

FORSCHUNGSZENTRUM
ROSSENDORF e.V.

FZR

Archiv

FZR-178

April 1997

Gerhard Grunwald

**Theoretische Untersuchungen zur Fluid-
Struktur-Wechselwirkung in zweiphasig
durchströmten Schwingungsmodellen**

Forschungszentrum Rossendorf e.V.

Postfach 51 01 19 · D-01314 Dresden

Bundesrepublik Deutschland

Telefon (0351) 260 2502

Telefax (0351) 260 2383

E-Mail hoehne@fz-rossendorf.de

**THEORETISCHE UNTERSUCHUNGEN ZUR FLUID-STRUKTUR-
WECHSELWIRKUNG IN ZWEIPHASIG DURCHSTRÖMTEN
SCHWINGUNGSMODELLEN**

G. Grunwald

Forschungszentrum Rossendorf, Institut für Sicherheitsforschung
Postfach 510119, D - 10314 Dresden

April 1997

Kurzfassung

Ausgehend von den Grundgleichungen für Kontinuität, Impuls und Energie einer Zweiphasenströmung werden Beziehungen für ein Ersatzfluid des Gas- Flüssigkeits-Gemisches mit orts- und zeitabhängiger Dichte und Geschwindigkeit aufgestellt und anhand eines Siedemodells geprüft.

Es folgen Anwendungen auf ein 1D- und ein 2D- Schwingungsmodell (Pendel im Zweiphasenstrom) unter Berücksichtigung der Fluid-Struktur- Wechselwirkung und die Berechnung von Eigenfrequenzen und Dämpfungen.

Inhalt	Seite
1. Einleitung	1
2. Grundgleichungen und ihre Anwendung auf Zweiphasenströmungen	2
2.1 Mengenströmbilanz für strömende Gas-Flüssigkeits-Gemische, Definitionen und Kontinuitätsgleichung	2
2.2 Impulsgleichung	5
2.3 Energiegleichung	8
3. Schlupf	9
4. Reibungsdruckabfall	13
5. Ersatzfluid einer Zweiphasenströmung mit ortsabhängiger Dichte und Geschwindigkeit	17
5.1 Gleichungen des Ersatzfluids	17
5.2 Nachweis der Brauchbarkeit des Ersatzfluids durch Berechnung der Druckanteile einer 1D-Strömung im Vergleich mit exakten Lösungen	19
5.2.1 Siedekanal als Modell einer Zweiphasenströmung	19
5.2.2 Druckverteilungen aus der Impulsgleichung im Lösungsvergleich	21
6. Pendelschwingungen in Zweiphasenströmungen	26
6.1 1D-Schwingungsmodell mit ebenen Spalten für Zweiphasenströmungen mit ortsabhängiger Fluidichte und -geschwindigkeit	27
6.2 2D-Schwingungsmodell mit Ringspalt für Zweiphasenströmungen mit konstanter mittlerer Fluidichte und -geschwindigkeit	36
7. Zusammenfassung und Ausblick	38
8. Literatur	39
 Anhang: 20 Abbildungen	

1. Einleitung

Fast unüberschaubar - sowohl in der Zahl als auch in ihrer Vielfalt - sind die Publikationen zur Strömung und den Wärmeübergang in Zweiphasengemischen; eine Forschungsrichtung, die möglicherweise in den letzten 20 Jahren ihren Höhepunkt erreichte und deren Ende heute noch nicht abzusehen ist.

Hauptursache dafür ist die Komplexität von strömenden Gas-Flüssigkeits-Gemischen und den hieraus resultierenden Schwierigkeiten bei ihrer physikalisch-mathematischen Modellierung, wobei den Verfahren zur Beschreibung von Zweiphasenströmungen und ihren Wirkungen eine erhebliche Bedeutung auch für die Sicherheit wirtschaftlich relevanter Industrieanlagen und deren Komponenten, wie z. B. chemische oder kerntechnische Reaktoren, zukommt.

Stellvertretend und als Beispiele für eine gute Fachliteratur auf diesem Gebiet seien hier nur die Publikationen von D. Butterworth und G. F. Hewitt [1], E. A. Bergles [2], F. Mayinger [3] und N. I. Kolev [4] genannt.

Als eine noch relativ junge Disziplin ist die Einbeziehung der Zweiphasenströmung in das weite Feld der Fluid-Struktur-Wechselwirkung anzusehen.

Die Erweiterung der Schwingungsmodellierung eines Druckwasserreaktors unter Berücksichtigung der Fluid-Struktur-Wechselwirkung [5], z. B. auf bestimmte Störfallszenarien, erfordert Anstrengungen in dieser Richtung.

In der vorliegenden Studie wird von den im Rahmen von [5] untersuchten Pendelschwingungen in einem Einphasenstrom (Wasser) ausgegangen und eine Modifikation dieses Schwingungsmodells von Ein- auf Zweiphasenströmungen versucht.

Um den mathematischen Aufwand in Grenzen zu halten, soll dazu ein geeignetes Ersatzfluid für das strömende Zweiphasengemisch gefunden und die Grenzen dessen Brauchbarkeit nachgewiesen werden. Damit kann dann die Zweiphasenströmung mathematisch wie eine Einphasenströmung behandelt werden, wobei aber im allgemeinen die Ersatzdichte und -geschwindigkeit des Zweiphasengemisches orts- und zeitabhängig sind.

Diese Vorgehensweise birgt allerdings auch Gefahren, die sich z. B. aus der Vielzahl der möglichen Konfigurationen der Verteilung der Gasphase im strömenden Fluid ergeben. Die Brauchbarkeitsgrenzen der theoretischen Ergebnisse dieser Studie müßten daher noch experimentell nachgewiesen werden.

An dieser Stelle dankt der Verfasser Herrn Dr. Eberhard Altstadt und Herrn Dipl.-Phys. Jürgen Zoller für die vielen Diskussionen und wertvollen Anregungen bei der Anfertigung der vorliegenden Studie.

2. Grundgleichungen und ihre Anwendung auf Zweiphasenströmungen

2.1 Mengenstrombilanz für strömende Gas-Flüssigkeits-Gemische, Definitionen und Kontinuitätsgleichung

Auch für strömende Gas-Flüssigkeits-Gemische gelten wie bei einphasigen Fluiden die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie.

Im Interesse der Anschaulichkeit erfolgt die Mengenstrombilanz zunächst für den ein-dimensionalen (1D-) Fall eines durchströmten Kanals mit dem Querschnitt A längs der Koordinate z .

Dazu wird angenommen, daß beide Phasen im Kanal getrennt strömen (Bild 1), wobei \dot{M}_F den Massenstrom der Flüssigkeit mit dem Querschnittsanteil A_F und \dot{M}_G den Massenstrom des Gases mit dem Anteil A_G bedeuten.

Mit M_F bzw. M_G werden die entsprechenden gespeicherten Massenanteile im Volumenelement Adz bezeichnet.

Für beide Phasen lautet die Mengenstrombilanz

$$\begin{aligned}\dot{M}_F - (\dot{M}_F + \dot{M}_{F,z} dz) &= M_{F,t} \quad , \\ \dot{M}_G - (\dot{M}_G + \dot{M}_{G,z} dz) &= M_{G,t}\end{aligned}$$

und somit

$$M_{F,t} + M_{G,t} + \dot{M}_{F,z} dz + \dot{M}_{G,z} dz = 0 \quad . \quad (2.1)$$

Bevor aus (2.1) die Kontinuitätsgleichung für Zweiphasenströmungen folgt, werden einige grundlegende Definitionen angegeben, auf die auch in den weiteren Abschnitten zurückgegriffen wird.

Bezogen auf das Volumenelement $dV = Adz$ wird der Volumenanteil des Gases im Kanal

$$\epsilon = \frac{A_G dz}{Adz} = \frac{A_G}{A_F + A_G} = \frac{V_G}{V_F + V_G} = \frac{V_G}{V} \quad (2.2)$$

als örtlicher volumetrischer Gas- oder Dampfgehalt der Zweiphasenströmung bezeichnet.

Wegen $M = V\rho$ läßt sich auch ein örtlicher, auf die Gesamtmasse bezogener Gasanteil x mit der Gasdichte ρ_G und der Flüssigkeitsdichte ρ_F definieren:

$$x = \frac{V_G \rho_G}{V_F \rho_F + V_G \rho_G} = \frac{M_G}{M_F + M_G} = \frac{M_G}{M} , \quad (2.3)$$

der in Dampf-Flüssigkeits-Gemischen auch als Dampfgehalt bekannt ist.

Anstelle der im Bilanzvolumen vorhandenen Mengen können auch die Ströme der Phasen betrachtet werden. Dann folgt aus (2.3) der auf den Massenstrom bezogene Gasgehalt \dot{x} des Gemisches:

$$\dot{x} = \frac{\dot{M}_G}{\dot{M}_F + \dot{M}_G} = \frac{\dot{M}_G}{\dot{M}} . \quad (2.4)$$

Weiter wird mit der Umrechnung über die Dichten der Anteil $\dot{\epsilon}$ des Gases am Volumenstrom:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{M}_G / \rho_G}{\dot{M}_F / \rho_F + \dot{M}_G / \rho_G} = \frac{\dot{V}_G}{\dot{V}_F + \dot{V}_G} = \frac{\dot{V}_G}{\dot{V}} . \quad (2.5)$$

Die mittleren Phasengeschwindigkeiten, die aber im allgemeinen orts- und zeitabhängig sind, folgen aus

$$u_G = \frac{\dot{M}_G}{A_G \rho_G} , \quad (2.6)$$

und

$$u_F = \frac{\dot{M}_F}{A_F \rho_F} . \quad (2.7)$$

Als Schlupf bezeichnet man das Verhältnis

$$S = \frac{u_G}{u_F} , \quad (2.8)$$

wobei sich mit den vorstehenden Definitionen auch

$$S = \frac{\dot{x}}{1 - \dot{x}} \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} \frac{\rho_F}{\rho_G} \quad (2.9)$$

ableiten läßt.

Nur für gleiche Phasengeschwindigkeiten ($S = 1$) sind bezüglich der Zahlenwerte $x = \dot{x}$ und $\epsilon = \dot{\epsilon}$.

Damit kann die Kontinuitätsgleichung für das Zweiphasengemisch auf der Grundlage von (2.1) aufgestellt werden, wobei generell für $dM_N = \rho_N A_N dz$ und für $\dot{M}_N = \rho_N A_N u_N$ gilt und die unterschiedlichen Phasenanteile mit Hilfe von (2.2) zu berücksichtigen sind.

Man erhält für den eindimensionalen Fall

$$[(1 - \epsilon)\rho_F + \epsilon\rho_G]_{,t} + [(1 - \epsilon)\rho_F u_F + \epsilon\rho_G u_G]_{,z} = 0 \quad (2.10)$$

und sinngemäß für den 3D-Fall mit c_{Nj} ($N = F, G, j = 1, 2, 3$) als Geschwindigkeitskomponenten der beiden Phasen:

$$[(1 - \epsilon)\rho_F + \epsilon\rho_G]_{,t} + [(1 - \epsilon)\rho_F c_{Fj} + \epsilon\rho_G c_{Gj}]_{,j} = 0 \quad (2.11)$$

(2.11) setzt eine homogene (isotrope) Verteilung des Gas- bzw. Dampfgehaltes im Strömungsraum voraus. Sollte das nicht der Fall sein, so sind weitere Modifikationen erforderlich, die im Rahmen dieser Studie nicht durchgeführt werden.

Eine Zielstellung dieser Arbeit ist das Finden eines Einphasen-Ersatzfluids des Zweiphasen-Gemisches, das sich insbesondere hinsichtlich der Impuls- und Reibungswirkungen, aber auch bezüglich der Kontinuitätsbedingungen durch weitgehend gleiche Eigenschaften wie die mathematisch-physikalisch schwieriger zu behandelnden Zweiphasen-Gemische auszeichnet.

Es sei $\bar{\rho}(z,t)$ die mittlere, aber im allgemeinen orts- und zeitabhängige Dichte dieses Ersatzfluids und $\bar{u}(z,t)$ die entsprechende zugehörige mittlere Fluidgeschwindigkeit im eindimensionalen Fall; dann soll sinngemäß die bekannte Kontinuitätsgleichung für Einphasenströmung

$$\dot{\bar{\rho}} + (\bar{\rho} \bar{u})_{,z} = 0 \quad (2.12)$$

gelten.

Für den 3D-Fall ist dann mit \bar{c}_j ($j = 1, 2, 3$) als mittlere Geschwindigkeitskomponenten

$$\dot{\bar{\rho}} + (\bar{\rho} \bar{c}_j)_{,j} = 0 \quad (2.13)$$

Bisher wurde vorausgesetzt, daß die Strömung durch starre Wände begrenzt ist, die

aber im Falle ihrer Bewegung orthogonal zur Strömungsrichtung als zusätzliche Massenstromquellen bzw. -senken wirken.

Anhand einer 2D-Strömung in einem ebenen Spalt mit der Weite s , bei dem sich die eine Wand mit der Geschwindigkeit $w = -\dot{s}$ bewegt, soll die modifizierte Kontinuitätsgleichung aufgestellt werden.

Dazu wird von einem durchströmten Volumenelement $s dx dz$ ausgegangen (Bild 2), wobei zur vereinfachten Schreibweise $\bar{\rho}$ durch ρ , \bar{u} durch u und \bar{v} durch v ersetzt werden.

Die Massenstrombilanz ergibt

$$\rho w dx dz = d(\rho u) s dx + d(\rho v) s dz$$

und schließlich mit $w = -\dot{s}$ bei Berücksichtigung von instationären Dichteänderungen

$$\dot{\rho} + (\rho u)_{,z} + (\rho v)_{,x} + \rho \frac{\dot{s}}{s} = 0 \quad . \quad (2.14)$$

Für praktische Rechnungen folgt z.B. $\rho_{,z}$ aus

$$\rho_{,z} = \rho_{,p} p_{,z} \quad ,$$

wobei die Druckabhängigkeit von ρ bei Wasser-Dampf-Gemischen mit Hilfe der Wasserdampf tafeln ermittelt werden kann, und der Druckgradient aus der nachfolgend abgeleiteten Impulsgleichung folgt.

2.2 Impulsgleichung

Die Impulsgleichung einer Zweiphasenströmung erhält man durch eine Kräftebilanz an einem durchströmten Volumenelement, wobei hinsichtlich der Phasentrennung analog zur Aufstellung der Kontinuitätsgleichung im letzten Abschnitt vorgegangen wird. Dabei soll die abzuleitende Gleichung auch die Wirkungen durch die Gravitationskraft und formal auch die Reibungseinflüsse berücksichtigen.

Es wird ein senkrechter Strömungskanal betrachtet, der von oben nach unten durchströmt wird, um Anschluß an das 2D-Pendelmodell für Einphasenströmungen zu erhalten, für das auch experimentelle Ergebnisse mit Wasser als Strömungsmedium vorliegen [5].

Wie im Bild 3 dargestellt, treten am Volumenelement $dV = Adz$ Impulskräfte aus der Differenz der ein- und austretenden Fluidimpulse; Beschleunigungskräfte bei instationären Strömungen; Gravitations- und Reibungskräfte, letztere durch die Wand-schubspannung τ_w repräsentiert, auf.

