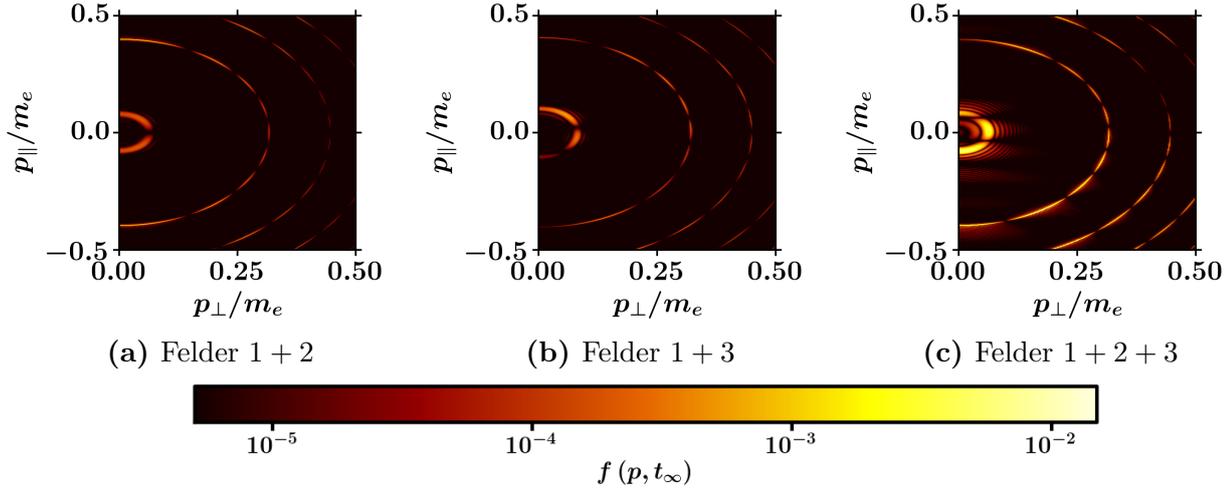


**Abbildung 6.4:** Darstellung der Residualdichte  $f(\mathbf{p}, t_\infty)$  im Impulsraum  $(p_\perp, p_\parallel)$  für die möglichen Kombinationen dreier Felder. Feld- und Zeitskalenparameter wie in Abb. (6.3). In der Tabelle ist die jeweils über den Impulsraum abintegrierte Teilchendichte  $n_{e^-e^+}$  festgehalten.

Der Verstärkungsfaktor  $V_{e^-e^+}(p_\parallel)$  ist definiert als

$$V_{e^-e^+}(p_\parallel) \equiv \frac{a_{e^-e^+}(p_\parallel) [1 + 2 + 3]}{a_{e^-e^+}(p_\parallel) [1 + 2] + a_{e^-e^+}(p_\parallel) [1 + 3]}. \quad (6.2)$$

Er kennzeichnet das Verhältnis der durch das trifrequente Feld erzeugten Anzahldichte zur Summe der durch die bifrequenten Felder erzeugten Anzahldichte. Dabei ergibt sich für  $V_{e^-e^+}$  sowohl für  $\nu = 0.07m_e$  als auch für  $\nu = 0.02m_e$  eine komplizierte Abhängigkeit vom kombinierten Keldysh-Parameter  $\gamma_k$  und damit von der Frequenz des zweiten Feldes  $\nu_2$ . Dennoch lässt sich aus dem Vergleich der beiden Abbn. (6.1) und (6.2) eine erste Abschätzung treffen.



**Abbildung 6.5:** Reskalierte Darstellung der Residualdichte  $f(\mathbf{p}, t_\infty)$  im Impulsraum  $(p_\perp, p_\parallel)$  für die Superposition der Felder „1 + 2“, „1 + 3“ und „1 + 2 + 3“ aus Abb. (6.4).

Kombination	Verstärkungsfaktor
$n_{e^-e^+}(1 + 2 + 3)/(\sum_i^3 n_{e^-e^+}(i))$	9086
$n_{e^-e^+}(1 + 2)/(n_{e^-e^+}(1) + n_{e^-e^+}(2))$	1249
$n_{e^-e^+}(1 + 3)/(n_{e^-e^+}(1) + n_{e^-e^+}(3))$	3327
$n_{e^-e^+}(2 + 3)/(n_{e^-e^+}(2) + n_{e^-e^+}(3))$	181

**Abbildung 6.6:** Auflistung der Verstärkungsfaktoren in Bezug auf die Anzahldichte erzeugter Paare  $n_{e^-e^+}$ , die durch die verschiedenen Kombinationen der durch die Gl. (6.1) und (6.3) charakterisierten Felder möglich sind. Die Parameter der Ein- und Ausschaltfunktion sind  $\nu t_{\text{ramp}} = 5 \cdot 2\pi$  und  $\nu t_{\text{f.t.}} = 50 \cdot 2\pi$ .

Die größten zusätzlichen Verstärkungseffekte treten offenbar in den Bereichen  $3 \leq \gamma_k \leq 7$  auf. Daher ist für die Feldstärken (6.1) in den Abbn. (6.3) bis (6.5) der Fall

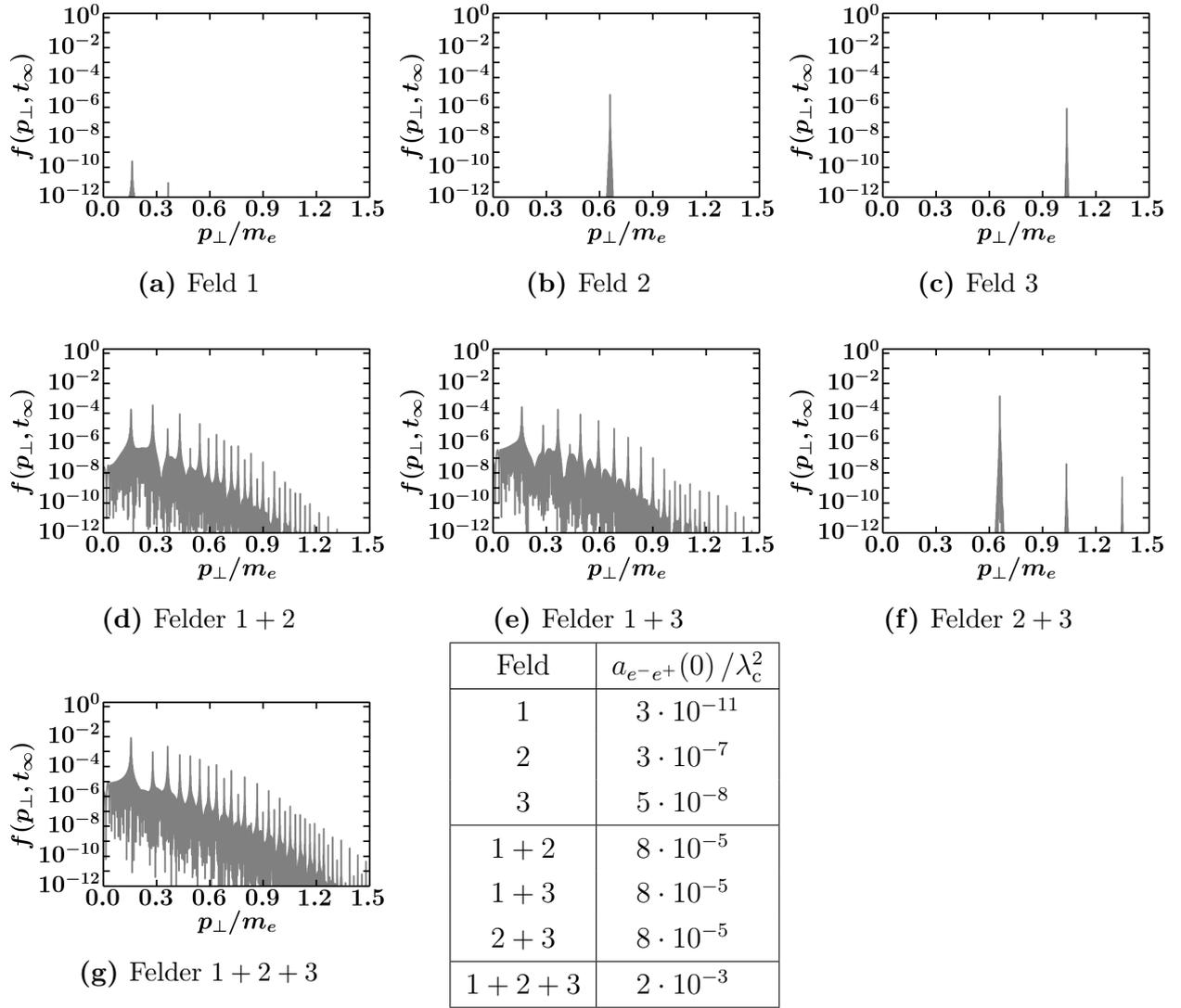
$$\begin{aligned}
 \text{Feld 1: } \nu &= 0.07m_e, \\
 \text{Feld 2: } \nu_2 &= 0.49m_e, \\
 \text{Feld 3: } \nu_3 &= 0.98m_e
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

mit  $\gamma_k = 4.9$  und in den Abbn. (6.7) bis (6.9) der Fall

$$\begin{aligned}
 \text{Feld 1: } \nu &= 0.02m_e, \\
 \text{Feld 2: } \nu_2 &= 0.48m_e, \\
 \text{Feld 3: } \nu_3 &= 0.96m_e
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