U_b bedeutet den benetzten Umfang des Volumenelementes und \dot{m} die Massenstromdichte:

$$\dot{m}_F = \frac{\dot{M}_F}{A_F} \quad , \quad (2.16)$$

$$\dot{m}_G = \frac{\dot{M}_G}{A_G} \quad . \quad (2.17)$$

Die Summe aller Kräfte gleich Null am Volumenelement liefert bei positivem Vorzeichen derselben in z- bzw. in Strömungsrichtung:

$$\begin{aligned} & -A p_{,z} dz - A[(1-\epsilon)\rho_F u_F + \epsilon\rho_G u_G]_{,t} dz \\ & - A[(1-\epsilon)\rho_F u_F^2 + \epsilon\rho_G u_G^2]_{,z} dz \\ & + A[(1-\epsilon)\rho_F + \epsilon\rho_G]g dz - \tau_w U_b dz = 0 \end{aligned}$$

und daraus unter Berücksichtigung von (2.16) und (2.17) in Verbindung mit (2.6) und (2.7) die gesuchte eindimensionale Impulsgleichung für Zweiphasenströmungen:

$$\begin{aligned} -p_{,z} &= [(1-\epsilon)\rho_F u_F + \epsilon\rho_G u_G]_{,t} \\ &+ [(1-\epsilon)\rho_F u_F^2 + \epsilon\rho_G u_G^2]_{,z} \\ &- [(1-\epsilon)\rho_F + \epsilon\rho_G]g + \tau_w \frac{U_b}{A} \quad . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Der Reibungsterm $\tau_w U_b / A$ in (2.18) ist identisch mit dem Gradienten des Reibungsdruckabfalls $p_{R,z}$ und kann z.B. bei geeigneten Mittelwerten für eine stationäre eindimensionale Zweiphasenströmung in der Form

$$p_{R,z} = \bar{\lambda}(z) \frac{1}{d_h} \frac{\bar{\rho}(z)}{2} [\bar{u}(z)]^2 \quad , \quad (2.19)$$

mit

$$d_h = \frac{4A}{U_b} \quad (2.20)$$

als hydraulischen oder gleichwertigen Durchmesser des Strömungskanals, geschrieben werden. Für ebene Spalte mit der Weite s ist $d_h = 2s$.

Der Reibungsdruckabfall bei Zweiphasenströmungen ist Gegenstand des 4. Abschnittes dieser Studie.

Es erscheint ratsam, insbesondere für eine 2D- oder 3D-Zweiphasenströmung wieder auf geeignete orts- und zeitabhängige Mittelwerte für die Dichte und die Geschwindigkeiten auszuweichen, da sonst in Analogie zu (2.18) noch unübersichtlichere und schwieriger zu handhabende Ausdrücke entstehen.

Die folgenden Beziehungen für Einphasenströmungen gelten daher auch für Zweiphasenströmungen, wenn diese Mittelwerte benutzt werden. Zur besseren Übersicht wird auf die Mittelungssymbolik ($\bar{\rho}$, \bar{c}) verzichtet, sie aber stillschweigend vorausgesetzt.

Nach [6] bietet sich die Newtonsche Kraftgleichung am bewegten materiellen Volumenelement zur Aufstellung der 3D- Impulsgleichung an, wobei hier entsprechend der Eulergleichung das Schwergewicht auf dem nichtlinearen Konvektionsglied liegt.

Das Kräftegleichgewicht erfordert

$$\frac{d}{dt} [\rho c_i dV] + p_{,i} dV = F_i dV \quad , \quad (2.21)$$

mit
$$\frac{d}{dt} (dV) = c_{j,j} dV \quad .$$

Man erhält

$$\left[\frac{d}{dt} (\rho c_i) + \rho c_i c_{j,j} + p_{,i} - F_i \right] dV = 0$$

und da dV nicht Null ist

$$(\rho c_i)_{,t} + c_j (\rho c_i)_{,j} + c_{j,j} (\rho c_i) = F_i - p_{,i} \quad (2.23)$$

oder

$$(\rho c_i)_{,t} + (\rho c_i c_j)_{,j} = F_i - p_{,i} \quad . \quad (2.24)$$

Nach Abzug der Kontinuitätsgleichung (2.12)

$$-[\dot{\rho} + (\rho c_j)_{,j}] = 0$$

erhält man die konventionelle Form der Eulergleichung

$$\rho \dot{c}_i + \rho c_j c_{i,j} = F_i - p_{,i} \quad , \quad (2.25)$$

wie sie z.B. in [5] benutzt wurde.

In Vektorform lautet (2.24)

$$(\rho \vec{c})_{,t} + (\vec{c} \cdot \nabla)(\rho \vec{c}) + \rho \vec{c}(\nabla \cdot \vec{c}) = \vec{F} - \nabla p \quad . \quad (2.26)$$

Eine wesentliche Aussage von (2.26) ist, daß im allgemeinen beide nichtlinearen Glieder zu berücksichtigen sind, insbesondere dann, wenn z.B. durch bewegte Kanalwände zusätzliche Massenstromquellen bzw. -senken entstehen. Die daraus folgenden Konsequenzen werden in den weiteren Abschnitten beleuchtet.

2.3 Energiegleichung

Der Phasenwechsel in Gas (Dampf)-Flüssigkeits-Gemischen erfolgt durch Kondensation der gasförmigen oder Verdampfen der flüssigen Phase. Dabei überwiegt in der Regel bei weitem die Änderung der Enthalpie und der inneren Energie gegenüber Änderungen z.B. der kinetischen oder potentiellen Energie des Fluids.

Die Energiebilanz eines durch das Volumenelement Adz strömenden Gas-Flüssigkeits-Gemisches nach Bild 4 kann einfach ermittelt werden. Dazu wird wieder angenommen, daß beide Phasen getrennt strömen.

Es bedeuten

$$\dot{E}_F = A(1 - \epsilon) \rho_F h_F u_F \quad , \quad (2.27)$$

und

$$\dot{E}_G = A \epsilon \rho_G h_G u_G \quad (2.28)$$

mit h_F und h_G als Enthalpien der beiden Phasen.

Die inneren Energien in E_F und E_G können für praktische Rechnungen in der Regel mit ausreichender Genauigkeit durch die zugehörigen Enthalpien ersetzt werden, so daß näherungsweise allgemein gilt:

$$dE_N \approx A_N \rho_N h_N dz \quad . \quad (2.29)$$

Man erhält als Energiegleichung nach Bild 4 schließlich mit der zugeführten (Wärme-)

Energie $dQ = \dot{q} U_b dz$ für den eindimensionalen Fall, auf den diese Betrachtung beschränkt bleiben soll:

$$\begin{aligned} & [(1-\epsilon)\rho_F h_F + \epsilon\rho_G h_G]_t + \\ & [(1-\epsilon)\rho_F h_F u_F + \epsilon\rho_G h_G u_G]_z = \dot{q} \frac{U_b}{A} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Bei zweiphasigen Systemen mit nicht kondensierbaren Gasen bzw. verdampfenden Flüssigkeiten verzichtet man in der Regel auf den Ansatz für die Energiebilanz und benutzt statt dessen die Impulsgleichung.

3. Schlupf

Der Schlupf $S = u_G / u_F$ nach (2.8), also das Verhältnis der örtlichen mittleren Gas- bzw. Dampfgeschwindigkeit zur örtlichen mittleren Geschwindigkeit der Flüssigkeit im strömenden Zweiphasengemisch, ist mit dem auf den Massenstrom bezogenen Gas (Dampf)-Gehalt \dot{x} und mit dem örtlichen volumetrischen Gas (Dampf)-Gehalt ϵ nach (2.9) durch

$$S = \frac{\dot{x}}{1-\dot{x}} \frac{1-\epsilon}{\epsilon} \frac{\rho_F}{\rho_G}$$

verbunden.

Insbesondere die Kenntnis des Schlupfes ermöglicht dann leicht die Bestimmung von ϵ als eine Grundlage für die späteren Rechnungen mit der gemittelten Dichte und Geschwindigkeit des Zweiphasengemisches, da \dot{x} mit Hilfe von Energiebilanzen meist einfach zu ermitteln ist.

$S > 1$ besagt, daß im Zweiphasengemisch die Gasphase schneller als die Flüssigkeit strömt. Dieser Fall ist in horizontalen und in geneigten bzw. in senkrechten Leitungen bei aufwärts gerichteter Strömung praktisch immer gegeben. Ist dagegen die Strömung abwärts gerichtet, kann durch die Auftriebswirkung der Gasblasen in der Flüssigkeit auch $S < 1$ eintreten.

Grundsätzlich bewirkt der Druckabfall in Strömungsrichtung infolge der meist geringen Gasdichte eine größere Beschleunigung des Gases gegenüber der Flüssigkeit.

Plausibel erscheint, daß S im allgemeinen mit zunehmendem Dichteverhältnis ρ_F / ρ_G größer wird, ebenso mit kleiner werdender Zähigkeit der Flüssigkeit und bei Strömungsformen, die eine Separation der beiden Phasen begünstigen.

Zur Demonstration dieser Verhältnisse wird im folgenden ein einfaches Einzelblasen-Modell untersucht (Bild 5).

Gegenüber der Realität in einem Zweiphasengemisch hat dieses Modell den Nachteil, daß es die gegenseitige Beeinflussung der Blasen nicht berücksichtigt. Es liefert aber trotzdem einige grundsätzliche physikalische Aussagen.

Im Teilbild 5a ist die Strömung in einem Rohr mit dem lichten Durchmesser D nach oben und in b) und c) nach unten gerichtet.

Die Gasblase mit dem Durchmesser d wird als ein mit der Relativgeschwindigkeit u_R der Flüssigkeit umströmter kugelförmiger Widerstandskörper betrachtet.

u_R folgt für $S > 1$ aus

$$u_R = u_G - u_F \quad . \quad (3.1)$$

Die Strömungswiderstandskraft F_w ist stets u_R entgegengerichtet und steht im Gleichgewicht zur "Antriebskraft" F_p der Blase, die aus dem Auftrieb, verursacht durch die Gravitationskräfte, und dem strömungsbedingten Druckgradienten resultiert, wobei in letzterem meist nur die Reibungskräfte dominieren. Im folgenden werden daher nur der Reibungsdruckgradient und die Auftriebskräfte in F_p berücksichtigt.

Somit wird

$$|F_w| = |F_p| \quad , \quad (3.2)$$

mit

$$F_w = c_w \frac{\rho_F}{2} u_R^2 \frac{\pi}{4} d^2 \quad (3.3)$$

und

$$F_p = \frac{\pi}{6} d^3 [|\rho_{R,z}| \pm (\rho_F - \rho_G) g] \quad . \quad (3.4)$$

Es gelten in (3.4) das positive Vorzeichen vor dem Gravitationsglied für die aufwärtsgerichtete Strömung nach Bild 5a, das negative für die abwärtsgerichtete nach Bild 5b und c.

In (3.3) bedeutet c_w einen dimensionslosen Widerstandsbeiwert, der mit Hilfe von Bild 6 nach [7] bestimmt werden kann.

Es ist zweckmäßig, zunächst das Produkt $c_w \text{Re}^2$, wie nachfolgend beschrieben, zu berechnen.

Weiter ist in (3.4) $\pi/6 \cdot d^3$ das Blasenvolumen.

Als Rechenbeispiel sind für ein strömendes Wasser-Dampf-Gemisch im Vorgriff auf eine Demonstrationsrechnung im 5. Abschnitt gegeben:

$$\begin{aligned} D &= 0,02 \text{ m} \\ u_F &= 4 \text{ m/s} \\ \rho_F &= 740,2 \text{ kg/m}^3 \\ \rho_G &= 36,5 \text{ kg/m}^3 \\ v_F &= 0,124 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \end{aligned}$$

und die Rechnung soll für 3 Reibungsbeiwerte der Rohrströmung erfolgen:

$\lambda_1 = 0,0125$ (bei reiner Flüssigkeitsströmung), sowie für $\lambda_2 = 2\lambda_1$ und $\lambda_3 = 3\lambda_1$, wobei λ_2 und λ_3 im zu erwartenden λ - Bereich bei strömenden Zweiphasengemischen liegen.

Gesucht wird der Schlupf nach (2.8) in Abhängigkeit vom Blasendurchmesser d und von λ .

Mit

$$|\rho_{R,z}| = \lambda \frac{1}{D} \frac{\rho_F}{2} u_F^2 \quad (3.5)$$

wird (3.2)

$$c_w \frac{\rho_F}{2} u_R^2 \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{6} d^3 \left| \frac{\lambda}{2D} \rho_F u_F^2 \pm (\rho_F - \rho_G)g \right|$$

und wegen

$$Re = \frac{u_R d}{v_F} \quad (3.6)$$

schließlich

$$c_w Re^2 = \frac{4}{3} \frac{d^3}{v_F^2} \left| \lambda \frac{u_F^2}{2D} \pm \left(1 - \frac{\rho_G}{\rho_F}\right)g \right| \quad (3.7)$$

bzw. mit den gegebenen Daten

$$c_w Re^2 = 3,469 \cdot 10^{16} d^3 |\lambda \pm 0,0233| \quad (3.8)$$

Die Vorgehensweise ist einfach. Bei gegebenen d und λ erhält man $c_w Re^2$ aus (3.8) und aus Bild 6 folgt dann c_w , so daß Re und damit u_R mittels (3.6) berechnet werden können.

u_G ergibt sich entsprechend Bild 5 aus $u_G = u_F + u_R$ für die Varianten a) und b) und aus $u_G = u_F - u_R$ für die Variante c. Letztere mit $S < 1$ ist durch

$$\lambda \frac{u_F^2}{2D} - \left(1 - \frac{\rho_G}{\rho_F}\right)g < 0$$

in (3.7) gekennzeichnet

Im Bild 7 sind die Ergebnisse der Rechnung graphisch dargestellt.

Diese Resultate lassen sich wie folgt interpretieren. Für $d = 0$ ($e = 0$) ist $S = 1$. Der Anstieg bzw. der Abfall von $S = 1$ erfolgt näherungsweise mit \sqrt{d} .

S ist generell für die aufwärtsgerichtete Strömung am größten und dabei stets > 1 .

Für die abwärtsgerichtete Strömung hängt $S >$ bzw. < 1 im wesentlichen vom Verhältnis der Reibungswirkungen der Grundströmung zu den Auftriebskräften ab. Überwiegen letztere, so wird $S < 1$.

In der Fachliteratur gibt es viele Ansätze zur Berechnung des Schlupfes. Sie sind meist rein empirisch. Dagegen wurde die folgende Beziehung von Levy [8] nur aus theoretischen Überlegungen entwickelt und enthält somit keine empirischen Konstanten bzw. Faktoren:

$$S = \sqrt{\frac{\rho_F}{\rho_G} e} \quad (3.9)$$

und in Verbindung mit (2.9)

$$S = \frac{\dot{x}}{1 - \dot{x}} \left(\frac{1}{S^2} - \frac{\rho_G}{\rho_F} \right) \left(\frac{\rho_F}{\rho_G} \right)^2 \quad (3.10)$$

Zwischen Rechnung und Messung treten aber nach [8] Abweichungen bis 50% auf.

Lösungen für den volumetrischen Gas- bzw. Dampfanteil in vertikal strömenden Zweiphasengemischen in allen nur denkbaren Variationen, mit denen auch der Schlupf berechnet werden kann, enthält [1]. Dabei wird allerdings die Kenntnis der Blasengrößen vorausgesetzt.

Speziell für senkrechte Siedekanäle mit aufwärtsgerichteter Strömung wurde der folgende empirische Ansatz von Marchaterre und Hoglund [9] für verdampfendes Wasser in Kernreaktoren entwickelt, der davon ausgeht, daß der Zulauf mit der

Geschwindigkeit u_{Fo} einphasig flüssig erfolgt:

$$S = \exp\{\exp[-0,45791 - 0,12487(\ln Fr) - 0,020795(\ln Fr)^2] + \exp[-1,1231 - 0,10296(\ln Fr) - 0,03033(\ln Fr)^2] \ln \omega + \exp[-3,9782 + 0,157(\ln Fr) - 0,0128796(\ln Fr)^2](\ln \omega)^2\} , \quad (3.11)$$

mit der Froude-Zahl

$$Fr = \frac{u_{Fo}^2}{gd_h} \quad (3.12)$$

und dem Dampfgehaltparameter

$$\omega = \frac{\dot{x}}{1-\dot{x}} \cdot \frac{\rho_F}{\rho_G} \quad (3.13)$$

Der Gültigkeitsbereich von (3.11) ist durch

$$\begin{aligned} 1 &\leq Fr \leq 100 \\ 0,2 &\leq \omega \leq 100 \\ u_{Fo} &> 0,25 \text{ m/s} \end{aligned}$$

gegeben.

Falls der Zulauf nicht einphasig flüssig erfolgt, ist für u_{Fo} diejenige Geschwindigkeit einzusetzen, die sich ergibt, wenn der gesamte Massendurchsatz flüssig strömen würde.

Der Nachteil von (3.11) ist, daß für $\omega \rightarrow 0$ der Schlupf S nicht gegen 1 geht. Man berechnet daher S für $\omega = 0,2$ als unteren Wert und interpoliert dann linear im Bereich $0 \leq \omega \leq 0,2$ auf $S = 1$ für $\omega = 0$ ($\dot{x} = 0$).

4. Reibungsdruckabfall

Mit Ähnlichkeitsbetrachtungen zur Druckverlustberechnung für das Gas-Flüssigkeits-Gemisch befaßten sich als erste Martinelli und Nelson [10]. Ihre Überlegungen wurden später von Lockhart und Martinelli [11] erweitert.

Der Grundgedanke war dabei, durch Einführung eines Zweiphasenmultiplikators Φ den zweiphasigen Reibungsdruckverlust aus dem einphasigen einfach durch eine Multiplikation zu berechnen.

Als Bezugsgröße für den Druckverlust des Gemisches ging man davon aus, daß die Flüssigkeit oder das Gas jeweils allein im Kanal strömen. Daraus folgen 2 Multiplikatoren

ren Φ_F und Φ_G , so daß gilt

$$\left(\frac{\Delta\rho}{\Delta l}\right)_{2ph} = \left(\frac{\Delta\rho}{\Delta l}\right)_F \Phi_F^2 \quad (4.1)$$

oder

$$\left(\frac{\Delta\rho}{\Delta l}\right)_{2ph} = \left(\frac{\Delta\rho}{\Delta l}\right)_G \Phi_G^2 \quad (4.2)$$

Damit konzentriert sich das Problem auf die Abhängigkeiten dieser Zweiphasenmultiplikatoren, die nach Martinelli von einer Kennzahl X abhängen, wobei je nach der Strömungsart zwischen

$$X_{ll}, X_{lt}, X_{tl} \text{ und } X_{tt}$$

unterschieden wird. Bei X_{ll} strömen Flüssigkeit und Gas laminar, bei X_{tt} beide Phasen turbulent.

Für den technisch wichtigsten Fall, daß beide Phasen turbulent strömen, kamen Martinelli und Mitarbeiter aus Ähnlichkeitsbetrachtungen zu der Beziehung

$$X_{tt} = \left(\frac{\rho_g}{\rho_F}\right)^{0,5} \left(\frac{\eta_F}{\eta_G}\right)^{0,1} \left(\frac{1-\dot{x}}{\dot{x}}\right)^{0,9} \quad (4.3)$$

Im Vergleich mit Messungen ergab sich dann der Verlauf der Zweiphasenmultiplikatoren Φ_F und Φ_G als Funktion der Martinelli-Kennzahl X , wie im Bild 8 dargestellt [3]. In diesem Bild ist auch der Verlauf der Zweiphasenmultiplikatoren für den Fall eingezeichnet, daß eine der beiden Phasen oder beide Phasen laminar strömen.

Bild 8 kann auch in vereinfachter Form analytisch angegeben werden:

$$\Phi_F^2 = 1 + \frac{C}{X} + \frac{1}{X^2} \quad (4.4)$$

bzw.

$$\Phi_G^2 = 1 + CX + X^2 \quad (4.5)$$

C in (4.4) und (4.5) hängt vom Charakter der Strömung ab und es gilt für die unterschiedlichen Strömungsformen:

Flüssigkeit	Gas	C
turbulent	turbulent	20
laminar	turbulent	12
turbulent	laminar	10
laminar	laminar	5

Bei der Anwendung dieses Rechenverfahrens ist zu beachten, daß die Zweiphasenmultiplikatoren nur auf die flüssigen bzw. gasförmigen Anteile $\dot{M}(1-\dot{x})$ bzw. $\dot{M}\dot{x}$ bezogen sind.

Für praktische Rechnungen ist es aber einfacher, den Reibungsdruckabfall auf den gesamten Massendurchsatz \dot{M} zu beziehen, so daß bei Beschränkung auf die flüssige Phase (F) schließlich (4.1) umgeformt wird zu

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta l}\right)_{2ph} = p_{R,z} = \left(\frac{\Delta p}{\Delta l}\right)_{F\dot{M}} (1-\dot{x})^{1,75} \Phi_{Ftt}^2, \quad (4.6)$$

wobei $\left(\frac{\Delta p}{\Delta l}\right)_{F\dot{M}}$ den Reibungsdruckabfall der Flüssigkeit, bezogen auf den gesamten Massendurchsatz, bedeutet.

$\left(\frac{\Delta p}{\Delta l}\right)_{F\dot{M}}$ läßt sich für eine eindimensionale Kanalströmung einfach aus

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta l}\right)_{F\dot{M}} = -\lambda_F \frac{1}{d_h} \cdot \frac{\rho_F}{2} u_{F\dot{M}}^2 \quad (4.7)$$

berechnen.

In (4.7) kann für den turbulenten Reynoldszahlbereich $2300 \leq Re \leq 1 \cdot 10^5$ λ_F mit Hilfe des Blasius-Ansatzes für glatte Kanäle [12] bestimmt werden:

$$\lambda_F = \frac{0,3164}{Re_{F\dot{M}}^{0,25}} = \frac{0,3164}{\left(\frac{u_{F\dot{M}} d_h}{\nu_F}\right)^{0,25}}, \quad (4.8)$$

mit

$$u_{F\dot{M}} = \frac{\dot{M}}{\rho_F A} \quad (4.9)$$

analog zu (2.7).

Für Reynoldszahlen $> 1 \cdot 10^5$ eignet sich anstelle (4.8) auch nach [13]:

$$\lambda_F \approx \frac{0,309}{\left(\lg \frac{Re_{FM}}{7} \right)^2} \quad (4.10)$$

Der auf den Gesamtmassendurchsatz bezogene und modifizierte Zweiphasenmultiplikator in (4.6)

$$R = (1 - \dot{x})^{1,75} \Phi_{Ftt}^2 \quad (4.11)$$

läßt nach Bild 9 erkennen, daß selbst bei hohen Drücken das Zweiphasengemisch einen 5-20 fachen Druckverlust der Einphasenströmung bei gleichem Massendurchsatz aufweist. Bei niedrigen Drücken sind selbst bei kleinen Dampfgehalten Multiplikatoren zwischen 50 und einigen 100 schnell erreicht [3].

Für praktische Rechnungen erscheint die Definition eines im allgemeinen orts- und zeitabhängigen Widerstandsbeiwertes $\bar{\lambda}(z,t)$ der Zweiphasenströmung zweckmäßig, wobei die im nächsten Abschnitt abgeleiteten Mittelwerte $\bar{\rho}(z,t)$ und $\bar{u}(z,t)$ für ein strömendes Gas-Flüssigkeits-Gemisch benutzt werden.

(4.6) wird dann mit (4.7) geschrieben:

$$-p_{R,z} = \bar{\lambda} \frac{1}{d_h} \cdot \frac{\bar{\rho}}{2} \bar{u}^2 = \lambda_F \frac{1}{d_h} \cdot \frac{\rho_F}{2} u_{FM}^2 (1 - \dot{x})^{1,75} \Phi_{Ftt}^2 \quad (4.12)$$

und daraus

$$\bar{\lambda} = \lambda_F \left(\frac{\rho_F}{\bar{\rho}} \right) \left(\frac{u_{FM}}{\bar{u}} \right)^2 (1 - \dot{x})^{1,75} \Phi_{Ftt}^2 \quad (4.13)$$

In (4.12) folgt u_{FM} aus (4.9) und Φ_{Ftt}^2 nach (4.4) für turbulent strömende Gas- und Flüssigkeitsphasen mit $C = 20$:

$$\Phi_{Ftt}^2 = 1 + \frac{20}{X_{tt}} + \frac{1}{X_{tt}^2} \quad (4.14)$$

wobei X_{tt} mittels (4.3) berechnet wird.

Damit liegt ein Verfahren vor, um den Druckverlust einer Zweiphasenströmung ohne Iterationen einfach berechnen zu können.

5. Ersatzfluid einer Zweiphasenströmung mit ortsabhängiger Dichte und Geschwindigkeit

5.1 Gleichungen des Ersatzfluids

Gesucht werden geeignete, im allgemeinen orts- und zeitabhängige Mittelwerte der Gemischdichte $\bar{\rho}(z, t)$ und der Gemischgeschwindigkeit $\bar{u}(z, t)$ einer Zweiphasenströmung, die in Anwendung auf die Grundgleichungen der Einphasenströmung eine wesentlich einfachere Berechnung insbesondere der Druckverteilungen in zweiphasig durchströmten Kanälen und Spalten ermöglichen.

Zur Aufstellung der Beziehung für die mittlere Gemischdichte wird von Bild 1 ausgegangen. Im Volumenelement $A_F dz$ befindet sich die Flüssigkeitsmasse $dM_F = \rho_F A_F dz$ und in $A_G dz$ die Gasmasse $dM_G = \rho_G A_G dz$. Folglich ist die Gesamtmasse dM im Volumenelement Adz

$$dM = (\rho_F A_F + \rho_G A_G) dz \quad , \quad (5.1)$$

und die mittlere Dichte $\bar{\rho}$ ist durch $dM/dV = dM/Adz$ gegeben, so daß mit (5.1) wird:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_F A_F + \rho_G A_G}{A} \quad . \quad (5.2)$$

Nun ist nach (2.2) $A_G/A = \epsilon$ und damit

$$\frac{A_F}{A} = \frac{A - A_G}{A} = 1 - \epsilon \quad . \quad (5.3)$$

Da ganz allgemein ϵ orts- und zeitabhängig ist, ergibt sich schließlich für (5.2):

$$\bar{\rho}(z, t) = [1 - \epsilon(z, t)]\rho_F + \epsilon(z, t)\rho_G \quad (5.4)$$

als Gleichung der mittleren Gemischdichte einer Zweiphasenströmung.

Eine geeignete Definition der zugehörigen mittleren Geschwindigkeit \bar{u} ist einfach, denn für den Massenstrom bei eindimensionaler Strömung durch einen Querschnitt A kann generell $\dot{M} = \rho u A$ geschrieben werden, so daß sich schließlich mit (5.4)

$$\bar{u}(z, t) = \frac{\dot{M}}{A\bar{\rho}(z, t)} = \frac{\dot{M}}{A\{[1 - \epsilon(z, t)]\rho_F + \epsilon(z, t)\rho_G\}} \quad (5.5)$$

ergibt, wobei \dot{M} den Massendurchsatz des Zweiphasengemisches bedeutet.

In Ergänzung dieser vereinfachten Überlegungen, deren Brauchbarkeit im Rahmen der vorliegenden Anwendungen noch zu prüfen ist, soll eine umfassendere Form der Bilanzgleichungen für ein partielles Zweiphasen-Modell von Rohde [14] nicht unerwähnt bleiben.

Ausgehend von den 1D-Gleichungen für die Impuls-, Energie- und Massenbilanz des Gemisches sowie die Massenbilanz des Dampfes [14] werden für das Zweiphasengemisch in der hier verwendeten Schreibweise folgende Größen definiert:

$$\text{Gemischenthalpie} \quad h = (1 - \dot{x}) h_F + \dot{x} h_G \quad (\text{a})$$

$$\text{Massenstromdichte} \quad \dot{m} = (1 - \epsilon) \rho_F u_F + \epsilon \rho_G u_G \quad (\text{b})$$

$$\text{Dichte} \quad \rho = (1 - \epsilon) \rho_F + \epsilon \rho_G \quad (\text{c})$$

$$\text{Geschwindigkeit} \quad u = (1 - \epsilon) u_F + \epsilon u_G \quad (\text{d})$$

$$\text{inverse Dichte für} \quad v_I = \frac{1}{\rho_F} \frac{(1 - \dot{x})^2}{(1 - \epsilon)} + \frac{1}{\rho_G} \frac{\dot{x}^2}{\epsilon} \quad (\text{e})$$

den Impulstransport

Mit diesen Definitionen lassen sich die o.g. Bilanzgleichungen für das Gemisch in die sogenannte konservative Form transformieren:

$$\dot{m}_{,t} + (\dot{m}^2 v_I)_{,z} + p_{R,z} + \rho g + p_{,z} = 0 \quad , \quad (\text{f})$$

$$\rho h_{,t} + \dot{m} h_{,z} = \dot{q} + X_{,t} + p_{,t} + u p_{,z} \quad , \quad (\text{g})$$

$$\rho_{,t} + \dot{m}_{,z} = 0 \quad , \quad (\text{h})$$

mit \dot{q} als Wärmequellendichte und dem zusätzlichen Quellterm

$$X_{,t} \text{ mit } X = (h_G - h_F)[(1 - \epsilon)\dot{x}\rho_F - \epsilon(1 - \dot{x})\rho_G] \quad (\text{j})$$

in der Energiebilanz (g).

Diese Darstellung hat den Vorteil, daß die Gleichungen formal den Bilanzgleichungen für eine homogene Strömung entsprechen. In diesem Sinne wird mit (a) bis (e) ebenfalls ein Ersatzfluid für das Zweiphasengemisch beschrieben.

5.2 Nachweis der Brauchbarkeit des Ersatzfluids durch Berechnung der Druckanteile einer 1D-Strömung im Vergleich mit exakten Lösungen

5.2.1 Siedekanal als Modell einer Zweiphasenströmung

Der geforderte Nachweis wird anhand einer realen stationären Zweiphasenströmung in einem beheizten senkrechten Siederohr mit ortsveränderlichem Dampfgehalt geführt.

Damit wird zwar hinsichtlich des nichtlinearen Gliedes in der Impulsgleichung auf eine strenge mathematische Beweisführung verzichtet, dafür aber eine anschauliche Anwendung der Grundgleichungen auf Zweiphasengemische demonstriert.

Dazu ist das Siederohr mit den wichtigsten gesuchten Abhängigkeiten von z bzw. z/l nach Bild 10 gegeben.

Die technischen Daten sind:

Länge des Rohres	$l = 3 \text{ m}$
lichter Rohrdurchmesser	$d = 2 \text{ cm}$
absoluter Druck am Rohreintritt	$p(0) = 70 \text{ bar}$
Eintrittsgeschwindigkeit des Fluids (Wasser bei der Siedetemperatur $t_s = 285,8 \text{ °C}$ mit $\dot{x}(0) = 0$ bzw. $\epsilon(0) = 0$)	$u_F(0) = 4 \text{ m/s}$
Wärmestromdichte über der gesamten Rohr- Mantel-Fläche, bezogen auf d	$q = 60 \text{ W/cm}^2$

In einer 1. Näherung wird der Druck über die gesamte Rohrlänge zur Bestimmung der Stoffwerte gleich $p(0) = \text{konst.}$ angenommen. Mit dem berechneten Druckverlauf $p(z)$ kann dann eine 2. Näherung bzw. gegebenenfalls eine 3. Näherung bestimmt werden.

Im Rahmen der zu erwartenden und geforderten Genauigkeiten genügt aber meist schon die 1. Näherung, wenn man von Systemen mit relativ niedrigen Absolutdrücken absieht.

Die drei wichtigsten Abhängigkeiten vom Strömungsweg sind der Dampfgehalt \dot{x} , der Schlupf S und der Volumenanteil ϵ des Dampfes im Strömungskanal.