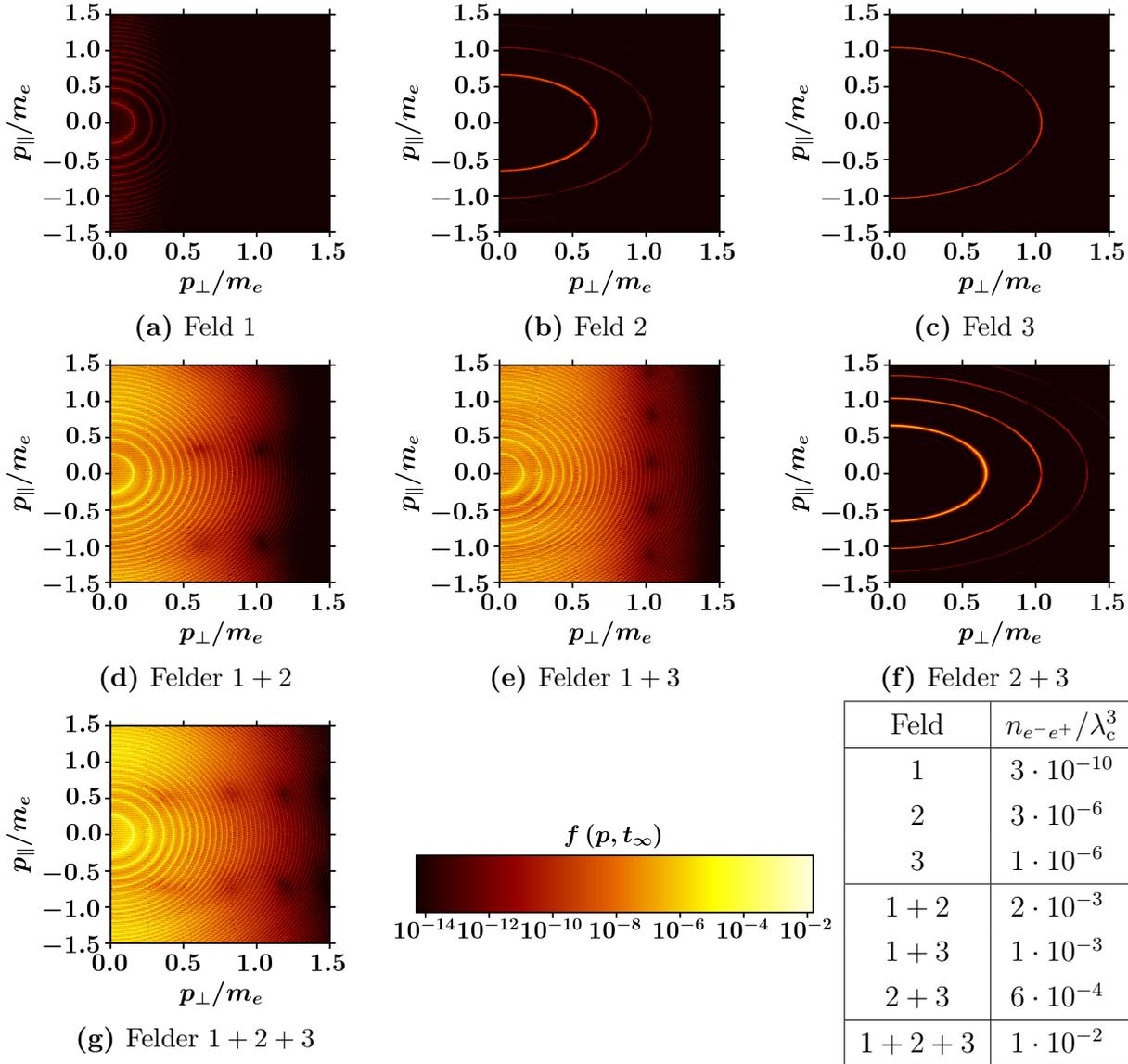
mit  $\gamma_k = 4.8$  festgehalten.

In der Abb. (6.3) ist die erzeugte Residualdichte  $f(\mathbf{p}, t_\infty)$  im Impulsraum für  $p_\parallel/m_e = 0$  und alle möglichen Feldkombinationen dargestellt. Unter Hinzunahme der Tabelle in (6.3) ist zu



**Abbildung 6.7:** Darstellung der Residualdichte  $f(\mathbf{p}, t_\infty)$  im Impulsraum für  $p_{\parallel}/m_e = 0$  und die möglichen Kombinationen dreier Felder. Die jeweiligen Feldstärken sind in Gl. (6.1) festgehalten, die Frequenzen in Gl. (6.4). In der Tabelle ist die jeweils über den Impuls  $p_{\perp}$  abintegrierte Teilchendichte  $a_{e-e^+}(0)$  verzeichnet. Es wurden immer diesselben Zeiten  $\nu t_{\text{ramp}} = 5 \cdot 2\pi$  und  $\nu t_{\text{f.t.}} = 50 \cdot 2\pi$  mit Bezug auf das erste Feld gewählt.

erkennen, dass die Zahl erzeugter Teilchen durch die Kombination mehrerer Felder im Vergleich zur Paarproduktion in einem Feld um mehrere Größenordnungen erhöht ist. Vergleicht man die über  $p_{\perp}$  abintegrierten Teilchendichten  $a_{e-e^+}(0)$ , so erkennt man, dass für jeden bifrequenten Fall im Vergleich zu allen einzelnen mindestens zwei Größenordnungen liegen. Die Anzahldichte ist im trifrequenten Fall noch einmal zusätzlich um etwa den Faktor zehn im Vergleich zur Kombination zwischen erstem und drittem Feld verstärkt. Dieser Effekt bestätigt sich, wenn man die vollständige Anzahldichte  $n_{e-e^+}$  pro Volumen in Einheiten von  $\lambda_c^{-3}$  betrachtet. Diese wurde numerisch und damit näherungsweise für das Intervall  $0 \leq p_{\perp}/m_e \leq 1.5$  und  $-1.5 \leq p_{\parallel}/m_e \leq 1.5$  bestimmt. Die Ergebnisse sind in der Tabelle in Abb. (6.4) festgehalten.

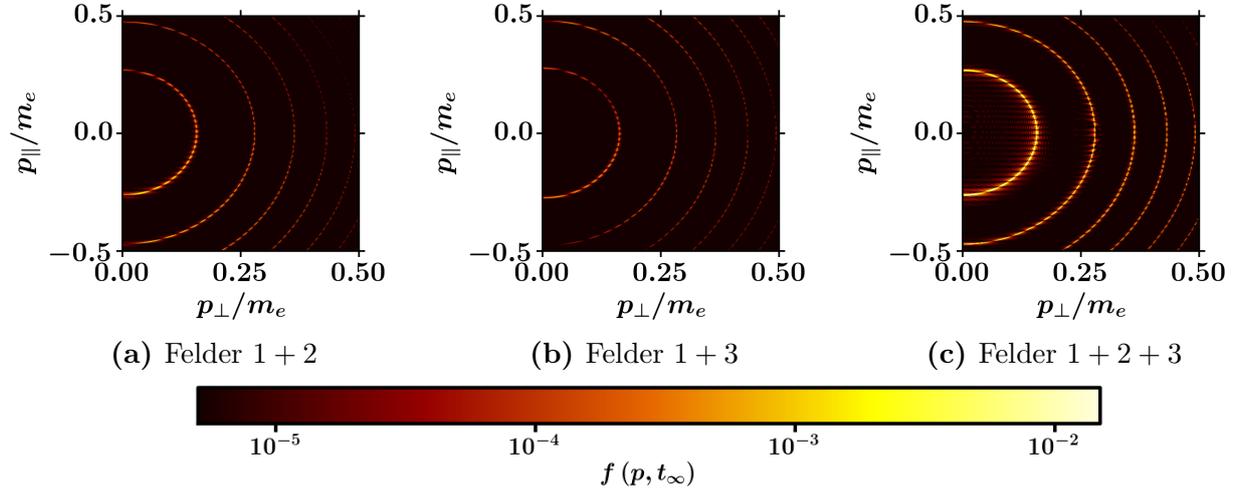


**Abbildung 6.8:** Darstellung der Residualdichte  $f(\mathbf{p}, t_\infty)$  im Impulsraum  $(p_\perp, p_\parallel)$  für die möglichen Kombinationen dreier Felder. Feld- und Zeitskalenparameter wie in Abb. (6.7). In der Tabelle ist die jeweils über den Impulsraum abintegrierte Teilchendichte  $n_{e-e+}$  festgehalten.

ten. Daneben sind die Residualteilchendichten  $f(\mathbf{p}, t_\infty)$  für alle möglichen Kombinationen im entsprechenden Ausschnitt im Impulsraum  $(p_\perp, p_\parallel)$  dargestellt. Hier kann man die in Kapitel 5 ausführlich diskutierte Abhängigkeit der Struktur der erzeugten Teilchendichte im Impulsraum vom entsprechenden Paarerzeugungsregime noch einmal sehr gut nachvollziehen. Für den Fall der einzelnen Felder dominiert für die getroffene Parameterwahl die Multi-Photonen-Absorption der hochfrequenten Felder gegenüber der Paarerzeugung des starken, niederfrequenten Feldes im Tunnel-Regime. Bei der Kombination zweier Felder dominieren bezüglich der Anzahl erzeugter Teilchen die Kombinationen mit dem ersten, starken Feld gegenüber der Superposition der beiden hochfrequenten Felder. Die meisten Teilchen werden jedoch im trifrequenten Feld erzeugt. In Abb. (6.5) ist der Unterschied um etwa den Faktor 10 bezüglich

$n_{e^-e^+}$  gegenüber der Kombination des ersten mit dem zweiten bzw. dritten Feld anhand eines reskalierten Ausschnittes der Residualteilchendichte im Impulsraum dargestellt.

Die relevanten Verstärkungsfaktoren sind in Abb. (6.6) festgehalten. Dabei wird jeweils die aus der Kombination mehrerer Felder erzeugte Teilchendichte  $n_{e^-e^+}$  ins Verhältnis gesetzt zur Summe über die durch die einzelnen Felder erzeugten Teilchendichte. Nimmt man diese Defini-



**Abbildung 6.9:** Reskalierte Darstellung der Residualdichte  $f(\mathbf{p}, t_\infty)$  im Impulsraum  $(p_\perp, p_\parallel)$  für die Superposition der Felder „1 + 2“, „1 + 3“ und „1 + 2 + 3“ aus Abb. (6.8).

tion als Maßstab, dann ergibt sich für das trifrequente Feld mit einem Verstärkungsfaktor von 9086 ein fast dreimal so großer wie für die Superposition des ersten mit dem dritten und ein etwa siebenmal so großer wie für die Kombination des ersten mit dem zweiten. Am geringsten fällt der Faktor mit 181 für die Überlagerung der beiden hochfrequenten Felder zwei und drei aus.

Für die zweite Parameterwahl, die durch die Gln. (6.1) und (6.4) gegeben ist, ergibt sich ein vergleichbares Resultat. In Abb. (6.7) ist der Schnitt  $p_\parallel/m_e = 0$  im Impulsraum dargestellt. In der dazugehörigen Tabelle ist wiederum die über  $p_\perp$  abintegrierte Teilchendichte  $a_{e^-e^+}(0)$  in Einheiten von  $\lambda_c^{-2}$  festgehalten. Vergleicht man die Paarerzeugung der einzelnen Felder mit den bifrequenten Feldern, so ergibt sich mindestens ein Unterschied um etwa den Faktor 230. Auffällig ist, dass im bifrequenten Fall für  $p_\parallel/m_e = 0$  die Anzahl erzeugter Paare pro Fläche für alle Kombinationsmöglichkeiten in erster Näherung identisch ist und damit zumindest in der gleichen Größenordnung liegt. Der trifrequente Fall erzeugt noch einmal das 25-fache an Teilchen pro Fläche im Vergleich zu jeder einzelnen Kombination des bifrequenten Falles.