Zu ihrer Bestimmung werden zunächst aus den Dampftafeln, z.B. [15], die Dichte des Fluids und des Dampfes, hier unter Sättigungsbedingungen bei $p = 70 \text{ bar}$ benötigt:

$$\begin{aligned}\rho_F &= 740,2 \text{ kg/m}^3 \\ \rho_G &= 36,5 \text{ kg/m}^3\end{aligned}$$

und weiter die Verdampfungswärme $r = 1505 \text{ kJ/kg}$ (kWs/kg).

Der Dampfgehalt $\dot{x}(z/l)$ ergibt sich nach (2.4) aus

$$\dot{x}(z/l) = \frac{\dot{M}_G(z/l)}{\dot{M}} \quad (5.6)$$

mit dem gesamten Massendurchsatz \dot{M} beim Strömungsquerschnitt $A = d^2\pi/4 = 3,1416 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$:

$$\dot{M} = \rho_F A u_F(0) = 0,9302 \text{ kg/s} \quad .$$

An der Stelle z/l beträgt die zugeführte Wärmeleistung, vom Eintritt an gerechnet:

$$P(z/l) = \pi d l q \cdot (z/l) = 113,1 \frac{\text{Z}}{\text{l}} \text{ [kW]} \quad .$$

Damit wird mit der Verdampfungswärme r

$$\dot{M}_G(z/l) = \frac{P(z/l)}{r} = 0,07515 \frac{\text{Z}}{\text{l}} \text{ [kg/s]} \quad (5.7)$$

und schließlich mit (5.6)

$$\dot{x}(z/l) = 0,0808 \frac{\text{Z}}{\text{l}} \quad . \quad (5.8)$$

Die Berechnung des Schlupfes $S(z/l)$ erfolgt mit Hilfe des empirischen Ansatzes von Marchatelle und Høglund (3.11), der sich hier anbietet.

Die Froudezahl nach (3.12) ist

$$Fr = \frac{[u_F(0)]^2}{gd} = 81,6$$

und der Dampfgehaltparameter ω ergibt sich aus (3.13).

Entsprechend der zulässigen unteren Grenze $\omega_{\min} = 0,2$ gilt (3.11) erst ab $z/l \approx 0,12$, wie sich leicht überschlagen läßt.

Im folgenden wird, wie im 3. Abschnitt begründet, für $z = 0$ mit $\dot{x}(0) = 0$ und damit $\omega(0) = 0$ der Schlupf $S(0) = 1$ gesetzt; im Gültigkeitsbereich mittels (3.11) berechnet und schließlich zur besseren Handhabung durch ein Polynom 2. Grades mit den Stützstellen bei $z/l = 0, 0,5$ und 1 angenähert. Das ist für praktische Rechnungen völlig ausreichend.

Man erhält für dieses Anwendungsbeispiel mit $S(0,5) = 1,2543$ und $S(1) = 1,3773$ das Polynom

$$S(z/l) = 1 + 0,64 \left(\frac{z}{l} \right) - 0,2626 \left(\frac{z}{l} \right)^2. \quad (5.9)$$

Da $\dot{x}(z/l)$ und $S(z/l)$ nach (5.8) und (5.9) bekannt sind, folgt $\epsilon(z/l)$ schließlich aus (2.9)

$$\epsilon(z/l) = \frac{\dot{x}}{\dot{x} + S(1-\dot{x}) \frac{\rho_G}{\rho_F}}. \quad (5.10)$$

Diese 3 Abhängigkeiten von z/l sind im Bild 11 dargestellt.

Damit liegen die Voraussetzungen vor, um $u_F(z/l)$, $u_G(z/l)$, $\bar{\rho}(z/l)$ und $\bar{u}(z/l)$ zu berechnen.

Dazu folgt aus (2.7)

$$u_F = \frac{\dot{M}_F}{A_F \rho_F} = \frac{\dot{M} - \dot{M}_G}{(1-\epsilon) A \rho_F}, \quad (5.11)$$

mit $\dot{M} = 0,9302 \text{ kg/s}$, \dot{M}_G nach (5.7) und ϵ nach (5.10). Weiter war $A = 3,1416 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.

u_G ergibt sich aus (2.6)

$$u_G = \frac{\dot{M}_G}{A_G \rho_G} = \frac{\dot{M}}{\epsilon A \rho_G} \quad (5.12)$$

und zur Kontrolle muß (2.8) aus (5.11) und (5.12) mit den Ergebnissen aus (5.9) identisch sein.

Schließlich folgt die mittlere Gemischdichte $\bar{\rho}(z/l)$ aus (5.4) und die zugehörige mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}(z/l)$ aus (5.5).

Die Ergebnisse dieser Rechnungen sind im Bild 12 dargestellt.

5.2.2 Druckverteilungen aus der Impulsgleichung im Lösungsvergleich

Für die exakte Lösung liegt (2.18) zugrunde und für die mit dem Ersatzfluid (2.23), wobei hier die Mittelwerte $\bar{\rho}(z/l)$ und $\bar{u}(z/l)$ nach (5.4) und (5.5) benutzt werden.

Das instationäre Glied (hier durch den Index 1 gekennzeichnet) aus (2.18) lautet

$$-\rho_{1,z} = [(1 - \epsilon)\rho_F u_F + \epsilon\rho_G u_G]_t \quad (5.13)$$

und wird im folgenden mit dem entsprechenden Glied aus (2.23)

$$-\rho_{1,z} = (\overline{\rho u})_t \quad (5.14)$$

verglichen.

Das führt wegen $\overline{\rho u} = \dot{M}/A$, was aus (5.4) und (5.5) folgt, zu

$$\begin{aligned} (1 - \epsilon)\rho_F u_F + \epsilon\rho_G u_G &= \dot{M}/A \\ \text{bzw. } (1 - \epsilon)A\rho_F u_F + \epsilon A\rho_G u_G &= \dot{M} \\ \text{oder } A_F\rho_F u_F + A_G\rho_G u_G &= \dot{M} \end{aligned} \quad (5.15)$$

als Bilanzgleichung für den gesamten Massendurchsatz.

(5.13) und (5.14) sind also gleichwertig bzw. identisch, so daß die Rechnung mit dem Ersatzfluid zulässig ist.

Diese Zusammenhänge gelten grundsätzlich auch, wenn - im Gegensatz zum vorliegenden Rechenbeispiel - ein instationärer Massenstrom $\dot{M}(z,t)$ vorliegt. Dann sind $\epsilon, u_F, u_G, \overline{\rho}$ und \overline{u} neben z von t abhängig.

Das nichtlineare Glied (Index 2) aus (2.18) lautet

$$-\rho_{2,z} = [(1 - \epsilon)\rho_F u_F^2 + \epsilon\rho_G u_G^2]_z \quad (5.16)$$

und wird mit

$$-\rho_{2,z} = \overline{\rho u u}_z \quad (5.17)$$

entsprechend (2.23) verglichen, denn $\overline{u(\overline{\rho u})}_z$ ist Null, da für den vorliegenden Fall - wie aus (5.14) in Verbindung mit (5.15) ersichtlich - $\overline{\rho u} = \dot{M}/A = \text{konst.}$ ist.

Ist die Rechnung mit dem Ersatzfluid zulässig, dann müssen entsprechend (5.16) und (5.17) die Integrale dieser beiden Gleichungen zumindest näherungsweise gleich sein, d.h.

$$\begin{aligned}
 -\Delta p_2(z/l) &= -p_2|_0^{z/l} = [(1-\epsilon)\rho_F u_F^2 + \epsilon\rho_G u_G^2]|_0^{z/l} \\
 &\approx \left(\frac{\dot{M}}{A}\right)^2 \left[\frac{1}{(1-\epsilon)\rho_F + \epsilon\rho_G} \right] \Big|_0^{z/l}, \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

wobei (5.4) und (5.5) beachtet wurden.

Die Rechnung liefert für $-\Delta p_2(z/l)$ die Zahlenwerte in Tab. 1, dazu sind ϵ und die Abweichungen in % angegeben.

z/l	$\dot{\chi}$	ϵ	$-\Delta p_2(z/l)$ in Pa aus (5.16)	dgl. aus (5.17)	Abweichung in %
0	0	0	0	0	0
0,1	0,008	0,1347	1740	1739	0,07
0,2	0,016	0,2296	3312	3308	0,12
0,3	0,024	0,3013	4765	4754	0,22
0,4	0,032	0,3581	6136	6114	0,36
0,5	0,040	0,4050	7455	7416	0,53
0,6	0,049	0,4449	8742	8680	0,72
0,7	0,056	0,4796	10016	9926	0,91
0,8	0,064	0,5105	11292	11168	1,10
0,9	0,072	0,5385	12581	12422	1,28
1	0,080	0,5641	13896	13699	1,44

Tab. 1 Zahlenwerte für das nichtlineare Glied

Wie nähere Untersuchungen zeigten, wachsen die Abweichungen mit $\dot{\chi}$. Während sie hier noch relativ klein sind, steigen sie für $\dot{\chi}_{\max} = 0,4$ auf 22% bei $z/l \approx 0,8$ und für $\dot{\chi}_{\max} = 0,8$ auf 49% bei $z/l \approx 0,4$, um dann wieder abzufallen.

Das Gravitationsglied (Index 3) aus (2.18) lautet mit rechtsseitigem positiven Vorzeichen (da hier z entgegen der Gravitation gerichtet ist)

$$-p_{3,z} = + [(1-\epsilon)\rho_F + \epsilon\rho_G]g \quad (5.19)$$

und wird mit dem entsprechenden Glied einer Einphasenströmung mit Ersatzfluid verglichen:

$$-p_{3,z} = \bar{\rho}g \quad (5.20)$$

(5.19) und (5.20) sind wegen (5.4) identisch und man erhält $-\Delta p_3(z/l)$ am einfachsten mittels einer numerischen Integration aus

$$-\Delta p_3(z/l) = -p_3|_0^{z/l} = g \int_0^{z/l} \bar{\rho} d\left(\frac{z}{l}\right) \quad (5.21)$$

Mit $\bar{\rho}(z/l)$ entsprechend Bild 12 ergibt die Integration nach (5.21) die Zahlenwerte in der Tabelle 2, die auch die im folgenden berechneten Reibungsdruckverlust-Ergebnisse enthält.

Dazu wird von (4.6) in Verbindung mit (4.7) ausgegangen:

$$-p_{R,z} = \lambda_F \frac{1}{d_n} \cdot \frac{\rho_F}{2} u_{FM}^2 (1 - \dot{x})^{1,75} \Phi_{Ftt} \quad (5.22)$$

wobei λ_F aus (4.8) bzw. bei $Re > 1 \cdot 10^5$ aus (4.10) und u_{FM} aus (4.9) folgen.

Für die weitere Rechnung werden die Zähigkeiten für das Wasser und den Wasserdampf aus [15] unter den Betriebsbedingungen benötigt:

$$\begin{aligned} \eta_F &= 92,1 \cdot 10^{-6} \text{ kg/ms} \\ \eta_G &= 18,9 \cdot 10^{-6} \text{ kg/ms} \end{aligned}$$

und $\nu_F = \eta_F / \rho_F = 0,124 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Mit $u_{FM} = u_F(0) = 4 \text{ m/s}$ folgt

$$Re_{FM} = \frac{u_{FM} d}{\nu_F} = 6,45 \cdot 10^5$$

und (4.10) liefert für diese vollturbulente Strömung $\lambda_F = 0,01254$ im glatten Rohr.

Weiter ist $\dot{x}(z/l)$ durch (5.8) gegeben und Φ_{Ftt}^2 folgt aus (4.14) mit X_{tt} nach (4.3).

Man erhält mit den bekannten Stoffdaten

$$X_{tt} = 0,2602 \left[\frac{1 - \dot{x}(z/l)}{\dot{x}(z/l)} \right]^{0,9} \quad (5.23)$$

und schließlich für (5.22)

$$-p_{R,z/l} = 3712,8 [1 - \dot{x}(z/l)]^{1,75} \left(1 + \frac{20}{X_{tt}} + \frac{1}{X_{tt}^2} \right) \quad (5.24)$$

Die numerische Integration von (5.24)

$$-\Delta p_R(z/l) = \int_0^{z/l} p_{R,z/l} d(z/l)$$

ergibt schließlich die Zahlenwerte in Tab. 2, die auch die Reibungsbeiwerte $\bar{\lambda}(z/l)$ bezüglich der Mittelwerte \bar{p} und \bar{u} nach (4.13) enthält.

z/l	$-\Delta p_3$ in Pa	$-\Delta p_R$ in Pa	$\bar{\lambda}$
0	0	0	0,01254
0,1	2030	1693	0,02173
0,2	3826	4383	0,02775
0,3	5452	7982	0,03242
0,4	6945	12442	0,03622
0,5	8332	17728	0,03940
0,6	9629	23814	0,04208
0,7	10850	30675	0,04435
0,8	12002	38291	0,04627
0,9	13094	46641	0,04787
1	14130	55709	0,04918

Tab. 2 Zahlenwerte für das Gravitations- und das Reibungsglied sowie Reibungsbeiwerte $\bar{\lambda}$ bezogen auf das Ersatzfluid

Damit kann der Druckverlauf längs des Siederohres mittels

$$p(z/l) = p(0) + \Delta p_2(z/l) + \Delta p_3(z/l) + \Delta p_R \quad , \quad (5.25)$$

mit $p(0) = 70 \text{ bar} = 70 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, berechnet werden. Das Ergebnis mit den einzelnen Druckanteilen ist im Bild 13 dargestellt.

Wie aus Bild 13 ersichtlich, ist die Druckabsenkung längs des Siederohres hinsichtlich der Stoffwerte so gering, daß eine 2. Näherung für dieses Rechenverfahren nicht notwendig ist.

Weiter erwies sich, daß der Hauptanteil der Druckminderung durch den Reibungsdruckverlust verursacht wird.

Diese Ergebnisse wurden in der Abt. FWSS mit dem Programm ATHLET überprüft. Es zeigten sich sehr gute Übereinstimmungen für Δp_2 und Δp_3 . Bezüglich Δp_R betragen die Abweichungen etwa 25%, was im Hinblick auf die relativ große Streuung der Ergebnisse der bekannten Reibungsdruckverlustmodelle nicht viel ist. Die berechneten Phasenanteile bzw. -geschwindigkeiten waren aber wieder vergleichbar.

6. Pendelschwingungen in Zweiphasenströmungen

Im Rahmen von [5] wurde ein 2D-Schwingungsmodell (ummanteltes kreiszylindrisches Pendel) theoretisch und experimentell untersucht, wobei im Ringspalt zwischen Pendel und Mantelrohr Wasser bei Umgebungsbedingungen strömte. Zielstellung war unter diesen Bedingungen die Ermittlung der Pendeleigenfrequenz und der Dämpfung in Abhängigkeit vom Strömungsdurchsatz eines Einphasenfluids.

Der beschriebene 2D-Lösungsweg erlaubte aber leider prinzipiell nicht die Berücksichtigung beider nichtlinearer Terme in der Impulsgleichung (2.23), sondern nur die von $c_{i,j}(\rho c_i)$. Das ist dann ohne Belang, wenn die Massenstromdichte ρc_i im Ringspalt konstant ist. Das trifft aber hier nicht zu, denn durch die Pendelbewegungen treten orts- und zeitabhängige Strömungsgeschwindigkeits- bzw. Massenstromschwankungen auf. Das Glied $c_j(\rho c_i)_j$ fungiert daher als Quellterm.

Aus diesen Gründen soll im folgenden eine Gegenüberstellung von einem 1D-Schwingungsmodell, für das eine vollständige analytische Lösung des Problems unter Berücksichtigung der ortsabhängigen mittleren Dichte und Geschwindigkeit des Zweiphasenfluids möglich ist, mit dem 2D-Modell, für das im Ringspalt ein Zweiphasengemisch konstanter Zusammensetzung strömt, erfolgen.

In beiden Fällen werden die Pendelfrequenzen und Dämpfungen in Abhängigkeit vom Strömungsdurchsatz berechnet, miteinander verglichen und Schlußfolgerungen hinsichtlich des Einflusses der Vernachlässigung des o.g. Quellgliedes in (2.23) gezogen. Bild 14 zeigt das Pendelmodell in den 2 Versionen als 1D- und 2D-Variante. Die technischen Daten sind so weit wie möglich gleich und entsprechen der 2D-Anordnung. Die Durchströmung erfolgt von E (Eintritt) nach A (Austritt) mit Wasser, dem längs des Pendels z.B. kontinuierlich Luft zugesetzt wird.

Beim 1D-Modell liegen zwei unabhängige ebene Spalten vor, die nur über den Ein- und den Austrittsbereich miteinander verbunden sind.

Dazu sind folgende Daten gegeben:

Pendellänge	$l = 0,3915 \text{ m}$
Pendelbreite b bzw.-durchmesser	$b = 2 R_i = 0,1 \text{ m}$
Pendelmasse	$m = 8,65 \text{ kg}$
Massenträgheitsmoment des Pedels	$\Theta = 0,4447 \text{ kgm}^2$
Schwerpunktsabstand	$l_s = 0,1945 \text{ m}$
mittlere Spaltweite	$s = 3,1 \text{ mm}$
Dichte des Wassers	$\rho_F = 1000 \text{ kg/m}^3$
Dichte der Luft	$\rho_G = 1,2 \text{ kg/m}^3$
Zähigkeit des Wassers	$\eta_F = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ms}$
Zähigkeit der Luft	$\eta_G = 1,872 \cdot 10^{-5} \text{ kg/ms}$

Die Federkonstante C^* in Nm bleibt zunächst offen. Sie wird erst bei der Diskussion der Ergebnisse berücksichtigt.

6.1 1D-Schwingungsmodell mit ebenen Spalten für Zweiphasenströmungen mit ortsabhängiger Fluidichte und -geschwindigkeit

Zur Aufstellung der Kontinuitätsgleichung wird von Bild 15 ausgegangen. Dazu wird stillschweigend vorausgesetzt, daß für das Zweiphasengemisch die Mittelwerte $\bar{\rho}$ und \bar{u} aus (5.4) und (5.5) hier auch ohne Überstreichen (ρ und u) gelten. $\bar{\rho}$ und \bar{u} bzw. \bar{v} sind dagegen hier "echte" zeitliche bzw. örtliche Mittelwerte, z.B. innerhalb des Kontrollvolumens im Bild 15.

Damit wird für den Fall sehr kleiner Pendelausschläge $\psi \ll 1$, für die $s(l) \approx s(0) = s$ angenommen werden kann, die Massenstrombilanz für das Kontrollvolumen im Spalt von z_0 bis z :

$$\dot{M}_0 + \bar{v} \bar{\rho} (z - z_0) b = \dot{M}(z, t) \quad (6.1)$$

\bar{v} ist in (6.1) die mittlere Pendelgeschwindigkeit im Kontrollbereich

$$\bar{v} = \frac{1}{2} (z_0 + z) \dot{\psi} \quad (6.2)$$

und $\bar{\rho}$ die mittlere Zweiphasen-Gemischdichte im Kontrollvolumen.

z_0 bedeutet den Abstand vom Fluideintritt, bei dem die Fluidgeschwindigkeit u_0 bei stationären Strömungsverhältnissen konst., d.h. von Geschwindigkeitsfluktuationen unbeeinflusst ist. Dasselbe gilt sinngemäß auch für \dot{M}_0 . Bei einer Verdrängung des Fluids durch die Pendelbewegung ist also z_0 der Abstand vom Eintritt, von wo aus sich die Fluktuationen stromauf- und abwärts ausbreiten.

Die Ermittlung von z_0 erfolgt im allgemeinen durch eine Kräftebilanz, für die generell die Impulsgleichung benötigt wird. Kontinuitäts- und Impulsgleichung sind also miteinander verbunden.

Für (6.1) kann auch geschrieben werden

$$u_0 \rho_0 s b + \bar{v} \bar{\rho} (z - z_0) b = u(z, t) \rho(z) s b$$

und daraus

$$u(z, t) = u_0 \frac{\rho_0}{\rho(z)} + \frac{\bar{v}}{s} \frac{\bar{\rho}}{\rho(z)} (z - z_0) \quad (6.3)$$

Für $\rho(z)$ (das ist die mittlere Gemischdichte) wird zur Vereinfachung im Hinblick auf die folgende Beispielrechnung der Ansatz

$$\rho(z) = \rho_E \left(1 - K \frac{z}{l}\right) \quad (6.4)$$

benutzt. Durch eine entsprechende Verteilung der zugeführten Luft ließe sich (6.4) auch realisieren.

Damit wird $\bar{\rho}$ für das Kontrollvolumen

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2} [\rho_0 + \rho(z)]$$

und mit (6.4) auch

$$\rho_0 = \rho_E \left(1 - K \frac{z_0}{l}\right) \quad , \quad (6.5)$$

somit

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2} \rho_E \left[2 - \frac{K}{l} (z + z_0) \right] \quad . \quad (6.6)$$

Die Massenerhaltung erfordert mit \bar{u}_E als mittlere konstante Eintrittsgeschwindigkeit

$$\bar{u}_E \rho_E s = u_0 \rho_0 s$$

und daraus mit (6.5)

$$u_0 = \frac{\bar{u}_E}{1 - K \frac{z_0}{l}} \quad . \quad (6.7)$$

Damit wird (6.3)

$$u(z, t) = \frac{1}{1 - K \frac{z}{l}} \left\{ \bar{u}_E + \frac{\dot{\psi}}{2s} (z^2 - z_0^2) \left[1 - \frac{K}{2l} (z + z_0) \right] \right\} \quad (6.8)$$

als Kontinuitätsgleichung.

In (6.8) bedeuten der 1. Term $\bar{u}_E/(1-Kz/l)$ die hinsichtlich der Zeit konstante mittlere Geschwindigkeit des Gemischs in Abhängigkeit von z und der 2. Term die zugehörigen Geschwindigkeitsfluktuationen, die für $z = z_0 = 0$ sind.

Die Bestimmung von z_0 erfordert bezüglich des instationären Gliedes (Index i) in (2.24):

$$-p_{i0}' = \int_0^l (\rho u)_{,t} dz = 0 \quad . \quad (6.9)$$

Daraus folgt mit (6.4) und (6.8)

$$\int_0^l (z^2 - z_{0i}^2) \left[1 - \frac{K}{2l} (z + z_{0i}) \right] dz = 0 \quad . \quad (6.10)$$

(6.10) liefert für $K = 0$ (Einphasenströmung)

$$z_{0i} = \frac{l}{\sqrt{3}} \approx 0,57735l \quad (6.11)$$

und z.B. für $K = 0,5$ (Zweiphasenströmung, bei der die mittlere Dichte vom Ein- zum Austritt um 50% abnimmt):

$$z_{0i} = 0,5523l \quad . \quad (6.12)$$

Hinsichtlich des nichtlinearen Gliedes in (2.24) wird zur Bestimmung von z_{0n}

$$-p_{n0}' = \int_0^l (\rho u^2)_{,z} dz = 0 \quad , \quad (6.13)$$

bzw. mit (6.4) und (6.8) nach der Linearisierung (Vernachlässigung des quadratischen Gliedes mit ψ^2)

$$\int_0^l \frac{(z^2 - z_{0n}^2) \left[1 - \frac{K}{2l} (z + z_{0n}) \right]}{1 - K \frac{z}{l}} dz = 0 \quad . \quad (6.14)$$

Für $K = 0$ erhält man $z_{0n} = z_{0i}$ nach (6.11) und für $K = 0,5$ wird

$$z_{0n} = 0,6024l \quad . \quad (6.15)$$

z_{0R} für das Reibungsglied folgt aus (4.12)

$$-p_{R,z} = \lambda(z) \frac{1}{2s} \frac{\rho(z)}{2} u(z,t)^2 \quad , \quad (6.16)$$

wobei wieder $-p_R \Big|_0^l$ aus den Schwankungsanteilen Null sein muß.

Das führt schließlich nach der Linearisierung zu

$$\int_0^l \frac{\lambda(z)}{1 - K \frac{z}{l}} (z^2 - z_{0R}^2) \left[1 - \frac{K}{2l} (z + z_{0R}) \right] dz = 0 \quad . \quad (6.17)$$

Für $K = 0$ ist $\lambda \approx \text{konst.}$ und man erhält damit für $z_{0R} = z_{0i} = 0,57735 l$ entsprechend (6.11). Damit können die Druckwirkungen als Momente auf das Pendel berechnet werden, wobei im vorliegenden Beispiel $K = 0,5$ gewählt wurde.

Weiter ergibt sich für das instationäre Glied in (2.24) mit (6.4) und (6.8)

$$p_{i,z} = \frac{1}{2} \frac{\rho_E}{s} \ddot{\psi} (z^2 - z_{0i}^2) \left[1 - \frac{K}{2l} (z + z_{0i}) \right] \quad (6.18)$$

und wegen den sich addierenden Druckwirkungen auf den beiden Pendelseiten, d.h. $\Delta p_i = 2p_i$,

$$\Delta p_i = \frac{\rho_E}{s} \ddot{\psi} \int_z^l (z^2 - z_{0i}^2) \left[1 - \frac{K}{2l} (z + z_{0i}) \right] dz \quad . \quad (6.19)$$

Damit folgt schließlich als Pendelmoment mit der Pendelbreite b

$$M_i = b \int_0^l z \Delta p_i dz \quad , \quad (6.20)$$

$$M_i = \rho_E \frac{b}{s} \ddot{\psi} \left[\frac{l^5}{10} - \frac{l^3 z_{0i}^2}{6} + \frac{K}{2l} \left(\frac{l^3 z_{0i}^3}{6} + \frac{l^4 z_{0i}^2}{8} - \frac{l^5 z_{0i}}{10} - \frac{l^6}{12} \right) \right] \quad . \quad (6.21)$$

Die Rechnung liefert folgende Ergebnisse für die oben gegebenen Daten und

a) $K = 0,5$ mit $z_{0i} = 0,5523l = 0,2162 \text{ m}$ nach (6.12):

$$M_{i1} = \Theta_{F1} \ddot{\psi} = 9,22 \ddot{\psi} \text{ [Nm]} \quad , \quad (6.22)$$

- b) $K = 0$ mit $z_{01} = 0,57735l = 0,2260 \text{ m}$ nach (6.11) und für $\rho(z) = \rho_E = 1000 \text{ kg/m}^3 = \text{konst.}$:

$$M_{i2} = \Theta_{F2} \ddot{\psi} = 13,2 \ddot{\psi} \text{ [Nm]} \quad , \quad (6.23)$$

- c) wie b), aber für die über die Pendellänge l gemittelte Dichte $\rho(z) = \bar{\rho} = 750 \text{ kg/m}^3 = \text{konst.}$:

$$M_{i3} = \Theta_{F3} \ddot{\psi} = 9,9 \ddot{\psi} \text{ [Nm]} \quad . \quad (6.24)$$

Die Koeffizienten in (6.22) bis (6.24) sind, man vergleiche dazu auch [5], die durch das Fluid verursachten zusätzlichen Massenträgheitsmomente Θ_F .

Für das nichtlineare Glied in (2.24) läßt sich analog ableiten:

$$-p_{n,z} = (\rho u^2)_{,z} \quad , \quad (6.25)$$

daraus

$$\Delta p_n = 2(\rho u^2)'_z$$

und mit (6.4) und (6.8) nach entsprechender Linearisierung

$$z \Delta p_n = 2 \frac{\rho_E \bar{u}_E}{s} \ddot{\psi} \left\{ \frac{z(l^2 - z_{0n}^2) \left[1 - \frac{K}{2l} (l + z_{0n})\right]}{1 - K} - \frac{z(z^2 - z_{0n}^2) \left[1 - \frac{K}{2l} (z + z_{0n})\right]}{1 - K \frac{z}{l}} \right\} \quad (6.26)$$

schließlich

$$M_n = b \int_0^l z \Delta p_n dz \quad . \quad (6.27)$$

Die Rechnung liefert für die bekannten Daten mit $K = 0,5$ und $z_{0n} = 0,6024l = 0,2358 \text{ m}$ nach (6.15)

$$M_n = 451 \bar{u}_E \ddot{\psi} \text{ [Nm]} \quad . \quad (6.28)$$

Der Faktor $451 \bar{u}_E$ von $\ddot{\psi}$ in (6.28) ist prinzipiell mit der Dämpfung d_0 der reibungsfreien Strömung in kgm^2/s entsprechend [5] identisch - nur daß hier auch

noch das Quellglied berücksichtigt wurde.

Nach (2.23) im Vergleich mit (2.24) läßt sich (6.25) in den Quellterm

$$-p_{nq,z} = u(\rho u)_{,z} \quad (6.29)$$

und in den "konventionellen" Term

$$-p_{nk,z} = u_{,z}(\rho u) \quad (6.30)$$

aufteilen

Die analoge Rechnung für $K = 0,5$ ergibt

$$M_{nq} = d_{0q} \dot{\psi} = 193 \bar{u}_E \dot{\psi} \quad (6.31)$$

bzw.

$$M_{nk} = d_{0k} \dot{\psi} = 258 \bar{u}_E \dot{\psi} \quad (6.32)$$

und es ist $d_0 = d_{0q} + d_{0k}$.

Entsprechend dieser Vorgehensweise wurden auch d_0 bzw. d_{0q} und d_{0k} für $K = 0$ und zwei Varianten für konstante Fluiddichte längs des Pendels berechnet, einmal für a) $\rho = \rho_E = \rho_F = 1000 \text{ kg/m}^3$ (Einphasenfluid) und für b) $\rho = \bar{\rho} = 750 \text{ kg/m}^3$.

Die Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen; für Fall a, $d_0 = 2 d_{0q} = 2 d_{0k} = 379 \bar{u}_E$ und für den Fall b, $d_0 = 2 d_{0q} = 2 d_{0k} = 284 \bar{u}_E$, jeweils in kgm^2/s .

Die Druckverteilung aus dem Reibungsglied (4.12) führt mit (5.4) und (6.8) zu

$$-p_{R,z} = \lambda(z) \frac{1}{d_n} \frac{\rho}{2} u^2 \quad (6.33)$$

Mit den gegebenen Daten und $K = 0,5$ erhält man für $\bar{u}_E = 0,4 \text{ m/s}$ mit Hilfe der Abschätzung im 3. Abschnitt näherungsweise für den Schlupf

$$S \approx 1 + 0,34 \left(\frac{z}{l} \right) + 0,16 \left(\frac{z}{l} \right)^2 \quad (6.34)$$

so daß sich auf der Grundlage von (2.2) bis (2.9) schließlich die folgenden Verteilungen nach Tab. 3 ergeben:

$\frac{z}{l}$	S	ϵ	$10^4 \dot{\chi}$	$\rho(z/l)$ [kg/m ³]	$u(z/l)$ [m/s]	$\lambda(z/l)$
0	1	0	0	1000	0,4	0,0582
0,2	0,938	0,1	1,25	900	0,444	0,0552
0,4	0,890	0,2	2,67	800	0,5	0,0519
0,6	0,854	0,3	4,39	700	0,571	0,0483
0,8	0,830	0,4	6,64	600	0,600	0,0444
1	0,82	0,5	9,83	500	0,8	0,0402

Tab. 3 Parameter der Wasser-Luft-Zweiphasenströmung im 1D-Pendelmodell

wobei $\lambda = \lambda(z/l)$ mit Hilfe von (4.13) berechnet wurde. Dazu folgte $\lambda_F = \lambda(0) = 0,0582$ nach [5] aus

$$\lambda_F = \frac{0,325}{Re^{0,22}} \quad , \quad (6.35)$$

speziell für den vorliegenden Spalt im turbulenten Strömungsbereich.