Dieser Effekt spiegelt sich im vollen Impulsspektrum der Residualdichte wider, das in Abb. (6.8) dargestellt ist. In der dazugehörigen Tabelle ist die Anzahldichte  $n_{e^-e^+}$  erzeugter Teilchen pro Volumen in Einheiten von  $\lambda_c^{-3}$  festgehalten. Sie wurde wiederum näherungsweise durch numerische Integration über die Residualdichte, diesmal für das Intervall  $0 \leq p_\perp/m_e \leq 2$  und  $-1.5 \leq p_\parallel/m_e \leq 1.5$  bestimmt. Die Anzahldichten der bifrequenten Felder sind im Vergleich zu denen der Einzelfelder etwa um den Faktor  $10^2$  bis  $10^3$  größer. Für den Fall des trifrequen-

Kombination	Verstärkungsfaktor
$n_{e^{-}e^{+}}(1+2+3)/(\sum_i^3 n_{e^{-}e^{+}}(i))$	2500
$n_{e^{-}e^{+}}(1+2)/(n_{e^{-}e^{+}}(1)+n_{e^{-}e^{+}}(2))$	667
$n_{e^{-}e^{+}}(1+3)/(n_{e^{-}e^{+}}(1)+n_{e^{-}e^{+}}(3))$	1000
$n_{e^{-}e^{+}}(2+3)/(n_{e^{-}e^{+}}(2)+n_{e^{-}e^{+}}(3))$	150

**Abbildung 6.10:** Auflistung der Verstärkungsfaktoren in Bezug auf die Anzahldichte erzeugter Paare  $n_{e^{-}e^{+}}$ , die durch die verschiedenen Kombinationen der durch die Gln. (6.1) und (6.4) charakterisierten Felder möglich sind. Die Parameter der Ein- und Ausschaltfunktion sind  $\nu t_{\text{ramp}} = 5 \cdot 2\pi$  und  $\nu t_{\text{f.t.}} = 50 \cdot 2\pi$ .

ten Feldes ergibt sich mit Blick auf die jeweiligen bifrequenten Felder ein zusätzlicher Faktor um ungefähr 10. Dieser Effekt ist wiederum in Abb. (6.9) nach entsprechender Reskalierung festgehalten.

Die relevanten Verstärkungsfaktoren sind abschließend in Abb. (6.10) notiert. Es ergibt sich für das trifrequente Feld mit einem Verstärkungsfaktor von 2500 ein zweieinhalb-mal so großer wie für die Überlagerung des ersten mit dem dritten und ein rund viermal so großer wie für die Kombination des ersten mit dem dritten Feld. Wieder am geringsten fällt der Faktor mit 150 für die Überlagerung der beiden hochfrequenten Felder zwei und drei aus.

# 7 Zusammenfassung und Ausblick

In Kapitel 4.1 dieser Arbeit ist es gelungen die Fourier-Analyse in der Niederdichte-Näherung der quantenkinetischen Gleichung (2.60), wie sie in [27, 28] für periodische Hintergrundfelder entwickelt wurde, auf prinzipiell beliebige Ein- und Ausschaltfunktionen der Form  $K(t/t_r)$  zu verallgemeinern. Das Ergebnis ist in Gl. (4.12) festgehalten. Für genügend langsame Ein- und Ausschaltvorgänge, die Bedingung (4.22) erfüllen, ist es möglich mit Hilfe der Methode der stationären Phase eine Näherung für das Verhalten der Residualteilchendichte in Abhängigkeit vom Zeitskalenparameter  $t_r$  für Kontrollparameter  $m_e t_r \rightarrow \infty$  zu erhalten.<sup>1</sup>

Dies führt zu einer Verallgemeinerung der in [27] hergeleiteten Resonanzbedingung (4.7) hin zu Gl. (4.36). In [27] gibt es nur eine mögliche Amplitude mit der das Feld oszilliert. Diese bestimmt allein das resonante Verhalten der Residualteilchendichte im Impulsraum. Durch den Ein- und Ausschaltvorgang durchläuft das elektrische Hintergrundfeld mehrere Feldamplituden. Erreicht es zu einem Zeitpunkt gerade die Feldstärke, die einer Bedingung (4.36) entspricht, kommt es, je nachdem wie lange das Feld effektiv bei entsprechender Feldstärke oszilliert, zu zusätzlichen Beiträgen zur Residualteilchendichte. Je länger dies der Fall ist, um so größer fällt der entsprechende Beitrag aus.

Die Anwendung der entwickelten Methode ist prinzipiell für beliebige Ein- und Ausschaltfunktionen möglich und wird in Abschnitt 4.2 exemplarisch für symmetrische und monotone Ein- und Ausschaltvorgänge ausgeführt. Das wesentliche Resultat ist in Gl. (4.51) festgehalten und führt für streng monotonen Ein- und Ausschalten auf die Gln. (4.54), (4.55) und (4.62). Dabei zeigt sich, dass die Impulsraumstruktur der Residualdichte weiterhin maßgeblich durch die Resonanzmode aus Gl. (4.7) zur maximalen Feldstärke  $E_0$  bestimmt wird. Im Resonanzfall  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$  bestimmt die erste nicht verschwindende Ordnung  $N = n_\ell - 1$  der symmetrischen Ein- und Ausschaltfunktion am Maximum das Potenzverhalten der Residualdichte bezüglich des Zeitskalenparameters  $t_r$ . Es ergibt sich in führender Ordnung eine Abhängigkeit von  $t_r^{2N/(N+1)}$  mit  $N \geq 2$  und gerade. Im Nichtresonanzfall steigt die Residualteilchendichte linear mit  $t_r$  modifiziert durch zusätzliche Oszillationsbeiträge, je nachdem wie viele zusätzliche Moden nach Bedingung (4.36) angeregt werden. Große Ordnungen  $N$  entsprechen dabei einem ausgeprägten effektiven Flat-Top-Intervall. Für  $N \rightarrow \infty$  lässt sich damit das Ergebnis aus [27] für den abrupten Ein- und Ausschaltvorgang reproduzieren.

Wie in Abschnitt (5.1) gezeigt wird, steigt die Anzahl zusätzlich angeregter Moden mit klei-

---

<sup>1</sup>Siehe Gl. (4.22).

ner werdendem Keldysh-Parameter  $\gamma$  an. Entsprechend kompliziert und sprunghaft kann die Abhängigkeit der Residualteilchendichte vom Skalenparameter  $t_r$  im Tunnel-Regime für  $\gamma \leq 1$  ausfallen. Im Impulsraum treten dann nur für dominante Resonanzmoden mit  $n_\ell \gg 3$  bzw.  $N \gg 2$  ausgeprägte „Akkumulationsschalen“ bei  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)}$  auf. Im Multi-Photonen-Regime, d.h. für  $\gamma \gg 1$  werden ausschließlich die Resonanzmoden angeregt. Dann resultieren auch für kleine Ordnungen  $N$  Resonanzschalen der Teilchendichte im Impulsraum.

Davon ausgehend wird in Abschnitt (5.2) gezeigt, dass der Verstärkungsfaktor des dynamisch assistierten Schwinger-Effektes unabhängig von der konkreten Ein- und Ausschaltfunktion ist. Zwar steigt mit größer werdendem  $N$  und damit einhergehend mit größer werdendem (effektivem) Flat-Top-Intervall die Anzahl erzeugter Paare. Jedoch faktorisiert der für die Verstärkung maßgebliche Anteil mit dem von der konkreten Ein- und Ausschaltfunktion abhängigen Term, der das Zeitverhalten in Abhängigkeit von  $t_r$  festlegt.

Die damit in dieser Arbeit in der Niederdichte-Näherung abgeleitete Näherung für die Residualteilchendichte oszillierender Hintergrundfelder für beliebige Ein- und Ausschaltvorgänge sollte anhand weiterer konkreter Beispiele ausgewertet und überprüft werden. Insbesondere sollte versucht werden, die Bedingungen (4.22) und (4.44) ihrer Gültigkeit in eine noch aussagekräftigere Form zu bringen. Auch kann noch in Analogie zu [27] versucht werden, das Verhalten der Residualteilchendichte in der unmittelbaren Umgebung der Resonanzen für  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{(\ell)} + \Delta\mathbf{p}$  zu entwickeln. Diese wurde in dieser Arbeit außen vor gelassen. Eventuell lässt sich eine Näherungslösung für die Anzahldichte erzeugter Paare ableiten.

Im letzten Kapitel (6) wird gezeigt, dass die numerischen Untersuchungen zu einem womöglich „doppelt assistierten Schwinger-Effekt“ durch die Überlagerung dreier Hintergrundfelder unterschiedlicher Feldstärke und Frequenz keinen Verstärkungseffekt ergaben, in dem zusätzlich zum bifrequenten Fall die Anzahl erzeugter Paare nochmal um mehrere Größenordnungen verstärkt wird. Dennoch fällt in den dargelegten Beispielen die Anzahldichte  $n_{e^-e^+}$  erzeugter Paare im trifrequenten Fall am höchsten aus und ist noch einmal um etwa den Faktor zehn im Vergleich zu den einzelnen bifrequenten Fällen erhöht. Dabei wurde jeweils ein starkes Feld aus dem Tunnel-Regime mit zwei schwächeren Feldern aus dem Multi-Photonen-Regime überlagert. Die Frequenz des mittleren Feldes lag im Bereich  $\nu_2 \lesssim m_e$ , die des schwächsten bei  $\nu_3 \approx m_e$ . Möglicherweise sollten noch andere Feldparameterkombinationen ins Auge gefasst werden, um nach zusätzlichen Verstärkungseffekten zu suchen.

# A Rechnungen zur Entwicklung der Näherungslösung

## A.1 Explizite Rechnung zur Verallgemeinerung der Fourier-Reihenentwicklung

In diesem Teil des Anhangs wird eine ausführliche Herleitung von Gl. (4.12) gegeben. Ausgangspunkt ist die Näherung der quantenkinetischen Gleichung für den Fall kleiner Dichten aus Gl. (4.1), die für die entsprechend in Abschnitt 3 definierten Feldkonfigurationen mit Ein- und Ausschaltfunktion  $K(t/t_r) \in C^\infty$  ausgewertet wird. Dafür sind zwei Zeitskalen von Relevanz, in Bezug auf die Einhüllende der Parameter  $t_r$  und in Zusammenhang mit dem periodischen Anteil  $h(\nu t)$  die Periodendauer  $T = 2\pi/\nu$ . Die Grundannahme besteht im folgenden darin, dass die Ein- und Ausschaltfunktion  $K(t/t_r)$  sich innerhalb eines Zeitintervalls  $\Delta t$  im Gegensatz zum periodischen Anteil kaum ändert

$$K(t + \Delta t/t_r) \approx K(t/t_r) \tag{A.1}$$

bzw.

$$E(t + \Delta t/t_r) \approx E(t/t_r). \tag{A.2}$$

Daher kann punktweise in Analogie zu [27] vorgegangen werden, jedoch mit zusätzlich zeitabhängigen Fourier-Koeffizienten  $C_k(\mathbf{p}, E(t/t_r))$  und  $F_k(\mathbf{p}, E(t/t_r))$ . Am Ende der Rechnung wird dann der Grenzfall  $\Delta t \rightarrow 0$  betrachtet. In Gl. (4.2) auftretende Integrale  $\int_0^t dt'$  werden gemäß

$$\int_{t_i}^t dt' = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_i+n\Delta t}^{t_i+(n+1)\Delta t} dt' \tag{A.3}$$

in  $N$  Teilintervalle aufgeteilt mit  $t = t_i + N\Delta t$  und  $t_n = t_i + n\Delta t$ , wobei  $N \in \mathbb{N}$  ist. Als erstes soll exemplarisch die dynamische Phase ausgewertet werden,<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\Theta(\mathbf{p}, t) &= \int_{t_i}^t dt' \omega(\mathbf{p}, \nu t', E(t'/t_r)) = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt' \omega(\mathbf{p}, \nu t', E(t'/t_r)) \\ &= \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt' \omega(\mathbf{p}, \nu t', E(t_n/t_r)).\end{aligned}\tag{A.4}$$