Die Abhängigkeit $\lambda(z/l)$ läßt sich durch

$$\lambda\left(\frac{z}{l}\right) \approx 0,0582 - 0,01413 \frac{z}{l} - 3,9 \cdot 10^{-3} \left(\frac{z}{l}\right)^2 \quad (6.36)$$

annähern.

Hier ist noch zu bemerken, daß bei der Anwendung von (4.4) $C = 10$ benutzt wurde, da im vorliegenden Fall zwar die Flüssigkeit turbulent, aber die Luft laminar strömt.

Damit folgt aus (6.33), (6.4) und (6.8) nach der Linearisierung

$$-p_{R,z} = \lambda(z) \frac{1}{2s} \frac{\rho_E}{2(1 - K \frac{z}{l})} \left\{ \bar{u}_E^2 + \frac{\bar{u}_E}{s} \psi (z^2 - z_{0R}^2) \left[1 - \frac{K}{2l} (z - z_{0R}) \right] \right\} \quad , \quad (6.37)$$

wobei sich z_{0R} aus (6.17) ergibt.

Man erhält mit (6.36) und für $K = 0,5$

$$z_{0R} = 0,5755l = 0,2253 \text{ m} .$$

Schließlich folgt aus (6.37)

$$\Delta p_R = \frac{\rho_E u_E}{2s^2} \dot{\psi} \int_0^l \lambda(z) \frac{(z^2 - z_{0R}^2) \left[1 - \frac{K}{2l} (z + z_{0R})\right]}{\left(1 - K \frac{z}{l}\right)} dz \quad (6.38)$$

und

$$M_{R1} = b \int_0^l z \Delta p_R dz \quad (6.39)$$

$$M_{R1} = 91,1 \bar{u}_E \dot{\psi} \quad (6.40)$$

(6.40) lässt sich wieder als $M_{R1} = d_{R1} \cdot \dot{\psi}$ mit d_{R1} als die durch Reibung verursachte Dämpfung schreiben.

Für

$$d_{R1} = 91,1 \bar{u}_E \quad (6.41)$$

folgt auch unter Einbeziehung von λ_F nach (6.35)

$$d_{R1} = 91,1 \left(\frac{0,4}{\bar{u}_E} \right)^{0,22} \bar{u}_E \quad (6.42)$$

womit die Veränderung des Reibungsbeiwertes bei variablen \bar{u}_E im turbulenten Strömungsbereich näherungsweise berücksichtigt wird.

Es bleibt noch die Ermittlung von M_R für $K = 0$ bei $\rho = \rho_E = 1000 \text{ kg/m}^3$ und $\rho = \bar{\rho} = 750 \text{ kg/m}^3$, jeweils konstant über der Pendellänge l .

Hier vereinfacht sich (6.38) stark und aus (6.35) folgt $\lambda = \lambda_F = 0,0582$ bzw. $\lambda = \bar{\lambda} = 0,0502$ für diese beiden Fälle.

Die Rechnung ergibt

$$M_R = \lambda \frac{b}{2s^2} \rho_E \bar{u}_E \dot{\psi} \left(\frac{l^5}{10} - \frac{l^3 z_{0R}^2}{6} \right) \quad (6.43)$$

und damit für $\lambda = \lambda_F$

$$M_{R2} = 123,8 \cdot \bar{u}_E \dot{\psi} \quad (6.44)$$

sowie für $\lambda = \bar{\lambda}$

$$M_{R3} = 80,1 \bar{u}_E \dot{\psi} \quad (6.45)$$

Daraus folgt in Analogie zu (6.42)

$$d_{R2} = 123,8 \left(\frac{0,4}{\bar{u}_E} \right)^{0,22} \bar{u}_E \quad (6.46)$$

und

$$d_{R3} = 80,1 \left(\frac{0,533}{\bar{u}_E} \right)^{0,22} \bar{u}_E \quad (6.47)$$

In (6.47) wurde berücksichtigt, daß dort wegen $\rho = \bar{\rho}$ auch $\bar{u}_E = 0,533 \text{ m/s} > 0,4 \text{ m/s}$ bei gleichem Massendurchsatz vorliegt.

Die Schwingungsgleichung für die Anordnung nach Bild 14 lautet in Anlehnung an [5]

$$(\Theta + \Theta_F) \ddot{\psi} + (d_{0q} + d_{0k} + d_R) \dot{\psi} + (m^* g l_s + C^*) \psi = 0 \quad (6.48)$$

mit der dimensionslosen Gesamtdämpfung

$$D = \frac{d_{0q} + d_{0k} + d_R}{2\sqrt{(\Theta + \Theta_F) (m^* g l_s + C^*)}} \quad (6.49)$$

und der Eigenfrequenz des Pendels

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m^* g l_s + C^*}{\Theta + \Theta_F}} \sqrt{1 - D^2} \quad (6.50)$$

Für den hier behandelten 1. Fall mit $K = 0,5$ sind neben den bekannten Daten zu Bild 14 noch gegeben: $\Theta_{F1} = 9,22 \text{ kg/m}^2$, $d_{0q} = 193 \bar{u}_E$ und $d_{0k} = 258 \bar{u}_E$ nach (6.31) und (6.32), d_{R1} nach (6.42) und wegen der mittleren Dichte $\bar{\rho} = 750 \text{ kg/m}^3$ gegenüber den Ergebnissen in [5] das um den Auftrieb im Zweiphasengemisch verminderte Pendelgewicht $m^* g = 62,1 \text{ N}$.

Damit erhält man für $C^* = 0$ (keine Feder am Pendelende) aus (6.49) mit $\Theta = 0,4447$

kg/m^2 und $l_s = 0,1945 \text{ m}$ bei $\bar{u}_E = 0,4 \text{ m/s}$ $D \approx 10$. Diese hohe Dämpfung läßt keine Schwingungen zu, so daß diese prinzipiell nur mit einer starken Feder möglich sind.

Wählt man $C^* \approx 2 \cdot 10^4 \text{ Nm}$, so liegen die Dämpfungen im Bereich $0,1 < D < 0,4$, wie sie auch in [5] vorlagen, aber dafür bei höheren Frequenzen um 7 Hz, gegenüber $\approx 1 \text{ Hz}$ nach [5].

Im Bild 17 sind die dimensionslosen Dämpfungen D in Abhängigkeit von der Fluid-Eintrittsgeschwindigkeit \bar{u}_E mit und ohne Quellterm dargestellt.

Der allgemeine Fall $\rho = \rho(z)$ entsprechend Tab. 3 wird mit den Ergebnissen für $\rho = \rho_E = 1000 \text{ kg/m}^3 = \text{konst.}$ und $\rho = \rho = 750 \text{ kg/m}^3 = \text{konst.}$ längs des Pendels verglichen.

Die größten Dämpfungen liegen jeweils vor, wenn die realen Zweiphasen-Gemischverteilungen in der Rechnung berücksichtigt werden. Dazu betragen die Abweichungen zwischen "mit" und "ohne" Quellterm im Mittel etwa 56%.

Noch beachtenswert ist, daß die Rechnung mit der mittleren konstanten Gemischdichte die kleinsten Dämpfungen liefert.

Hinsichtlich der Eigenfrequenzen des Pendels (Bild 16) ist die Vernachlässigung des Quellterms nicht schwerwiegend und die Unterschiede der Ergebnisse zwischen $\rho = \rho(z)$ und $\rho = \bar{\rho} = \text{konst.}$ sind nicht gravierend. Wie noch gezeigt wird, resultiert das aus der starken Abhängigkeit zwischen Θ_F und ρ_F .

6.2. 2D-Schwingungsmodell mit Ringspalt für Zweiphasenströmungen mit konstanter mittlerer Fluidichte und -geschwindigkeit

Trotz eingehender Untersuchungen und Recherchen erscheint eine Modifikation des 2D-Schwingungsmodells nach [5] auf Zweiphasenströmungen z.Zt. nur möglich, wenn die (Einquasen-) Fluidichte ρ durch die konstante, über die Pendellänge gemittelte Gemischdichte $\bar{\rho}$ und die (Einquasen-) Fluidgeschwindigkeit u_0 durch die konstante gemittelte Geschwindigkeit \bar{u} des Gemisches ersetzt werden.

Voraussetzung ist also, daß diese beiden Parameter wie bei der Einquasenströmung nicht ortsabhängig, sondern konstant sind.

Dann können prinzipiell alle Beziehungen aus [5] übernommen werden, wobei nur die Bestimmung von $\bar{\lambda}$ aufgrund der besonderen Widerstandsgesetze für Zweiphasenströmungen etwas aufwendiger ist.

Im folgenden werden 2 Fälle untersucht:

- a) Der Ringspalt des Pendels entsprechend [5] wird von einem Wasser-Luft-Gemisch durchströmt, wobei die Ergebnisse in Abhängigkeit von \dot{x} dargestellt werden.
Ausgangspunkt ist die Einquasenströmung mit $u_0 = 0,4 \text{ m/s}$. Durch Zumischen

von Luft wird bei praktisch konstantem Massendurchsatz das Schwingungsverhalten des Pendels bis $\dot{x} = 1 \cdot 10^{-3}$ betrachtet.

- b) Das gleiche Modell wird mit einem Wasser-Dampf-Gemisch durchströmt, wobei die Ausgangsparameter des Fluids denen des Beispiels im Abschnitt 5.2.1 entsprechen. Für $\dot{x} = 0$ beträgt aber wieder $u_0 = 0,4$ m/s. Der Massenstrom soll ebenfalls für alle untersuchten Varianten konstant sein.

Dazu sind noch folgende Pendeldaten gegeben, die über die Angaben im Abschnitt 6.1 hinausgehen:

$$\begin{aligned} \text{mittlerer Ringspaltradius} & R = 0,5155 \text{ m,} \\ \text{Pendelfederkonstante} & C^* = 94 \text{ Nm} \end{aligned}$$

Man vergleiche dazu auch Bild 14.

Die Parameter für den Fall a) sind in der Tabelle 4 aufgelistet

$10^4 \dot{x}$	S	ϵ	$\bar{\rho}$ [kg/m ³]	\bar{u} [m/s]	$\bar{\lambda}$
0	1	0	1000	0,4	0,0582
2	0,895	0,157	848	0,472	0,0535
4	0,853	0,282	721	0,555	0,0491
6	0,833	0,375	625	0,640	0,0454
8	0,822	0,448	555	0,721	0,0425
10	0,818	0,505	523	0,808	0,0400

Tab. 4 Parameter der Wasser-Luft-Zweiphasenströmung im 1D-Pendelmodell

Entsprechend den obigen Feststellungen folgen aus [5] das durch das Zweiphasenfluid verursachte virtuelle Massenträgheitsmoment Θ_F , die Dämpfung d_0 (auch bei reibungsfreier Strömung), die durch die Fluidreibung verursachte Dämpfung d_R und die dimensionslose Gesamtdämpfung nach (6.49), mit $d_0 + d_R$ anstelle $d_{0q} + d_{0k} + d_R$, sowie die Eigenfrequenz des Pendels nach (6.50).

Im Bild 18 sind Θ_F und $\bar{\rho} \sim \Theta_F$ in Abhängigkeit von \dot{x} dargestellt.

Die Abhängigkeiten D und f von \dot{x} zeigt Bild 19. Der relativ geringe Anstieg von D mit \dot{x} resultiert aus der Widerstandsbeziehung. Wie aus Tab. 4 ersichtlich, fällt $\bar{\lambda}$ mit \dot{x} ab, da die Luft im Gemisch laminar, die Flüssigkeit aber schon turbulent strömt. Infolgedessen wurde in (4.4) $C = 10$ gewählt.

Für den Fall b) gelten die Parameter nach Tab. 5

\dot{x}	S	ϵ	$\bar{\rho}$ [kg/m ³]	\bar{u} [m/s]	$\bar{\lambda}$
0	1	0	740,2	0,4	0,0266
0,02	0,938	0,306	525	0,564	0,0606
0,04	0,890	0,487	397	0,745	0,0725
0,06	0,854	0,603	316	0,937	0,0770
0,08	0,830	0,680	262	1,13	0,0789
0,1	0,820	0,733	224	1,32	0,0800

Tab. 5 Parameter der Wasser-Wasserdampf-Zweiphasenströmung im 2D-Pendelmodell

Die wichtigsten Ergebnisse sind im Bild 20 dargestellt. Es ist ein starker Anstieg der dimensionslosen Dämpfung D mit \dot{x} festzustellen. Ursache ist die Zunahme von $\bar{\lambda}$ mit \dot{x} , da hier auch der Dampfanteil im Gemisch - zumindest für die etwas größeren \dot{x} -Werte - turbulent strömt. Der Anstieg der Eigenfrequenz f ist wieder durch den zum Bild 18 analogen Abfall von Θ_F mit $\bar{\rho}$ bzw. \dot{x} zu erklären.

7. Zusammenfassung und Ausblick

Ausgangspunkt dieser Studie sind die Grundgleichungen einer Zweiphasenströmung für Kontinuität, Impuls und Energie, die Berechnung des Reibungsdruckabfalls und Beziehungen für ein Ersatzfluid des Gas-Flüssigkeits-Gemisches mit orts- und zeitabhängiger Dichte und Geschwindigkeit.

Anhand des Modells eines Siedekanals werden die Brauchbarkeitsgrenzen des Ersatzfluids im Vergleich mit exakten Lösungen untersucht.

Ein 1D-Schwingungsmodell (Pendel im Zweiphasenstrom) erlaubt bei der Bestimmung der Eigenfrequenzen und Dämpfungen unter Einbeziehung der Fluid-Struktur-Wechselwirkung die Berücksichtigung aller Terme der Impulsgleichung, so auch eines bisher vernachlässigten Quellgliedes, das die berechneten Dämpfungen beeinflusst.

Mit Einschränkungen ist auch die Anwendung auf das vorhandene theoretische 2D-Schwingungsmodell möglich, wobei aber hier Modifikationen hinsichtlich des Quellterms grundsätzlich nicht möglich sind.

Neben diesen Arbeiten sollten experimentelle Untersuchungen zur Prüfung der vorliegenden theoretischen Ergebnisse durchgeführt werden.

8. Literatur

- [1] D. Butterworth, G. F. Hewitt, Two-Phase Flow and Heat Transfer, Oxford University Press, 1979
- [2] A. E. Bergles et al., Two-Phase Flow and Heat Transfer in the Power and Process Industries, McGraw-Hill, New York, 1981
- [3] F. Mayinger, Strömung und Wärmeübergang in Gas-Flüssigkeits-Gemischen, Springer-Verlag Wien, New York, 1982
- [4] N. I. Kolev, Transiente Zweiphasenströmung, Springer-Verlag, 1986
- [5] E. Altstadt, G. Grunwald, M. Scheffler, F. P. Weiß, Analytische Modellierung mechanischer Schwingungen von Primärkreislaufkomponenten des Druckwasserreaktors WWER-440 mit finiten Elementen, Abschlußbericht zum Vorhaben 1500916, FZR-147, Forschungszentrum Rossendorf, März 1997.
- [6] R. D. Blevins, Flow-Induced Vibration, Van Nostrand Reinhold, New York, 1977
- [7] C. Wieselsberger, Ergebnisse der AVA Göttingen II, 1993
- [8] S. Levy, Steam-Slip-Theoretical Prediction from Momentum Model, Trans. ASME, Ser.C, J. Heat Transfer 82, p. 113, 1960
- [9] J. F. Marchaterre, B. M. Hoglund, Correlation for two-phase flow, Nucleonics 20, p. 142, 1962
- [10] R. C. Martinelli, D. B. Nelson, Prediction of pressure drop during forced-circulation boiling of water, Trans. ASME, p. 695, 1948
- [11] R. W. Lockhart, R. C. Martinelli, Proposed correlation of data for isothermal two-phase, two-component flow in pipes, Chem. Engng. Progr. 45, p. 39, 1949
- [12] H. Blasius, Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten, Forsch.-Arb. Ing.-Wesen, Heft 131, Berlin 1913
- [13] W. Bohl, Technische Strömungslehre, Vogel-Verlag, 1971
- [14] U. Rohde, Ein theoretisches Modell für Zweiphasenströmungen in wasser-gekühlten Kernreaktoren und seine Anwendung zur Analyse des Naturumlaufs im Heizreaktor AST-500, Dissertation, ZfK - 595, Juli 1986
- [15] VDI-Wärmeatlas, VDI-Verlag Düsseldorf, 1994

Anhang

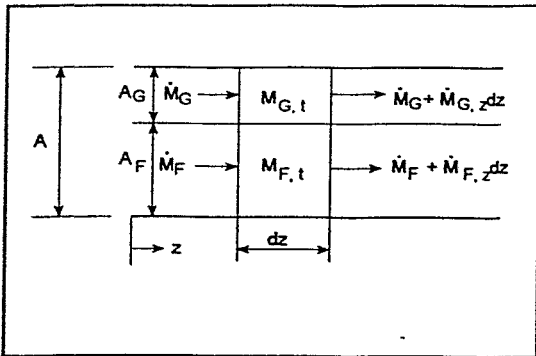


Bild 1 Mengenstrombilanz für eine Zwei-phasenströmung

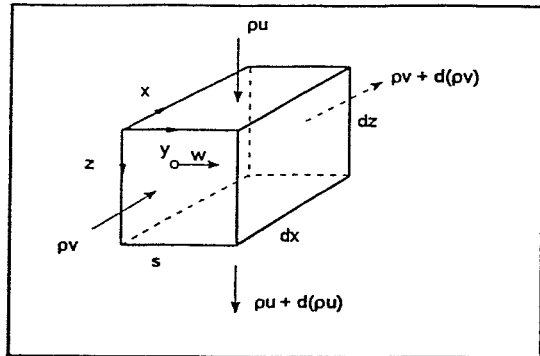


Bild 2 Massenstrombilanz am Volumenelement

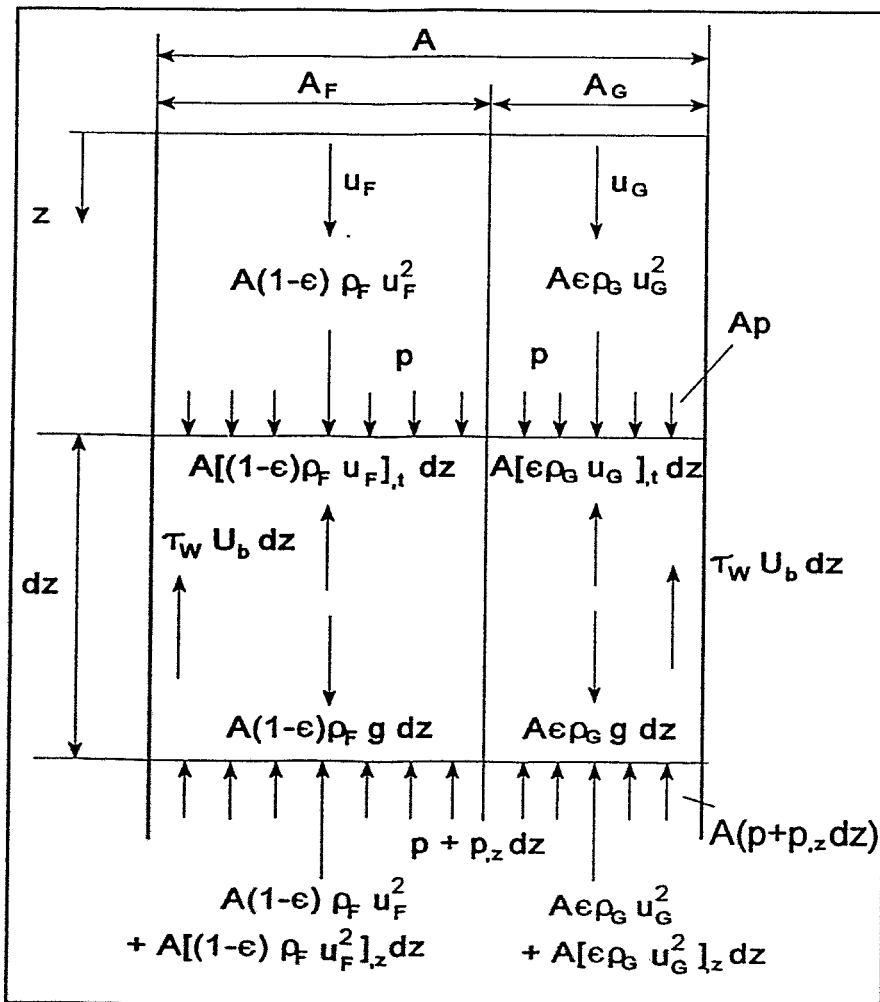


Bild 3 Kräfte am Volumenelement

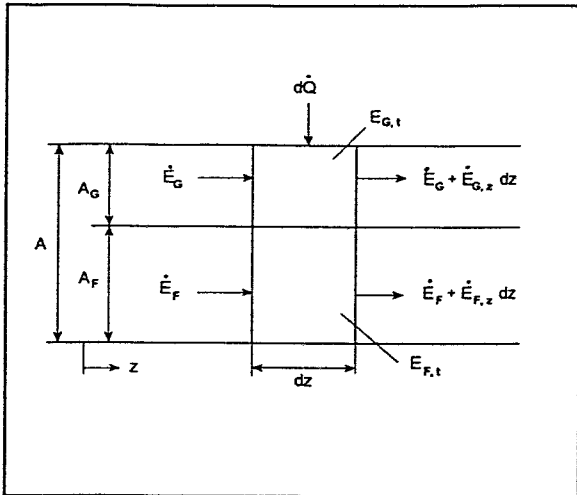


Bild 4 Energiebilanz für ein Gas(Dampf)-Flüssigkeits-Gemisch

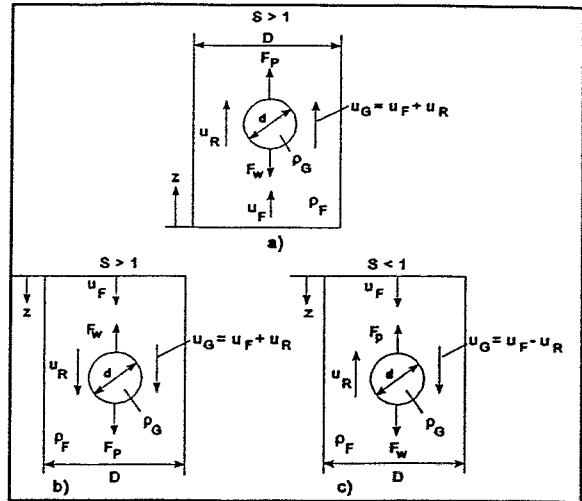


Bild 5 Kräfte an einer Gasblase, Geschwindigkeiten und Schlupf in auf- (a) und abwärts- (b,c) gerichteter Strömung

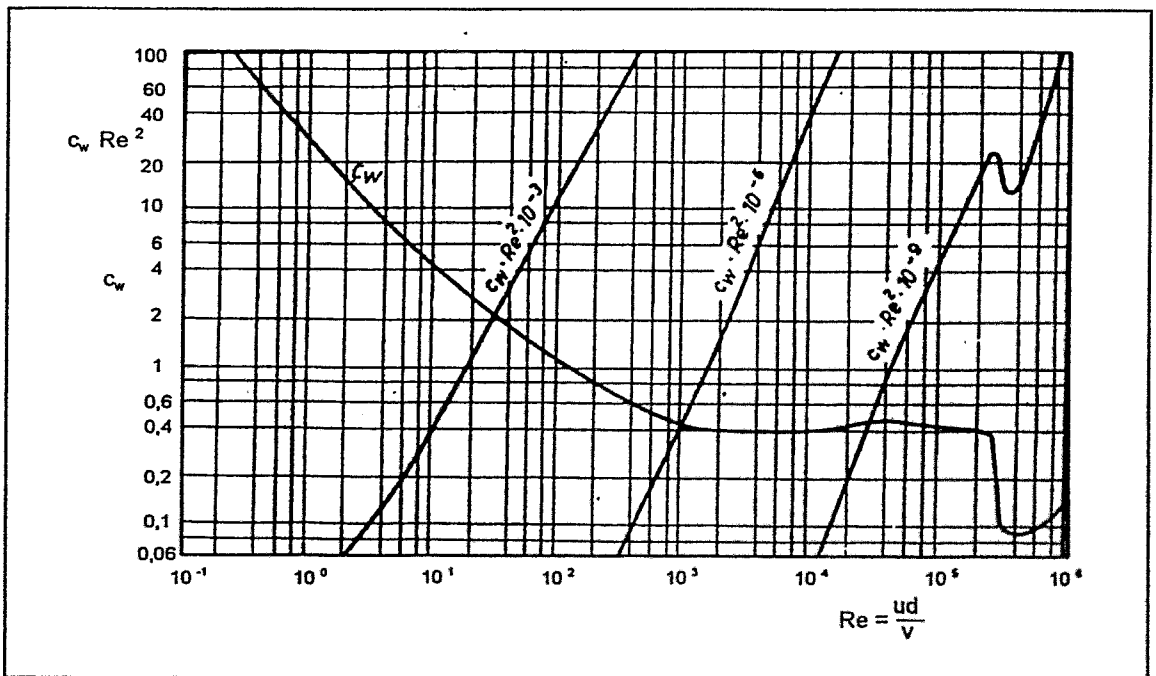


Bild 6 Widerstandsbeiwert c_w und $c_w Re^2$ in Abhängigkeit von Re

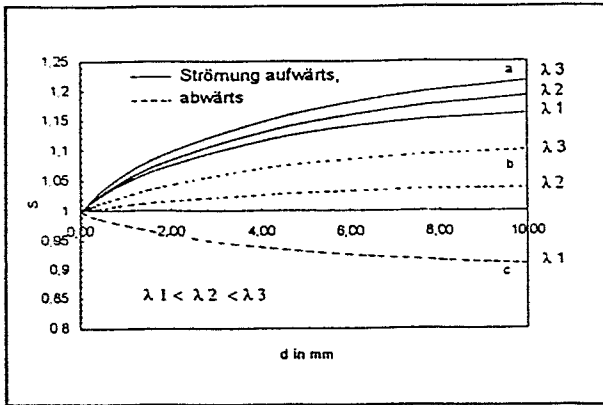


Bild 7 Schlupf S in Abhängigkeit von d und λ für die 3 Varianten im Bild 5

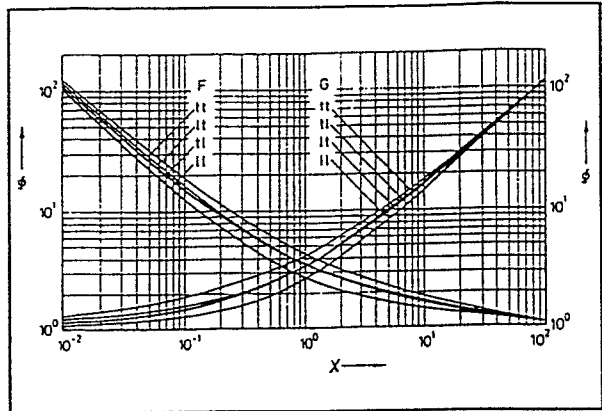


Bild 8 Zweiphasenmultiplikator Φ für den Druckverlust nach Martinelli

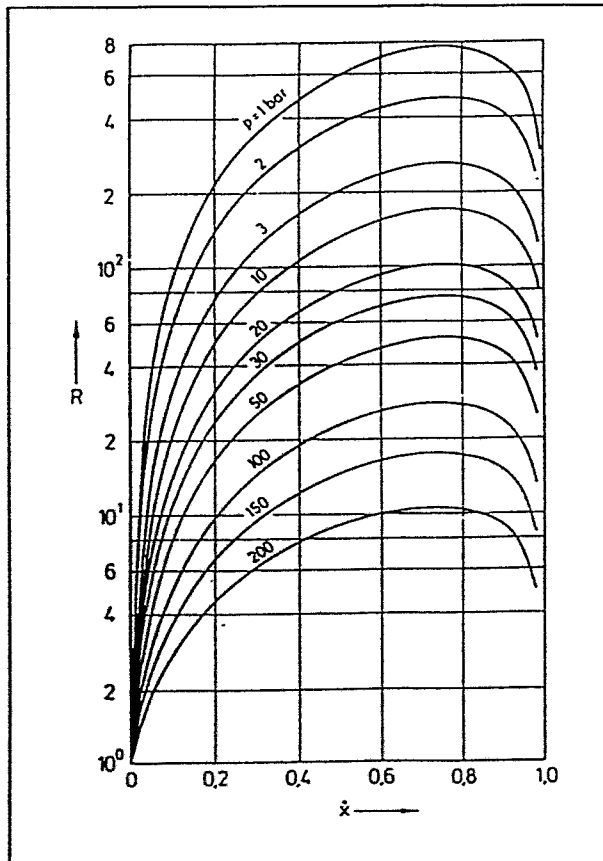


Bild 9 Druckverlust eines Dampf-Wasser-Gemisches als Vielfaches des Druckabfalls der flüssigen Strömung bei gleichem Durchsatz