Für konstantes Argument  $E(t_n/t_r)$  lässt sich die Quasiteilchenenergie  $\omega(\mathbf{p}, t, E(t_n/t_r))$  in Analogie zu [27] in eine Fourier-Reihe entwickeln

$$\omega(\mathbf{p}, \nu t, E(t_n/t_r)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(\mathbf{p}, E(t_n/t_r)) e^{-ik\nu t}.\tag{A.5}$$

Dabei wird im folgenden wie in [27] für die Nullmode

$$\Omega(\mathbf{p}, E(t_n/t_r)) \equiv C_0(\mathbf{p}, E(t_n/t_r))\tag{A.6}$$

geschrieben. Im Gegensatz zu Gl. (4.6) ist der Fourier-Koeffizient  $C_k$  nicht nur vom Impuls  $\mathbf{p}$  sondern zusätzlich von der Feldstärke  $E(t_n/t_r)$  zum Zeitpunkt  $t_n$  abhängig,

$$C_k(\mathbf{p}, E(t_n/t_r)) = \frac{1}{T} \int_0^T dt \omega(\mathbf{p}, \nu t, E(t_n/t_r)) e^{ik\nu t}.\tag{A.7}$$

Einsetzen von Gl. (A.5) in Gl. (A.4) und Auswertung des Integrals über  $t'$  liefert

$$\begin{aligned}\Theta(\mathbf{p}, t) &= \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \Omega(\mathbf{p}, E(t_n/t_r)) \Delta t + \sum_{k \neq 0} i C_k(\mathbf{p}, E(t_n/t_r)) e^{-ik\nu t_n} \left( \frac{e^{-ik\nu \Delta t} - 1}{k\nu} \right) \right\} \\ (\Delta t \rightarrow 0) &= \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \Omega(\mathbf{p}, E(t_n/t_r)) \Delta t + \sum_{k \neq 0} C_k(\mathbf{p}, E(t_n/t_r)) e^{-ik\nu t_n} \Delta t \right\}.\end{aligned}\tag{A.8}$$

<sup>1</sup>An dieser Stelle ist eine Aufteilung des Integrals in mehrere Teilintervalle nicht unbedingt notwendig. Man kann auch direkt im Punkt  $t'$  in eine Fourier-Reihe entwickeln und erhält unmittelbar Gl. (A.9). Die ausführlichere Darstellung soll lediglich der Illustration dienen, um das weitere Vorgehen verständlicher zu machen. Zudem zeigt sich, dass beide Vorgehensweisen an dieser Stelle äquivalent sind.

Das ist die Definition des Riemann-Integrals. Mit  $t_n = t_i + n\Delta t$  folgt schließlich

$$\begin{aligned}\Theta(\mathbf{p}, t) &= \int_0^{N\Delta t} dt' \left( \Omega(\mathbf{p}, E([t' + t_i]/t_r)) + \sum_{k \neq 0} C_k(\mathbf{p}, E(t' + t_i/t_r)) e^{-ik\nu(t'+t_i)} \right) \\ &= \int_{t_i}^t dt' \left( \Omega(\mathbf{p}, E(t'/t_r)) + \sum_{k \neq 0} C_k(\mathbf{p}, E(t'/t_r)) e^{-ik\nu t'} \right) \\ &= \int_{t_i}^t dt' [\Omega(\mathbf{p}, E(t'/t_r)) + R(\mathbf{p}, \nu t', E(t'/t_r))]\end{aligned}\tag{A.9}$$

mit der periodischen Funktion

$$R(\nu t + \nu T, E(t_0/t_r)) = R(\nu t, E(t_0/t_r)) = \sum_{k \neq 0} C_k(\mathbf{p}, E(t_0/t_r)) e^{-ik\nu t}.\tag{A.10}$$

Diesen Ausdruck für die dynamische Phase  $\Theta(\mathbf{p}, t')$  setzt man in Gl. (4.2) ein und erhält

$$\begin{aligned}I(\mathbf{p}, t) &= \int_{t_i}^t dt' Q(\mathbf{p}, \nu t', E(t'/t_r)) \exp\left(2i \int_{t_i}^{t'} dt'' [\Omega(\mathbf{p}, E(t''/t_r)) + R(\mathbf{p}, \nu t'', E(t''/t_r))]\right) \\ &= \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ M \rightarrow \infty}} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt' Q(\mathbf{p}, \nu t', E(m\Delta t/t_r)) \\ &\quad \cdot \exp\left(2i \int_{t_i}^{t'} dt'' [\Omega(\mathbf{p}, E(t''/t_r)) + R(\mathbf{p}, \nu t'', E(t''/t_r))]\right)\end{aligned}\tag{A.11}$$

Da  $t_m \leq t' \leq t_{m+1}$  gilt, lässt sich das Argument der Exponentialfunktion schreiben als

$$\begin{aligned}2i \int_{t_i}^{t'} dt'' [\Omega(\mathbf{p}, E(t''/t_r)) + R(\mathbf{p}, \nu t'', E(t''/t_r))] \\ = 2i \int_{t_i}^{t_m} dt'' [\Omega(\mathbf{p}, E(t''/t_r)) + R(\mathbf{p}, \nu t'', E(t''/t_r))] \\ + \int_{t_m}^{t'} dt'' [\Omega(\mathbf{p}, E(t_m/t_r)) + R(\mathbf{p}, \nu t'', E(t_m/t_r))].\end{aligned}\tag{A.12}$$

Aus dem zweiten Term ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{t_m}^{t'} dt'' [\Omega(\mathbf{p}, E(t_m/t_r)) + R(\mathbf{p}, \nu t'', E(t_m/t_r))] \\ = \Omega(\mathbf{p}, E(t_m/t_r)) (t' - t_m) + \sum_{k \neq 0} iC_k(\mathbf{p}, E(t_m/t_r)) \frac{(e^{-ik\nu t'} - e^{-ik\nu t_m})}{k\nu} \\ = \Omega(\mathbf{p}, E(t_m/t_r)) (t' - t_m) + P(\mathbf{p}, \nu t', E(t_m/t_r)) - P(\mathbf{p}, \nu t_m, E(t_m/t_r)),\end{aligned}\tag{A.13}$$

wobei bezüglich des Argumentes  $\nu t$

$$P(\mathbf{p}, \nu t, E(t_0/t_r)) = \sum_{k \neq 0} iC_k(\mathbf{p}, E(t_0/t_r)) \frac{(e^{-ik\nu t} - 1)}{k\nu} \quad (\text{A.14})$$

eine periodische Funktion ist.<sup>2</sup> Dabei wurde ausgenutzt, dass in Kapitel 3  $t_i = zT$  mit  $z \in \mathbb{Z}$  gesetzt wurde. Im Allgemeinen würde man sonst noch einen zusätzlichen Phasenfaktor  $\exp(ik\nu t_i)$  erhalten. Damit folgt

$$I(\mathbf{p}, t) = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ M \rightarrow \infty}} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt' Q(\mathbf{p}, t', E(t_m/t_r)) \exp(2iP(\mathbf{p}, \nu t', E(t_m/t_r))) \cdot \exp(2i[\Theta(\mathbf{p}, t_m) + \Omega(\mathbf{p}, E(t_m/t_r))(t' - t_m) - P(\mathbf{p}, \nu t_m, E(t_m/t_r))]). \quad (\text{A.15})$$

In Analogie zu [27] wird die Funktion  $Q \exp(2iP)$  in einer Fourier-Reihe entwickelt:

$$Q(\mathbf{p}, \nu t, E(t_m/t_r)) \exp(2iP(\mathbf{p}, t, E(t_m/t_r))) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k(\mathbf{p}, E(t_m/t_r)) e^{-ik\nu t} \quad (\text{A.16})$$

mit den nun implizit über die Feldamplitude zeitabhängigen Fourier-Koeffizienten

$$F_k(\mathbf{p}, E(t_m/t_r)) = \frac{1}{T} \int_0^T dt' Q(\mathbf{p}, \nu t', E(t_m/t_r)) \exp(2iP(\mathbf{p}, t', E(t_m/t_r)) + ik\nu t'). \quad (\text{A.17})$$

Das Einsetzen von Gl.(A.16) in Gl.(A.15) ergibt

$$\begin{aligned} I(\mathbf{p}, t) &= \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ M \rightarrow \infty}} \sum_{m=0}^{M-1} \exp(2i[\Theta(\mathbf{p}, t_m) - \Omega(\mathbf{p}, E(t_m/t_r))t_m - P(\mathbf{p}, \nu t_m, E(t_m/t_r))]) \\ &\quad \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k(\mathbf{p}, E(t_m/t_r)) \int_{t_m}^{t_{m+1}\Delta t} dt' \exp(i[2\Omega(\mathbf{p}, E(t_m/t_r)) - k\nu]t') \\ &= \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ M \rightarrow \infty}} \sum_{m=0}^{M-1} \exp(2i[\Theta(\mathbf{p}, t_m) - \Omega(\mathbf{p}, E(t_m/t_r))t_m - P(\mathbf{p}, \nu t_m, E(t_m/t_r))]) \\ &\quad \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{iF_k(\mathbf{p}, E(t_m/t_r))}{k\nu - 2\Omega(\mathbf{p}, E(t_m/t_r))} \exp(i[2\Omega(\mathbf{p}, E(t_m/t_r)) - k\nu]t_m) \\ &\quad \cdot \{\exp(i[2\Omega(\mathbf{p}, E(t_m/t_r)) - k\nu]\Delta t) - 1\} \\ (\Delta t \rightarrow 0) &= \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ M \rightarrow \infty}} \sum_{m=0}^{M-1} \exp(2i\{\Theta(\mathbf{p}, t_i + m\Delta t) - P(\mathbf{p}, \nu(t_i + m\Delta t), E([t_i + m\Delta t]/t_r))\}) \\ &\quad \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k(\mathbf{p}, E([t_i + m\Delta t]/t_r)) e^{-ik\nu(t_i + m\Delta t)} \Delta t. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

<sup>2</sup>Vgl. Gl. (4.5).

Der Grenzwert  $M \rightarrow \infty$  und  $\Delta t \rightarrow 0$  ergibt schlussendlich

$$I(\mathbf{p}, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{M\Delta t} dt' F_k(\mathbf{p}, E([t_i + t']/t_r)) \cdot \exp(i[2\Theta(\mathbf{p}, t_i + t') - 2P(\mathbf{p}, \nu(t_i + t'), E([t_i + t']/t_r)) - k\nu(t_i + t')]). \quad (\text{A.19})$$

Unter Verwendung von Gl. (A.9) und mit der Substitution  $t_i + t' \rightarrow t'$  folgt daraus Gl. (4.12).

## A.2 Abschätzung der Grundbedingung für die Stationäre-Phasen-Näherung

Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass für genügend große Kontrollparameter  $\nu t_r$  die Funktion  $S(\mathbf{p}, t, E(t/t_r))$  aus Gl. (4.14) gegen Null geht. Dadurch wird die in Gl. (4.25) vorgenommene Näherung legitimiert. Unter Verwendung der Definitionen (A.10) und (A.14) und durch zweimalige partielle Integration erhält man

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^t dt' R(\mathbf{p}, \nu t', E(t/t_r)) &= \sum_{k \neq 0} \frac{i}{k\nu} \int_{t_i}^t dt' C_k(\mathbf{p}, E(t'/t_r)) \frac{d}{dt'} e^{-ik\nu t'} \\ &\stackrel{\text{p.I.}}{=} \sum_{k \neq 0} \left\{ \frac{i}{k\nu} C_k(\mathbf{p}, E(t/t_r)) e^{-ik\nu t} + \frac{1}{t_r(k\nu)^2} \int_{t_i}^t dt' E'(t'/t_r) C'_k(\mathbf{p}, E(t'/t_r)) \frac{d}{dt'} e^{-ik\nu t'} \right\} \\ &\stackrel{\text{p.I.}}{=} P(\mathbf{p}, \nu t_r, E(t/t_r)) + \sum_{k \neq 0} \left\{ \frac{i}{k\nu} C_k(\mathbf{p}, E(t/t_r)) + E'(t/t_r) C'_k(\mathbf{p}, E(t/t_r)) \frac{e^{-ik\nu t}}{t_r(k\nu)^2} + \mathcal{O}(t_r^{-2}) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Das Einsetzen von Gl. (A.20) in Gl. (4.14) ergibt damit

$$S(\mathbf{p}, t, E(t/t_r)) = \sum_{k \neq 0} \left\{ \frac{i}{k\nu} C_k(\mathbf{p}, E(t/t_r)) + E'(t/t_r) C'_k(\mathbf{p}, E(t/t_r)) \frac{e^{-ik\nu t}}{t_r(k\nu)^2} + \mathcal{O}(t_r^{-2}) \right\}. \quad (\text{A.21})$$

Wie sich zeigen lässt, gibt die unendliche Summe über  $k \neq 0$  des ersten Summanden genau Null. Dies erkennt man unter Ausnutzung der Symmetrie der Fourier-Koeffizienten  $C_k$ . Aus ihrer Definition in Gl. (A.7) folgt mit der Substitution  $t' = T - t$  unmittelbar

$$\begin{aligned} C_k(\mathbf{p}, E(\tau)) &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \omega(\mathbf{p}, \nu t, E(\tau)) e^{ik\nu t} \stackrel{t'=T-t}{=} \frac{1}{T} \int_0^T dt' \omega(\mathbf{p}, -\nu t', E(\tau)) e^{-ik\nu t'} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \omega(\mathbf{p}, \nu t, E(\tau)) e^{-ik\nu t} = C_{-k}(\mathbf{p}, E(\tau)). \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Dabei wurde, wie in Kapitel 3 festgelegt, die Symmetrie des periodischen Anteils  $h(\nu t)$  des Vektorpotentials ausgenutzt. Damit ergibt sich schließlich für den ersten Summanden in Gl. (A.21):

$$\sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} C_k(\mathbf{p}, E(t/t_r)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [C_k(\mathbf{p}, E(t/t_r)) - C_{-k}(\mathbf{p}, E(t/t_r))] = 0. \quad (\text{A.23})$$

Davon ausgehend lässt sich für Parameter  $\nu t_r \gg 1$  abschätzen:

$$\begin{aligned} |S(\mathbf{p}, t, E(t/t_r))| &\approx \left| \frac{2}{\nu^2 t_r} \sum_{k=1}^{\infty} E'(t/t_r) C'_k(\mathbf{p}, E(t/t_r)) \frac{e^{-ik\nu t}}{k} \right| \\ &\leq \frac{2}{\nu^2 t_r} |E'(t/t_r)| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} |C'_k(\mathbf{p}, E(t/t_r))|. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Durch  $N$ -fache partielle Integration der Gl. (4.21) lässt sich unter Ausnutzung der Periodizität von  $\omega'(\mathbf{p}, \nu t, E(\tau))$  und damit auch seiner zeitlichen Ableitungen bezüglich des Argumentes  $\nu t$  für den Betrag der Koeffizienten  $C'_k$  die Näherung

$$\begin{aligned} |C'_k(\mathbf{p}, E(\tau))| &\stackrel{N \times \text{p.I.}}{\approx} \left| \frac{1}{(ik\nu)^{NT}} \int_0^T dt \left( \frac{d^N}{dt^N} \omega'(\mathbf{p}, \nu t, E(\tau)) \right) e^{ik\nu t} \right| \\ &\leq \frac{1}{(k\nu)^N} \max_{[0 \leq t \leq T]} \left| \frac{d^N}{dt^N} \omega'(\mathbf{p}, \nu t, E(\tau)) \right| = \frac{1}{k^N} W(\mathbf{p}, E(\tau), N) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

ableiten. Einsetzen der Abschätzung in Gl. (A.24) ergibt schließlich

$$|S(\mathbf{p}, t, E(t/t_r))| \leq \frac{1}{\nu^2 t_r} E'(t/t_r) W(\mathbf{p}, E(\tau), N) \zeta_R(N+2). \quad (\text{A.26})$$

Dabei bezeichnet

$$\zeta_R(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \quad (\text{A.27})$$

die Riemannsche Zeta-Funktion. Die Forderung  $S(\mathbf{p}, t, E(t/t_r)) \ll 1$  führt nach entsprechender Umstellung von Gl. (A.25) nach  $m_e t_r$  auf die Forderung

$$\nu t_r \gg \left( \frac{m_e}{\nu} \right) K'(\tau_{\max}) \tilde{W}(\mathbf{p}, E(\tau_{\max}), N) \zeta_R(N+2) \quad (\text{A.28})$$

mit der dimensionslosen Funktion  $\tilde{W}(\mathbf{p}, E(\tau), N) = E_0 W(\mathbf{p}, E(\tau), N) / m_e$ .

### A.3 Umformungen zur Reduktion des Problems auf den Einschaltvorgang

In diesem Teil des Anhangs wird gezeigt, dass das Integral aus Gl. (4.26) für symmetrische Ein- und Ausschaltfunktionen unter Anwendung der Eigenschaften (4.28) reduziert werden kann auf Gl. (4.31) und damit auf zwei Integrale, die nur noch über das Intervall  $\tau_i \leq (\tau_i + \tau_f)/2$  des Einschaltvorganges laufen. Dabei wird das Vorgehen exemplarisch anhand des Integrals über den Koeffizienten  $A_k(\mathbf{p}, E(\tau))$  aus Gl. (4.29) demonstriert. Für das Integral über  $B_k(\mathbf{p}, E(\tau))$  geht man analog vor. Ausgangspunkt der Umformungen ist damit das Integral

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau E(\tau) A_k(\mathbf{p}, E(\tau)) \exp\left(im_e t_r \tilde{\phi}_k(\mathbf{p}, \tau)\right). \quad (\text{A.29})$$

Dieses teilt man in die beiden Intervalle

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau = \int_{\tau_i}^{\frac{\tau_i + \tau_f}{2}} d\tau \dots + \int_{\frac{\tau_i + \tau_f}{2}}^{\tau_f} d\tau \dots = J_1 + J_2. \quad (\text{A.30})$$

Das zweite Teilintervall wird so umgeformt, dass es auf den Einschaltvorgang reduziert werden kann. Dazu führt man als Erstes die Substitution  $\tau' = \tau - (\tau_i + \tau_f)/2$  und erhält unter Anwendung von Gl. (4.28)

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^{\frac{\tau_f - \tau_i}{2}} d\tau' E\left(\frac{\tau_i + \tau_f}{2} + \tau'\right) A_k\left(\mathbf{p}, E\left(\frac{\tau_i + \tau_f}{2} + \tau'\right)\right) \exp\left(im_e t_r \tilde{\phi}_k\left(\mathbf{p}, \frac{\tau_i + \tau_f}{2} + \tau'\right)\right) \\ &= \int_0^{\frac{\tau_f - \tau_i}{2} +} d\tau' E\left(\frac{\tau_i + \tau_f}{2} - \tau'\right) A_k\left(\mathbf{p}, E\left(\frac{\tau_i + \tau_f}{2} - \tau'\right)\right) \exp\left(im_e t_r \tilde{\phi}_k\left(\mathbf{p}, \frac{\tau_i + \tau_f}{2} + \tau'\right)\right). \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Als nächstes führt man die Substitution  $\tau'' = (\tau_i + \tau_f)/2 - \tau'$  aus. Daraus ergibt sich schließlich

$$J_2 = \int_{\tau_i}^{\frac{\tau_i + \tau_f}{2}} d\tau'' E(\tau'') A_k(\mathbf{p}, E(\tau'')) \exp\left(im_e t_r \tilde{\phi}_k(\mathbf{p}, \tau_i + \tau_f - \tau'')\right). \quad (\text{A.32})$$

Im Phasenfaktor in Gl. (A.32) muss noch das Integral  $J_\Omega$  über den Koeffizienten  $\tilde{\Omega}(\mathbf{p}, E(\tau))$  umgeformt werden.<sup>3</sup> Mit der Substitution  $\tau' = \tau - (\tau_i + \tau_f)/2$  folgt

$$J_\Omega = \int_{\tau_i}^{\tau_i + \tau_f - \tau''} d\tau \tilde{\Omega}(\mathbf{p}, E(\tau)) = \int_{\frac{\tau_i - \tau_f}{2}}^{\frac{\tau_i + \tau_f}{2} - \tau''} d\tau' \tilde{\Omega}\left(\mathbf{p}, E\left(\frac{\tau_i + \tau_f}{2} + \tau'\right)\right) \quad (\text{A.33})$$

---

<sup>3</sup>Siehe Gl. (4.27).

und unter erneuter Anwendung von Gl. (4.28) und mit der Substitution  $\tau = (\tau_i + \tau_f)/2 - \tau'$  erhält man

$$J_\Omega = \int_{\frac{\tau_i - \tau_f}{2}}^{\frac{\tau_i + \tau_f}{2} - \tau''} d\tau' \tilde{\Omega}\left(\mathbf{p}, E\left(\frac{\tau_i + \tau_f}{2} - \tau'\right)\right) = \int_{\tau''}^{\tau_f} d\tau \tilde{\Omega}(\mathbf{p}, E(\tau)). \quad (\text{A.34})$$