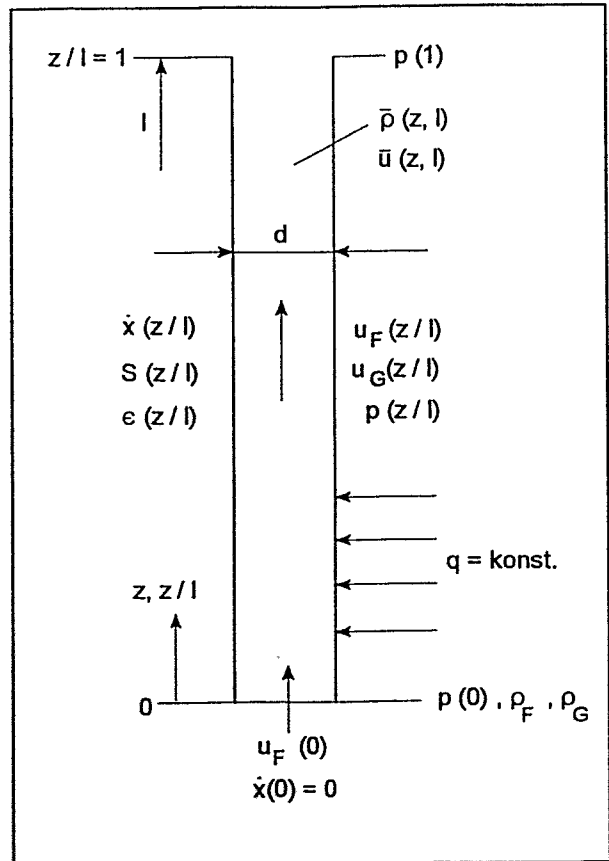


Bild 10 Siederohr

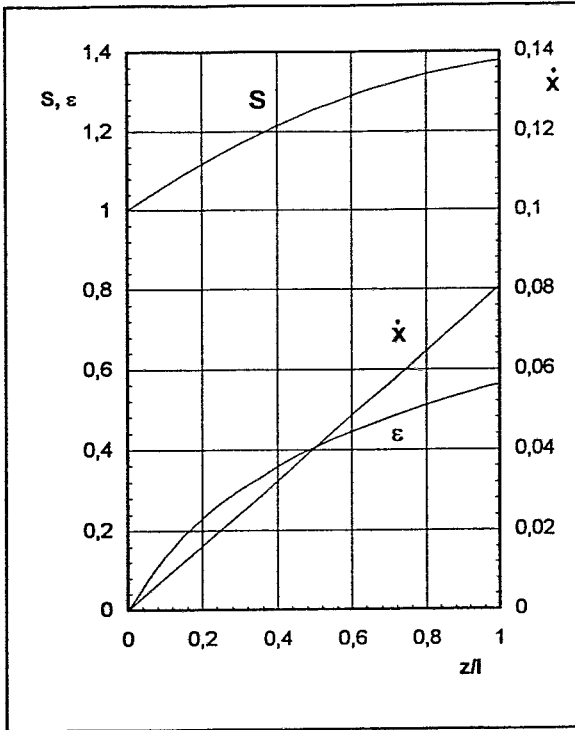


Bild 11 \dot{x} , S und ϵ in Abhängigkeit von z/l

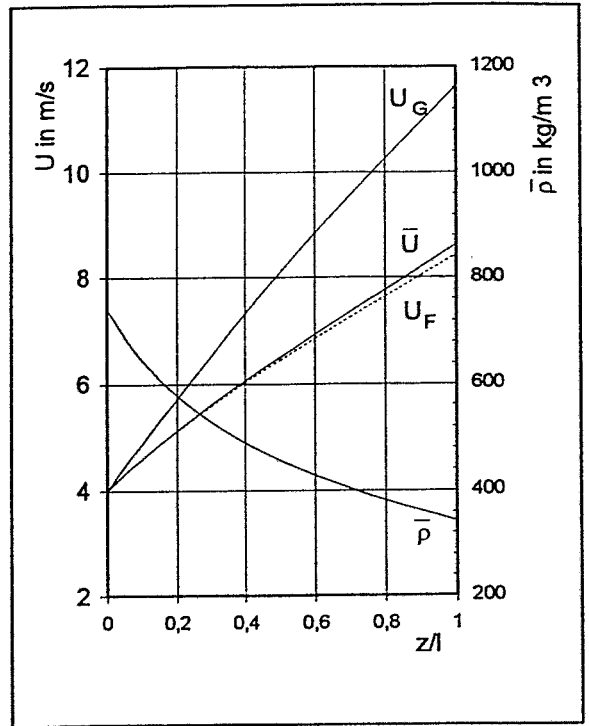


Bild 12 u_F , u_G , \bar{u} und $\bar{\rho}$ in Abhängigkeit von z/l

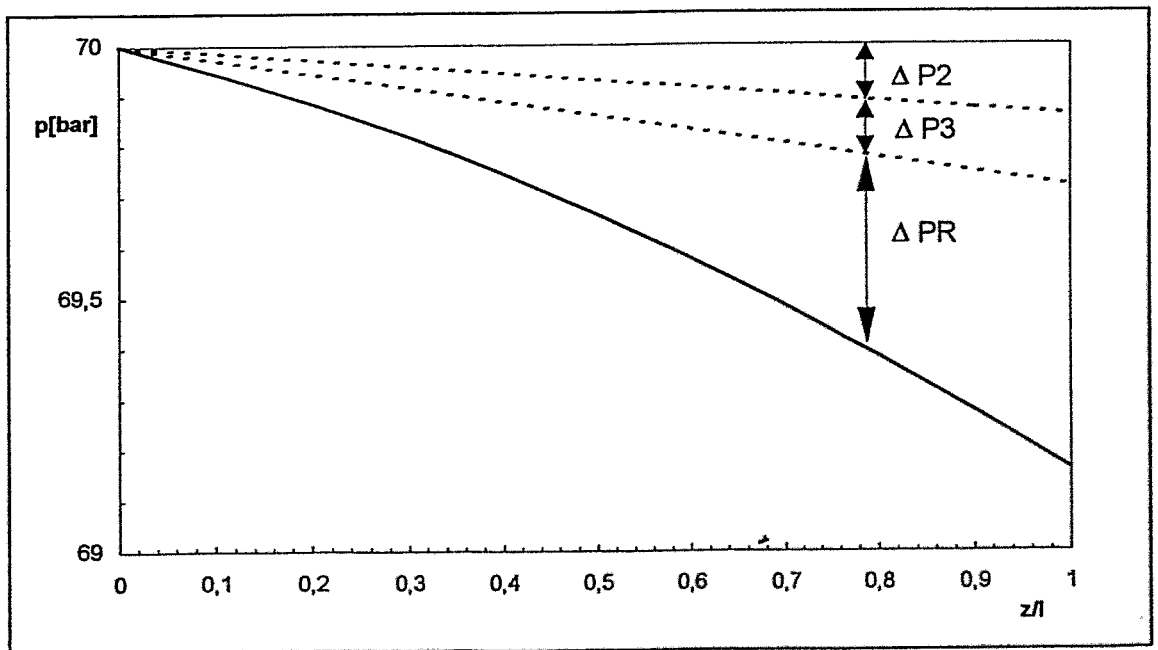


Bild 13 Druckverlauf mit Anteilen im Siederohr

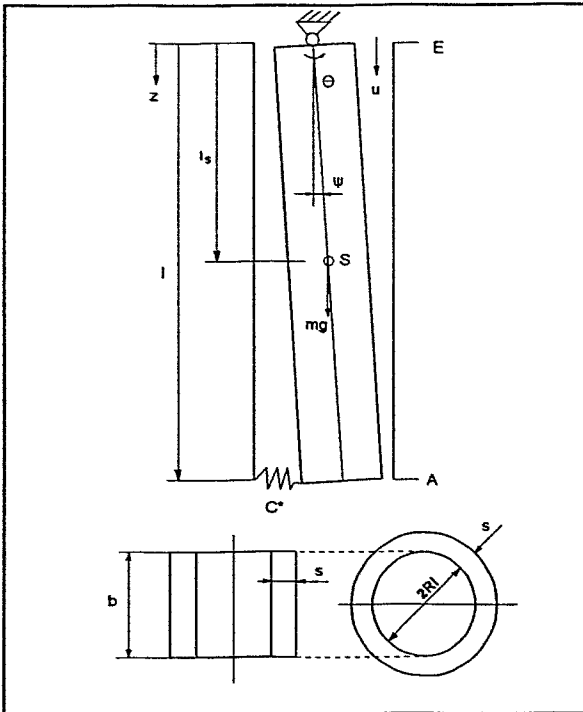


Bild 14 1D - und 2D - Pendelmodell

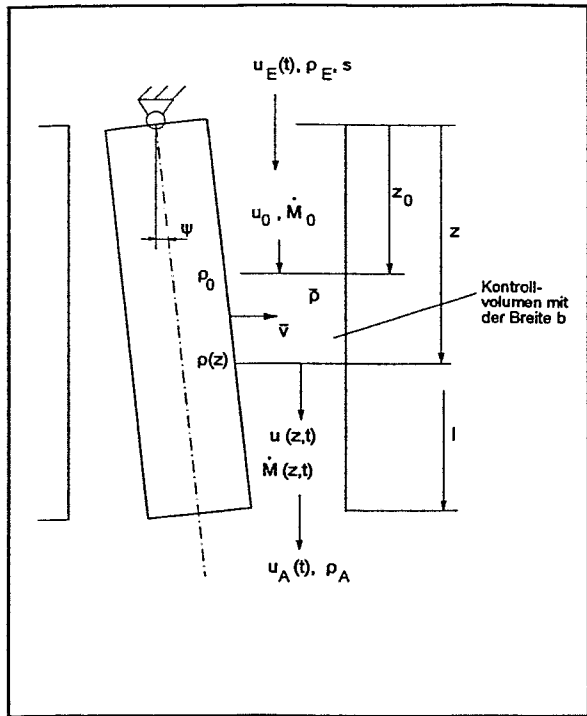


Bild 15 1D - Pendelmodell

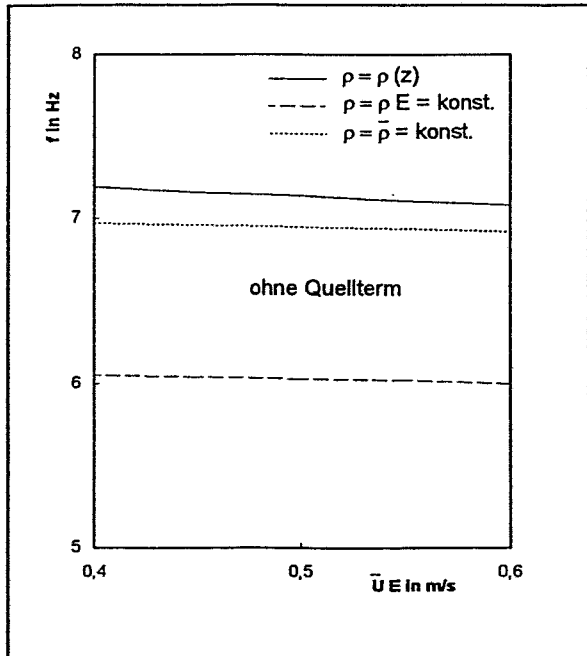
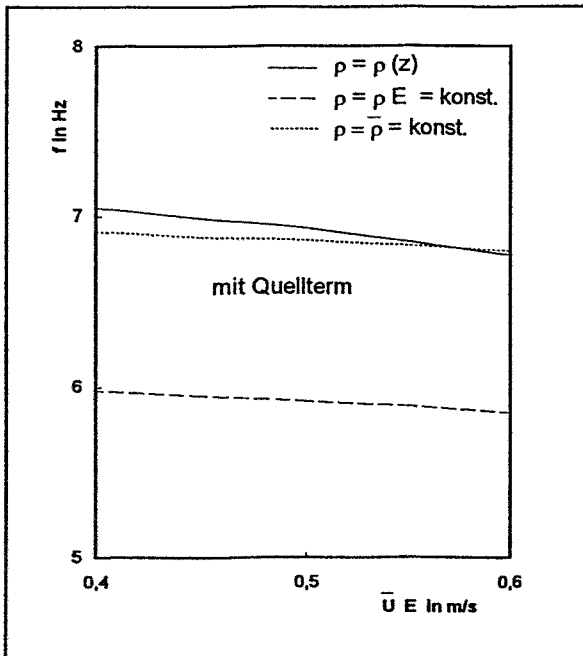


Bild 16 Eigenfrequenzen f in Abhängigkeit von \bar{u}_E für das 1D-Pendelmodell in Wasser-Luft-Zweiphasenströmung bei konstantem Massendurchsatz

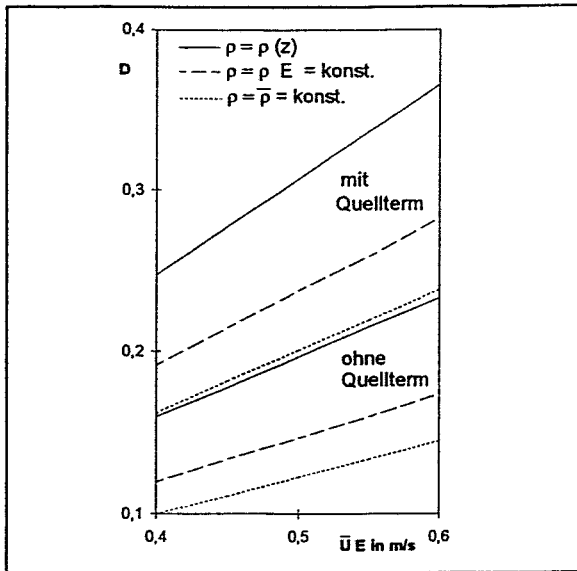


Bild 17 Dimensionslose Dämpfungen D in Abhängigkeit von \bar{u}_E für das 1D-Pendelmodell in Wasser-Luft-Zweiphasenströmung bei konstantem Massendurchsatz

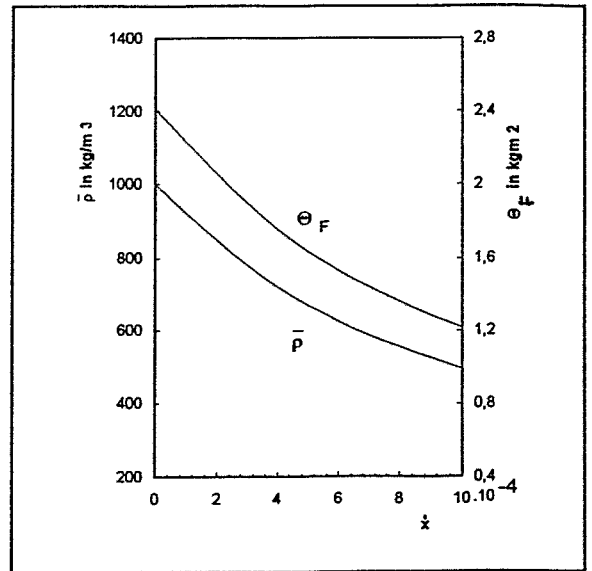


Bild 18 Θ_F und $\bar{\rho}$ in Abhängigkeit von \dot{x} für das 2D-Pendelmodell in Wasser-Luft-Zweiphasenströmung bei konstantem Massendurchsatz

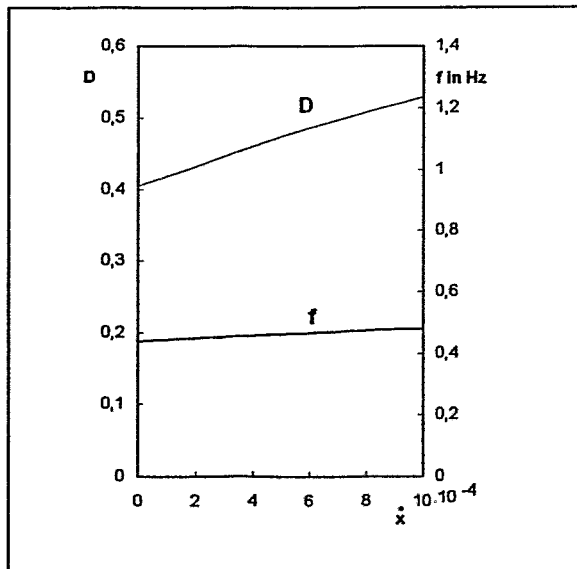


Bild 19 Dimensionslose Dämpfung D und Eigenfrequenz f in Abhängigkeit von \dot{x} für das 2D-Pendelmodell in Wasser-Luft-Zweiphasenströmung bei konstantem Massendurchsatz

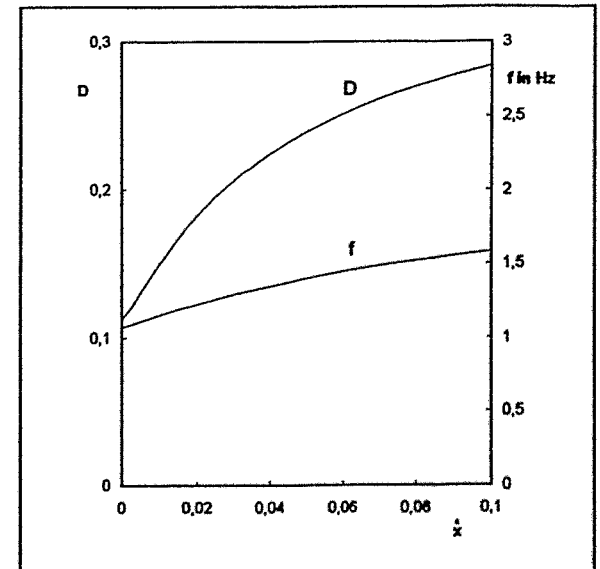


Bild 20 Dimensionslose Dämpfung D und Eigenfrequenz f in Abhängigkeit von \dot{x} für das 2D-Pendelmodell in Wasser-Wasserdampf-Zweiphasenströmung bei konstantem Massendurchsatz