Da  $\tau_i \leq \tau'' \leq (\tau_i + \tau_f)/2$  gilt, kann man dieses Integral aufteilen in

$$\begin{aligned} J_\Omega &= \int_{\tau''}^{\frac{\tau_i + \tau_f}{2}} d\tau \tilde{\Omega}(\mathbf{p}, E(\tau)) + \int_{\frac{\tau_i + \tau_f}{2}}^{\tau_f} d\tau \tilde{\Omega}(\mathbf{p}, E(\tau)) \\ &= \int_{\tau''}^{\frac{\tau_i + \tau_f}{2}} d\tau \tilde{\Omega}(\mathbf{p}, E(\tau)) + \int_{\tau_i}^{\frac{\tau_i + \tau_f}{2}} d\tau \tilde{\Omega}(\mathbf{p}, E(\tau)). \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Der zweite Summand wurde analog zum bisherigen Vorgehen unter erneuter Anwendung von Gl. (4.28) und den beiden entsprechenden Substitutionen umgeformt. Setzt man Gl. (A.35) in Gl. (A.32) ein, erhält man unter Berücksichtigung der Definition der modenabhängigen Frequenz  $\tilde{\kappa}_k(\tau)$  in Gl. (4.33) für das Ausgangsintegral (A.29)

$$\begin{aligned} \int_{\tau_i}^{\frac{\tau_i + \tau_f}{2}} d\tau E(\tau) A_k(\mathbf{p}, E(\tau)) \left\{ \exp\left(im_e t_r \tilde{\phi}_k(\mathbf{p}, \tau)\right) \right. \\ \left. + \exp(-im_e t_r \tilde{\kappa}_k(\tau)) \exp\left(im_e t_r \tilde{\phi}\left(\frac{\tau_i + \tau_f}{2}\right)\right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Zieht man noch den konstanten Faktor im zweiten Summanden vor das Integral und berücksichtigt den Faktor  $e$ , erhält man schließlich das erste Integral in Gl. (4.31). Die Bestimmung von  $J_k^B(\mathbf{p}, \tau_f)$  läuft analog.

## A.4 Herleitung verwendeter Integrale

Im folgenden Teil des Anhanges werden die Integrale aus Gl. (4.46) ausgewertet. Dazu beginnt man mit der Betrachtung des des Integrals

$$I_0 = \int_0^\infty dy e^{iy^n}. \quad (\text{A.37})$$

Durch die Substitution  $y = i^{1/n} z^{1/n}$  erhält man

$$I_0 = \frac{i}{n} \int_0^\infty dz e^{-z} z^{-\frac{1}{n}-1} = \frac{i^{1/n}}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = i^{1/n} \Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right). \quad (\text{A.38})$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dy \cos(y^n) &= \int_0^{\infty} dy \cos(y^n) + \int_{-\infty}^0 dy \cos(y^n) = 2 \int_0^{\infty} dy \cos(y^n) \\ &= \int_0^{\infty} dy (e^{iy^n} + e^{-iy^n}) = 2 \operatorname{Re}(i^{1/n}) \Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Analog folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \sin(y^n) = \frac{(1 + (-1)^n)}{2i} \int_0^{\infty} dy (e^{iy^n} - e^{-iy^n}) = (1 + (-1)^n) \operatorname{Im}(i^{1/n}) \Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right). \quad (\text{A.40})$$

Mit

$$i^{1/n} = \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \quad (\text{A.41})$$

ergibt sich schließlich Gl. 4.46.

## A.5 Anleitung zur Anwendung der entwickelten Näherung

In diesem Abschnitt wird eine kurze Anleitung gegeben, welche Größen man für eine konkrete Parameterwahl und Feldkonfiguration benötigt, um die Gln. (4.54) bis (4.62) entsprechend auswerten zu können. Dabei liegt der Fokus insbesondere darauf, wie und in welcher Reihenfolge diese bestimmt werden können. Manche Größen muss man für jede Feldkonfiguration, andere für eine gegebene Parameterwahl nur einmal bestimmen.

1. Parameterwahl:
  - a) Festlegung der Feldstärken und Frequenzen  $E_0$  bis  $E_{0,3}$  und  $\nu$  bis  $\nu_3$ .
  - b) Festlegung des Impulses in Form von  $p_{\parallel}$  und  $p_{\perp}$ .
2. Bestimmung der Moden  $k_{\min} = 2\chi\tilde{\epsilon}(\mathbf{p})$  und  $k_{\max} = 2\chi\tilde{\Omega}(\mathbf{p}, E_0)$  mittels numerischer Integration des ersten Integrals in Gl. (4.6).
3. Numerische Bestimmung der Feldstärken  $E_{\tau_0,k}$  aus der Bedingung (4.37).
4. Bestimmung der Koeffizienten  $A_k(\mathbf{p}, E_{\tau_0,k})$  und  $\tilde{\Omega}'(\mathbf{p}, E_{\tau_0,k})$  mittels numerischer Integration des ersten Integrals in der Gl. (4.30) und des Integrals in Gl. (4.42). Für das Flat-Top-Profil muss auch noch  $\tilde{\Omega}(\mathbf{p}, E_{\tau_0,k})$  aus Gl. (4.17) bestimmt werden.
5. Durch konkrete Wahl der Ein- und Ausschaltfunktion  $K(\tau)$  Bestimmung der stationären Phasenpunkte  $\tau_{0,k}$  entweder über die Umkehrfunktion  $\tau_{0,k} = E^{-1}(E_{\tau_0,k})$  oder falls nicht explizit zu erhalten numerisch über die Bedingung  $E_{\tau_0,k} = E(\tau_{0,k})$ .

6. Daraus folgen entsprechend  $K(\tau_{0,k})$ ,  $K'(\tau_{0,k})$  und im Resonanzfall  $K^{[n_\ell-1]}(\tau_{0,\ell})$ .
7. Zuletzt bestimmt man noch die modenabhängige Frequenz  $\kappa_k(\tau_{0,k})$  mittels numerischer Integration von Gl. (4.33) und erhält damit den Koeffizienten  $\Delta_k^A(\mathbf{p}, t_r)$  aus Gl. (4.48).

Nur die letzten drei Schritte müssen für jede konkrete Wahl der Einhüllenden  $K(\tau)$  durchgeführt werden. Die anderen zu bestimmenden Größen sind davon unabhängig. Davon ausgehend kann nun die Residualdichte  $f(\mathbf{p}, t_\infty)$  in der Stationäre-Phase-Näherung nach Gl. (4.54) bzw. im Resonanzfall nach Gl. (4.56) für beliebige Zeitskalenparameter  $t_r$  ausgegeben werden.

# B Näherungen zur Nullmode der Quasiteilchenenergie

In diesem Teil des Anhangs wird der Fourier-Koeffizient  $\Omega(\mathbf{p}, E(\tau))$  für

$$h_i(x) = \cos(x) \tag{B.1}$$

für drei Spezialfälle ausgewertet.<sup>1</sup> Es wird der Fall  $\gamma \gg 1$ , was dem Paarerzeugungsregime der Multiphotonen-Absorption entspricht, betrachtet. Die Näherung für  $\gamma \leq 1$  deckt für  $\alpha_3 = \alpha_2 = 0$  die Paarerzeugung im Tunnel-Regime und für  $\alpha_3 \leq \alpha_2 \ll 1$  die Paarerzeugung durch den dynamisch assistierten Schwinger-Effekt ab. Ausgangspunkt ist damit die Definition des Koeffizienten aus Gl. (4.17). In dimensionsloser Darstellung  $\tilde{\Omega}(\mathbf{p}, E(\tau)) = \Omega(\mathbf{p}, E(\tau)) / m_e$  folgt nach der Definition des Keldysh-Parameters aus Gl. (1.10)

$$\tilde{\Omega}(\mathbf{p}, \nu t, K(\tau)) = \frac{1}{T} \int_0^T dt \sqrt{\tilde{\epsilon}_\perp (p_\perp)^2 + \left( \frac{p_\parallel}{m_e} - \frac{K(\tau)}{\gamma} h(\nu t) \right)^2}. \tag{B.2}$$

Die Taylor-Entwicklung des Integranden für  $\gamma \gg 1$  ergibt schließlich

$$\tilde{\Omega}(\mathbf{p}, \nu t, K(\tau)) = \frac{1}{T} \int_0^T dt \left\{ \tilde{\epsilon}(\mathbf{p}) - \frac{p_\parallel}{\epsilon(\mathbf{p})} \frac{K(\tau)}{\gamma} h(\nu t) + \mathcal{O}(\gamma^{-2}) \right\} = \tilde{\epsilon}(\mathbf{p}) + \mathcal{O}(\gamma^{-2}). \tag{B.3}$$

Im letzten Schritt wurde der Ansatz aus Gl. (B.1) verwendet. Damit ist für den Bereich der Multiphotonen-Absorption Gl. (5.1) hinreichend begründet.

Im Folgenden wird der Fall  $\gamma \leq 1$  betrachtet. Es folgt für  $\alpha_3 = \alpha_2 = 0$  exakt und für  $\alpha_3 \leq \alpha_2 \ll 1$  näherungsweise aus Gl. (3.9) und unter Berücksichtigung von Gl. (B.1)

$$\tilde{\Omega}(\mathbf{p}, \nu t, K(\tau)) \approx \frac{1}{T} \int_0^T dt \sqrt{\tilde{\epsilon}_\perp (p_\perp)^2 + \left( \frac{p_\parallel}{m_e} \right)^2 + \frac{2p_\parallel}{m_e} \frac{K(\tau)}{\gamma} \cos(\nu t) + \left( \frac{K(\tau)}{\gamma} \right)^2 \cos(\nu t)^2}. \tag{B.4}$$

---

<sup>1</sup>Vgl. Kapitel (3) bzgl. der hier verwendeten Notationen.

Damit folgt für  $K\gamma^{-1} \gg p_{\parallel}/m_e$  oder  $K\gamma^{-1} \ll p_{\parallel}/m_e$  näherungsweise

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}(\mathbf{p}, \nu t, K(\tau)) &\approx \frac{1}{T} \int_0^T dt \sqrt{\tilde{\epsilon}(\mathbf{p})^2 + \left(\frac{K(\tau)}{\gamma}\right)^2 \cos(\nu t)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \sqrt{\tilde{\epsilon}(\mathbf{p})^2 + \left(\frac{K(\tau)}{\gamma}\right)^2} \right) \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{1 - \left(\frac{K(\tau)^2}{(\gamma\tilde{\epsilon}(\mathbf{p}))^2 + K(\tau)^2}\right) \sin(\theta)^2}.\end{aligned}\tag{B.5}$$

Mit der Definition

$$E_2(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sqrt{1 - x \sin(\theta)^2}\tag{B.6}$$

des vollständigen elliptischen Integrals der zweiten Art folgt somit Gl. (5.4).

# C Verhalten der Quasiteilchendichte im Flat-Top-Intervall

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass sich aus Gl. (2.42) mit Hilfe des Floquet-Theorems eine fundamentale Aussage über das Zeitverhalten der Quasiteilchendichte in Bereichen zwischen dem Ein- und Ausschaltvorgang gewinnen lässt, wenn die Einhüllende  $K(t/t_r)$  exakt oder zumindest näherungsweise konstant ist. Für die symmetrischen Feldkonfigurationen aus Abschnitt 3 entspricht dies Zeiten innerhalb des (effektiven) Flat-Top-Intervalls  $t_{f.t.}^{\text{eff}}$ . Für diesen Bereich ergibt sich nach der Transformation  $\mu = \alpha \exp(-i\Theta)$  und  $v = \beta \exp(-i\Theta)$  aus Gl. (2.42) das Differentialgleichungssystem  $\dot{y}(\mathbf{p}, \nu t) = O(\mathbf{p}, \nu t)y(\mathbf{p}, \nu t)$  mit der periodischen Koeffizientenmatrix

$$O(\mathbf{p}, \nu t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2i\omega(\mathbf{p}, E_0) & Q(\mathbf{p}, \nu t, E_0) \\ -Q(\mathbf{p}, \nu t, E_0) & 2i\omega(\mathbf{p}, E_0) \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

und der Definition

$$y(\mathbf{p}, t) = \begin{pmatrix} \mu(\mathbf{p}, t) \\ v(\mathbf{p}, t) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Die Anfangsbedingungen seien nach entsprechender (numerischer) Lösung der vollständigen Gl. (2.42) zu Beginn des (effektiven) Flat-Top-Intervalls zur Zeit  $t_0 = (t_i + t_f - t_{f.t.}^{\text{eff}})/2$  gegeben durch  $y_0(\mathbf{p}) = y(\mathbf{p}, t_0)$ . Die Fundamentalmatrix  $W(\mathbf{p}, t)$  des Systems enthält den zweidimensionalen Lösungsraum und ist mit

$$y(\mathbf{p}, t) = W(\mathbf{p}, t) y_0(\mathbf{p}) \quad (\text{C.3})$$

gegeben durch

$$\frac{d}{dt} W(\mathbf{p}, t) = O(\mathbf{p}, \nu t) W(\mathbf{p}, t). \quad (\text{C.4})$$

Der Satz von Floquet besagt, dass sich die Lösung der periodischen Matrixdifferentialgleichung (C.4) in das Produkt

$$W(\mathbf{p}, t) = G(\mathbf{p}, \nu t) \exp(C(\mathbf{p})t) \quad (\text{C.5})$$

aufspalten lässt [38]. Dabei ist  $G \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  eine  $T = 2\pi/\nu$  periodische Matrix. Die Funktion  $\exp(Ct)$  ist in diesem Fall eine Matrixexponentialfunktion. Die konstante  $C \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  wird auch als Monodromie-Matrix bezeichnet. Sie lässt sich mit  $G(\mathbf{p}, \nu t_0) = 1$  aus der Fundamentalmatrix durch Umstellen von Gl. (C.5) zur Zeit  $t = t_0 + n_{f.t.}T$  als

$$C(\mathbf{p}) = \frac{\ln(W(\mathbf{p}, n_{f.t.}T))}{n_{f.t.}T} \quad (\text{C.6})$$

modulo einer Konstanten  $\pm ik\nu$  mit  $n_{f.t.}, k \in \mathbb{N}$  bestimmen. Da aufgrund der Unitarität der Bogoliubov-Transformation  $|\mu(\mathbf{p}, t)|^2 + |\nu(\mathbf{p}, t)|^2 = 1$  gilt, folgt aus dem Skalarprodukt

$$y^\dagger(\mathbf{p}, t)y(\mathbf{p}, t) = y_0^\dagger(\mathbf{p})W^\dagger(\mathbf{p}, t)W(\mathbf{p}, t)y_0(\mathbf{p}) = y_0^\dagger(\mathbf{p})y_0(\mathbf{p}) = 1 \quad (\text{C.7})$$

die Unitarität der Fundamentalmatrix  $W$ . Da die Matrixexponentialfunktion die Eigenschaft  $\exp(X)^\dagger = \exp(X^\dagger)$  besitzt, folgt daraus, dass die Monodromie-Matrix  $C$  schieferhermitesch ist. Das heißt es gilt  $C^\dagger = (C^*)^T = -C$  und damit  $C_{21} = -C_{12}^*$  für die Neben- und  $C_{22} = C_{11}^* = -C_{11}$  für die Hauptdiagonalelemente mit  $\text{Re}(C_{11}) = 0$ . Die Matrix  $C$  besitzt also insgesamt nur zwei unabhängige Komponenten. Der periodische Anteil  $G$  der Lösung ist nur für Zeiten  $t \neq n_{f.t.}T$  von Bedeutung. Der wesentliche Beitrag zur Quasiteilchendichte steckt in der Monodromie-Matrix. Um diesen sichtbar zu machen, führt man die unitäre Transformation

$$\tilde{y}(\mathbf{p}, t) = G^{-1}(\mathbf{p}, \nu t)y(\mathbf{p}, t) \quad (\text{C.8})$$

durch. Die so erhaltenen neuen Koeffizienten  $\tilde{\mu}$  und  $\tilde{\nu}$  stimmen für Zeiten  $t = n_{f.t.}T$  mit den alten überein. Dann ergibt sich für volle Periodendurchgänge die Quasiteilchendichte aus

$$f(\mathbf{p}, n_{f.t.}T) = \tilde{f}(\mathbf{p}, n_{f.t.}T) = 2|\tilde{\nu}(\mathbf{p}, n_{f.t.}T)|^2. \quad (\text{C.9})$$

Unter Verwendung der Gln. (C.5) und (C.3) folgt nach einmaliger zeitlicher Ableitung das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt}\tilde{y}(\mathbf{p}, t) = C(\mathbf{p})\tilde{y}(\mathbf{p}, t) \quad (\text{C.10})$$

mit der Monodromie-Matrix  $C$  als zeitlich konstanter Koeffizientenmatrix. Der Lösungsraum des Systems,

$$\tilde{y}(\mathbf{p}, t) = k_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (\text{C.11})$$

ergibt sich unter Ermittlung der Eigenwerte  $\lambda_{1,2}$  und Eigenvektoren  $\mathbf{v}_{1,2}$  aus der Eigenwertgleichung  $C\mathbf{v}_{1,2} = \lambda_{1,2}\mathbf{v}_{1,2}$ . Die Koeffizienten  $k_1$  und  $k_2$  werden durch die Anfangsbedingungen

$\tilde{\mu}_0(\mathbf{p}) = \mu_0(\mathbf{p}) = \alpha_0(\mathbf{p}) \exp(-i\Theta(\mathbf{p}, t_0))$  und  $\tilde{\nu}_0(\mathbf{p}) = \tilde{\nu}_0(\mathbf{p}) = \beta_0(\mathbf{p}, t_0) \exp(i\Theta(\mathbf{p}, t_0))$  festgelegt. Da  $C$  schiefhermitesch ist, ergeben sich die rein imaginären Eigenwerte

$$\lambda_{1/2}(\mathbf{p}) = \pm i\xi(\mathbf{p}) = \pm i\sqrt{|C_{11}(\mathbf{p})|^2 + |C_{12}(\mathbf{p})|^2} \quad (\text{C.12})$$

mit den dazugehörigen Eigenvektoren

$$\mathbf{v}_{1/2} = \begin{pmatrix} C_{11}^* \pm i\xi \\ C_{12}^* \end{pmatrix}. \quad (\text{C.13})$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen in Gl. (C.11) für  $t = t_0$  liefert schließlich

$$\tilde{\nu}(\mathbf{p}, t) = -\frac{C_{12}^*(\mathbf{p})}{\xi(\mathbf{p})} \tilde{\mu}_0(\mathbf{p}) \sin(\xi(\mathbf{p}) t) + \frac{C_{11}^*(\mathbf{p})}{\xi(\mathbf{p})} \tilde{\nu}_0(\mathbf{p}) (\cos(\xi(\mathbf{p}) t)). \quad (\text{C.14})$$

Daraus folgt für das Zeitverhalten der Quasiteilchendichte innerhalb des Flat-Top-Intervalls der maßgebliche Anteil

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\mathbf{p}, t) = & \frac{2}{\xi(\mathbf{p})^2} \left( |C_{12}(\mathbf{p})|^2 |\alpha_0(\mathbf{p})|^2 \sin(\xi(\mathbf{p}) t)^2 + |C_{11}(\mathbf{p})|^2 |\beta_0(\mathbf{p})|^2 \cos(\xi(\mathbf{p}) t)^2 \right. \\ & \left. - 2 \operatorname{Re}(C_{11}^*(\mathbf{p}) C_{12}(\mathbf{p}) \alpha_0^*(\mathbf{p}) \beta_0(\mathbf{p}) \cos(\xi(\mathbf{p}) t) \sin(\xi(\mathbf{p}) t)) \exp(2i\Theta(\mathbf{p}, t_0)) \right). \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Er stimmt für  $t = n_{\text{f.t.}} T$  exakt mit der Quasiteilchendichtedichte  $f(\mathbf{p}, t)$  überein. Diese wird für  $t \neq n_{\text{f.t.}} T$  durch die entsprechenden Oszillationsbeiträge der periodischen Matrix  $G(\mathbf{p}, \nu t)$  modifiziert.

Für den Fall ohne Ein- und Ausschaltfunktion gilt für die Bogoliubovkoeffizienten zur Startzeit des Feldes  $\alpha_0(\mathbf{p}) = 1$  und  $\beta_0(\mathbf{p}) = 0$ . Dann ergibt sich mit der Pulslänge  $t_{\text{f.t.}} = n_{\text{f.t.}} T$  die Residualteilchendichte nach Gl. (C.15) zu

$$f(\mathbf{p}, t_\infty) = \frac{2 |C_{12}(\mathbf{p})|^2}{\xi(\mathbf{p})^2} \sin(\xi(\mathbf{p}) n_{\text{f.t.}} T)^2. \quad (\text{C.16})$$

Für den Fall  $f \ll 1$  folgt daraus in Einklang zur Niederdichte-Näherung (4.10) ein quadratisches Zeitverhalten  $f(\mathbf{p}, t_\infty) \approx 2 |C_{12}(\mathbf{p})|^2 (n_{\text{f.t.}} T)^2$  der Residualteilchendichte in Bezug auf die Flat-Top-Intervalllänge  $t_{\text{f.t.}} = n_{\text{f.t.}} T$ .

Der große Vorteil an Gleichung (C.11) ist, dass man sie für numerische Berechnungen der Residualteilchendichte  $f(\mathbf{p}, t_\infty)$  nutzen kann, wenn die gewählte Ein- und Ausschaltfunktion ein Flat-Top-Intervall besitzt wie die Feld-Konfiguration aus Abschnitt 3.4 und man außerdem  $t_{\text{f.t.}} = n_{\text{f.t.}} T$  wählt. Nur der konkrete Einschalt- und Ausschaltvorgang, wo die Einhüllende nicht konstant bleibt, muss vollständig mit Hilfe einer Integrationsroutine gelöst werden. Für den Flat-Top-Bereich muss man nur bis einem Zeitpunkt  $t_0 + nT$  mit  $n \in \mathbb{N}$  das Differentialgleichungssystem (C.4) numerisch lösen. Dann kann mit Gl. (C.6) die Monodromie-Matrix

bestimmt werden. Deren Eigenwerte und Eigenvektoren sind durch die Gln. (C.12) und (C.13) gegeben. Die Koeffizienten  $k_1, k_2$  folgen entsprechend aus den Anfangsbedingungen zur Zeit  $t_0 = (t_i + t_f - t_{f.t.}^{\text{eff}})/2$ . Damit erhält man mit Gl. (C.11) sofort die Lösung  $\tilde{y}(\mathbf{p}, t_1) = y(\mathbf{p}, t_1)$  für  $t_1 = (t_i + t_f + t_{f.t.}^{\text{eff}})/2$ . Die Koeffizienten  $\mu(\mathbf{p}, t_1)$  und  $v(\mathbf{p}, t_1)$  nutzt man als Anfangsbedingungen für den Ausschaltvorgang, der wieder vollständig numerisch gelöst werden muss. Dadurch können de facto beliebig große Flat-Top-Zeiten  $t_{f.t.} = n_{f.t.} T$  betrachtet werden, ohne dass die dafür benötigte Rechendauer signifikant steigt.

# Literatur

- [1] F. Sauter. “Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs”. In: Z. Phys. **69**, 742 (1931).
- [2] P.A. Dirac. “The Quantum Theory of the Electron”. In: Proc. R. Soc. A **52**, 117 (1928).
- [3] P.A. Dirac. “A Theory of Electrons and Protons”. In: Proc. R. Soc. A **126**, 360 (1930).
- [4] C.D. Anderson. “The Apparent Existence of Easily Deflectable Positives”. In: Science **76**, 238 (1932).
- [5] O. Klein. “Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac”. In: Z. Phys. **53**, 157 (1929).
- [6] A. Blinne. *Electron Positron Pair Production in Strong Electric Fields*. Dissertation, Friedrich-Schiller-Universität Jena, 2016, arXiv:1701.00743v1 [hep-th].
- [7] J. Schwinger. “On Gauge Invariance and Vacuum Polarization”. In: Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [8] P. W. Milonni. *The quantum vacuum. An introduction to quantum Electrodynamics*. Academic Press, 1994.
- [9] The Extreme Light Infrastructure (ELI) project: <http://www.eli-np.ro/>.
- [10] A. Ringwald. “Pair Production from Vacuum at the Focus of an X-Ray Free Electron Laser”. In: Phys. Lett. B **94**, 107 (2001). arXiv:hep-ph/0103185v1 [hep-th].
- [11] *Helmholtz International Beamline for Extreme Fields at the European XFEL (HIBEF)*: [www.hzdr.de/hgfbeamline](http://www.hzdr.de/hgfbeamline).
- [12] E. Brezin und C. Itzykson. In: Phys. Rev. D **2**, 1192 (1970).
- [13] Keldysh. “Ionization in the field of a strong electromagnetic wave”. In: Sov. Phys. JETP **20**, 1307 (1965).
- [14] D. L. Burke u. a. “Positron Production in Multiphoton Light-by-Light Scattering”. In: Phys. Rev. Lett. **79**, 1626 (1997).
- [15] D. B. Blaschke u. a. “Properties of the electron-positron plasma created from a vacuum in a strong laser field: Quasiparticle excitations”. In: Phys. Rev. D **88**, 045017 (2013).
- [16] G. Breit und J. A. Wheeler. “Collision of Two Light Quanta”. In: **46**, 1087 (1934).

- 
- [17] A. Di Piazza u. a. “Barrier control in tunneling  $e^+e^-$  photoproduction”. In: Phys.Rev.Lett. **103**, 170403 (2009). arXiv:0906.0726 [hep-ph].
- [18] R. Schützhold, H. Gies und G. Dunne. “Dynamically assisted Schwinger mechanism”. In: Phys. Rev. Lett. **101**, 130404 (2008). arXiv:0807.0754 [hep-th].
- [19] G. Dunne, H. Gies und R. Schützhold. “Catalysis of Schwinger Vacuum Pair Production”. In: Phys.Rev.D **80**, 111301 (2009). arXiv:0908.0948 [hep-ph].
- [20] C. Kohlfürst. *Electron-Positron Pair Production in Structured Pulses of Electric Fields*. Masterarbeit, Karl-Franzens-Universität Graz, 2012.
- [21] M. Orthaber, F. Hebenstreit und R. Alkofer. “Momentum Spectra for Dynamically Assisted Schwinger Pair Production”. In: Phys. Lett. B **698**, 80 (2011). arXiv:1102.2182v1 [hep-th].
- [22] J. Sicking. *Pulsformabhängigkeit im dynamisch verstärkten Sauter-Schwinger-Effekt*. Bachelorarbeit, Universität Duisburg-Essen, 2012.
- [23] H. Oppitz. *Dynamisch assistierter Schwinger-Effekt in unterschiedlichen Feldkonfigurationen*. Bachelorarbeit, Karl-Franzens-Universität Graz, 2013.
- [24] A. Nuriman u. a. “Enhanced electron–positron pair creation by dynamically assisted combinational fields”. In: Physics Lett. B **717**, 465 (2012).
- [25] Z. L. Li u. a. “Enhanced pair production in strong fields by multiple-slit interference effect with dynamically assisted Schwinger mechanism”. In: Phys. Rev. D **89**, 093011 (2014).
- [26] A. Otto. *Paarerzeugung: Teilchendynamik in elektromagnetischen Feldern*. Diplomarbeit, TU Dresden, 2013.
- [27] A. Otto u. a. “Lifting shell structures in the dynamically assisted Schwinger effect in periodic fields”. In: Phys. Lett. B **740**, 335 (2015). arXiv: 1412.0890 [hep-th].
- [28] A. Otto u. a. “Dynamical Schwinger process in a bifrequent electric field of finite duration: survey on amplification”. In: Phys.Rev. D **91** no. 10, 10501 (2015). arXiv:1503.08675 [hep-th].
- [29] A. Otto u. a. “Pair production by Schwinger and Breit-Wheeler processes in bi-frequent fields”. In: J. Plasma Phys. **82**, 655820301 (2016). arXiv:1604.00196 [hep-ph].
- [30] D. A. Panferov u. a. “Assisted dynamical Schwinger effect: pair production in a pulsed bifrequent field”. In: Eur. Phys. J. D **70**, 56 (2016). arXiv:1509.02901v1 [hep-ph].
- [31] S. Schmidt u. a. “Quantum kinetic equation for particle production in the Schwinger mechanism”. In: Int. J. Mod. Phys. E. **7**, 709 (1998).

- 
- [32] F. Hebenstreit, R. Alkofer und H. Gies. “Schwinger pair production in space- and time-dependent electric fields: Relating the Wigner formalism to quantum kinetic theory”. In: *Phys. Rev. D* **82**, 105026 (2010). arXiv:1007.1099v2 [hep-th].
- [33] T. Nusch u. a. “Laser assisted Breit-Wheeler and Schwinger processes”. In: *FIAS Interdisc. Sci. Ser.* 9783319441658, 253 (2017). arXiv:1604.00201 [hep-ph].
- [34] A. Ilderton, G. Torgrimsson und J. Wårdh. “Nonperturbative pair production in interpolating fields”. In: *Phys. Rev. D* **92**, 065001 (2015).
- [35] G. Torgrimsson, J. Oertel und R. Schützhold. “Doubly assisted Sauter-Schwinger effect”. In: *Phys. Rev. D* **94**, 065035 (2016).
- [36] M. Orthaber. *Electron-Positron Pair Production in Multiple Time Scale Electric Fields*. Diplomarbeit, Karl-Franzens-Universität Graz, 2010.
- [37] R. Dabrowski und G. Dunne. “Super-Adiabatic Particle Number in Schwinger and de Sitter Particle Production”. In: *Phys. Rev. D* **90**, 025021 (2014). arXiv:1405.0302 [hep-th].
- [38] S. Hsu. *Ordinary differential equations with applications*. 2. Aufl. Applied Mathematics 75. World Scientific, 2013.
- [39] H. P. Breuer und M. Holthaus. “Adiabatic processes in the ionization of highly excited hydrogen atoms.” In: *Z. Phys. D-Atoms, Molecules and Clusters* **11**, 1 (1989).
- [40] P. D. Miller. *Applied asymptotic analysis*. Graduate Studies in Mathematics 75. American Mathematical Society, 2006.

## Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Burkhard Kämpfer als dem Betreuer meiner Masterarbeit. Ich möchte mich aber vor allem auch dafür bedanken, dass ich seit dem Ende meiner Bachelorarbeit durchgängig die Möglichkeit hatte, als Studentische Hilfskraft in der Arbeitsgruppe in Dresden tätig zu bleiben.

Vor allem möchte ich natürlich Andreas Otto danken, der mich nun schon durch die zweite Abschlussarbeit geleitet hat. Auf meine Fragen hatte er immer sehr hilfreiche und anregende Antworten parat.

Ein besonderer Dank gilt PD Dr. Günther Plunien für seine Bereitschaft sich als Zweitgutachter dieser Arbeit zur Verfügung zu stellen. Insbesondere möchte ich mich aber auch für die Zeit bedanken, die er sich für meine kleinen Zwischenberichte genommen hat. Nicht zuletzt haben sich diverse Elemente seiner Vorlesungen, die ich bei Ihm während meines Studiums an der TU Dresden besucht habe, in dieser Arbeit sehr bezahlt gemacht.

Bedanken möchte ich mich auch für die vom Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf zur Verfügung gestellten Ressourcen. Dies betrifft vor allem die Rechentechnik, ohne die fast alle numerischen Resultate dieser Arbeit in ihrem Umfang unvorstellbar gewesen wären. Vielen Dank auch an die immer sehr hilfsbereiten Mitarbeiter.

Auf keinen Fall versäumen sollte ich es, mich bei Herrn Uwe Hernandez-Acosta zu bedanken. Er hatte sich völlig freiwillig dazu bereit erklärt, meine Arbeit zu einem Zeitpunkt Korrektur zu lesen, als es noch sehr schwierig war, irgendetwas daraus zu entnehmen. Seine Anmerkungen waren an vielen Stellen sehr gewinnbringend.

## Selbstständigkeitserklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Ich reiche sie erstmals als Prüfungsleistung ein. Mir ist bekannt, dass ein Betrugsversuch mit der Note „nicht ausreichend“ (5,0) geahndet wird und im Wiederholungsfall zum Ausschluss von der Erbringung weiterer Prüfungsleistungen führen kann.

Name: Oppitz

Vorname: Hans

Matrikelnummer: 3357879

Dresden, den 01.02.2017

Hans Oppitz